お話：数値解析 第10回
非線型方程式(前編)

長田直樹

1　はじめに

非線型方程式は線型方程式 (連立 1 次方程式) に対する概念で、単独方程式

$$f(x) = 0$$

と連立方程式

$$\begin{cases} f_1(x_1, \ldots, x_n) = 0 \\ \cdots \\ f_n(x_1, \ldots, x_n) = 0 \end{cases}$$

がある。

非線型方程式の数値解は反復解法で求める。最も有名な反復解法がニュートン法 (ニュートン・ラフソン法とも呼ばれている) である。今回は非線型単独方程式に対するニュートン法の話をする。

2　ニュートンとラフソン

万有引力の法則などで名高い I. ニュートン [5, pp.268-269] は 1669 年、3 次方程式

$$f(y) = f^{(0)}(y) = y^3 - 2y - 5 = 0$$

の実数解を次のようにして求めた [1]。

1. 2 を初期値に取る。
2. $y = 2 + p$ を方程式 $f^{(0)}(y) = 0$ に代入し、p の方程式 $f^{(1)}(p) = p^3 + 6p^2 + 10p - 1 = 0$ を得る。高次の項を無視した $10p - 1 = 0$ を解いて $p = 0.1$ を得る。
3. $p = 0.1 + q$ を方程式 $f^{(1)}(p) = 0$ に代入し、$f^{(2)}(q) = q^3 + 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$ を得る。$f^{(2)}(q) = 0$ の高次の項を無視した $11.23q + 0.061 = 0$ を解いて $q = -0.0054$ を得る。
4. $q = -0.0054 + r$ とおき、$f^{(2)}(q)$ の q^3 を無視した $\bar{f}^{(2)}(q) = 6.3q^2 + 11.23q + 0.061 = 0$ に代入し、$f^{(3)}(r) = 6.3r^2 + 11.16196r + 0.000541708 = 0$ を得る。$f^{(3)}(r) = 0$ の $6.3r^2$ を無視して $r = -0.000541708/11.16196 = -0.00004853$ を得る。
5. $y = 2 + 0.1 - 0.0054 - 0.00004853 = 2.09455147$ が解の近似値である。

現代の記号を用いて説明すると次のようになる。p は初期値 2 の補正であるので、初期値が解に十分近いときには p は十分小さい。$f^{(1)}(p) = f(2+p)$ とおくと $f(y)$ は 3 次多項式なのでテイラー展開は

$$f^{(1)}(p) = f(2) + pf'(2) + \frac{p^2}{2}f''(2) + \frac{p^3}{6}f'''(2)$$

となる。p^3 と p^2 の項を無視して $f^{(1)}(p) = 0$ を解くと

$$p = -\frac{f(2)}{f'(2)}, \quad y = 2 - \frac{f(2)}{f'(2)}$$

となる。次のステップでは $f^{(1)}(p)$ に対し初期値を 0.1、補正を q として繰り返しているので

$$q = -\frac{f^{(1)}(0.1)}{{f^{(1)}}'(0.1)}, \quad p = 0.1 - \frac{f^{(1)}(0.1)}{{f^{(1)}}'(0.1)}$$

である。

王立協会会員の J. ラフソンは 1690 年小冊子を出版した。その中で 3 次方程式 $f(a) = a^3 - ba - c = 0$ に対し、解の推定値 g に対するよりよい推定値

$$g + \frac{c + bg - g^3}{3g^2 - b} = g - \frac{f(g)}{f'(g)}$$

を与えた [11]。

ニュートンの方法はステップ毎に代入する関数が異なるのに対し、ラフソンのは毎回同じ関数に代入するという違いがある。したがって、反復

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - \frac{f(x^{(\nu)})}{f'(x^{(\nu)})}$$

