お話：数値解析 第11回
非線型方程式(後編)

長田直樹

1　はじめに

前回は非線型単独方程式に対するニュートン法の話をした。

今回は単純零点に対して3次収束する反復法の族、任意の多重度に対し2次収束する反復法、連立非線型方程式に対するニュートン法、代数方程式のすべての零点を同時に求める反復法の話をする。いずれも何らかの意味でニュートン法の拡張になっている。

2　ハリーとオイラー

E. ハリー (2008年5月号では Halley をハレーと表記したが標準的発音に近いハリーに改める。) と L. オイラーの活躍した時代は異なるが、それぞれ $\sqrt[n]{a^n+b}$ の近似値を考えることにより3次収束する非線型単独方程式の反復解法を得ている。

はじめに記号を導入しておく。関数 $f(x)$ に対し

$$u(x)=\frac{f(x)}{f'(x)},\quad A_j(x)=\frac{f^{(j)}(x)}{j!f'(x)}\ (j=2,3,\ldots)$$

とおく。

2.1　ハリーの2つの解法

ハリー彗星で有名な天文学者で数学者である E. ハリー [5] が1694年に $\sqrt[n]{a^n+b}\ (a,b>0,n=2,\cdots,6)$ の近似値として

$$\frac{n-2}{n-1}a+\sqrt{\frac{a^2}{(n-1)^2}+\frac{2b}{n(n-1)a^{n-2}}} \tag{1}$$

$$a+\frac{ab}{na^n+\frac{1}{2}(n-1)b} \tag{2}$$

を発表した [2]。$\sqrt[n]{a^n+b}$ は

$$f(x)=x^n-a^n-b$$

の零点であり、(1)(2) はそれぞれ

$$a-\frac{f'(a)-\sqrt{(f'(a))^2-2f(a)f''(a)}}{f''(a)} \tag{3}$$

$$a-\frac{f(a)f'(a)}{(f'(a))^2-\frac{1}{2}f(a)f''(a)} \tag{4}$$

と表せる。

非線型単独方程式 $f(x)=0$ に対し、式 (3) を一般化した反復

$$H(x^{(\nu)})=(f'(x^{(\nu)}))^2-2f(x^{(\nu)})f''(x^{(\nu)})$$
$$x^{(\nu+1)}=x^{(\nu)}-\frac{f'(x^{(\nu)})-\sqrt{H(x^{(\nu)})}}{f''(x^{(\nu)})}$$

あるいは $f'(x^{(\nu)})>0$ のとき同値になる

$$x^{(\nu+1)}=x^{(\nu)}-\frac{2u(x^{(\nu)})}{1+\sqrt{1-4A_2(x^{(\nu)})u(x^{(\nu)})}} \tag{5}$$

を**ハリー無理法**という。L. オイラー [4, p.424] は $f(x)=x^n-a^n-b$ に対し

$$0=f(x+\Delta x)=f(x)+f'(x)\Delta x+\frac{1}{2}f''(x)(\Delta x)^2 \tag{6}$$

を Δx について解くことにより (1) を再発見しているので、(5) はオイラー法と呼ばれることが多い。

ニュートン法の補正項は (6) の2次の項を無視した1次方程式を解いて得られるのに対し、ハリー無理法は2次方程式 (6) を解いて得られる。したがって、ハリー無理法はニュートン法の次数を高めたものと考えられる。

式 (4) を一般化した反復

$$x^{(\nu+1)}=x^{(\nu)}-\frac{u(x^{(\nu)})}{1-A_2(x^{(\nu)})u(x^{(\nu)})} \tag{7}$$

は**ハリー法**と呼ばれる。ハリー法は $f'(x)>0$ のと

き $h(x)=f(x)/\sqrt{f'(x)}$ にニュートン法を適用

$$x-\frac{h(x)}{h'(x)}=x-\frac{\dfrac{f(x)}{\sqrt{f'(x)}}}{\sqrt{f'(x)}-\dfrac{f(x)f''(x)}{2f'(x)\sqrt{f'(x)}}}$$

することにより得られる [2]。

ハリー無理法およびハリー法は、初期値 $x^{(0)}$ を単純解 α の十分近くに取ると、$M>0$ が存在して

$$|x^{(\nu+1)}-\alpha| \leqq M|x^{(\nu)}-\alpha|^3 \tag{8}$$

となる。このような収束を**局所的 3 次収束**という。

2.2 オイラー・チェビシェフ法

L. オイラーは 1755 年に、$y=f(x)=x^n-a^n-b$ の逆関数 $\sqrt[n]{y+a^n+b}$ の $y=0$ における級数展開

$$\begin{aligned}&\sqrt[n]{a^n+b}\\&=a+\frac{b}{na^{n-1}}-\frac{(n-1)b^2}{2n^2a^{2n-1}}+\frac{(n-1)(2n-1)b^3}{3!n^3a^{3n-1}}\\&\quad-\frac{(n-1)(2n-1)(3n-1)b^4}{4!n^4a^{4n-1}}+\cdots\end{aligned} \tag{9}$$

