お話：数値解析 第2回
漸近展開

長田直樹

1 はじめに

数値計算において、数列の極限値を求めることに帰着させる場合がしばしばある。その際に無限項を計算することはできないので、極限値を有限項の値で代替するか、有限項の値から何らかの方法により極限値を推測する。後者の場合には、項数を増やしていく際の数列の挙動が分かると好都合である。数列の挙動を知るのに役立つ道具が漸近展開 (ぜんきんてんかい) である。

今回は漸近展開について話す。数値解析において漸近展開は、特殊関数の計算、定積分の誤差解析、収束の加速などで重要な役割を果たしている。

2 ランダウの O 記法

漸近展開を記述するのに有用なランダウの O 記法から説明する。特に断らないときは、変数 n, x はそれぞれ自然数、実数を表す。ϵ-δ 論法的な定義を【】内に書く。これは定理 1 の証明の中で用いる。【】内および定理の証明は飛ばして読んでも構わない。

実関数 $f(x), g(x)$ に対し、$x \to \infty$ とした際 $|f(x)/g(x)|$ が有界であるとき、
【定数 $C > 0, M > 0$ が存在し、$x > M$ となる任意の x に対し、

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

となるとき】

$$f(x) = O(g(x)), \quad (x \to \infty)$$

と表す。「$f(x)$ は $x \to \infty$ のとき、$O(g(x))$ のオーダーである」などと読む。$n \to \infty$ の場合も同様に定義する。

$|x|(\neq 0)$ が十分小さいとき $f(x)/g(x)$ が有界ならば、
【定数 $C > 0, \delta > 0$ が存在し、$0 < |x| < \delta$ となる任意の x に対し、

$$|f(x)| \leq C|g(x)|$$

となるとき】

$$f(x) = O(g(x)), \quad (x \to 0)$$

と表す。$x \to +0$ の場合も同様である。

O はランダウの O 記法という。文脈から明らかなときは、表現「$x \to \infty$」、「$x \to 0$」、「$n \to \infty$」などは省略される。

$|f(x)|$ が有界であることは、O 記法を用いると、$f(x) = O(1)$ と表される。

$f(x) - g(x) = O(h(x))$ のとき、

$$f(x) = g(x) + O(h(x))$$

と書く。

例 1 マクローリン展開を有限項で打ち切るときに O 記法が使われる。

1. $\dfrac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 + O(x^3), \quad (x \to 0)$
2. $\log(1+x) = x - \dfrac{1}{2}x^2 + O(x^3), \quad (x \to 0)$

例 2 $x \to +0$ のときの O 記法において、x を $1/x$ に置き換えると $x \to \infty$ のときの O 記法が得られる。

1. $\dfrac{1}{1+x} = \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{x^3} + O\left(\dfrac{1}{x^4}\right), \quad (x \to \infty)$
2. $\log(1+x) = \log x + \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x^2} + O\left(\dfrac{1}{x^3}\right), \quad (x \to \infty)$

証明 1. 例 1 の 1 において、x を $1/x$ に置き換え、両辺を x で割ればよい。

2. $\log(1+x) = \log x + \log(1+1/x)$ の右辺第 2 項に例 1 の 2 を用いる。□

例 3 アルゴリズムの計算量を表す場合に用いられる。

1. n 元連立一次方程式をガウスの消去法で解く際の乗除算回数は $n^3/3 + O(n^2)$ である。

2. n 個のデータを挿入法で整列する場合、平均の計算量 (比較の回数) は $O(n^2)$ である。

3 漸近展開

関数列 $\{\phi_k(x)\}_{k=0,1,2,\ldots}$ が、$k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し、

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi_{k+1}(x)}{\phi_k(x)} = 0$$

を満たすとき、$\{\phi_k(x)\}$ を**漸近列**という。

$f(x)$ を関数とし、$\{\phi_k(x)\}_{k=0,1,2,\ldots}$ を漸近列とする。数列 $\{c_k\}$ が存在して、$\nu = 0, 1, 2, \ldots$ に対し

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\nu} c_k \phi_k(x) + O(\phi_{\nu+1}(x)), \quad (x \to \infty) \tag{1}$$

が成立するとき、$f(x)$ は**漸近展開可能**であるといい、

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x), \quad (x \to \infty) \tag{2}$$

と書く。(2) を $f(x)$ の $\{\phi_k(x)\}$ に関する**漸近展開**、(2) の右辺を**漸近級数**という。

漸近展開 (2) の係数は

$$\begin{aligned} c_0 &= \lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{\phi_0(x)} \\ c_k &= \lim_{x\to\infty} \frac{1}{\phi_k(x)} \left(f(x) - \sum_{j=0}^{k-1} c_j \phi_j(x) \right), \\ &\quad k = 1, 2, \ldots, \end{aligned}$$

