お話：数値解析 第5回
収束の加速法(前編)

長田直樹

1　はじめに

収束する数列について何らかの規則性が事前に分かっているときは、規則性を活用することにより、少ない項数の数列から極限値を推定することができることがある。このような方法を収束の加速法あるいは補外法という。加速法を適用すると、少ない項数で極限値の近似値が得られるばかりでなく、加速により得られる値は、加速しない場合に比べ丸め誤差の影響は少ない。

今回取り上げる加速法は、エイトケン Δ^2 法とリチャードソン補外である。これら 2 つの方法は、多くの加速法の基礎になっている。

2　関孝和の円周率の計算

関孝和 (せきたかかず) がヤコブ・ベルヌーイとほぼ同じ時期にベルヌーイ数を発見したことを前々回 (2008 年 7 月号) に話した。今回は関の円周率の計算から話を始める。

直径 1 の円に内接する正 2^ν 角形の周の長さを s_ν とする。関は以下に述べる方法で s_{15}, s_{16}, s_{17} まで計算し、それらの値を用いて円周の長さを推定した。

図 1 は O を中心、半径 $\mathrm{AO} = \frac{1}{2}$ の円弧である。$\angle\mathrm{BOA} = \pi/2^{\nu-2}$ とすると $s_\nu = 2^\nu \mathrm{AC}$ である。$\triangle\mathrm{AOD}$ に三平方の定理を用いると

$$\mathrm{CD}^2 - \mathrm{CD} + \frac{1}{4}\mathrm{AB}^2 = 0 \qquad (1)$$

が得られる。$\mathrm{CD} < \frac{1}{2}$ に注意して (1) を CD について解くと、

$$\mathrm{CD} = \frac{1-\sqrt{1-\mathrm{AB}^2}}{2} \qquad (2)$$

となる。D は AB の中点だから

$$\mathrm{AD} = \frac{1}{2}\mathrm{AB} \qquad (3)$$

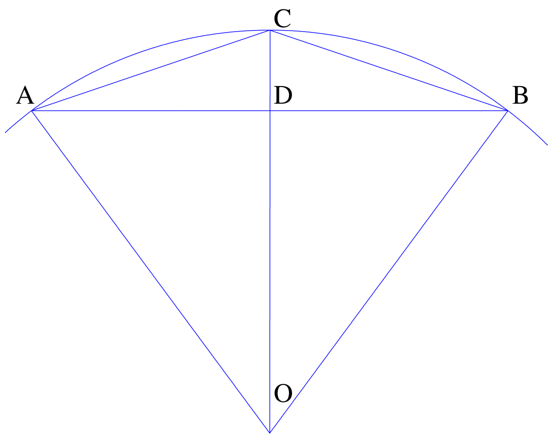

図 1: 内接正 2^ν 角形の周長の計算

$\triangle\mathrm{CAD}$ に三平方の定理を用いると、(1)(3) より

$$\mathrm{AC} = \sqrt{\mathrm{CD}} \qquad (4)$$

が得られる。

関は CD を勾 (こう)、AD を股 (こ)、AC を弦、s_ν を周と呼び、$\nu = 2, 3, \ldots, 17$ に対し (2)(3)(4) により計算した値を与えた。なお、和算では直角三角形の直角を挟む短い辺を勾、長い辺を股、斜辺を弦という。

関の計算した s_ν の値を見易いように 5 桁毎に空白をつけて示す。イタリックの数字は円周率の真値と異なる部分、下線の数字は周の真値と異なる部分である。四捨五入により切り捨てた場合が強、切り上げた場合が弱である。とくに末位が 0 を切り捨てた場合は**微強**、末位が 9 を切り上げた場合は**微弱**である。

$$s_2 = \mathit{2.82842\ 71247\ 46190\ 0976}\text{微強}$$
$$s_3 = 3.\mathit{06146\ 74589\ 20718\ 1738}\text{強}$$

中略

$$
\begin{aligned}
s_{15} &= 3.14159\ 26\mathit{487}\ \mathit{76985}\ \mathit{6}\underline{\mathit{708}}\text{弱} \\
s_{16} &= 3.14159\ 265\mathit{23}\ \mathit{86591}\ \mathit{3}\underline{\mathit{571}}\text{強} \\
s_{17} &= 3.14159\ 2653\mathit{2}\ \mathit{88992}\ \mathit{7}\underline{\mathit{759}}\text{弱}
\end{aligned}
$$