を与えた [4, p.429]。(9) の右辺は

$$\begin{aligned}&a-u(a)-A_2(a)u(a)^2-(2A_2(a)^2-A_3(a))u(a)^3\\&-(5A_2(a)^3-5A_2(a)A_3(a)+A_4(a))u(a)^4\end{aligned}$$

と書けるので、反復の系列 [14, p.84]

$$\begin{aligned}E_2(x)&=x-u(x)\\E_3(x)&=E_2(x)-A_2(x)u(x)^2\\E_4(x)&=E_3(x)-(2A_2(x)^2-A_3(x))u(x)^3\\E_5(x)&=E_4(x)-(5A_2(x)^3-5A_2(x)A_3(x)\\&\qquad+A_4(x))u(x)^4\\&\cdots\end{aligned}$$

はオイラーの発見である。したがって歴史的にはオイラー法が適切な名称であるが、P. チェビシェフが 1837-1838 年に書いた論文に E_k が見られる [14] ことから、習慣に従い**オイラー・チェビシェフ法**と呼ぶことにする。

反復

$$x^{(\nu+1)}=E_k(x^{(\nu)}),\quad k=2,3,\ldots$$

は単純零点に対し局所的 k 次収束するので、k 次オイラー・チェビシェフ法という。

3 3 次解法

ハリー無理法、ハリー法および 3 次オイラー・チェビシェフ法以外にも局所的 3 次収束をするいくつかの解法が、ラゲール、オストロフスキー等によって発見されている。

これらの 3 次解法は、2 つの反復法の族にまとめられる。1 つの反復法の族はヘンリチが正則関数に適用できるよう拡張したラゲール法、もう一つの族はヴェルナーが発見したチェビシェフ・ハリー法である。両方とも 1 つの実数のパラメタを含んでいる。

以下では、正則関数 $f(z)$ に対し

$$u_f(z)=\frac{f(z)}{f'(z)},\quad L_f(z)=\frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2}$$

と表す。

3.1 ラゲール法

1880 年 E.N. ラゲール [9] は実数解のみを持つ n 次代数方程式 $f(x)=0$ の解を求める反復法

$$\begin{aligned}H(x^{(\nu)})&=(n-1)^2(f'(x^{(\nu)}))^2\\&\qquad-n(n-1)f(x^{(\nu)})f''(x^{(\nu)})\\x^{(\nu+1)}&=x^{(\nu)}-\frac{nf(x^{(\nu)})}{f'(x^{(\nu)})\pm\sqrt{H(x^{(\nu)})}}\end{aligned} \tag{10}$$

を提案した。任意の実数の初期値に対し収束する (大域的収束性を持つ) 優れたものであった。しかしながら、複素数解に対する理論的解明が進まなかったことなどにより、教育面でも実務面でもあまり取り上げられてこなかった。

1974 年 P. ヘンリチ [6, p.532] はラゲール法を正則関数に拡張した。

定理 1 (ヘンリチ)
$f(z)$ は領域 R で正則、$\zeta\in R$ は $f(z)$ の零点で $f'(\zeta)\neq 0$ とする。任意の実パラメタ $\lambda\neq 0,1$ に対し、

$$\left|\frac{\lambda}{\lambda-1}L_f(z)\right|<1,\quad z\in D$$

となる ζ の近傍 D が存在し、$z\in D$ に対し

$$g(z)=z-\frac{\lambda u_f(z)}{1+(\lambda-1)\sqrt{1-\frac{\lambda}{\lambda-1}L_f(z)}} \tag{11}$$

は ζ に 3 次収束する。

証明 略 $\square$

$f(z)$ が実係数 n 次多項式のとき、(11) において $\lambda = n$ ととると (10) に一致する。複号は $f'(z)$ の符号に合わせる。以下では (11) を**ラゲール法**、$f(z)$ が n 次多項式のときに $\lambda = n$ と取ったものを**古典的ラゲール法**と区別する。