はラフソン法あるいはニュートン・ラフソン法と呼ぶのが適切であるが、本連載では習慣に従いニュートン法と呼ぶ。

ニュートンもラフソンも微分及び組み立て除法は用いていないことを注意しておく。

3 関孝和

関孝和は 1685 年に改訂または執筆した『解隠題之法』[3] (かいいんだいのほう) のなかで代数方程式の数値解法を扱っている。関が最後に取り上げた 3 次方程式

$$f(x) = -9 + 3x + 2x^2 + x^3 = 0$$

を用いて、前節と対応させながら解法を説明する。関は多項式を縦書きの昇べき順で表したので、昇べき順を用いている。【】内は『解隠題之法』の用語である。

1. 【商】1 を立て、組み立て除法を行う。

1)	-9	3	2	1	$-9+3x+2x^2+x^3$
	6	3	1		
	-3	6	3	1	右側から計算する
		4	1		
		10	4	1	
			1		
			5	1	

前節の記法に合わせると、$x = 1 + p$ を方程式 $f(x) = 0$ に代入し、p の方程式 $-3+10p+5p^2+p^3 = 0$ を得る。

2. 【商】0.2 を立て、組み立て除法を行う。

0.2)	-3	10	5	1
	2.208	1.04	0.2	
	-0.792	11.04	5.2	1
		1.08	0.2	
		12.12	5.4	1
			0.2	
			5.6	1

$-0.792 + 12.12q + 5.6q^2 + q^3 = 0$ が得られる。

3. 【商】0.06 を立て、組み立て除法を行うと

$$-0.044424 + 12.8028r + 5.78r^2 + r^3 = 0 \quad (1)$$

が得られる。

4. 定数項【実】-0.044424 は 0 にならないので、【実】の符号を変えた 0.044424 を 1 次の係数【方】12.8028 で割り、$0.044424/12.8028 = 0.00346$ 強を求める。

5. $x = 1 + 0.2 + 0.06 + 0.00346$ 強 $= 1.26346$ 強を解【定商】とする。

1-3 は組み立て除法により解を 1 桁ずつ求めている。4-5 は (1) の高次の項を無視して r を求めたことになり、ニュートンの方法と同一である。これにより、解の有効桁数を 3 桁から 6 桁と倍増させている。

1683 年に関孝和と弟子の建部賢明 (たけべかたあきら)、賢弘 (かたひろ) 兄弟の 3 人により算法の集大成が始められた。1695 年頃に全 12 巻の『算法大成』が一応完成したが、その後も編纂が続けられ関の没後 1711 年頃建部賢明の手により『大成算経』[7](たいせいさんけい) 全 20 巻が完成した。

『大成算経』巻三は代数方程式の数値解法を扱っている。その中で述べられている「窮商」(きゅうしょう) とは、代数方程式の数値解を高精度で求める方法である。窮商の一般的説明に引き続き 2 次方程式と『解隠題之法』と同一の 3 次方程式 $-9+3x+2x^2+x^3 = 0$ の例が取り上げられている。解法を説明している原文を図 1 に示す。

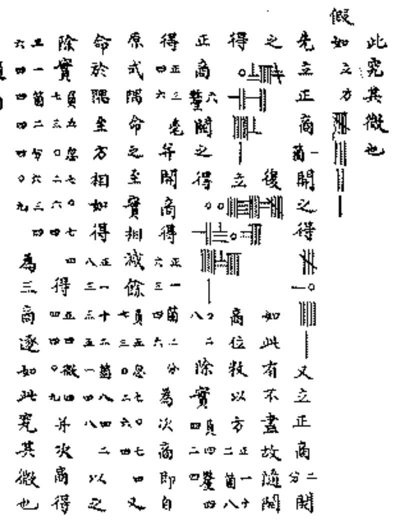

図 1 :『大成算経』巻三 (東北大学)

図 1 は小さくて見づらいので、

東北大学和算ポータル
(http://www2.library.tohoku.ac.jp/wasan/)
→ 江戸後期刊本
→ 大成算経 (狩野 7.0820.20) → 三冊

をたどり、番号 123 を開き拡大画像で見るとよい。

図 1 の 3 行目から 7 行目までは『解隠題之法』の上記 5 までの要約である。8 行目から 12 行目までは次のようにしている。以下【】内は『大成算経』の用語である。