と一意的に定まる。漸近展開が一致しても関数が一致するとは限らない。例 4 を見よ。

漸近列、漸近展開は $n \to \infty, x \to +0$ の場合も同様に定義される。

$(f(x) - \phi(x))/\psi(x)$ が漸近展開 $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x)$ を持つとき、

$$f(x) \sim \phi(x) + \psi(x) \left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \phi_k(x) \right)$$

と表す。

4 漸近べき級数

漸近列 $\{x^{-k}\}_{k=0,1,2,\ldots}$ に関する漸近展開を**漸近べき級数**という。関数 $f(x)$ が**漸近べき級数展開**

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \tag{3}$$

を持つための条件は、$\nu = 0, 1, 2, \ldots$ に対し

$$S_\nu(x) = c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots + \frac{c_\nu}{x^\nu}$$

とおいたとき、

$$\lim_{x\to\infty} x^\nu (f(x) - S_\nu(x)) = 0 \tag{4}$$

が成立することである。(4) は O 記法を用いると

$$f(x) = S_\nu(x) + O\left(\frac{1}{x^{\nu+1}}\right)$$

と書ける。

ガンマ関数 $\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$ に関するスターリングの公式

$$\begin{aligned} \log \Gamma(x+1) &\sim \frac{1}{2}\log(2\pi) + (x + \frac{1}{2}) \log x \\ &\quad -x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{2k(2k-1)x^{2k-1}} \end{aligned} \tag{5}$$

は発散級数である。([2] に詳しい説明がある。) 係数に現れるベルヌーイ数 B_{2k} については次回に説明する。

ポアンカレ [5] は、公式 (5) が性質 (4) を満たすことに着目し、発散級数 (3) が (4) を満たすとき漸近級数 (série asymptotique) と名付け、漸近級数を線型微分方程式の研究に用いた。典型例を 5 節で取り上げる。

当初は発散級数のみが漸近級数の対象であったが、今日では漸近べき級数の定義に発散の条件を付けないことが多い。

例 4 $k = 0, 1, 2, \ldots$ に対し、

$$\lim_{x\to\infty} x^k e^{-x} = 0 \tag{6}$$

だから、e^{-x} の漸近べき級数は

$$e^{-x} \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots, \quad (x \to \infty)$$

である。定数関数 $f(x) = 0$ も同じ漸近べき級数を持つので、漸近展開が一致しても関数として一致するとは限らない例を与えている。

漸近べき級数の項別積分と項別微分については次の 2 つの定理が成り立つ。

定理 1 $f(x)$ が連続で、漸近べき級数展開

$$f(x) \sim c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots$$

を持つとき、

$$\int_x^\infty \left(f(t) - c_0 - \frac{c_1}{t} \right) dt \sim \frac{c_2}{x} + \frac{c_3}{2x^2} + \frac{c_4}{3x^3} \cdots$$

証明 条件より任意の $\nu \geq 3$ に対し、$C_\nu, M_\nu > 0$ が存在して、$x \geq M_\nu$ のとき

$$\left| f(x) - c_0 - \frac{c_1}{x} - \cdots - \frac{c_{\nu-1}}{x^{\nu-1}} \right| \leq \frac{C_\nu}{x^\nu} \qquad (7)$$

となる。$f(x) - c_0 - c_1/x$ は $x \to \infty$ のとき $O(1/x^2)$ なので $[M_\nu, \infty)$ で積分可能である。$x \geq M_\nu$ をとり、(7) の左辺の絶対値の中を $[x, \infty)$ で積分すると

$$\begin{aligned} & \left| \int_x^\infty \left(f(t) - c_0 - \frac{c_1}{t} \right) dt - \sum_{k=2}^{\nu-1} \frac{c_k}{(k-1)x^{k-1}} \right| \\ \leq \quad & \frac{C_\nu}{(\nu-1)x^{\nu-1}} \end{aligned}$$

となる。□

定理 2 $f(x)$ が連続微分可能で、$f(x), f'(x)$ が漸近べき級数展開を持てば、$f'(x)$ の漸近展開は $f(x)$ の漸近展開を項別微分して得られる。

証明 $f(x), f'(x)$ の漸近べき級数展開を

$$\begin{aligned} f(x) & \sim & c_0 + \frac{c_1}{x} + \frac{c_2}{x^2} + \cdots \\ f'(x) & \sim & d_0 + \frac{d_1}{x} + \frac{d_2}{x^2} + \cdots \end{aligned}$$

とする。$f'(x)$ に定理 1 を適用すると、

$$\begin{aligned} G(x) & = & \int_x^\infty \left(f'(t) - d_0 - \frac{d_1}{t} \right) dt \\ & \sim & \frac{d_2}{x} + \frac{d_3}{2x^2} + \frac{d_4}{3x^3} + \cdots \end{aligned}$$