(11) において $\lambda = 2$ ととるとハリー無理法

$$g(z) = z - \frac{2u_f(z)}{1 + \sqrt{1 - 2L_f(z)}}$$

である。(11) を有理化し $\lambda \to 0$ とするとハリー法

$$g(z) = z - \frac{u_f(z)}{1 - \frac{1}{2}L_f(z)}$$

になる。

(11) において $\lambda \to \infty$ とすると

$$g(z) = z - \frac{u_f(z)}{\sqrt{1 - L_f(z)}}$$

が得られる。これは、A.M. オストロフスキーが 1966 年に発表したオストロフスキー法 [11] である。

(11) において $\lambda \to 1$ とするとニュートン法になる。したがって、ラゲール法はニュートン法の拡張になっている。

3.2 チェビシェフ・ハリー法

1981 年 W. ヴェルナー [16] は、実バナッハ空間 (完備ノルム空間) の反復法の族を提案した。$\mathbb{C}$ の反復法に読み替えると

$$g(z) = z - u_f(z)\left[1 + \frac{L_f(z)}{2(1 - \lambda L_f(z))}\right] \tag{12}$$

となる。ここで、λ は実パラメタである。

(12) において $\lambda = 0$ とおくと 3 次オイラー・チェビシェフ法 E_3、$\lambda = 1/2$ とおくとハリー法 (7) が得られる。これより、(12) は**チェビシェフ・ハリー法**と呼ばれている。(12) において $\lambda = 1$ とおいたものは**スーパーハリー法**といわれる。

定理 2 $f(z)$ は領域 R で正則、$\zeta \in R$ は $f(z)$ の零点で $f'(\zeta) \neq 0$ とする。任意の実パラメタ λ に対し、ζ の近傍 D が存在し、$z \in D$ に対し

$$g(z) = z - u_f(z)\left[1 + \frac{L_f(z)}{2(1 - \lambda L_f(z))}\right]$$

は ζ に 3 次収束する。

証明 略 $\square$

(12) において $\lambda \to \infty$ とするとニュートン法になるので、チェビシェフ・ハリー法はニュートン法の拡張になっている。

3.3 数値例

3 次解法を 5 次方程式

$$\begin{aligned} f(z) &= z^5 - 3z^4 + 9z^3 - 37z^2 + 80z - 50 \\ &= (z-1)(z^2 - 4z + 5)(z^2 + 2z + 10) = 0 \end{aligned}$$

に適用してみる。取り上げる解法はラゲール法に属す古典的ラゲール法、ハリー無理法、オストロフスキー法、およびチェビシェフ・ハリー法に属すオイラー・チェビシェフ法 E_3、ハリー法、スーパーハリー法である。初期値は $z^{(0)} = -2 + i$ でコンパイラは gcc version 4.0.1、複素倍精度 (実部、虚部は 10 進 16 桁弱) で計算した。$|f(z^{(\nu)})| < 10^{-13}$ となったら反復を終了する。

$|f(z^{(\nu)})|$ の値と極限値を表 1,2 に示す。$z^{(\nu)}$ が解 ζ に近いときは、平均値の定理により $|f(z^{(\nu)})|$ の値は誤差の絶対値 $|z^{(\nu)} - \zeta|$ の $|f'(\zeta)|$ 倍程度である。$\zeta = 1$ の場合は 26 倍、$\zeta = -1 + 3i$ の場合は 390 倍である。

表 1: $f(z) = z^5 - 3z^4 + 9z^3 - 37z^2 + 80z - 50$

	古典ラゲール	ハリー無理	オストロフスキー
ν	$\lvert f(z^{(\nu)})\rvert$		
1	7.25×10^{1}	1.90×10^{2}	3.41×10^{3}
2	6.17×10^{-2}	1.05×10^{2}	1.86×10^{2}
3	1.84×10^{-11}	2.88×10^{0}	1.62×10^{1}
4	0	4.62×10^{-5}	2.98×10^{-1}
5		1.52×10^{-14}	2.72×10^{-6}
6			1.47×10^{-14}
∞	$-1 + 3i$	$-1 + 3i$	$2 + i$

表 2: $f(z) = z^5 - 3z^4 + 9z^3 - 37z^2 + 80z - 50$

	E_3	ハリー	スーパーハリー
ν	$\lvert f(z^{(\nu)})\rvert$		
1	1.20×10^{2}	7.47×10^{1}	1.30×10^{6}
2	1.59×10^{1}	9.06×10^{0}	1.34×10^{4}
3	1.65×10^{0}	2.45×10^{-1}	1.98×10^{2}
4	5.22×10^{-3}	4.60×10^{-6}	4.96×10^{1}
5	1.45×10^{-10}	2.27×10^{-20}	2.93×10^{-1}
6	1.05×10^{-26}		4.80×10^{-8}
7			0
∞	1	1	$-1 + 3i$