から

$$
\begin{aligned}
t_{15} &= s_{16} + \frac{(s_{16} - s_{15})(s_{17} - s_{16})}{(s_{16} - s_{15}) - (s_{17} - s_{16})} \qquad (5) \\
&= 3.14159\ 26535\ 89793\ 2\mathit{476}
\end{aligned}
$$

を計算し

$$3.14159\ 26535\ 9\ \text{微弱}$$

を定周とした [6, 三四八頁]。小数第 9 位以下 3589 を切り上げて 359 微弱としているので、円周率を 13 桁 (整数部分 1 桁を含む) 書き示したことになる。実際には、t_{15} は 17 桁正確に求まっている。$\{s_\nu\}_{\ \nu=2,3,\ldots,17}$ は小数第 20 位を丸めて 20 桁表示してあるが、s_{15}, s_{16}, s_{17} の小数 17 位以下は桁落ち (近い数同士の引き算により有効桁数が少なくなる現象) などのため正しくない。そのため t_{15} は小数第 16 位までが正しい数字である。

上記の計算は、関の没後 1712 年に弟子達により出版された括要算法で公表されている。ベルヌーイ数と同様に関は (5) の理由を説明していないが、**増約術**と呼ばれていた無限等比級数の和の公式によったものと考えられている [6, pp.183-184]。

$$
\frac{s_{\nu+2} - s_{\nu+1}}{s_{\nu+1} - s_\nu} = \frac{s_{\nu+3} - s_{\nu+2}}{s_{\nu+2} - s_{\nu+1}} = \cdots = r
$$
$$0 < |r| < 1$$

を仮定すると

$$s_{\nu+k+1} - s_{\nu+k} = (s_{\nu+1} - s_\nu) r^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

が成立する。$k = 1, 2, \ldots, l$ について和を取ると

$$s_{\nu+l+1} - s_{\nu+1} = (s_{\nu+1} - s_\nu) \sum_{k=1}^{l} r^k$$

だから、$l \to \infty$ として増約術を用いると

$$s = s_{\nu+1} + \frac{(s_{\nu+1} - s_\nu) r}{1 - r} \qquad (6)$$

となる。ここで s は数列 $\{s_\nu\}$ の極限である。(6) の右辺の r に $(s_{\nu+2} - s_{\nu+1})/(s_{\nu+1} - s_\nu)$ を代入した

$$t_\nu = s_{\nu+1} + \frac{(s_{\nu+1} - s_\nu)(s_{\nu+2} - s_{\nu+1})}{(s_{\nu+1} - s_\nu) - (s_{\nu+2} - s_{\nu+1})}$$

は関が定周を求めた式 (5) になっている。

数列 $\{s_\nu\}$ の**差分**を $\Delta s_\nu = s_{\nu+1} - s_\nu$、**2 階差分**を $\Delta^2 s_\nu = \Delta s_{\nu+1} - \Delta s_\nu$ により定義すると、

$$
\begin{aligned}
t_\nu &= s_{\nu+1} + \frac{(s_{\nu+1} - s_\nu)(s_{\nu+2} - s_{\nu+1})}{(s_{\nu+1} - s_\nu) - (s_{\nu+2} - s_{\nu+1})} \\
&= s_\nu - \frac{(s_{\nu+1} - s_\nu)^2}{s_{\nu+2} - 2 s_{\nu+1} + s_\nu} \\
&= s_\nu - \frac{(\Delta s_\nu)^2}{\Delta^2 s_\nu} \qquad (7)
\end{aligned}
$$

と書ける。数列 $\{s_\nu\}$ を数列 $\{t_\nu\}$ に対応させる変換は、**エイトケン Δ^2 法**あるいは**エイトケン加速法**と呼ばれている。

名称は統計学者の A.C. エイトケン [1] が、1926 年に代数方程式の最大根を求める過程で使ったことに由来する。エイトケンの再発見は、関の発見から二百数十年後のことになる。Δ^2 法は (7) の分母から来ている。