となる。$G(x)$ は $-(f'(x) - d_0 - d_1/x)$ の原始関数だから

$$G(x) = -f(x) + d_0 x + d_1 \log x + c$$

と書ける。よって、

$$f(x) \sim c + d_0 x + d_1 \log x - \frac{d_2}{x} - \frac{d_3}{2x^2} - \cdots$$

漸近展開の一意性より

$$c = c_0, d_0 = d_1 = 0, d_2 = -c_1, d_3 = -2c_2, \ldots$$

以上より、証明が完成した。□

例 5 例 4 と同様の理由で $f(x) = e^{-x}\sin(e^x)$ の漸近展開は

$$e^{-x}\sin(e^x) \sim 0 + \frac{0}{x} + \frac{0}{x^2} + \cdots, \quad (x \to \infty)$$

である。一方、$f'(x) = -e^{-x}\sin(e^x) + \cos(e^x)$ は $x \to \infty$ のとき振動するため、漸近展開を持たない。項別微分できない例になっている。

線型微分方程式の解 y とその導関数 y' が漸近べき級数展開を持つときは定理 2 より、項別微分し係数比較によりべき級数解を求めることができる。5 節を見よ。

定理 3 $f(x)$ が $x = 0$ で C^∞ 級 (何回でも微分可能) ならばマクローリン展開

$$f(x) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k \qquad (8)$$

において、x を $1/x$ で置き換えた式

$$f\left(\frac{1}{x}\right) = \sum_{k=0}^\infty \frac{f^{(k)}(0)}{k! x^k}, \qquad (9)$$

は漸近べき級数である。(8) の収束半径が $R > 0$ のとき、(9) は $|x| > 1/R$ で収束する。

証明 (9) が (4) を満たすことより分かる。

例 6 $\log(1+x)$ のマクローリン展開から、つぎの漸近べき級数が得られる。

$$\log\left(1 + \frac{1}{x}\right) \sim \sum_{k=1}^\infty \frac{(-1)^{k-1}}{x^k}, \quad (x \to \infty)$$

右辺の級数は $|x| > 1$ で収束するので、$\sim$(漸近展開) は等号 $=$(級数展開) で置き換えることができる。

複素関数の漸近べき級数

$$f(z) \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{z^k}$$

は、領域 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \theta_1 < \arg z < \theta_2\}$ (このような領域を角領域という) において

$$\lim_{|z| \to \infty} z^\nu \left(f(z) - S_\nu(z) \right) = 0, \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

が成り立つときと定義する。ここで、

$$S_\nu(z) = \sum_{k=0}^\nu \frac{c_k}{z^k}$$

である。興味ある読者は [2, 3, 4] などを見よ。

5　微分方程式の漸近展開

5.1　解析解と漸近べき級数解

微分方程式

$$\frac{dy}{dx} - y = -\frac{1}{x} \tag{10}$$
$$x \to \infty \quad \text{のとき } y \to 0 \tag{11}$$

の一般解は

$$y = e^x \left(-\int_a^x \frac{e^{-t}}{t} dt + C \right) \tag{12}$$

である。(12) は 2 つの定数 a, C を含んでいるが、a を変化させると C も変化するので、任意定数は 1 つである。条件 (11) より、$a = \infty, C = 0$ となるので、(10)(11) の解は

$$y = e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt \tag{13}$$

である。指数積分

$$\mathrm{Ei}(x) = -\int_{-x}^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt, \quad (x < 0)$$

を用いると、(13) の右辺は $-e^x \mathrm{Ei}(-x)$ と表せる。

次に、(10) が漸近べき級数解

$$y \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{c_k}{x^k} \tag{14}$$

を持ち、y' は連続で漸近べき級数を持つと仮定して漸近べき級数解を求める。定理 2 より項別に微分できるので、

$$y' - y \sim -c_0 - \frac{c_1}{x} - \sum_{k=2}^\infty \frac{(k-1)c_{k-1} + c_k}{x^k} \tag{15}$$

となる。(10) と (15) の係数を比較すると

$$c_0 = 0, c_1 = 1,$$
$$c_k = -(k-1)c_{k-1} \quad k = 2, 3, \ldots,$$

となるので、$c_k = (-1)^{k-1}(k-1)!, k = 1, 2, \ldots$ が得られる。そこで、

$$\sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

が漸近べき級数になることを示す。

部分積分を繰り返すことにより、

$$\begin{aligned}
\int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt &= \left[-\frac{1}{t} e^{-t} \right]_x^\infty - \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t^2} dt \\
&= \sum_{k=0}^{\nu+1} \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} e^{-x} + R_{\nu+2}(x) \\
&\quad \nu = 0, 1, 2, \ldots \\
R_{\nu+2}(x) &= (-1)^{\nu+2} \int_x^\infty \frac{(\nu+2)! e^{-t}}{t^{\nu+3}} dt
\end{aligned}$$