本例では古典的ラゲール法が最良で、ハリー無理法とハリー法がそれに続く。

4　多重解に対する 2 次法

ラゲール法やチェビシェフ・ハリー法は単解に対しては 3 次収束であるが、多重解に対しては線型収束である。単解に対しても重解に対しても 2 次収束する解法を紹介する。

$f(z) = (z-\zeta)^m h(z), (h(\zeta) \neq 0)$ に対し、ζ は

$$u_f(z) = \frac{f(z)}{f'(z)} = \frac{z-\zeta}{m + (z-\zeta)\frac{h'(z)}{h(z)}}$$

の単純な零点であるので、初期値を ζ の近くに取り $u_f(z)$ にニュートン法を適用すると ζ に 2 次収束する。$u_f'(z) = 1 - f(z)f''(z)/(f'(z))^2$ より、

$$z^{(\nu+1)} = z^{(\nu)} - \frac{u_f(z^{(\nu)})}{1 - L_f(z^{(\nu)})} \tag{13}$$

が導かれる [14, p.29]。(13) の呼び方は確定していない。ここでは、**多重解に対する 2 次法**と呼ぶ。

$f(z) = (z-1)(z-2)^2$ に初期値 $z^{(0)} = 3$ として多重解に対する 2 次法を適用すると表 3 のようになる。

表 3: 多重解に対する 2 次法

$f(z) = z^3 - 5z^2 + 8z - 4 = (z-1)(z-2)^2$

ν	$z^{(\nu)}$	$\lvert f(z^{(\nu)})\rvert$
0	3.000000000000000	2.0×10^{0}
1	1.888888888888888	1.1×10^{-2}
2	1.992248062015498	6.0×10^{-5}
3	1.999969483353045	9.3×10^{-10}
4	1.999999999533500	0.0

5　連立方程式のニュートン法

非線型連立方程式

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

はベクトル記法を用いて

$$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T$$

と表せる。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ のヤコビ行列を

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ & \cdots & \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

によって定義する。

ヤコビ行列が存在して非特異 (逆行列を持つ) のとき、$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ に対するニュートン法は、

$$\boldsymbol{x}^{(\nu+1)} = \boldsymbol{x}^{(\nu)} - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^{(\nu)})^{-1}\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$$

である。プログラミングに当たっては、ヤコビ行列の逆行列を計算するのではなく、

$$\boldsymbol{x}^{(\nu+1)} = \boldsymbol{x}^{(\nu)} + \boldsymbol{\Delta x}^{(\nu)} \tag{14}$$

とおき、$\boldsymbol{\Delta x}^{(\nu)}$ を未知ベクトルとする連立 1 次方程式

$$\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}^{(\nu)})\boldsymbol{\Delta x}^{(\nu)} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(\nu)})$$

を LU 分解などによって解き、$\boldsymbol{\Delta x}^{(\nu)}$ を (14) に代入する。$||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})||$ を計算する際の丸め誤差の上界の一つを δ とするとき、$||\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}^{(\nu)})|| < \delta$ となったときに反復を終了する。ここで、$||\cdot||$ は $\mathbb{R}^n$ の適当なノルム (例えば最大値ノルム) である。

定理 3　$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$ の解 $\boldsymbol{\alpha}$ を含む領域 D で $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ が非特異で、$\mathbb{R}^n$ の適当なノルム $||\cdot||$ に対し $L > 0$ が存在し

$$||\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{J}(\boldsymbol{y})|| \leqq L||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D) \tag{15}$$

を満たすと仮定する。このとき、初期値 $\boldsymbol{x}^{(0)} \in D$ を $\boldsymbol{\alpha}$ の十分近くに取れば、$M >$ が存在して

$$||\boldsymbol{x}^{(\nu+1)} - \boldsymbol{\alpha}|| \leqq M||\boldsymbol{x}^{(\nu)} - \boldsymbol{\alpha}||^2$$

証明 [13, pp.70-71][17, pp.84-88] を見よ。 □

写像 $\boldsymbol{F} : D \to D$ が

$$||\boldsymbol{F}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{F}(\boldsymbol{y})|| \leqq L||\boldsymbol{x} - \boldsymbol{y}||, \quad (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in D)$$

を満たすとき$\boldsymbol{F}$は D で**リプシッツ連続**であるという。$\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ が C^2 級 (2 階までのすべての偏導関数が存在し連続) のとき $\boldsymbol{J}(\boldsymbol{x})$ はリプシッツ連続になる。

6　代数方程式の同時反復解法

$f(z)$ が多項式である方程式 $f(z) = 0$ を**代数方程式**という。$f(z)$ が n 次多項式のとき n 個の零点をすべて求めることを考える。ニュートン法やラゲール法により 1 つの解 ζ_1 を求め、$f(z)$ を $z - \zeta_1$ で割って、商に対し再びニュートン法やラゲール法を適用することにより、すべての解を求めることはできる。

