数学史研究 III 期 1 巻 2 号 (2022), 45-71

論　文

関孝和編撰「開方算式」について *†

長田直樹 ‡

1.　はじめに

関孝和編撰「開方算式」は十商[1]についての稿本で、全文が『大成算経』巻之三にほぼ含まれている。従来、「開方算式」は関孝和の著作[2]で、『大成算経』巻之三開方第三は「開方飜変之法」と「開方算式」を「融合して整然としたものである」[5, p.33] と考えられていた。

近年、「それら [「求積」と「開方算式」] は『大成算経』からの抜粋と考えられる」[3] [18, p.137]、あるいは「現時点では『開方算式』の著者を関孝和のみに比定する結論を下すことは保留したい」[8]、さらには「「開方算式」の著者 (表向きは関であるが、おそらくは建部賢弘)」[4][9, p.278] など従来と異なる説が出されている。

本論文では、「開方算式」の参照可能な 10 写本を精査し、5 写本の書写者を特定あるいは推定する。写本相互の相違点を調べ、「開方算式」の写本群は 2 系統に分けられることを示す。そして、「開方算式」の原本を復元するとともに、「開方算式」の復元した原本と『大成算経』巻之三を照合し、「開方算式」と『大成算経』巻之三の関係を明らかにする。

朱墨が用いられている写本の正の算木は黒、負の算木は正の算木に斜線をつけたものに置き換えて表す。「開方算式」の文字の位置は、インターネットで公開されている林集書

* 受理日：2022 年 2 月 14 日、改定稿受理日：2022 年 4 月 27 日、採択日：2022 年 12 月 7 日

† 本論文の一部は、2015 年 11 月 7-8 日に国文学研究資料館で開催された国際会議 The Second International Cooperative Studies on the Scientific Documents in East Asia Featuring Pre-modern Japan (近世東アジアの科学文献に関する第 2 回国際会議) において “Relationship between 開方算式 and the volume three of 大成算経” として口頭発表した。

‡ osada@lab.twcu.ac.jp

1 課商、窮商、通商、畳商、冪商、乗除商、増損商、加減商、報商、反商を十商という。

2 たとえば『関孝和全集』では「開方算式」を「この書は孝和の著作中、最も記述整然たるものの一つである」[16, p.145] として関孝和の著作として採録している。

3 A. Horiuchi “L’un d’eux continent des renvois explicites à d’autres chapitres du *Taisei Sankei*, si bien qu’on peut le considérer comme un extrait de ce dernier”.

4 S. W. Zagier and Don Zagier “the author (ostensibly Seki, but probably Takebe Katahiro) of the *Configurations for the Extraction of Roots* [開方算式 *Kaihō Sanshiki*]”.

© 2022 日本数学史学会

表 1 「開方算式」の諸写本

所蔵	請求番号	注記
国会図書館	244-137	河村五美寄贈、河村幸佐(こうすけ)写、朱墨有り、1 丁訓点、10 行 20 字、
学士院	134	遠藤利貞旧蔵、朱墨無し、訓点無し、10 行 20 字
学士院	230	角法定乗と合冊、外題「別傳角法定乗開方算式」、泉田源三郎寄贈、菊池長良写、朱墨無し、1 丁オ訓点、12 行 20 字
東大	T20-596	朱墨無し、訓点無し、10 行 20 字
東大	T20-920	川北朝鄰(ともちか)旧蔵、菅野元健(もとたけ)写、朱墨無し、訓点無し、9 行 21 字
東北大	岡本写 19	朱墨有り、1 丁オ訓点、10 行 20 字
東北大	林集書 657	旧松永文庫、松永貞辰(さだとき)写、朱墨有り、1 丁オ訓点、12 行 20 字、
東北大	林文庫 1075	朱墨無し、訓点無し、10 行 20 字
宮内庁書陵部	557-46	寛政暦書等暦算書 330、朱墨有り、訓点なし、10 行 20 字
筆者 (長田)		金子昌良写、朱墨無し、1 丁オ訓点、12 行 20 字

657 に基づく[5]。文字の位置は、一丁オモテ 10 行目の割注左行を一オ 10L と略し、4 行目の割注右行は 4R と略す。

引用文中、( ) と【 】は原文のもの、[ ] は引用者の補足である。スラッシュ/は改行を表す。引用文が漢文の場合、必要に応じて読み下し文を ( ) 内につける。

2. 「開方算式」の諸写本

「開方算式」は山路主住に伝わらなかった[6]ため、七部書に入ってないと推察される。そのため今日伝わっている写本は少ない。国文学研究資料館の日本古典籍総合目録データベースには、「開方算式」の写本として「国会，学士院，東大（二部），東北大岡本，東北大林【複】」、「角法 [定] 乗開方算式」の写本として「学士院」の計 8 点が収録されている。

[5] 公的機関がインターネットで公開している 3 写本のうち岡本写 19 と林集書 657 は誤写と考えられる箇所が多く、林文庫 1075 は落丁がある。

[6] 『関算四伝書』にも、山路之徽「山路蔵書」(関算後伝 109) にも「開方算式」は見えない。

これら以外に宮内庁書陵部所蔵の「寛政暦書等暦算書」[7]の 1 冊に「開方算式」がある。さらに、筆者が古書店で入手した写本[8]があり、計 10 点が参照可能である。「開方算式」の参照可能な写本を表 1 に示す。旧蔵者あるいは書写者がわかるものは注記に記す。さらに、朱墨の有無、訓点の有無、半丁の行数、1 行の文字数も記す。表 1 のうち、インターネットで影印が公開されているのは東北大の 3 点と筆者蔵である。

「開方算式」の諸写本の書写者を特定あるいは推定した理由を以下に記す。

244-137 河村五美が国立国会図書館に寄贈した「消息式」と「立円率」は河村幸佐が明治八 (1875) 年に書写したものであるので、国会図書館 244-137 も河村幸佐が明治期に書写した写本の可能性が高い。早稲田大学図書館の「截積之傳」[9](ニ 02_00708) も河村幸佐が明治八 (1875) 年に書写したもので、「開方算式」と同筆である。

学士院 230 泉田源三郎が日本学士院に寄贈した和算書のうち書写者が判明しているものに「方布式招差」(学士院 2570) がある。書写奥書は「菊池善右衛門[10]書写之/于時文化十四 [1817] 年霜月下旬」であるので、書写者は菊池長良 (1786-1872) である。「安政 5 年 (1858) 算書 273 巻、天文書 65 巻、あはせて 338 巻を [菊池長良は] 仙臺藩伊達家の一門、泉田家に獻上したが、その總目録が日本學士院にある」[14, p.232] ので、泉田が寄贈した和算書は菊池長良の著書、写本、および蔵書と考えられる。

T20-920 筆跡から菅野元健と分かる。菅野の写本は特徴のある筆跡で、独自のフォーマットを用いることが多い。たとえば、関孝和編「解見題之法」の流布本は 10 行 18 字であるが、菅野の写本の「解見題之法」(東北大狩野 7.19943.1) は 10 行 20 字である。また、『大成算経』の榊原霞洲の写本 (東大 T20-71)、関算後伝 35、京大 10 冊本、京大 20 冊本はいずれも 12 行 20 字であるが、菅野の写本の『大成算経』(理科大物 423-1) は 10 行 20 字である。したがって、「開方算式」(東大 T20-920) が独自のフォーマットで書写されているのは驚くにあたらない。菅野元健の生卒年は不明であるが、寛政十 (1798) 年「補遺解伏題生尅篇」を著した。

林集書 657「開方算式」(林集書 657) は「解見題之法」(林集書 649) と同筆である。林集書 649 の書写奥書に「江戸於御屋敷写之ナリ/明和六 [1769] 年丑之四月廿二日写之畢」と

---

[7] 1915 年頃から 2005 年まで「失われた」状態であった。詳細は小林龍彦 [1, pp.61-64] を見よ。

[8] `https://www.lab.twcu.ac.jp/~osada/manuscripts_seki/manuscripts_seki.html` で公開している。