$x \le t < \infty$ のとき $0 < e^{-t} \le e^{-x}$ だから

$$|R_{\nu+2}(x)| \le (\nu+2)! e^{-x} \int_x^\infty \frac{dt}{t^{\nu+3}} = \frac{(\nu+1)! e^{-x}}{x^{\nu+2}}$$

となる。よって、

$$\left| \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt - \sum_{k=0}^\nu \frac{(-1)^k k! e^{-x}}{x^{k+1}} \right| \le \frac{2(\nu+1)! e^{-x}}{x^{\nu+2}} \tag{16}$$

(16) の両辺に e^x を掛けると

$$e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt = \sum_{k=0}^\nu \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} + O\left(\frac{1}{x^{\nu+2}} \right)$$

となるので、

$$y \sim \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \tag{17}$$

は (13) の漸近べき級数であり、(10) の漸近べき級数解である。

5.2　数値解

$x > 0$ を固定したとき、

$$\lim_{k \to \infty} \frac{k!}{x^{k+1}}$$

は $+\infty$ に発散するので、(17) の級数は発散する。

$$e_\nu(x) = \frac{2(\nu+1)!}{x^{\nu+2}}$$

とおくと、

$$\frac{e_{\nu+1}(x)}{e_\nu(x)} = \frac{\nu+2}{x} \tag{18}$$

が成り立つので、$e_\nu(x)$ は $x \ge 1$ を固定したとき、$\nu = \lfloor x-1 \rfloor$ で減少から増加に転じるため、$\nu = \lfloor x-1 \rfloor$ の前後で

$$\left| e^x \int_x^\infty \frac{e^{-t}}{t} dt - \sum_{k=0}^\nu \frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}} \right|$$

表 1: $S_\nu(15)$ の値と誤差

ν	$S_\nu(15)$	誤差	$e_\nu(15)$
0	0.06667	0.00395	0.00889
1	0.062222	-0.000498	0.00119
2	0.062815	9.45×10^{-5}	0.000237
3	0.0626962	-2.40×10^{-5}	6.32×10^{-5}
		中略	
12	0.062720391	1.12×10^{-7}	4.27×10^{-7}
13	0.062720178	-1.01×10^{-7}	3.98×10^{-7}
14	0.062720377	9.79×10^{-8}	3.98×10^{-7}
15	0.062720177	-1.01×10^{-7}	4.25×10^{-7}

は最小になると考えられる。($\lfloor x\rfloor$ は x を越えない最大の整数を表す。高校数学にでてくる $[x]$ と同じである。)

$x\geq 1$ にたいする (13) の近似値は、$\nu=\lfloor x-1\rfloor$ をとり、

$$S_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{(-1)^k k!}{x^{k+1}}$$

を計算すると誤差の絶対値は $e_\nu(x)=2(\nu+1)!/x^{\nu+2}$ より小さくなる。$x=15$ における解 $-e^{15}\mathrm{Ei}(-15)=0.0627202791074092$ の近似値を $S_\nu(15)$ で求めた値と誤差、および誤差の上界 $e_\nu(15)$ は表 1 のようになる。誤差の絶対値は $\nu=14$ のとき、誤差の上界は $\nu=13,14$ のとき最小である。

発散級数 (17) の最初の 15 項の部分和は (13) の $x=15$ における近似値を有効桁数 5.8 桁与えている。

6 まとめ

漸近べき級数

$$f(x)\sim\sum_{k=0}^{\infty}\frac{c_k}{x^k}$$

が発散するとき、$f(x)$ の近似値を部分和

$$S_\nu(x)=\sum_{k=0}^{\nu}\frac{c_k}{x^k}$$

により計算する場合の注意事項をまとめておく。

1. $\lim_{\nu\to\infty} S_\nu(x)$ は存在しない。
2. $|f(x)-S_\nu(x)|$ は、ある ν に対し最小になり、それ以上によい近似値は得られない。
3. ν の最適値は x により定まる。
4. x が小さいときはよい近似値が得られないことが多い。このときは、$x\to\infty$ での漸近べき級数ではなく、マクローリン展開、あるいは最良近似などの近似式の利用を考える。

参考文献

[1] 青木貴史、「大きなパラメータ」は魔法の虫眼鏡、数学の楽しみ 24、pp.57–71、日本評論社、2001

[2] 真島秀行、漸近解析入門、数学の楽しみ 24、pp.16–35、日本評論社、2001

[3] F.W.J.Olver, Asymptotics and special functions, Academic Press, 1974

[4] 大久保謙二郎、河野実彦、漸近展開、教育出版、1976

[5] H. Poincaré, Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires, Acta Mathematica, 8(1886), 295-344.

(おさだなおき/東京女子大学)