3 加速法

加速法は、収束する数列 $\{s_\nu\}$ を同じ極限により速く収束する数列 $\{t_\nu\}$ への変換としてとらえることができる。

s に収束する数列 $\{s_\nu\}$ に対し、

$$\lim_{\nu \to \infty} \frac{t_\nu - s}{s_{\sigma(\nu)} - s} = 0 \qquad (8)$$

を満たす数列 $\{t_\nu\}$ を得る方法を**加速法**という。ここで、$\sigma(\nu)$ は t_ν を求めるために用いる最大の添字である。例えば、エイトケン Δ^2 法の場合 t_ν は $s_\nu, s_{\nu+1}, s_{\nu+2}$ から計算するので $\sigma(\nu) = \nu+2$ となる。

4 エイトケン Δ^2 法

エイトケン Δ^2 法については次の定理が基本的である。

定理 1 数列 $\{s_\nu\}$ が $\nu \to \infty$ のとき

$$s_\nu = s + c_1 \lambda_1^\nu + c_2 \lambda_2^\nu + o(\lambda_2^\nu) \qquad (9)$$

と漸近表示されるものとする。ここで、s は未知の極限値、$c_1, c_2, \lambda_1, \lambda_2$ は未知の定数で $1 > |\lambda_1| > |\lambda_2| > 0$ である。このとき、

$$t_\nu = s + c_2 \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_2}{\lambda_1 - 1} \right)^2 \lambda_2^\nu + o(\lambda_2^\nu) \qquad (10)$$

を満たす。

証明 (9) より

$$\Delta s_\nu = c_1\lambda_1^\nu(\lambda_1-1)+c_2\lambda_2^\nu(\lambda_2-1)+o(\lambda_2^\nu)$$

が成り立つので

$$\begin{aligned}(\Delta s_\nu)^2 &= c_1^2\lambda_1^{2\nu}(\lambda_1-1)^2\\ &\times\left[1+\frac{2c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\nu\frac{\lambda_2-1}{\lambda_1-1}\right.\\ &\left.\quad+o\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\nu\right)\right]\\ \Delta^2 s_\nu &= c_1\lambda_1^\nu(\lambda_1-1)^2\\ &\times\left[1+\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\nu\left(\frac{\lambda_2-1}{\lambda_1-1}\right)^2\right.\\ &\left.\quad+o\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\nu\right)\right]\end{aligned}$$

がいえる。これらより、

$$\begin{aligned}&\frac{(\Delta s_\nu)^2}{\Delta^2 s_\nu}\\ =\ & c_1\lambda_1^\nu\left[1+\frac{c_2}{c_1}\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\nu\frac{\lambda_2-1}{\lambda_1-1}\left(2-\frac{\lambda_2-1}{\lambda_1-1}\right)\right.\\ &\left.+o\left(\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^\nu\right)\right]\end{aligned}$$

が導けるので、漸近公式 (10) が得られる。 □

系 1 数列 $\{s_\nu\}$ が定理 1 の条件を満たすとき、エイトケン Δ^2 法は収束を加速する。

証明 定理 1 より

$$\lim_{\nu\to\infty}\frac{t_\nu-s}{s_{\nu+2}-s}=0 \qquad \square$$

例 1 関の方法は定理 1 により正当化される。

$$s_\nu = 2^\nu\sin\frac{\pi}{2^\nu}=\pi+\sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^j\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}(2^{-2j})^\nu$$

より、$\lambda_1=1/4, \lambda_2=1/16, c_2=\pi^5/5!$ とおくと

$$t_\nu-\pi \fallingdotseq \frac{\pi^5}{5!}\left(\frac{1}{16}\right)^{\nu+1}$$

が導ける。関の結果の理論上の誤差は $\nu=15$ より、

$$\frac{\pi^5}{5!}16^{-16}\fallingdotseq 1.382\times10^{-19}$$

である。

5 建部賢弘の円周率の計算

関の弟子の建部賢弘 (たけべかたひろ) は、1722 年に著した綴術算径 (てつじゅつさんけい) において、円周率の求め方を解説し、円周率を 42 桁与えた。最後の 1 桁を除き正確である。同書には、師匠であった関の方法論との違いをのべた興味深い記述もある。建部は円に内接する正 2^ν 角形の周長 s_ν の 2 乗 $\sigma_\nu=s_\nu^2$ を計算したと述べているが、説明の通りに計算を行っても 38 桁しか正しい値は得られない。そのため、s_ν を用いて円周率 41 桁を得たと考えられている。詳細は [2] を見よ。