[9] `https://archive.wul.waseda.ac.jp/kosho/ni02/ni02_00708/ni02_00708_0016/ni02_00708_0016.pdf` で公開されている。

[10] 藤原松三郎は「(菊池長良は) 善右衛門と称したこともあると見える」[14, p.232] と注記している。

見え、花押が記されているので、「開方算式」(林集書 657) の書写者は松永貞辰 (1751-1795) である。

筆者蔵 筆者蔵の「開方算式」は金子昌良写「算脱験符」(筆者蔵)[11]と同筆であることから金子昌良による写本であることが分かる。「算法整数起源抄」(藤原集書 161) の編者名は「菊池宇太之丞長良閲/門人金子左右平編輯」であるので、金子昌良は菊池長良の門弟である。金子は『當世改算記』(1847 自序、林集書 1331) などの著作がある。

その他 学士院 134、東大 T20-596、岡本写 19、林文庫 1075、宮内庁書陵部 557-46 については、書写者についての手掛かりはない。

3. 「開方算式」写本群の系統

「開方算式」の 10 写本の主な相違点を表 2 に示す。岡本写 19(および林集書 657) が他の 8 写本と異なっている箇所は比較的多い[12]ので、岡本写 19(と林集書 657) のみ異なっている大部分の箇所は取り上げてない。「開方算式」の写本間の相違は表 2 および岡本写 19 あるいは林集書 657 の間違っている箇所以外にも少なからずあるが、「開方算式」の写本群を系統に分ける上、および「開方算式」と『大成算経』の関係を調べる上では影響しないので割愛する。

「開方算式」の写本群は、表 2 に示したような相違点があるので、本文の校合 (文字や数字の異同、訓点や朱墨の有無[13]) のみで表 3 の 2 系統[14](A 系統はさらに 3 系統) に分けることができる。

---

[11] 書写奥書に「天保十五甲辰 [1844] 冬再写之/左右平昌良」とあることから金子昌良による写本である。左右平は金子の字あるいは号である。
`https://www.lab.twcu.ac.jp/~osada/manuscripts_seki/manuscripts_seki.html` で公開している。

[12] 一ウ 2(一丁裏 2 行) の「適數」は、岡本写 19 と林集書 657 のみ「遍數」と異なっており、一ウ 4R(一丁裏 4 行目割注右行) の「任」が岡本写 19 と林集書 657 のみ「位」と異なっている。とくに岡本写 19 は、小数点のある算木の桁が揃ってない。たとえば、課商第 3 例 $578.640625 - 192.1875x + 22.35x^2 - x^3 = 0$ が $5.78640625 - 1.921875x + 0.2235x^2 - x^3 = 0$ となっている。(林集書 657 は正しい。)

[13] 訓点や朱墨の有無は表 1 に示した。

[14] 同系統とはそれに属すすべての写本は 1 つの写本 a の子孫本であるが、他の系統の写本は a の子孫本ではないことをいう。(データ構造の用語を用いると写本系統樹の木の部分木である。) 写本 a をその系統の祖本という。一般に同系統の任意の 2 つの写本を取ったとき、一方が他方の先祖本であるとは限らない。同様に、写本系統樹の上では祖本に近くても、書写時期が早いといえない。さらに、祖本との相違点が少なくても、書写時期が早いともいえない。たとえば、紀貫之自筆の「土左日記」(「土佐日記」の古写本での表記) の藤原定家による写本と定家の子の為家の臨模本 (親本をそっくりに写した本)、為家写本の江戸中期の臨模本 (青谿書屋(せいけいしょおく)本) を比較したとき、江戸中期の写本の方が、定家写本より祖本に近いことが判明

表 2 「開方算式」の写本間の主な相違点

箇所 (林集書 657)	岡本写 19	林集書 657	林文庫 1075	学士院 134	学士院 230	東大 T20 596	東大 T20 920	書陵部	国会図	筆者蔵
一オ 10L	大	大	大	大	大	大	大	太	太	大
一オ 11L	一	一	二	二	一	二	二	一	一	一
一ウ 4R	位	位	任	任	任	任	任	任	任	任
一ウ 5	太	太	大	太	太	太	太	太	大	太
二オ 7	自	自	有	有	自	自	自	自	自	自
二オ 8	大	大	太	太	太	太	太	大	太	太
二ウ 8	大	太	太	太	太	太	太	太	太	太
三オ 6R	二	二	三	三	立	三	三	三	三	立
三ウ 4 実	○=卌	○=卌	○=卌	○=卌	○=卌	○=卌	○=卌	○=卌	○=卌	○=卌
三ウ 5R	箇	箇	欠字	個	個	箇	箇	箇	箇	個
四ウ 2L	與	與	具*	具*	具*	具*	具*	具*	具*	異
六ウ 7 廉	三卌⊥卌	=卌⊥卌	=卌⊥卌	三卌⊥卌	=卌⊥卌	=卌⊥卌	=卌⊥卌	=卌⊥卌	=卌⊥卌	=卌⊥卌
七オ 8	三卌 =π 十 一	三卌 =π 十 一	落丁	欠落	三卌 =π 十 一	欠落	欠落	三卌 =π 十 一	三卌 =π 十 一	三卌 =π 十 一
八オ 7R	三	三	二	二	三	二	二	三	三	三

具* は具の各種異体字を表す。

A 系統 一オ 11L(一丁表(おもて) 11 行目割注左行) は一[15]と誤っており、八オ 7R は三[16]と誤っている。七オ 8 の欠落はない。A 系統はさらに 3 系統に分けることができる。

A_1 系統 一ウ 4R の「任」[17]を「位」、二オ 8 の「太」[18]を「大」などとする共通の誤りが

している [7, pp.222-231] [11, pp.40-41]。写本系統樹の上での祖本との近さを祖本から何回の転写により得られたか (木構造の深さ) により定義すると、定家写本と為家写本は転写回数 1、青谿書屋本は転写回数 2 である。なお、転写回数を知ることは通常は不可能である。

15 「級數内減二餘」が正しいが、「級數内減一餘」となっている。詳細は、6 節で述べる。

16 「分母三 [中略] 分母再乗冪二十七」($3^3 = 27$) が正しいが、「分母三 [中略] 分母再乗冪三十七」としている。

17 「乃多少不定任意」が正しい。

18 「餘太多」が正しい。

表 3 「開方算式」の写本群の系統

系統	A_1	A_2	A_3	B
写本	岡本写 19 林集書 657	学士院 230 筆者蔵	国会図書館 書陵部	林文庫 1075 学士院 134 東大 T20-596 東大 T20-920
行数	10 行/12 行	12 行	10 行	10 行/10 行/10 行/9 行
字数	20 字	20 字	20 字	20 字/20 字/20 字/21 字
訓点	1 丁オ	1 丁オ	1 丁/なし	なし
朱墨	有り	なし	有り	なし

ある。半丁の行数は 10 行と 12 行という違いはあるが、1 行の文字数はともに 20 字である。12 行で書写されている林集書 657 の 1 つの先祖本の書写者が 12 行に書き換えたと思われる。1 行の文字数が同一のときは、割注も含め改行位置は変わらないので、書写の際にそれほどの支障にはならない。六ウ 7 廉は岡本写 19 が正しいが、七オ 8 実は林集書 657 が正しい。

A_2 系統 三オ 6R の「三」[19]が「立」になり、三ウ 5R の「箇」が「個」[20]になっている。学士院 230 の書写者菊池長良は筆者蔵の書写者金子昌良の師であるので、学士院 230 は筆者蔵の近縁本であるが、親本あるいは兄弟本 (親本が共通) の可能性もある。

A_3 系統 一オ 10L の「大」[21]が「太」になっている。244-137 は明治期の写本と考えられ、明治以降の和算書が書陵部の蔵書になることは考えにくいので、書写時期は書陵部本の方が古いと思われる。

B 系統 一オ 11L は二と正しく、八オ 7R も二と正しく、七オ 8 の乗商式は欠落 (林文庫 1075 は、7 丁が落丁しているので欠落していると断定はできない) しているという共通点がある。七オ 8 の乗商式が欠落していることを除き、B 系統の方が A 系統より原本「開方算式」との違いが少ない。本文テキスト (文字データと数字データ) が原本に最も近いのは東大 T20-920 と考えられる。東大 T20-920 の半丁が 9 行で 1 行が 21 字と B 系統の 3 写本と異なる理由は、書写者が菅野元健であることによる。