しかしながら、丸め誤差の影響が大きいので解全体を同時に求める方がよい。

多項式

$$f(z)=\sum_{j=0}^{n}c_jz^{n-j}=c_0(z-\zeta_1)\cdots(z-\zeta_n)$$

に対し、$\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ を同時に求める方法を**同時反復解法**という。多くの同時反復解法が提案されているが、基本となるのはワイヤストラス法である。

6.1 ワイヤストラス法

$\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ の近似値を $z_1^{(\nu)},\ldots,z_n^{(\nu)}$ とする。1891年 K. ワイヤストラスは反復

$$z_j^{(\nu+1)}=z_j^{(\nu)}-\frac{f(z_j^{(\nu)})}{c_0\prod_{k\neq j}(z_j^{(\nu)}-z_k^{(\nu)})} \tag{16}$$

を導入した [15, p.258]。ここで、$\prod_{k\neq j}$ は、$k=1,\cdots,j-1,j+1,\cdots,n$ に関する積である。

$f'(\zeta_j)=c_0\prod_{k\neq j}(\zeta_j-\zeta_k)$ より、(16) はニュートン法

$$z_j^{(\nu+1)}=z_j^{(\nu)}-\frac{f(z_j^{(\nu)})}{f'(z_j^{(\nu)})}$$

の $f'(z_j^{(\nu)})$ を $c_0\prod_{k\neq j}(z_j^{(\nu)}-z_k^{(\nu)})$ で近似したものになっている。

同時反復解法 (16) は 1960 年に E. ドゥラン、1962 年に K. ドチェフ、等により独立に再発見された。そのため、ドゥラン・ケルナー法 (DK 法)、ワイヤストラス・ドチェフ法など様々な呼び方がなされている。歴史的には**ワイヤストラス法**が適切である。

定理 4 (ドゥラン [3, pp.279-280] ケルナー [8])
解と係数の関係

$$\begin{cases} f_1(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=\zeta_1+\ldots+\zeta_n+\dfrac{c_1}{c_0}=0\\ f_2(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=\displaystyle\sum_{1\leqq j<k\leqq n}\zeta_j\zeta_k-\frac{c_2}{c_0}=0\\ \cdots\\ f_n(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)=\zeta_1\ldots\zeta_n-(-1)^n\dfrac{c_n}{c_0}=0\end{cases}$$

を $\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ に関する連立非線型方程式とみなし、連立非線型方程式に対するニュートン法

$$\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_1}&\cdots&\frac{\partial f_1}{\partial\zeta_n}\\ &\cdots&\\ \frac{\partial f_n}{\partial\zeta_1}&\cdots&\frac{\partial f_n}{\partial\zeta_n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta z_1^{(\nu)}\\ \cdots\\ \Delta z_n^{(\nu)}\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}f_1(\boldsymbol{z}^{(\nu)})\\ \cdots\\ f_n(\boldsymbol{z}^{(\nu)})\end{pmatrix}$$

$$z_j^{(\nu+1)}=z_j^{(\nu)}+\Delta z_j^{(\nu)},\quad j=1,\ldots,n$$

を適用するとワイヤストラス法が得られる。

証明 [7, pp.142-143][17, p.242] にある。 □

以下 $\mathbb{C}^n$ のノルムは最大値ノルム

$$||(z_1,\cdots,z_n)||=\max_{1\leqq j\leqq n}|z_j|$$

を用いる。

すべての零点が単純のとき、定理 3(を複素変数に拡張した定理) と定理 4 よりワイヤストラス法は局所 2 次収束する。すなわち、反復列の組 $(z_1^{(\nu)},\ldots,z_n^{(\nu)})$ が解の組 $(\zeta_1,\ldots,\zeta_n)$ に近づくと

$$\max_{1\leqq j\leqq n}|z_j^{(\nu+1)}-\zeta_j|\leqq M\left(\max_{1\leqq j\leqq n}|z_j^{(\nu)}-\zeta_j|\right)^2$$

が成立する。

$f(z)$ を計算する際に見積もられる丸め誤差の上界の一つを δ としたとき、

$$\max_{1\leqq j\leqq n}|f(z_j^{(\nu)})|<\delta$$

が成立するか、ν が所定の回数に達したときワイヤストラス法の反復を終了する。

6.2 アバースの初期値

ワイヤストラス法の初期値は、$\zeta_1,\ldots,\zeta_n$ のおおよその近似値が分かっているときはそれらの近似値を初期値とするのがよい。個々の解の近似値が分からないときは、解の重心 $-c_1/(nc_0)$ を中心とし全ての解を含むような半径 R の円周上に等間隔に取る [1]。

$$z_j^{(0)}=-\frac{c_1}{nc_0}+Re^{i(2\pi(j-1)/n+\pi/2n)},\quad j=1,\ldots,n \tag{17}$$