建部は s_ν の差分の比 $(s_{\nu+2}-s_{\nu+1})/(s_{\nu+1}-s_\nu)$ が 1/4 に近づくのを見て取り、

$$s_1^{(\nu)}=s_{\nu+1}+\frac{s_{\nu+1}-s_\nu}{4-1} \tag{11}$$

を計算した。(11) 式は次のように説明できる。数列 $\{s_\nu\}$ が公比 r の無限等比級数の部分和になると仮定すると、$s_\nu=a(1+r+\cdots+r^{\nu-1})$ の極限は増約術により $a/(1-r)$ である。$s_\nu, s_{\nu+1}, r$ を用いて表すと

$$\frac{a}{1-r}=\frac{s_{\nu+1}-rs_\nu}{1-r}=s_{\nu+1}+\frac{s_{\nu+1}-s_\nu}{\frac{1}{r}-1}$$

となる。

建部はさらに $s_1^{(\nu)}$ の差分の比が 1/16 に近づくことから、

$$s_2^{(\nu)}=s_1^{(\nu+1)}+\frac{s_1^{(\nu+1)}-s_1^{(\nu)}}{16-1}$$

を計算した。そして、$s_0^{(1)}=2$ とし、$\nu=2,3,\ldots,10$ に対し

$$\begin{aligned}&s_0^{(\nu)}=s_\nu\\ &s_k^{(\nu-k)}=s_{k-1}^{(\nu-k+1)}+\frac{s_{k-1}^{(\nu-k+1)}-s_{k-1}^{(\nu-k)}}{2^{2k}-1}\\ &\quad k=1,\ldots,\nu-1\end{aligned} \tag{12}$$

を計算し、$s_9^{(1)}$ を円周率とした。[2, pp.6-34]

(12) によって収束を加速する方法は、**リチャードソン補外**あるいは**リチャードソン加速法**と呼ばれている。これを $k=1$ の場合に最初に適用したのは、土星の衛星を発見した天文学者で物理学者の C. ホイヘンスである。1654 年に円周率の計算において (11) を適用した。リチャードソン補外の名称の由来は、数値予報のパイオニアである L.F. リチャードソン [4]

が次節で述べるような提案を行ったことによる。建部はリチャードソンよりも約 200 年早くリチャードソン補外を用いた。

6　リチャードソン補外

6.1　連続量の補外

$h>0$ で定義された関数 $F(h)$ が漸近展開

$$F(h)\sim s+\sum_{j=1}^{\infty}c_jh^{2j},\quad (h\to+0) \tag{13}$$

を満たしているとする。ここで、s は未知の極限値、$c_1,c_2,\ldots$ は未知の定数である。(13) のような漸近展開を持つ関数は、$h>0$ を刻み幅とする数値積分公式や数値微分、常微分方程式の初期値問題にしばしば登場する。

$h>0$ を適当に取る。

$$F(h)\sim s+\sum_{j=1}^{\infty}c_jh^{2j}$$
$$F(\frac{h}{2})\sim s+\sum_{j=1}^{\infty}c_j2^{-2j}h^{2j}$$

から c_1 の項を消去することを考える。

$$\begin{aligned}&F(\frac{h}{2})-2^{-2}F(h)\\ \sim\quad &(1-2^{-2})s+\sum_{j=2}^{\infty}c_j(2^{-2j}-2^{-2})h^{2j}\end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned}F_1(h)&=\frac{F(\frac{h}{2})-2^{-2}F(h)}{1-2^{-2}}\\ &=F(\frac{h}{2})+\frac{F(\frac{h}{2})-F(h)}{2^2-1}\end{aligned}$$

とおくと

$$F_1(h)\sim s+\sum_{j=2}^{\infty}c_j\frac{2^{2-2j}-1}{2^2-1}h^{2j} \tag{14}$$

となる。リチャードソンは、$F(h)$ から $F_1(h)$ を作る過程を h^2-補外と名づけた。

この過程を繰り返し

$$F_0(h)=F(h)$$
$$F_k(h)=F_{k-1}(\frac{h}{2})+\frac{F_{k-1}(\frac{h}{2})-F_{k-1}(h)}{2^{2k}-1}$$