19 「負三箇」が正しい。
20 別字であるが、意味は同じ。
21 「大誤也」が正しい。6 節で述べる。

2 節で述べたように、菅野は写本作成の際に親本のフォーマットを必ずしも踏襲しない。

表 2 と表 3 より、A 系統と B 系統で祖本が異なり、B 系統の祖本には訓点と朱墨がなかったと考えられる。A 系統の祖本 (の先祖本) の書写者の一人が一オ 11L を一、八オ 7R を三と誤ったのであろう。B 系統の祖本は、おそらく原本からの転写回数は 1 回で、建部賢弘 (か建部賢明) が作成した[22]と思われる。

4. 「開方算式」の原本の復元

「開方算式」の写本間で相違が見られるのは、岡本写 19 と林集書 657 を除く 8 本の写本では、1 丁につき数文字程度である。5 節および 9 節で見るように、課商第 3 例では −20.1075 となるべきところが 10 写本すべて −2.01075 と 1 桁誤っており、窮商第 1 例で 0.00000099505<u>124</u> となるべきところが 10 写本すべて 0.000000995051<u>234</u> と誤っている。書写の際、検算を行わず親本通り書写していたことを示している。

また、文字を誤写せずに親本どおり書写していたか否かを、6 節で重要になる「大」と「太」について、誤写の割合がどの程度であるかを見ておく。「開方算式」では「大」および「太」は表 2 で取り上げた「大誤也」(一オ 10L)、「太過則」(一ウ 5)、「餘太多」(二オ 8) および「商太過」(二ウ 8) の 4 箇所に登場する。「大誤也」を「太誤也」、「太過則」を「大過則」、「餘太多」を「餘大多」、「商太過」を「商大過」と誤写したのは、それぞれ 2 割、2 割、3 割、1 割である。平均して 8 割は正確に書写している。B 系統の写本に限ると林文庫 1075 が 1 箇所「太過則」を誤写しただけで、誤写率は 1 割未満である。『大成算経』巻之三の当該箇所は、「変技」、関算後伝 38、京大 10 冊本はいずれも「太」のままで誤写はない。

これから分かることは、10 写本においては、書写者はフォーマット (半丁の行数、1 行の文字数) を除き、親本を忠実に書写[23]しており、相違点は誤写が原因で、意図的な書き

[22] 関孝和編「解隠題之法」の朱墨が用いられた写本は発見されてないが、関が貞享二 (1685) 年に編集した稿本は「解隠題之法」を除き、すべて朱墨が使われている。そして、「解隠題之法」を発展させて取り込んだ『大成算経』巻之三と巻之十七にも朱墨が使われている。したがって、「解隠題之法」を関が編集したときは朱墨が使われていたが、享保十一 (1726) 年に山路主住が書写 [3] した写本の親本 (建部賢弘から中根元圭に授けられた写本) には朱墨が使われてなかったと考えられる。

[23] 「開方算式」の内題は 10 写本すべて「開方筭式」である。このことは、「開方算式」の写本は時代が下っても親本通りの転写が続いたことを示唆している。一方、関孝和編「病題明致之法」の内題は、俗字や同字を区別すると、「病題明致之法」、「病題明致之浚」、「病題明致法」、「病題明致浚」、「病題明致算法」、「病題明致筭法」、「病題明致筭浚」、「病題明致」と 8 通りが確認できる [2]。

換え (訂正) は行われなかったと考えられる。すなわち、転写の際に誤写により文字が変わることはあるが、訂正により文字が変わることはないと判断できる。

前節で見たように、「開方算式」の写本群は A 系統と B 系統に分かれ、A 系統は誤写が散見される。「開方算式」の原本の復元を次のように行う。

1. A 系統の 4 写本が一致する文字または数字は、それを原本の文字または数字とする。
2. A 系統の 4 写本が一致しない文字または数字は、漢文または数学として正しい方を採用する。
3. A 系統の欠落している算木式は、B 系統の写本の算木式のうち数学的に正しいものを採用する。

上記の方法で復元した原本を表 4 に示す。

「開方算式」原本の序文、課商の第 2 例の途中まで、窮商の第 1 例まで、および通商を復元したものはそれぞれ、図 1, 図 2, 図 6 および図 9 に示す。畳商以下は「開方算式」の成立解明につながるような違いはないので、復元は割愛する。

5. 「開方算式」の復元した原本と『大成算経』巻之三の写本

本論文で比較に用いる『大成算経』巻之三の写本は「変技」(東大 T20-67 ; 旧南葵文庫)、『大成算経』(宮城県図書館 ; 関算後伝 38) および『大成算経』(京大数学教室 ; 和/た/005 ; 京大 10 冊本) を用いる。「変技」は榊原霞洲が、『大成算経』巻之三に書名を変更する前の稿本をおそらく建部賢弘から借りて書写した[24]と考えられる。関算後伝 38 の書写者は不明であるが、信頼のおける写本の 1 つである。京大 10 冊本[25]は、平千里が書写した写本 (狩野 7.31453) を底本にして「會門生四人」によるグループが校訂したもので、数学的に最も正確である。

「開方算式」と『大成算経』巻之三の相違点を表 5 に示す。「開方算式」の 10 写本すべてが一致しているときは、「開方算式」の 10 写本と復元した原本を 1 つの欄で表す。『大成算経』巻之三の 3 写本についても同様である。型の I, II, III は以下の場合を表す。

I「開方算式」の復元した原本は、「変技」および『大成算経』(関算後伝 38) と異なる。

[24] 佐藤賢一 [8, pp.327-335] を見よ。

[25] 京大数学教室は『大成算経』を 10 冊本と 20 冊本の 2 セット所蔵しており、10 冊本の方である。『国書総目録』には「嘉永六写一〇冊」とある。影印は京都大学貴重資料デジタルアーカイブとしてインターネットで公開されている。https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00000056

表 4 「開方算式」の写本間の主な相違点における原本の復元

箇所 (林集書 657)	林文庫 1075	学士院 134	東大 T20 596	東大 T20 920	復元原本	前後の文字など
一オ 10L	大	大	大	大	大	大誤也
一オ 11L	二	二	二	二	二	級數内減二餘
一ウ 4R	任	任	任	任	任	乃多少不定任意
一ウ 5	大	太	太	太	太	太過則
二オ 7	有	有	自	自	自	自廉命
二オ 8	太	太	太	太	太	餘太多
二ウ 8	太	太	太	太	太	商太過
三オ 6R	三	三	三	三	三	負三箇
三ウ 4 実	○=𝍸	○=𝍸	○=𝍸	○=𝍸	○=𝍸	$4-3.71=\underline{0.29}$
三ウ 5R	□	個	箇	箇	箇	四箇、□は欠字
四ウ 2L	具*	具*	具*	具*	具*	具負者, 具* は具の各種異体字
六ウ 7 廉	=𝍸⊥𝍸	≡𝍸⊥𝍸	=𝍸⊥𝍸	=𝍸⊥𝍸	≡𝍸⊥𝍸	$0-5371X+\underline{4368}X^2-252X^3$
七オ 8	落丁	欠落	欠落	欠落		$-54+27x-6x^2+x^3=0$
八オ 7R	二	二	二	二	二	再乘冪二十七

II「開方算式」の復元した原本は、「変技」および『大成算経』(関算後伝 38) と一致し、それらすべて数学的に誤っているが、京大 10 冊本は数学的に正しい。

III「開方算式」の復元した原本と「変技」および『大成算経』(関算後伝 38) は異なり、それらすべて数学的に誤っているが、京大 10 冊本は数学的に正しい。

数学的に正しいか誤っているかは、9 節と 10 節で述べる。

「開方算式」と『大成算経』で明確に異なる記述は一オ 9L(「者」と「皆」)、一オ 10L(「大」と「太」)、例題 $16-8x+x^2=0$ の有無、四ウ 1(「百」と「古」) である。また、「開方算式」と「変技」と『大成算経』(関算後伝 38) で数学的に共通の誤りは三オ 1 方 (-20.1075 を -2.01075 と誤る)、三オ 4 方 (-20 を -2 と誤る) と三ウ 10L ($0.00000099505\underline{124}$ を