6. $1 + 0.2 + 0.06 + 0.00346 = 1.26346$ を【次商】とし、組み立て除法を行う。(誌面の都合で小数第 9 位まで表す。)

$$\begin{array}{rrrrr}
1.26346) & -9 & 3 & 2 & 1 \\
 & 8.999942925 & 4.123251171 & 1.26346 & \\
\hline
 & -0.000057074 & 7.123251171 & 3.26346 & 1 \\
 & & 5.719582343 & 1.26346 & \\
\cline{3-5}
 & & 12.842833514 & 4.52692 & 1 \\
 & & & 1.26346 & \\
\cline{4-5}
 & & & 5.79038 & 1
\end{array}$$

前節の記法を用いると $x = d + 1.26346$ を元の方程式 $f(x) = 0$ に代入し

$$\begin{aligned}
&-0.000057074730264 + 12.8428335148d \\
&+5.79038d^2 + d^3 = 0
\end{aligned}$$

を得ている。【実】の符号を変えたものを【方】で割り

$$d = \frac{0.000057074730264}{12.8428335148} = 0.00000444409$$

を得る。

7. $1.26346 + 0.00000444409 = 1.26346444409$ が次の近似値【三商】である。

8. 繰り返すと詳しい値が求められる。

現代的に表すと

1. $x^{(1)} = 1.26$

2. 【次商】

$$x^{(2)} = x^{(1)} - \frac{f(x^{(1)})}{f'(x^{(1)})} = 1.26346$$

3. 【三商】

$$x^{(3)} = x^{(2)} - \frac{f(x^{(2)})}{f'(x^{(2)})} = 1.26346444409$$

となる。ラフソンの方法と同一で、今日のニュートン法そのものである。

「窮商」で用いられたニュートン法は、関と建部兄弟の三人のうち誰がいつ発見したか明らかになっていない。関が『解隠題之法』で示した補正についてのニュートン法を建部賢明が発展させ整理したのではないかと想像している。

4　ニュートン法の収束

4.1　縮小写像の原理

集合 $D \subset \mathbb{R}$ で定義された関数 $g(x)$ に対し $\alpha = g(\alpha)$ となる点 $\alpha \in D$ を $g(x)$ の**不動点**という。

ある定数 $L (0 < L < 1)$ に対して

$$|g(x_1) - g(x_2)| \leqq L|x_1 - x_2| \quad (x_1, x_2 \in D)$$

を満たすとき $g(x)$ は**縮小写像**と呼ばれる。

ニュートン法などの反復が収束するための十分条件を与える定理に縮小写像の原理がある。

補題 1 (**縮小写像の原理**)　D を $\mathbb{R}$ の閉集合とする。縮小写像 $g : D \to D$ は D にただ一つの不動点を持つ。任意の初期値 $x^{(0)} \in D$ に対し、反復

$$x^{(\nu+1)} = g(x^{(\nu)})$$

は α に収束する。

証明 数値解析あるいは関数解析のテキスト (たとえば、[8, pp.64-65][10, pp.69-70]) を見よ。 □

補題 1 は $\mathbb{R}$ における縮小写像の原理であるが、$\mathbb{R}^n$、$\mathbb{C}^n$、あるいはバナッハ空間 (完備ノルム空間) においても同様の定理が成り立つ。$n > 1$ の場合は、絶対値の代りにノルムが用いられる。

4.2　単純零点

α が $f(x)$ の**単純零点**とは、$f(\alpha) = 0, f'(\alpha) \neq 0$ のときいう。

定理 1 $f(x)$ が単純零点 α を含む区間 $\tilde{I}$ で C^2 級で、$f'(x)$ は $\tilde{I}$ に零点を持たないものとする。このとき、閉区間 $I \subset \tilde{I}$ と正の数 $M > 0$ が存在して、反復

$$\begin{aligned}
&x^{(0)} \in I \\
&x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - \frac{f(x^{(\nu)})}{f'(x^{(\nu)})} \qquad (2)
\end{aligned}$$