を $F(h)$ に対する**リチャードソン補外**という。

定理 2 関数 $F(h)$ が漸近展開 (13) を満たすとき

$$\begin{aligned}&F_k(h)\\ \sim\quad & s+\sum_{j=k+1}^{\infty}c_j\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{2^{2i-2j}-1}{2^{2i}-1}\right)h^{2j}\end{aligned} \tag{15}$$

証明 k に関する数学的帰納法で証明できる。□

$T_k^{(\nu)}=F_k(h/2^\nu)$ とおくと、

$$\begin{aligned}&T_0^{(\nu)}=F(\frac{h}{2^\nu})\\ &T_k^{(\nu-k)}=T_{k-1}^{(\nu-k+1)}+\frac{T_{k-1}^{(\nu-k+1)}-T_{k-1}^{(\nu-k)}}{2^{2k}-1}\\ &\qquad k=1,\ldots,\nu\end{aligned}$$

と書ける。2 次元配列 $\{T_k^{(\nu)}\}$ は

$$\begin{array}{ccccccc}T_0^{(0)} & & & & & & \\ & \searrow & & & & & \\ T_0^{(1)} & \to & T_1^{(0)} & & & & \\ & \searrow & & \searrow & & & \\ T_0^{(2)} & \to & T_1^{(1)} & \to & T_2^{(0)} & & \\ & \searrow & & \searrow & & \searrow & \\ T_0^{(3)} & \to & T_1^{(2)} & \to & T_2^{(1)} & \to & T_3^{(0)}\end{array}$$

のように計算する。この表は T-**表**と呼ばれる。

6.2　数列の補外

数列 $\{s_\nu\}$ が漸近展開

$$s_\nu\sim s+\sum_{j=1}^{\infty}c_j\lambda_j^\nu,\quad (1>|\lambda_1|>|\lambda_2|>\ldots>0) \tag{16}$$

を満たしているとする。ここで、$c_1,c_2,\ldots$ は未知の定数で、$\lambda_1,\lambda_2,\ldots,$ は既知の定数とする。数列 $\{s_\nu\}$ に対するリチャードソン補外は

$$\begin{aligned}&T_0^{(\nu)}=s_\nu\\ &T_k^{(\nu-k)}=T_{k-1}^{(\nu-k+1)}+\frac{\lambda_k}{1-\lambda_k}\left(T_{k-1}^{(\nu-k+1)}-T_{k-1}^{(\nu-k)}\right)\\ &\qquad k=1,\ldots,\nu\end{aligned}$$

である。

定理 3 漸近展開 (16) を満たす数列 $\{s_\nu\}$ にリチャードソン補外を適用すると

$$\begin{aligned}&T_k^{(\nu-k)}\\ \sim\quad & s+\sum_{j=k+1}^{\infty}c_j\left(\prod_{i=1}^{k}\frac{\lambda_j-\lambda_i}{1-\lambda_i}\right)\lambda_j^{\nu-k}\end{aligned}$$

証明 定理 2 と同様である。□

系 2 $\lambda_j = 2^{-2j}$ $(j = 1, 2, \ldots)$ の場合、$\nu \to \infty$ とすると

$$T_k^{(\nu-k)} = s + (-1)^k c_{k+1} 2^{(k+1)(k-2\nu)} + o(2^{(k+1)(k-2\nu)})$$

例 2 s_ν を直径 1 の円に内接する正 2^ν 角形の周の長さとする。建部の方法は、

$$s_\nu = 2^\nu \sin(\frac{\pi}{2^\nu}) = \pi + \sum_{j=1}^{\infty} c_j \lambda_j^\nu$$

$$c_j = (-1)^j \frac{\pi^{2j+1}}{(2j+1)!}, \quad \lambda_j = 2^{-2j}$$

にリチャードソン補外を適用したものである。理論上の誤差は系 2 より

$$T_9^{(1)} - \pi \risingdotseq (-1)^9 c_{10} 2^{-110} \risingdotseq -4.154 \times 10^{-43}$$

である。

7 Δ^2 法とリチャードソン補外

数列 $\{s_\nu\}$ が

$$s_\nu \risingdotseq s + c_1 \lambda^\nu \quad 0 < |\lambda| < 1 \tag{17}$$

を満たしていると仮定する。s_ν に対するリチャードソン補外の最初のステップは

$$T_1^{(\nu)} = s_{\nu+1} + \frac{\lambda}{1-\lambda}(s_{\nu+1} - s_\nu) \tag{18}$$