表 5　「開方算式」と『大成算経』巻之三の相違点

箇所 (林集書 657)	『大成算経』			「開方算式」											型
	東大 T2067	関算後 38	京大 和/た 005	岡本写 19	林集書 657	林文庫 1075	学士院 134	学士院 230	東大 T20596	東大 T20920	書陵部	国会図	筆者蔵	復元原本	
一オ 9L	皆			者											I
一オ 10L	太			大	大	大	大	大	大	大	太	太	大	大	I
一ウ 12	例題無			例題 $16-8x+x^2=0$ 有り											I
三オ 1 方	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸											II
三オ 4 方	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸											II
三ウ 10L (末尾 3 桁)	二 三 四	二 三 四	一 二 四	二 三 四											II II
四オ 4 廉	𝍸	𝍸	𝍸	𝍸											III
四ウ 1	古			百											I

0.00000099505<u>1234</u> と誤る) である。これらの点を調べることで「開方算式」と『大成算経』巻之三の関係を明らかにする。

6.　「開方算式」冒頭

「開方算式」の復元した原本の冒頭を図 1 に示す。10 行 20 字の場合 1 丁裏 1 行目までになり、12 行 20 字の場合は編者名の後に 1 行空行が入るので、1 丁表(おもて)と一致する。

内題は 10 写本すべて「開方筭式」である。関孝和は『発微算法』で「發微算法序」を「頃歳算學行于世」で始めているように「算」の字を用いている[26]が、建部賢弘は『綴術算経』で「綴術筭經自序」というように「筭」の字を用いている。建部賢明は「建部氏伝記」で「算法大成」および「大成算経」と「算」の字を用いているが、『大成算経』首編の算数論では「筭數論」としている。用字法からは、内題は関よりは建部賢弘か賢明が与えた可能性が高いといえる。編者名は 10 写本すべて「關孝和　編撰」[27]である。

[26] ただし、外題は「發微筭法」、尾題は「發微筭法終」であるが、これらは版元 (本屋嘉兵衛) がつけたと思われる。

[27] 編者名が「關孝和　編撰」となっている写本に「求積前編」(関算前伝 83) がある。「求積前編」は源東岡

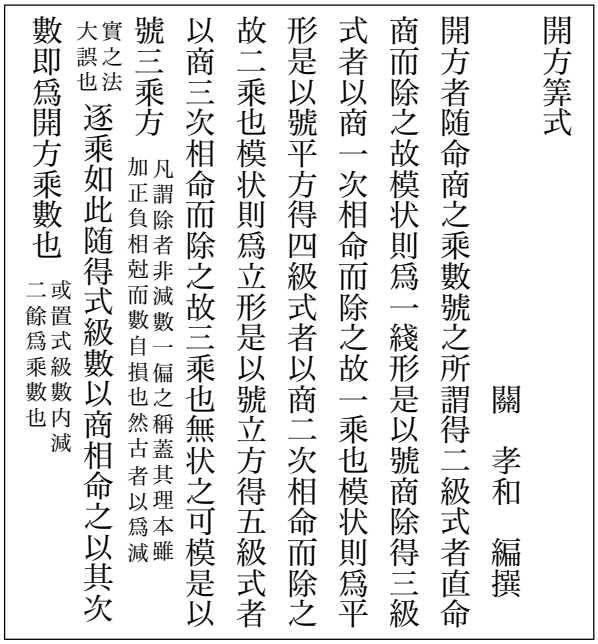

開方筭式
關　孝和　編撰
開方者隨命商之乘數號之所謂得二級式者直命
商而除之故模状則爲一綫形是以號商除得三級
式者以商一次相命而除之故一乘也模状則爲平
形是以號平方得四級式者以商二次相命而除之
故二乘也模状則爲立形是以號立方得五級式者
以商三次相命而除之故三乘也無状之可模是以
號三乘方　凡謂除者非減數一偏之稱蓋其理本雖加正負相尅而數自損也然古者以爲減實之法大誤也　逐乘如此隨得式級數以商相命之以其次
數即爲開方乘數也　或置式級數内減二餘爲乘數也

図 1　「開方算式」の復元した原本の冒頭

最初の割注 (図 1 の 9-10 行目) に『大成算経』との相違が 2 箇所ある。相違部分に下線を引く。

> 凡謂除者非減數一偏之稱蓋其理本雖加正負相尅而數自損也然古<u>者</u>以爲減實之法<u>大</u>誤也　「開方算式」
>
> (凡そ除と謂(いふ)は減数一偏の称にあらず。蓋しその理本(もとより)加といへども正負相ひ尅して、数自ら損すなり。然して古(いにしへ)実を減ずるの法と為すを以てするは大(おほいに)誤なり。)
>
> 凡謂除者非減數一偏之稱蓋其理本雖加正負相尅而數自損也然古<u>皆</u>以爲減實之法<u>太</u>誤也　『大成算経』巻之三
>
> ([前半は上と同じ] 然して古きは皆実を減ずるの法と為すを以てするは太(はなはだ)誤なり。)

「開方算式」の「古者 (いにしへ/こしゃ)」は 10 写本すべて同じであるが、『大成算経』

(松永良弼) 著述「求積後編」(関算前伝 84) と区別するため「前編」を付けたと考えられる。「求積前編」は内容ばかりでなく、文章表現も関孝和編「求積」(岡本写 0003) とほぼ一致しているが、「求積」の著者は建部賢弘である。詳細は拙論 [4] を見よ。

は「古皆 (ふるきはみな/いにしへはみな)」である。「古者」は『論語』[28]や『易経』[29]などで用いられているが、「古皆」を検索したところ、『論語』の「自古皆有死 (いにしへよりみな死あり)」以外に中国や日本の古典から見つけることはできなかった。

割注の結語は「開方算式」の 10 写本中 8 写本 (B 系統の写本はすべて) が「大誤也」であるが、『大成算経』は「太誤也」である。「大誤」か「太誤」について、顔之推撰『顔氏家訓』書証第十七に「既無宿根至春方生耳亦大誤也」[30]あるいは沈括撰『夢渓筆談』巻五に「以其所不能者明其俗豈非大誤也」[31]などがある。一方、「太誤也」を古典から見つけることはできなかった。

『顔氏家訓』は寛文二 (1662) 年に和刻本が刊行されており、祖沖之の子祖暅についての記述[32]が雑芸第十九にあることより、建部賢弘 (「開方算式」の著者が賢弘であることは 8 節で述べる) は「大誤也」を『顔氏家訓』から採ったと思われる。

最後の行の割注「或置式級數内減二餘爲乘數也 (或いは、式の級数を置き、二を内減し、余りを乗数と為すなり)」は、B 系統の 4 写本が「減二餘」で A 系統の 6 写本が「減一餘」であるが、五級式 $a + bx + cx^2 + dx^3 + ex^4 = 0$ は、三乗 $a + x(b + x(c + x(d + ex))) = 0$ なので、式の級数から二を引けば乗数になり、「減二餘」が正しい。なお『大成算経』巻之一の開方に「積三次自乗數者曰三乗方其式五級也」とある。

---

28 たとえば、「里仁第四」に「子曰古者言之不出恥躬之不逮也 (子曰く、古者言をこれ出ださざるは、躬の逮ばざるを恥じてなり) とある。

29 『繫辞下伝』に「古者庖犧氏之王天下也 (古者包犧氏の天下に王たるや)」などがある。なお『繫辞上伝』には河図落書についての記載がある。

30 原文は http://www.guoxue123.com/zhibu/0301/00ysjx/006.htm にある。引用部分の宇都宮清吉訳を示す。「江南の苦菜はもとより多年生の根がなく、春になって初めて種子から発芽することは確かである。だから梁朝学者の説は非常に誤りを犯しているわけだ。」[6, pp.71-72]