に対し、

$$|x^{(\nu+1)} - \alpha| \leqq M|x^{(\nu)} - \alpha|^2$$

が成立する。

証明 まず、$g(x) = x - f(x)/f'(x)$ が補題 1 の条件を満たすことを示す。

$$g'(x) = \frac{f(x)f''(x)}{(f'(x))^2}$$

より $g'(\alpha) = 0$ である。$g'(x)$ は連続だから、$0 < L < 1$ に対し、$\delta > 0$ が存在して $I = [\alpha - \delta, \alpha + \delta] \subset \tilde{I}$ において、$|g'(x)| < L$ となる。α は $g(x)$ の不動点でありので、補題 1 より反復 (2) は α に収束する。

次に、$x \in I$ をとる。テイラーの定理により

$$f(\alpha) = f(x) + f'(x)(\alpha - x) + \frac{1}{2}f''(\xi_x)(\alpha - x)^2$$

となる $\xi_x \in I$ が存在する。$f(\alpha) = 0$ より

$$x - \alpha - \frac{f(x)}{f'(x)} = \frac{f''(\xi_x)}{2f'(x)}(x - \alpha)^2$$

となる。仮定より、$A \leqq |f'(x)|, |f''(x)| \leqq B (x \in I)$ となる定数 $A, B > 0$ が存在する。$M = B/(2A), x = x^{(\nu)}$ とおくと

$$|x^{(\nu+1)} - \alpha| \leqq M|x^{(\nu)} - \alpha|^2$$

が得られる。 □

定理 1 より、初期値を解の近くに取ればニュートン法は 2 次収束する。倍精度計算のとき通常 $4 \sim 5$ 回の反復で解が得られる。

反復は $f(x)$ の計算の際の丸め誤差の上界 (のできるだけ小さい値) を δ とするとき、

$$|f(x^{(\nu)})| < \delta \tag{3}$$

となったときに終了すればよい [4]。δ を小さく取りすぎると反復は終了しないことがある。このような事態を避けるため、プログラミングに際して反復回数の上限を設けておく。

例 1 ニュートンが扱った関数 $f(x) = x^3 - 2x - 5$ と初期値 $x^{(0)} = 2$ を用いてニュートン法を適用する。

ν	$x^{(\nu)}$	$\lvert f(x^{(\nu)})\rvert$
0	2.000000000000000	1.00
1	2.100000000000000	6.10×10^{-2}
2	2.094568121104185	1.86×10^{-4}
3	2.094551481698199	1.74×10^{-9}
4	2.094551481542327	1.78×10^{-15}

1 回の反復毎に有効桁数が 2 倍になっており、4 回の反復で倍精度での限界の値が得られる。真値は 2.09455148154232659 である。本例では (3) の δ は 1.78×10^{-15} より大きく取る必要がある。

$f(x)$ を n 次多項式とする。解の絶対値は大きくなく、初期値の絶対値が大きいときは減少率 $1 - 1/n$ で 0 近づく。

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x}\left(x - \frac{f(x)}{f'(x)}\right) = 1 - \frac{1}{n}$$

からいえる。

例 2 例 1 の関数 $f(x) = x^3 - 2x - 5$ に初期値 $x^{(0)} = 1000$ を用いてニュートン法を適用する。

ν	$x^{(\nu)}$	$\lvert f(x^{(\nu)})\rvert$
0	1000.000000000000000	1.00×10^{9}
1	666.667112778075193	2.96×10^{8}
2	444.445412269271287	8.78×10^{7}
	中略	
17	2.104403822434531	1.11×10^{-1}
18	2.094605697648467	6.05×10^{-4}
19	2.094551483197066	1.85×10^{-8}
20	2.094551481542327	1.78×10^{-15}

$\nu = 1, 2$ のときは減少率 2/3 で 0 に近づき、$\nu = 17, \ldots, 20$ のときは唯一の実数解に 2 次収束している。

4.3 多重零点

α が $f(x)$ の m 重零点とは、α で有界な関数 $h(x)$ が存在し、

$$f(x) = (x - \alpha)^m h(x), \quad h(\alpha) \neq 0$$

となるときいう。$f(x)$ が α で C^m 級のときは、

$$f(\alpha) = f'(\alpha) = \cdots = f^{(m-1)}(\alpha) = 0, f^{(m)}(\alpha) \neq 0$$