偏角に $\pi/(2n)$ を加えるのは初期値が実軸に対称に分布する (共役複素数になる) ことを防ぐためである。

定理 5 (山本 [17, p.79,p.243])
初期値を (17) にとるとき R が十分大きければ、次の漸近公式が成り立つ。

$$z_j^{(1)}+\frac{c_1}{nc_0}=\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(z_j^{(0)}+\frac{c_1}{nc_0}\right)+O\left(\left(z_j^{(0)}+\frac{c_1}{nc_0}\right)^{-1}\right)$$

証明 初期値が円周上に等間隔に取られているので

$$\prod_{k\neq j}(z_j^{(0)}-z_k^{(0)}) = n\left(z_j^{(0)}+\frac{c_1}{nc_0}\right)^{n-1} \tag{18}$$

が成り立つ。(16) に

$$f(z_j^{(0)}) = c_0\left(z_j^{(0)}+\frac{c_1}{nc_0}\right)^n + O\left(\left(z_j^{(0)}+\frac{c_1}{nc_0}\right)^{n-2}\right)$$

と (18) を代入すると得られる。 □

定理 5 より、解に近づくまでは解の重心 $(\zeta_1+\ldots+\zeta_n)/n=-c_1/(nc_0)$ に縮小率 $1-1/n$ で近づく。

R を求める方法としては種々の方法が提案されている。標準的なアバースの方法 [1] は

$$f^*(w) = f\left(w-\frac{c_1}{nc_0}\right) = a_0w^n + a_2w^{n-2}+\cdots+a_n \tag{19}$$

とおき、$n \geqq 2$ かつ $f^*(w)\neq a_0w^n$ のときは

$$f^{**}(w) = |a_0|w^n - |a_2|w^{n-2}-\cdots-|a_n| = 0 \tag{20}$$

の唯一の正の解を r としたとき、$R \geqq r$ に取る。詳細は [7, pp.152-153][17] などを見よ。

前回述べたように (19) の係数は組み立て除法により求めることができる。また、$f(z)$ の高階導関数の $-c_1/(nc_0)$ の値でも表示できる。

$$a_k = \frac{f^{(n-k)}(-c_1/(nc_0))}{(n-k)!}, \quad k=0,\ldots,n$$

6.3 数値例

3.3 節で取り上げた 5 次方程式 $f(z)=z^5-3z^4+9z^3-37z^2+80z-50$ にワイヤストラス法を適用する。

アバースの方法の (20) は

$$f^{**}(w) = w^5-5.4w^3-25.12w^2-43.376w-13.68704$$

となる。$f^{**}(w)=0$ の唯一の正の解をニュートン法で求めると $r=3.87418$ となるので、$R=3.875$ にとれる。($f^{**}(3)<0<f^{**}(4)$ より $R=4$ と取ってもよい。)

表 4 に $z_j^{(\nu)}(j=1,\ldots,5,\nu=0,1,2,8,9,10)$ と残差ノルム $\max_{1\leqq j\leqq 5}|f(z_j^{(\nu)})|$ を示す。下付きの数字は同じ数字の繰り返し回数を表す。たとえば、0.9_35 は 0.9995 を表す。

表 4: ワイヤストラス法

$f(z)=z^5-3z^4+9z^3-37z^2+80z-50$

ν	$z_1^{(\nu)}$	$z_2^{(\nu)}$	$z_3^{(\nu)}$
0	$4.3+1.2i$	$0.6+3.9i$	$-3.1+1.2i$
1	$3.5+0.96i$	$0.28+3.2i$	$-1.7+1.4i$
2	$2.9+0.8i$	$-0.2+2.5i$	$-0.6+1.6i$
8	$1.9_33+1.0_36i$	$-1.0_63+2.9_66i$	$1.0_37-0.0_35i$
9	$1.9_67+0.9_65i$	$-0.9_{10}6+2.9_{10}8i$	$1.0_63+0.0_65i$
10	$2.0_{13}9+1.0_{12}2i$	$-1.0_{15}+3.0_{15}i$	$0.9_{13}1-0.0_{12}2i$