31 原文は https://zh.wikisource.org/wiki/夢溪筆談/巻 05 にある。引用部分の梅原郁訳を示す。「できぬことで、その習俗を代表させるとは、たいへんな間違いではなかろうか。」[10, p.132]

32 「算術亦是六藝要事自古儒士論天道定律歴者皆學通之然可以兼明不可以專業江南此學殊少唯范陽祖暅精之位至南康太守河北多曉此術」(http://www.guoxue123.com/zhibu/0301/00ysjx/007.htm). 宇都宮清吉訳は、「算術もまた六芸の大切な一科目であった。昔から儒学の専門家で天体のことを論じ、暦書に関係した者は何れも算術に明るかった。しかしこの道も余業としてこそ修業すべきで、決して専門にやるべきものではない。江南では、この学問はことさらにふるわず、ただ一人范陽出祖氏の祖暅だけが精通している。この人は南康太守 (郡長官) にまで昇進している。河北 (北方) には算術に長じたものが多数いる。」[6, p.187] である。

7. 「開方算式」と『大成算経』巻之三の成立順序

「開方算式」は『大成算経』巻之三を抜粋して作られたという見解 ([18] など) を検討しておく。「開方算式」の判明した 5 名の書写者のうち最も時代が古いのは松永貞辰 (1751-1795) である。松永が写本を書写したのは、安島直円の勧めで江戸に出た明和六 (1769) 年以降、帰郷して新庄藩で御役所勤する安永四 (1775) 年 [13, pp.212-213] までと考えられる。松永が書写した「開方算式」(林集書 657) は、A 系統の他の写本に比べ誤写が多いので、原本成立からかなり時間が経っていると思われる。したがって、『大成算経』巻之三を抜粋して「開方算式」が作られたとすると、その時期は 1775 年よりかなり前である。

中根元圭の門弟である入江保叔 (入江脩敬) は「一源活法」(1760) 巻之一において「前十商者建不休先生之所撰 (前の十商は建 [部] 不休先生の撰ぶ所)」と『大成算経』巻之三は建部賢弘が選んだと記しており、また入江が儒臣として仕えていた有馬頼徸(よりゆき)は「開法要旨」(1772) 中巻において「謂之伏題之法往昔關子所撰三部抄之一術矣建部賢弘承而校合加添削雖属諸大成算経巻第十七 (これをいふ伏題之法、往昔関子撰す所の三部抄の一術。建部賢弘承而校合して添削を加へ、大成算経巻第十七に属すといへども、)」と『大成算経』巻之十七は建部賢弘が編集したと記している。18 世紀中期までに『大成算経』にアクセスできた和算家には『大成算経』は建部賢弘の著作として伝えられた[33]と考えられる。したがって、ある和算家が『大成算経』巻之三から抜粋して「開方算式」を作成したとすると編者名を関孝和編撰とはしないはずである。

さらに、以下の問題がある。

1. 『大成算経』にはいっさい訓点がつけられてないが、抜粋する際に 1 丁表だけ訓点をつけた。
2. 課商にのみ 1 題類題を追加した。
3. 「古皆」を「古者」に、「太誤也」を「大誤也」に訂正した。
4. 窮商第 2 例の誤り 5.79 を別の誤り 5.74 に変更した。

上記 4 点はいずれも可能性はないわけではないが、それぞれ可能性は小さいと考えられる。編者名を「關孝和編撰」とする可能性も極めて小さい。これらのことを勘案すると、「開方算式」が『大成算経』巻之三を抜粋して作られたということは否定されるだろう。し

[33] 『大成算経』には一切編者名が記されてないので、伝書の際に口頭あるいは文書で伝えたのであろう。なお、寛政二 (1790) 年の年記のある平千里の識語には、「此書 [『大成算経』] 者孝和先生所選述 [後略]」(京大 10 冊本の巻之十九・二十の巻末の貼り込み) とあるので、少し時代が降ると伝わってない。

たがって、「開方算式」は「算法大成」作成の準備段階での稿本と考えられる。

8. 「開方算式」と『大成算経』巻之三の執筆者

建部賢明編「建部氏伝記」によると、『大成算経』は、天和三 (1683) 年の夏に建部賢弘を首領 (リーダー) として、関孝和、賢明、賢弘の 3 人により編纂が開始された。3 人がそれぞれ新たに考えた数学を持ち寄り、元禄の中頃 (1695 年頃) に一旦「算法大成」全 12 巻としてまとめられた。賢弘は仕事が忙しく関は老年の上病気のため二人とも編纂に関わることができなくなったので、元禄十四 (1701) 年から賢明が一人で編纂にあたり宝永末 (1710) に『大成算経』全 20 巻を完成させた。

最も若い賢弘が首領ということから、賢弘が提案したと思われる。関は甲府藩の仕事が忙しく、新たに大部の書を著す時間はなかったのだろう。賢弘が『発微算法演段諺解』(1685) を執筆したとき、賢明は黒子に徹し跋文を書いただけであるので、今回も賢弘を前面に立てようと考えたのだろう。一方、賢弘は元禄三 (1690) 年七月に『算学啓蒙諺解大成』を出版するなど研究時間は十分あった。しかしながら賢弘は、元禄三 (1690) 年冬に北條源五右衛門の養子となり養家で精神的経済的虐待[34]を受け続けたため、研究に没頭できなくなったと思われる。さらに、賢弘は元禄五 (1692) 年十二月徳川綱豊に召し出され、仕事も多忙になった。

『大成算経』編纂過程の詳細は分からないが、以下のようであると推察される。『大成算経』に結実する算書編纂プロジェクトは、建部賢弘が提案し首領となった。関は天和三 (1683) 年と貞享二 (1685) 年に「算脱之法・験符之法」など 10 編以上を編集、訂書、重訂などにより作成し、賢弘に渡したか、書写させた。同様に賢明も草稿を賢弘に提供した。賢弘はそれらを取りまとめ、場合によっては関と議論[35]を行い、「算法大成」の草稿を作成した。このような作業は賢弘が『算学啓蒙諺解大成』執筆に着手する元禄元 (1688) 年頃、あるいは元禄五 (1692) 年に召し出されるまで続いたと考えられる。

「開方算式」はこの段階での賢弘による草稿である。「開方算式」の「課商」は、関の「解隠題之法」(1685) の「得商」に基づいており、「窮商」は関が得商の第 3 例で与えた方法を賢弘が発展させたものである。「開方算式」には賢明が提案した数学も取り込まれたかもしれない。賢弘は「開方算式」とは別に、関の「開方飜変之法」(1685) を発展させ三式、