と同値になる。(証明は容易である。) 2 重零点、3 重零点、$\cdots$ をまとめて**多重零点**という。

定理 2 $f(x)$ が m 重零点 α を含む開区間 I において C^m 級で、$f'(x) \neq 0, (x \in I \setminus \{\alpha\})$ とする。$x^{(0)} \in I \setminus \{\alpha\}$ をとると、反復

$$x^{(\nu+1)} = x^{(\nu)} - \frac{f(x^{(\nu)})}{f'(x^{(\nu)})}$$

は

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{x^{(\nu+1)}-\alpha}{x^{(\nu)}-\alpha}=1-\frac{1}{m}$$

を満たす。

証明 定義より

$$f'(x)=m(x-\alpha)^{m-1}h(x)+(x-\alpha)^m h'(x)$$

となる。

$$\frac{f(x)}{f'(x)}=\frac{(x-\alpha)^m h(x)}{m(x-\alpha)^{m-1}h(x)+(x-\alpha)^m h'(x)} \tag{4}$$

より

$$x-\frac{f(x)}{f'(x)}-\alpha=x-\alpha-\frac{x-\alpha}{m+(x-\alpha)\dfrac{h'(x)}{h(x)}}$$

よって、

$$\frac{x-\dfrac{f(x)}{f'(x)}-\alpha}{x-\alpha}=1-\frac{1}{m+(x-\alpha)\dfrac{h'(x)}{h(x)}}$$

$x=x^{(\nu)}$ として $\nu\to\infty$ により得られる。 □

E. シュレーダー [6] が 1870 年に提案したシュレーダー法

$$x^{(\nu+1)}=x^{(\nu)}-m\frac{f(x^{(\nu)})}{f'(x^{(\nu)})} \tag{5}$$

は m 重零点に 2 次収束する。

定理 3 定理 2 と同じ条件の下で、反復

$$x^{(\nu+1)}=x^{(\nu)}-m\frac{f(x^{(\nu)})}{f'(x^{(\nu)})}$$

は

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{x^{(\nu+1)}-\alpha}{(x^{(\nu)}-\alpha)^2}=\frac{1}{m}\frac{h'(\alpha)}{h(\alpha)}$$

を満たす。

証明 (4) を用いると定理 2 と同様に証明できる。 □

初期値 $x^{(0)}$ を $f(x)=(x-\alpha)^m h(x)$ の零点 α の近くに取り、$|f(x^{(\nu)})|<\delta$ で反復が終了したとする。

$$|(x^{(\nu)}-\alpha)^m h(x^{(\nu)})|<\delta$$

より、

$$|x^{(\nu)}-\alpha|<\left|\frac{\delta}{h(x^{(\nu)})}\right|^{1/m}$$

となる。m 重零点の有効数字の桁数は、計算桁数の $1/m$ 程度であることが分かる。たとえば、2 重解を $\delta=10^{-15}$ で求めたとき、$|h(x^{(\nu)})|\fallingdotseq 1$ とすると予想される誤差は $\sqrt{10^{-15}}=3.2\times10^{-8}$ となる。このことは、ニュートン法にもシュレーダー法にも当てはまる。

例 3 関数

$$\begin{aligned}f(x)&=x^3-5x^2+8x-4\\&=(x-1)(x-2)^2\end{aligned}$$

に初期値 $x^{(0)}=3$ を用いてニュートン法と $m=2$ としてシュレーダー法を適用する。$|f(x^{(\nu)})|<10^{-15}$ となったとき反復を停止する。

	ニュートン法	シュレーダー法
ν	$x^{(\nu)}$	$x^{(\nu)}$
0	3.0	3.0
1	2.60	2.20
2	2.35	2.015
3	2.19	2.00012
4	2.10	2.0000000067
	中略	
24	2.00000011	
25	2.000000056	
26	2.0000000024	