ν	$z_4^{(\nu)}$	$z_5^{(\nu)}$	$\max_{1\leqq j\leqq 5}\lvert f(z_j^{(\nu)})\rvert$
0	$-1.7-3.1i$	$2.9-3.1i$	1.6×10^{3}
1	$-1.3-3.1i$	$2.3-2.5i$	4.0×10^{2}
2	$-1.1-3.02i$	$1.97-1.9i$	1.6×10^{2}
8	$-0.9_98-3.0_{10}6i$	$2.0_51-1.0_43i$	4.6×10^{-2}
9	$-1.0_{14}6-3.0_{13}1i$	$2.0_88-0.9_79i$	2.9×10^{-5}
10	$-1.0_{15}-3.0_{15}i$	$2.0_{14}1-1.0_{14}4i$	1.1×10^{-11}

図 1 に反復列の軌跡 $z_j^{(\nu)}(j=1,\ldots,5;\nu=0,\ldots,7)$ を図示する。5 つの解は × で表している。

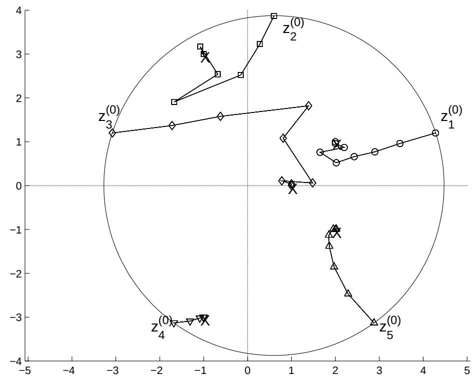

図 1: ワイヤストラス法

6.4 3 次法

ワイヤストラスの補正

$$W_j(z) = \frac{f(z)}{c_0\prod_{k\neq j}(z-z_k)}$$

にニュートン法を適用する。簡単な計算で

$$\frac{W_j(z_j)}{W_j'(z_j)} = \frac{\dfrac{f(z_j)}{f'(z_j)}}{1-\dfrac{f(z_j)}{f'(z_j)}\displaystyle\sum_{k\neq j}\frac{1}{z_j-z_k}}$$

が導けるので

$$
z_j^{(\nu+1)} = z_j^{(\nu)} - \frac{\dfrac{f(z_j^{(\nu)})}{f'(z_j^{(\nu)})}}{1 - \dfrac{f(z_j^{(\nu)})}{f'(z_j^{(\nu)})} \displaystyle\sum_{k \neq j} \frac{1}{z_j^{(\nu)} - z_k^{(\nu)}}} \tag{21}
$$

が得られる [12]。

(21) は 1963 年に W. ベルシュ-ズーパン、1967 年に L. エーリッヒ、1972 年ガルガンティニ・ヘンリチ、1973 年 O. アバースらにより独立に発見ないし再発見がされている。エーリッヒ・アバース法と呼ばれることもあるが、ここでは **3 次法**と呼ぶ。3 次法の収束については [7] が詳しい。

表 4 と同じ $f(z) = z^5 - 3z^4 + 9z^3 - 37z^2 + 80z - 50$ に、アバースの初期値を用いた 3 次法を適用した結果を表 5 に示す。

表 5: 3 次法

$f(z) = z^5 - 3z^4 + 9z^3 - 37z^2 + 80z - 50$

ν	$z_1^{(\nu)}$	$z_2^{(\nu)}$	$z_3^{(\nu)}$
0	$4.3 + 1.2i$	$0.6 + 3.9i$	$-3.1 + 1.2i$
1	$3.0 + 0.8i$	$-0.0 + 2.5i$	$-0.97 + 1.5i$
2	$2.2 + 0.7i$	$-0.7 + 4.5i$	$-1.04 - 6.1i$
3	$1.95 + 0.93i$	$-0.8 + 3.2i$	$0.4 - 0.06i$
4	$2.0_2 2 + 1.0_2 1i$	$-1.0_2 5 + 2.9_2 8i$	$1.02 + 0.004i$
5	$1.9_7 3 + 1.0_7 1i$	$-0.9_7 5 + 2.9_8 3i$	$0.9_6 4 + 0.0_6 4i$
6	$2.0_{15} + 1.0_{15} i$	$-1.0_{15} + 3.0_{15} i$	$1.0_{15} 4 - 0.0_{15} i$