[34] 賢弘が北條家の養子となる前年 (1689)、北條源五右衛門に実子が生まれた [8, p.49] ことによる。

[35] 『大成算経』巻之十二に関連する関と賢弘の議論の一端を、賢弘は後年「綴術算経」(1722 年序) に記している。

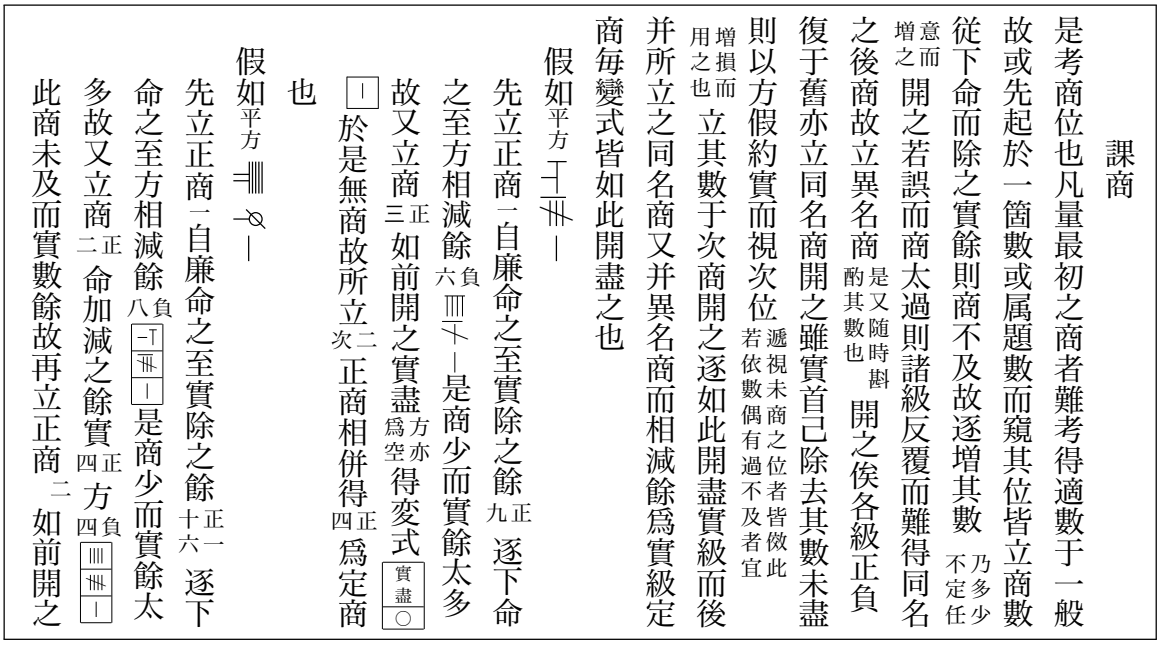

課商
是考商位也凡量最初之商者難考得適數于一般
故或先起於一箇數或属題數而窺其位皆立商數
從下命而除之實餘則商不及故逐增其數（乃多少不定任）
（意而增之）開之若誤而商太過則諸級反覆而難得同名
之後商故立異名商（是又随時斟酌其數也）開之俟各級正負
復于舊亦立同名商開之雖實首已除去其數未盡
則以方假約實而視次位（遞視未商之位者皆倣此若依數偶有過不及者宜）
（增損而用之也）立其數于次商開之逐如此開盡實級而後
并所立之同名商又并異名商而相減餘爲實級定
商毎變式皆如此開盡之也
假如（平方）
先立正商一自廉命之至實除之餘（正九）逐下命
之至方相減餘（負六）是商少而實餘太多
故又立商（正三）如前開之實盡（方亦爲空）得変式
於是無商故所立（二次）正商相併得（正四）爲定商
也
假如（平方）
先立正商一自廉命之至實除之餘（正十六）逐下
命之至方相減餘（負八）是商少而實餘太
多故又立商（正二）命加減之餘實（正四）方（負四）
此商未及而實數餘故再立正商（二）如前開之

図 2　「開方算式」課商第 2 例の途中まで

適尽方級法、替数を内容とする草稿 A を作成した。さらに賢弘は、加減、乗除を内容とする草稿 B と草稿 C を作成した。

その後、草稿 B、草稿 C、「開方算式」、草稿 A を併せて「算法大成」の一巻が元禄の中年 (1695 年頃) までに作られた。この作業は賢弘一人で行ったか、賢明が賢弘を手伝ったか、あるいは賢明が単独で行ったかは不明である。賢弘一人で行ったのであれば、元禄五 (1692) 年にはほぼ出来上がっていたと思われる。

9.　「開方算式」課商

課商は、開方式 (代数方程式) の商が整数あるいは有限桁の小数で表されるとき、この商を求めるアルゴリズムである。与えられた開方式に対し、定数項が 0 に近くなるように商を立てて変数変換を繰り返しながら実尽 (定数項が 0) となったとき、それまでに立てたすべての商を加えて定商 (与えられた方程式の解) とする。関孝和編「解隠題之法」の「得商」で与えられている。

「開方算式」と『大成算経』で著しく異なるところは、前者の課商の第 1 例が後者には欠けている [12, p.381] ことである。第 1 例 (図 2 の 12 行目から 17 行目)$16 - 8x + x^2 = 0$ は、最初に商 1 を立てると

$$16 - 8(1 + x) + (1 + x)^2 = 9 - 6x + x^2 = 0$$

となる。実の余 9 は大きすぎ、商 1 は小さすぎる。商 3 を立てると、変式[36]

$$9-6(3+x)+(3+x)^2=0+0x+x^2=0$$

を得て、無商 (正の解も負の解も持たない) だから定商は $1+3=4$ であるとしている。なお関孝和は、「開方飜変之法」において「無商式者限于隻級 (無商式は隻(せき)級 [偶数次数] に限る)」と割注に記して[37]おり、$2-2x+x^2=0$ と $2-4x+6x^2-4x^3+x^4=0$ を例に挙げているので、無商とは実数解を持たないという意味で用いている。「開方算式」を執筆したのが関孝和でないことはこのことによってもわかる。第 1 例を組立除法を用いて昇冪で表示すると、図 3 になる。

$$\begin{array}{rrrr}
1) & 16 & -8 & 1 \\
 & -7 & 1 & \\
\hline
 & 9 & -7 & 1 \\
 & & 1 & \\
\hline
 & & -6 & 1 \\
3) & 9 & -6 & 1 \\
 & -9 & 3 & \\
\hline
 & 0 & -3 & 1 \\
 & & 3 & \\
\hline
 & & 0 & 1
\end{array}$$

図 3　課商第 1 例 $(16-8x+x^2=0)$

課商第 2 例は $25-10x+x^2=0$ である。最初に商 1 を立てると

$$25-10(1+x)+(1+x)^2=16-9x+x^2=0$$

となる。これは、第 1 例の開方式であるので商 4 が立つが、第 2 例では商 2 を立て、再び商 2 を立てて定商 $1+2+2=5$ を得ている。

『大成算経』は「開方算式」の第 1 例を削除し、第 2 例と第 3 例のみを用いている。課商第 1 例と第 2 例が本質的に同じ問題であるのは、おそらくどちらかの例を採用するつも

[36] 関孝和は用語「変式」を「解隠題之法」および「開方飜変之法」では用いてないが、「病題明致之法」の変題定究第三で用いている。

[37] 『大成算経』巻之三開方第三の序文にも同じ割注があるが、三式の無商式の例に $1=0$ をあげている。ここまでは、割注に矛盾しないが、$0+0x+x^2=0$ が無商であれば、$0+0x+0x^2+x^3=0$ も無商になり割注と整合性を持たない。

りで 2 つの例を取り上げ、最終的に第 2 例を採用したのであろう。あるいは、商の求め方は一意ではないことを示すためかもしれない。前者であれば、第 1 例を削除したのは「算法大成」編集のとき、あるいはそれ以前かもしれない。

つぎに、「開方算式」と『大成算経』(京大本 10 冊本を除く) のすべての写本が課商第 3 例 $578.640625 - 192.1875x - 22.75x^2 - x^3 = 0$ の商 0.05 を立てる箇所で共通の誤りを犯していることを見ていく。原文の影印を図 4 に、当該箇所 (図 4 の 1 行目から 4 行目) を組立除法により図 5 に示す。

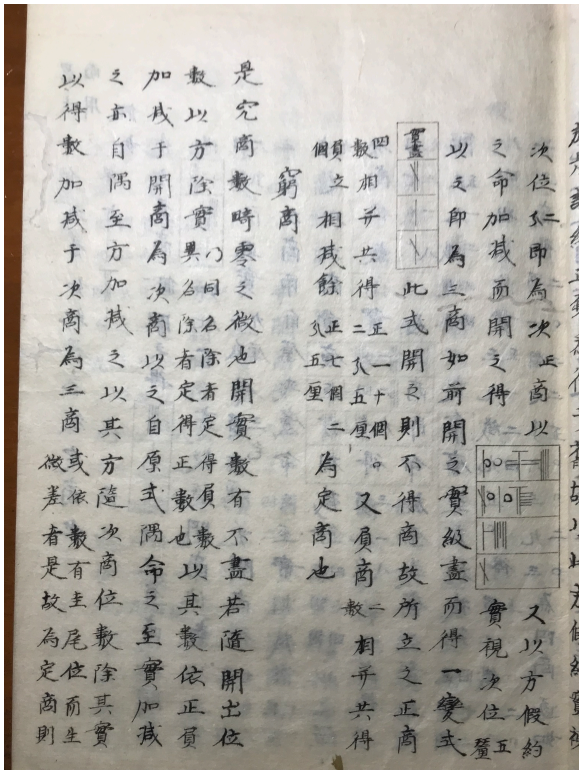


図 4　「開方算式」(筆者蔵)3 丁表

図 5 の下線の部分は「開方算式」のすべての写本と「変技」(東大 T20-67) および『大成算経』(関算後伝 38、狩野 7.31453、狩野 7.20820、岡本写 41、藤原集書 450、京大 20 冊本、筑波大コ 200-50、国立公文書館 194-0180、理科大物 423) は $-20.1075, -20$ となるべきところが、それぞれ $-2.01075, -2$ と 1 桁誤っている。調べた中で唯一正しいのは京大 10 冊本で、親本 (狩野 7.31453) の $-2.01075, -2$ を $-20.1075, -20$ と訂正している。建部賢弘は何らかの理由で 1 桁誤り、建部賢明は再計算することなく「開方算式」の誤りをそのまま『大成算経』に記載している。その後、『大成算経』を書写した和算家達は、京大本の校訂グループを除き、誤りのまま書写している。