ニュートン法では $f(x^{(26)})=8.88\times10^{-16}$ で反復が終了し、シュレーダー法は $f(x^{(4)})=8.88\times10^{-16}$ で反復が終了する。ニュートン法は縮小率 1/2 の線型収束、シュレーダー法は 2 次収束であるが、得られた解の誤差はともに 10^{-8} 程度である。

5 正則関数に対するニュートン法

ここまで実数解のみを扱ってきたが、複素数計算ができるシステムでは複素数解を扱うこともできる。必要最小限の事項をまとめておく。

複素平面上の集合 D の任意の 2 点が D 内の折れ線で結べるとき連結という。連結開集合を**領域**、連結閉集合を**閉領域**という。領域 D の上で定義された関数 $f(z)$ が $z\in D$ で微分可能であるとは、複素数 h が 0 以外の値を取りながら 0 に近づくとき

$$f'(z)=\lim_{h\to0}\frac{f(z+h)-f(z)}{h} \tag{6}$$

が存在して有限のときいう。(6) は実関数の微分と同じ形をしているが h は 0 の任意の近傍の点を取り得るので、かなり強い条件になっている。$f(z)$ が D の各点で微分可能なとき**正則**という。

補題 2 $f(z)$ が開円盤領域 $D = \{|z-a| < R\}$ で正則のとき、$f(z)$ は級数

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(z-a)^k \tag{7}$$

に展開できる。級数 (7) はすべての $z \in D$ に対し収束する。

証明 関数論のテキストを見よ。 □

級数 (7) を ***a* を中心とするテイラー展開**という。

定理 4 $f(z)$ が単純零点 α を含む領域 $\tilde{D}$ で正則で、$f'(z)$ は $\tilde{D}$ に零点を持たないものとする。閉領域 $D \subset \tilde{D}$ と正の数 $M > 0$ が存在して、初期値 $z^{(0)} \in D$ をとった反復

$$z^{(\nu+1)} = z^{(\nu)} - \frac{f(z^{(\nu)})}{f'(z^{(\nu)})}$$

に対し、

$$|z^{(\nu+1)} - \alpha| \leqq M|z^{(\nu)} - \alpha|^2$$

が成立する。

証明 定理 1 とほぼ同様である。 □

例 4 例 1 の関数 $f(z) = z^3 - 2z - 5$ に初期値 $z^{(0)} = -1.0 + 1.0i$ を用いてニュートン法を適用する。計算は gcc 4.0.1 の `double complex`(実部虚部とも 10 進 16 桁弱) を用いた。

ν	$z^{(\nu)}$	$\|f(z^{(\nu)})\|$
0	$-1.00000000 + 1.00000000i$	1.00
1	$-1.05000000 + 1.15000000i$	1.09×10^{-1}
2	$-1.04726405 + 1.13606317i$	9.40×10^{-4}
3	$-1.04727573 + 1.13593990i$	7.11×10^{-8}
4	$-1.04727574 + 1.13593989i$	1.78×10^{-15}

$-1.047275740771163 + 1.135939889088928i$ に 2 次収束している。

6 ニュートン法の周期点

複素平面上の写像 $g : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ の反復合成を

$$g^0(z) = z$$
$$g^{\nu+1}(z) = g(g^\nu(z)), \quad \nu = 0, 1, \ldots$$

により定義する。ある自然数 p に対し、

$$g(\alpha) \neq \alpha, \cdots, g^{p-1}(\alpha) \neq \alpha, g^p(\alpha) = \alpha$$

となるとき、$\alpha \in \mathbb{C}$ を g の**周期*p*の周期点**という。

多項式 $f(z)$ に対するニュートン法の反復関数

$$g(z) = z - \frac{f(z)}{f'(z)}$$

により周期点に収束する初期値の集合は、空でなければたいていの場合フラクタルと呼ばれる複雑な形をする。**フラクタル**とはおおざっぱにいうと、図形のどんな一部分も全体と同じ複雑さを持つという広い意味での**自己相似性**を持つ集合である。ニュートン法の反復から生じるフラクタルについては複素力学系のテキスト (たとえば [2, 9]) を見よ。