ν	$z_4^{(\nu)}$	$z_5^{(\nu)}$	$\max\limits_{1 \leqq j \leqq 5} \lvert f(z_j^{(\nu)}) \rvert$
0	$-1.7 - 3.1i$	$2.9 - 3.1i$	1.6×10^3
1	$-1.1 - 2.97i$	$2.08 - 1.93i$	2.0×10^2
2	$-1.0_3 1 - 2.9_2 9i$	$1.90 - 1.2i$	8.6×10^3
3	$-0.9_6 7 - 3.0_6 8i$	$1.97 - 1.0_2 4i$	1.2×10^2
4	$-1.0_{13} 2 - 2.9_{13} 7i$	$1.9_4 7 - 0.9_3 8i$	2.0×10^0
5	$-1.0_{15} - 3.0_{15} i$	$1.9_9 8 - 0.9_9 6i$	2.0×10^{-5}
6	$-1.0_{15} - 3.0_{15} i$	$2.0_{15} - 1.0_{15} i$	7.9×10^{-15}

ワイヤストラス法では 10 回の反復で残差 1.2×10^{-11} であるのに対し、3 次法では 6 回の反復で残差 7.9×10^{-15} となる。

7 非線型方程式のまとめ

非線型方程式を解く際、アルゴリズムを選択するポイントを挙げておく。

単独方程式の単解 実数解であれ複素数解であれ、おおよその近似値が分かっているときは、その近似値を初期値とするニュートン法、あるいはラゲール法などの 3 次法を適用する。解の近似値の見当がつかないときは、適当に初期値を変えてニュートン法などを適用してみる。

単独方程式の多重解 多重度と近似値が分かっているときは、近似値を初期値とするシュレーダー法を適用する。多重度が分からないときは、多重解に対する 2 次法を適用する。

m 重解の場合、有効数字の桁数は通常 $1/m$ になる。したがって、多重解の高精度の値が必要なときは多倍長計算を行う。たとえば、3 重解を 10 桁求めたいときは 4 倍精度で計算する。

代数方程式 ワイヤストラス法または 3 次法によりすべての解を同時に求める。初期値はアバースの初期値でよい。

複素ニュートン法とワイヤストラス法の C 言語 (C99) のプログラムは、サポートページ

`http://www.cis.twcu.ac.jp/~osada/rikei/`

においておく。

8 連載を終えるにあたって

2008 年 5 月号から 1 年にわたった「お話・数値解析」は今回で終わる。興の趣くままに書いたため、数値線形代数と微分方程式については全く触れることができなかった。これらの話題については [10, 17] など数値解析のテキストを参照してほしい。

読者の皆様に感謝します。

参考文献

[1] O. Aberth, Iteration methods for finding all zeros of a polynomial simultaneously, Math. Comput. 27(1973), 339-344.

[2] H. Bateman, Halley's methods for solving equations, Amer. Math. Monthly, 45(1938), 11-17.

[3] E. Durand, Solution numériques des équations algébriques, Tome I, Masson et C$^{\mathrm{IE}}$, Éditeurs, 1960.

[4] L. Euler, Institutiones calculi differentialis cum eius usu in analysi finitorum ac doctrina serierum, 1755.

[5] E. Halley, Methodus Nova Accurata & facilis inveniendi Radices Æqùationum quarumcumque genereliter, sine prævia Reductione, Philos. Trans. Roy. Soc. London, 18(1694), 136–148.

[6] P. Henrici, Applied and Computational Complex Analysis, I, Wiley, 1974

[7] 伊理正夫、数値計算、朝倉書店、1981

[8] I.O. Kerner, Ein Gesamtschrittverfahren zur Berechnung der Nullstellen von Polynomen, Numer. Math. 8(1966), 290-294.

[9] E. N. Laguerre, Sur une méthode pour obtenir par approximation les racines d'une équation algébraique qui a toutes ses racines réelles, Œuvre de Laguerre 1 (1898), 87–103.

[10] 森正武、数値解析第 2 版、共立出版、2002

[11] A.M. Ostrowski, Solution of Equations in Banach Spaces, Academic Press, New York, 1973.

[12] T. Sakurai and M.S. Petković, On some simultaneous methods based on Wererstrass correction, J. Comput. Appl. Math. 72(1996), 275–291.

[13] 杉原正顯・室田一雄、数値計算法の数理、岩波書店、1994

[14] J.F. Traub, Iterative Methods for the Solution of Equations, 2nd ed., Chelsea, New York, 1982.

[15] K. Weierstrass, Neuer Bebeis des Satzes, dass jede ganze rationale Function einer veränderlichen dargestelt werden kann als ein Product aus linearen Functionen dersterben veränderlichen, 251–269, Mathematische Werke III, Georh Olms Verlag, 2001.

[16] W. Werner, Some improvement of classical methods for the solution of nonlinear equations, in Numerical Solution of Nonlinear Equations, Lecture Notes in Math. 878(1981), 426–440.

[17] 山本哲朗、数値解析入門 [増訂版]、サイエンス社、2003

おさだ なおき (東京女子大学)