である。一方、

$$\frac{s_{\nu+2} - s_{\nu+1}}{s_{\nu+1} - s_\nu} \risingdotseq \lambda$$

より、(18) の λ を $(s_{\nu+2} - s_{\nu+1})/(s_{\nu+1} - s_\nu)$ で置き換えると、

$$\begin{aligned} & s_{\nu+1} + \frac{\frac{s_{\nu+2} - s_{\nu+1}}{s_{\nu+1} - s_\nu}(s_{\nu+1} - s_\nu)}{1 - \frac{s_{\nu+2} - s_{\nu+1}}{s_{\nu+1} - s_\nu}} \\ = \quad & s_{\nu+1} + \frac{(s_{\nu+2} - s_{\nu+1})(s_{\nu+1} - s_\nu)}{(s_{\nu+1} - s_\nu) - (s_{\nu+2} - s_{\nu+1})} \end{aligned} \tag{19}$$

となりエイトケン Δ^2 法が得られる。リチャードソン補外は収束率 λ が未知の場合は利用できないが、その場合でもエイトケン Δ^2 法は利用できる。

数列 $\{s_\nu\}$ が (9) を満たしているとき、Δ^2 法 $t_{\nu-2}$ の誤差は定理 1 より $c_2((\lambda_1 - \lambda_2)/(\lambda_1 - 1))^2 \lambda_2^{\nu-2}$ でリチャードソン補外 $T_1^{(\nu-1)}$ の誤差は定理 3 より $c_2((\lambda_2 - \lambda_1)/(1 - \lambda_1))\lambda_2^{\nu-1}$ である。$\lambda_1 = 1/4, \lambda_2 = 1/16$ のとき $t_{\nu-2} - s \risingdotseq -4(T_1^{(\nu-1)} - s)$ となる。

例 3 $s_\nu = 2^\nu \sin(\pi/2^\nu)$ にエイトケン Δ^2 法とリチャードソン補外を適用した際の誤差は表 1 のようになる。$t_{\nu-2} - s \risingdotseq -4(T_1^{(\nu-1)} - s)$, $(4 \le \nu \le 8)$ となっている。計算は gcc 4.1.2 の倍精度 (10 進 16 桁弱) で行った。

表 1: $s_\nu = 2^\nu \sin(\pi/2^\nu)$ を加速

ν	$s_\nu - \pi$	$t_{\nu-2} - \pi$	$T_1^{(\nu-1)} - \pi$
4	-2.0×10^{-2}	6.4×10^{-4}	-1.6×10^{-4}
5	-5.0×10^{-3}	3.9×10^{-5}	-9.7×10^{-6}
6	-1.3×10^{-3}	2.4×10^{-6}	-6.1×10^{-7}
7	-3.2×10^{-4}	1.5×10^{-7}	-3.8×10^{-8}
8	-7.9×10^{-5}	9.5×10^{-9}	-2.4×10^{-9}

8 ロンベルク積分法

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a, b]$ で C^∞ 級とする。区間 $[a, b]$ を n 等分した際 $I = \int_a^b f(x)dx$ に対する複合台形公式は $h = (b-a)/n, x_j = a + jh (j = 0, 1, \ldots, n)$,

$$T_n = h\left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + \frac{1}{2}f(b)\right)$$

である。

オイラー・マクローリンの公式により

$$T_n \sim I + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{B_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\right)h^{2j}$$

が成立する。したがって、

$$T_1, T_2, T_4, T_8, T_{16}, \ldots$$

にリチャードソン補外を適用することができる。

$\nu = 0, 1, \ldots$ に対し

$$\begin{aligned} & T_0^{(\nu)} = T_{2^\nu} \\ & T_k^{(\nu-k)} = T_{k-1}^{(\nu-k+1)} + \frac{T_{k-1}^{(\nu-k+1)} - T_{k-1}^{(\nu-k)}}{2^{2k} - 1} \\ & k = 1, \ldots, \nu \end{aligned} \tag{20}$$