$$
\begin{array}{rrrrr}
0.05) & 1.002625 & \underline{-20.1075} & 1.15 & -1 \\
 & -1.002625 & 0.055 & -0.05 & \\
\hline
 & 0 & -20.0525 & 1.1 & -1 \\
 & & 0.0525 & -0.05 & \\
\hline
 & & \underline{-20} & 1.05 & -1 \\
 & & & -0.05 & \\
\hline
 & & & 1 & -1
\end{array}
$$

図 5　課商第 3 例の商 0.05 を立てる箇所

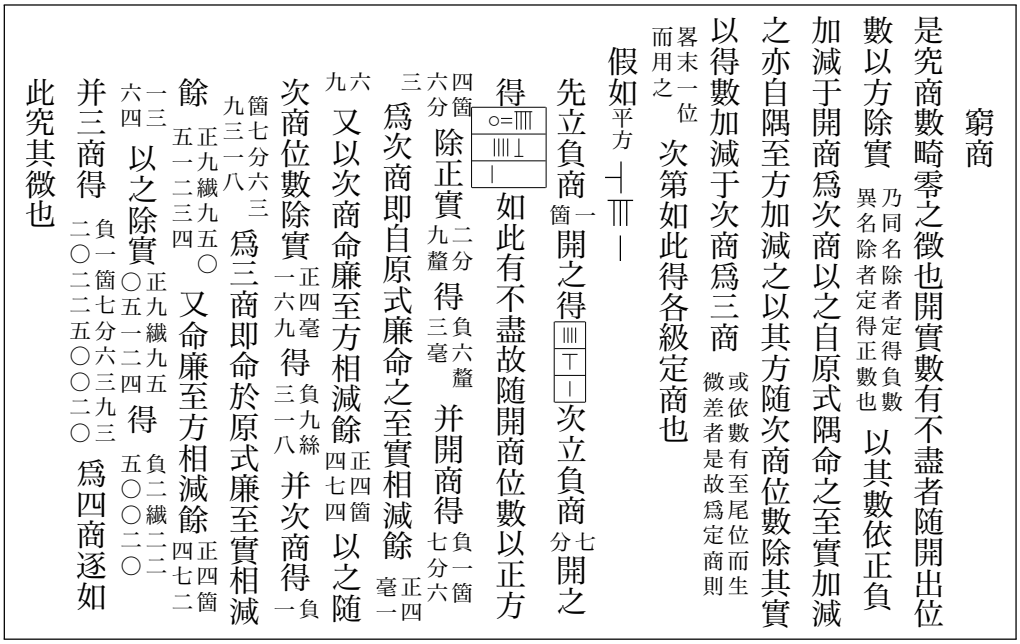


図 6　「開方算式」窮商第 1 例まで

10.　「開方算式」窮商

窮商の復元した原本の第 1 例までを図 6 にしめす。6 行目までの影印は図 4 の後半である。窮商は、不尽の開方式 (有限桁の小数で表されない解を持つ代数方程式) の商 (解) の近似値を求める方法である。関孝和が「解隠題之法」の得商の最後に与えた方法を賢弘が発展させた[38]ものである。

[38] 有効桁数を 2 倍にするのは関と同じであるが、原式を用いて反復するのは賢弘による改良である。筆者は講究録 1677(2010) および講究録 1739(2011) では、「解隠題之法」の不尽の開方得商と『大成算経』の窮商は同一のアルゴリズムであると誤読していた。「解隠題之法」で原式を用いるのは最初に 1 回だけで、原式により三商、四商と求めていくのは賢弘の発見である。

$-1.7639318)$	11	8	1
	-10.99999900494876	-1.7639318	
	$0.00000099505\underline{124}$	6.2360682	1
		-1.7639318	
		4.4721364	1

図 7　窮商第 1 例 $11+8x+x^2=0$ に -1.7639318 を三商として原式を開く

第 1 例 $11+8x+x^2=0$ の -1.7639318 を三商として原式を開く箇所を図 7 に組立除法で表示する。下線の部分の「餘」(図 6 の 14 行目) については、「開方算式」のすべてが 51234 と誤り、「変技」(東大 T20-67) および『大成算経』(岡本写 41、藤原集書 450、狩野 7.20920.20、狩野 7.31453.20、筑波大コ 200-50、理科大物 423) は「開方算式」と同じ誤り 51234 であり、『大成算経』(関算後伝 38、国立公文書館 194-0180) は別の誤り 51134 である。筆者が調べた限り唯一正しいのは『大成算経』の京大 10 冊本で「餘」の 51234 を朱で 5124 と訂正している。四商を求める際の「餘」を建部賢弘は「開方算式」編集の際に「正九繊九五〇五一二四」を「正九繊九五〇五一二三四」と誤記し、「算法大成」の執筆者 (賢弘か賢明のいずれか) も一度も再計算を行わずに「正九繊九五〇五一二三四」と記載し、賢明も「変技」そして『大成算経』巻之三を校訂するにあたって、同様に「正九繊九五〇五一二三四」と記載した。

「開方算式」の次商を求める寸前までは「解隠題之法」と同じである。「解隠題之法」はそこで反復を止め、本例の場合は $-1.76304\ldots$ を「負一箇七分六三強」と丸め定商とする。一方、「開方算式」では原式 (与えられた方程式) に次商「負一箇七分六三」を用いて反復を続ける。

第 2 例 $-9+3x+2x^2+x^3=0$ の原文は省略し、初商を求めるところまでを図 8 に組立除法で示す。この問題は「解隠題之法」の例題と同一で、次商を求めるところ以降は、賢弘が改良した原式を用いて反復を行う方法である。

図 8 の下線部分は「開方算式」のすべての写本は 5.78 とすべきところを 5.74 と誤っている。賢弘の誤記と思われるが、仮に計算間違いであったとしても、5.78 はその後の計算には用いないので誤りに気づかなかったのだろう。「変技」と『大成算経』(関算後伝 38, 狩野 7.31453, 狩野 7.20820, 岡本写 41, 藤原集書 450, 京大 20 冊本) は 5.79 と誤っているが、京大 10 冊本は 5.79 を 5.78 に正しく訂正している。なお、「解隠題之法」(関算要伝 69、林文庫 2306、林文庫 2179、学士院 118) は正しく 5.78 としている。賢弘が「開方算式」で誤記あるいは計算間違えをし、賢明は訂正したが正しくなかったということだろう。

1)	−9	3	2	1	0.2)	−3	10	5	1
	6	3	1			2.208	1.04	0.2	
	−3	6	3	1		−0.792	11.04	5.2	1
		4	1				1.08	0.2	
		10	4	1			12.12	5.4	1
			1					0.2	
			5	1				5.6	1

0.06)	−0.792	12.12	5.6	1
	0.747576	0.3396	0.06	
	−0.044424	12.4596	5.66	1
		0.3432	0.06	
		12.8028	5.72	1
			0.06	
			5.78	1