$f(z) = z^3 - 2z + 2$ に対するニュートン法

$$z^{(\nu+1)} = z^{(\nu)} - \frac{(z^{(\nu)})^3 - 2z^{(\nu)} + 2}{3(z^{(\nu)})^2 - 2} \tag{8}$$

を考える。$z^{(\nu)} = 0$ または 1 となると、ν から先は 0 と 1 を繰り返し収束しない。0 と 1 は反復 (8) に対する周期 2 の周期点である。周期点 0 と 1 に収束する複素平面上 $-100 \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq 100, -80 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 80$ の範囲の初期値の集合を図 2 に示す。実軸と虚軸に平行な直線で 250000(= 500 × 500) の長方形に分割し頂点を初期値としてニュートン法を適用し $z^{(\nu)}$ が周期点に近づいたら初期値をプロットしている。

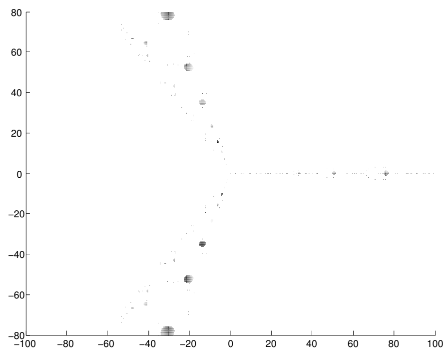

図 2: 周期点に収束する初期値
$-100 \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq 100, -80 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 80$

図 3 には $-10 \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq 10, -8 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 8$ の範囲を示す。図 2,3 はほぼ相似であることが見て取れる。

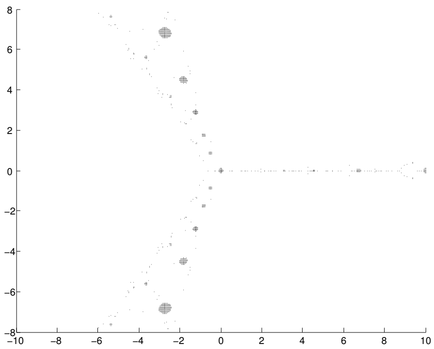

図 3: 周期点に収束する初期値
$-10 \leqq \mathrm{Re}\, z \leqq 10, -8 \leqq \mathrm{Im}\, z \leqq 8$

丸め誤差がないと仮定したとき、収束しない初期値の集合が (有限集合、可算集合、代数曲線の部分集合、測度 0 の集合、など) 無視できるとき、反復法は**大域的収束性**を持つという。図 2 から、ニュートン法は大域的収束性を持たないことが分かる。なお、フラクタルや大域的収束性は多様な定義がある。

参考文献

[1] F. Cajori, Historical Note on the Newton-Raphson Method of Approximation, Amer. Math. Monthly, 18(1911), 29-32.

[2] K. ファルコナー、服部・村井訳、フラクタル幾何学、共立出版、2006

[3] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄、関孝和全集、大阪教育図書、1974

[4] 伊理正夫・藤野和建、数値計算の常識、共立出版、1985

[5] I. Newton, De analysi per æquationes numero terminorum infinitas, 257-282, Opera quae exstant omnia, Bd 3, F. Fromann, 1964

[6] E. Schröder, Ueber unendlich viele Algorithmen zur Auflösung der Gleichungen, Math. Annal., 2(1870), 317-365.

[7] 関孝和・建部賢明・建部賢弘、大成算経、巻三、東北大学、狩野 7.20820.20
http://www2.library.tohoku.ac.jp/wasan/

[8] 杉原正顯・室田一雄、数値計算法の数理、岩波書店、1994

[9] 上田哲生・谷口雅彦・諸澤俊介、複素力学系序説、培風館、1995

[10] 山本哲朗、数値解析入門 [増訂版]、サイエンス社、2003

[11] T.J. Ypma, Development of the Newton-Raphson Method, SIAM Review, 37(1995), 531-551.

おさだ なおき (東京女子大学)