により $\{T_k^{(\nu)}\}$ を計算する数値積分公式を**ロンベルク積分法** [5] という。

与えた許容誤差 $\epsilon > 0$ に対し、$|T_\nu^{(0)} - T_{\nu-1}^{(0)}| < \epsilon$ が成立するとき計算を停止し、$T_\nu^{(0)}$ を定積分の近似値に採用する

定理 4 (ロンベルク積分法の誤差)

関数 $f(x)$ は閉区間 $[a,b]$ で C^∞ 級とする。(20) は

$$T_k^{(\nu-k)} \sim I + \sum_{j=k+1}^{\infty} c_j \left(\prod_{i=1}^{k} \frac{2^{2i}-2^{2j}}{2^{2i}-1}\right)\left(\frac{b-a}{2^\nu}\right)^{2j}$$

を満たす。ここで

$$c_j = \frac{B_{2j}}{(2j)!}\left(f^{(2j-1)}(b) - f^{(2j-1)}(a)\right)$$

である。

証明 定理 2 より得られる。□

系 3 $\nu \to \infty$ のとき、次の漸近公式が成立する。

$$\begin{aligned} & T_k^{(\nu-k)} \\ = \;& I + (-1)^k c_{k+1} 2^{(k+1)(k-2\nu)}(b-a)^{2k+2} \\ & +o(2^{(k+1)(k-2\nu)}) \end{aligned}$$

例 4

$$\int_0^1 e^x dx = 1.71828\ 18284\ 59045$$

にロンベルク積分法を適用した結果を表 2 に示す。

表 2: $\int_0^1 e^x dx$ にロンベルク積分法を適用

ν	$T_0^{(\nu)}$	$T_1^{(\nu-1)}$
0	1.85914 09142 29523	
1	1.75393 10924 64825	1.71886 11518 76593
2	1.72722 19045 57517	1.71831 88419 21747
3	1.72051 85921 64302	1.71828 41546 99897

ν	$T_2^{(\nu-2)}$	$T_3^{(\nu-3)}$
2	1.71828 26879 24757	
3	1.71828 18422 18440	1.71828 18287 94530

$T_0^{(\nu)}$ は複合台形公式、$T_1^{(\nu-1)}$ は複合シンプソン公式である。8 分割 ($\nu = 3$) で $T_3^{(0)}$ の誤差は 3.35×10^{-10} であるので、9.5 桁正確な値が得られている。$T_3^{(0)}$ の系 3 による理論上の誤差は

$$\frac{B_8}{8!} 2^{-12}(e-1) \fallingdotseq 3.47 \times 10^{-10}$$

である。

W. ロンベルク (1909-2003) に生前インタビューを行った藤野清次九大教授は、ロンベルクがロンベルク積分法を思いついた際のエピソードを紹介している [7, p.75]。ある積分を複合シンプソン公式で計算しようとしたが、当時 (1950 年代前半) 使えるコンピュータの記憶容量は 30 語しかなく、精度が足りなかった。次に、ガウス型公式で計算しようとすると係数を記憶させるだけで記憶容量が一杯になった。そこで、複合台形公式を加速して精度を高める方法を思いついた。

ロンベルクの発見のきっかけにもなっているように、リチャードソン補外は記憶容量の使用を少なくすることができる。そのためには、$T_k^{(\nu-k)}$ の値を $T_{k-1}^{(\nu-k)}$ に上書きするようにプログラミングする。

ロンベルク積分法は数値積分の標準的な算法である。例 4 で用いた C 言語のプログラムは

`http://www.cis.twcu.ac.jp/~osada/rikei/`

においておく。

参考文献

[1] A.C.Aitken, On Bernoulli's numerical solution of algebraic equations, Proc. Roy. Soc. Edinburgh Ser A 46(1926), 289–305.

[2] 小川・平野、数学の歴史、朝倉書店、2003

[3] 長田直樹、数値微分積分法、現代数学社、1987

[4] L.F. Richardoson, The diferred approach to the limit, Part I – Single Lattice, Philos. Trans. Roy. Soc. London Ser. A 226(1927), 299-349.

[5] W. Romberg, Vereinfachte numerishe Integration, Kgl. Norsk. Forhandinger, 32(1955), 30-36

[6] 平山・下平・広瀬共編、関孝和全集、大阪教育図書、1974

[7] 藤野清次、数値計算の基礎、サイエンス社、1998

(おさだなおき/東京女子大学)