図 8　窮商第 2 例 $-9+3x+2x^2+x^3=0$ の初商を求める。

11.　「開方算式」通商

通商とは、不尽の商 (有限桁の小数で表せない解) を商の小数部分の有理式で表す方法である。通商の条では「開方算式」と『大成算経』の表現に 1 箇所 (図 9 の 2 行目の) 「蓋」の次の 1 字が異なっている。違いの検討に入る前に、与えられた 2 つの例を用いて通商とはどのようなものかを見てみよう。

第 1 例 $-33+9x+3x^2=0$
正商二を立て (解 x の整数部分を 2, 小数部分を y とする。すなわち $x=2+y$ と変数変換すると)

$$-33+9(2+y)+3(2+y)^2=-3+21y+3y^2=0$$

最大公約数 3 で約すと

$$-1+7y+y^2=0$$

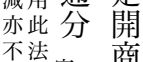
となるので、$y(7+y)=1$ から

$$y=\frac{1}{7+y} \tag{1}$$

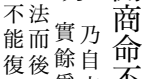
通商

是開商命不盡數也蓋百開分子方是也或曰開方通分（乃自方遞至下餘數皆相并爲一等乃分母以實餘爲分子命之若式中或本帶數或具負者用此法而後續求之則諸級數相混故難別減亦不能復餘數于其旧是此古法之誤也）若實數不能開盡而命分者從實至隅（或起於隅至實者亦同）餘數依遍約法各約之以實爲分子自方逐下諸級正負數相通而各爲分母命之也

假如（平方）

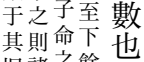


先立正商二開之得

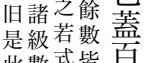


此數不能開盡故命不盡者依遍約法先實三與方（二十一）互減得等數三以之與廉三互減得等數三爲約法即約實得（負一）爲分子約方得（正七）約廉得（正一）各爲分母両數相通命之曰商二箇（正方七正廉一分箇之負實一）也

假如（立方）



先立正商（三箇）開之得



此數命不盡者依遍約法如前得等數二約諸級數得實（負三）爲分子得方（正六）廉（負二）隅（正一）各爲分母三數相通命之曰商三箇（正方六負廉二正隅一分箇之負實三）也

図 9　「開方算式」通商

が得られ、y は x の小数部分だから、

$$x = 2 + \frac{1}{7+y} \left(= 2 - \frac{-1}{7+y} \right) \tag{2}$$

が通商である。(2) の右辺は「商二箇正方七正廉一分箇之負實一」と読む。

通商第 2 例 $-132 + 90x - 22x^2 + 2x^3 = 0$
正商三を立て、$x = 3 + y$ と変換すると

$$-132 + 90(3+y) - 22(3+y)^2 + 2(3+y)^3 = -6 + 12y - 4y^2 + 2y^3 = 0$$

となる。最大公約数 2 で約すと

$$-3 + 6y - 2y^2 + y^3 = 0 \tag{3}$$

となるので、$y(6 - 2y + y^2) = 3$ より

$$y = \frac{3}{6 - 2y + y^2}$$

となる。y は x の小数部分だから、

$$x = 3 + \frac{3}{6 - 2y + y^2} \left(= 3 - \frac{-3}{6 - 2y + y^2} \right) \tag{4}$$

が得られる。(4) の右辺は「商三箇正方六負廉二正隅一分箇之負實三」と読む。

藤原松三郎は (4) を「三箇正方六負廉二正隅一分箇之負實三」と表すことを「すこぶる奇妙な形に答へてゐる」[12, p.222] と書いているが、(3) を算木で表した

を、方、廉、隅、[分箇之]、実の順に読んでおり、これが小数部分を計算するための有理式になっている。

図 9 の 2 行目「蓋」に続く文字が「開方算式」は「百」、『大成算経』は「古」である。文で示すと「開方算式」は「是開商命不盡數也蓋百開分子方是也 (是、商を開き、不尽数を命ずるなり。蓋(けだ)し、百開分子方は是なり)」であり、『大成算経』の後半は「蓋古開分子方是也 (蓋し、古開分子方は是なり)」である。

賢明は「百開分子方」を誤りと考えたようで、『大成算経』では「古開分子方」と改めた。「古開分子方」は『算法統宗』少廣章第四で与えられている

$$\sqrt{a^2+b} = a + \frac{b}{2a+1}$$

を指す [5, p.42][12, p.222]。これは 2 次方程式

$$-(a^2+b) + x^2 = 0$$

の通商[39]から導ける。

$$x = a + \frac{b}{2a+y}$$

において $y = 1$ とおいた

$$x = a + \frac{b}{2a+1}$$

である。

『大成算経』巻之二では、古開分子方を「真理に称(かな)はず」として掲載していない。

> 凡開方者諸技之所統而其遺法太多矣蓋古分七體一曰開平方 [中略]
> 五曰開分子方是開方命不盡之法也 但古法不稱于真理故不載之　　『大成算経』巻之二

[39] $x = a + y$ と変数変換すると、$-b + 2ay + y^2 = 0$ となるので、$y(2a+y) = b$

(凡そ開方は諸技のすぶ所、しかしてその遺す法太(はなはだ)多し。蓋し古(いにしへ)七体に分く。一曰開平方 [中略] 五曰開分子方、これ開方不尽に命ずるの法なり ただし古法は真理にかなはず、故にこれを載せず)

上記の『大成算経』巻之二を踏まえると、通商の冒頭の「通商是開商命不盡數蓋百開分子方曰開方通分」は以下のように意訳できる。

> 通商は、解が有限小数で表せない代数方程式を解く方法である。小数部分の有理式で表すこの方法は、まさしく「百開分子方」で、繰り返し適用できる。「開方通分」とも言えるだろう。

通商が「蓋古開分子方」と古開分子方になぞらえる方法とすると、巻之二の「真理に称はず」に矛盾するので、賢弘が「蓋古開分子方」と記したことはあり得ない。

「正方七正廉一分箇之負實一」と読まれる分数式は繰り返し適用できる。たとえば、初期値を $y = 1$ ととり、漸化式[40]で表すと

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_n &= \frac{1}{7 + y_{n-1}}, \qquad n = 1, 2, \ldots,
\end{aligned}
\tag{5}
$$

となる。数列 $\{y_n\}$ は $y = 1/(7 + y)$ の根 0.140054944640259 に収束する。計算結果を表 6 に示す。漸化式 (5) を適当な項まで計算し、得られた値に 2 を加えた数が与えられた開方

n	y_n	誤差
1	0.125000000000000	-1.51×10^{-2}
2	0.140350877192982	2.96×10^{-4}
3	0.140049140049140	-5.81×10^{-6}
4	0.140055058499656	1.14×10^{-7}
5	0.140054942406863	-2.23×10^{-9}
6	0.140054944684068	4.38×10^{-11}

表 6　漸化式 (5) の値

式 $-33 + 9x + 3x^2 = 0$ の商の近似値 2.140054944684068 (真値は 2.140054944640259) となる。分数式 $\frac{-1}{7+y}$ により繰り返し計算できるので蓋百開分子方としたのだろう。立方式 (3 次方程式) 以上であっても、漸化式で計算できるのは言うまでもない。たとえば第 2 例

[40] 窮商も漸化式で表示できる。

の場合は

$$
\begin{aligned}
y_0 &= 1 \\
y_n &= \frac{3}{6-2y_{n-1}+y_{n-1}^2}, \qquad n=1,2,\ldots,
\end{aligned}
\tag{6}
$$

により小数部分が計算できる。

とはいえ、商の近似値を求める方法は、(5) や (6) などの漸化式で求めるよりは、窮商で求める方が収束が速い[41]ので、「開方算式」では取り上げてないのだろう。すでに加藤平左エ門は「古法はただ商の近似値を示したにすぎない。ところが本書 [「開方算式」] の通商は不尽数の一種の表示法である。(本書は近似値についてはすでに窮商の所で述べている。)」[5, p.43] と述べている。

(2) に (1) を代入すると、

$$
x = 2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7+y}} \tag{7}
$$

となる。さらに繰り返すと、林鶴一が「同様ニ取扱ハバ x ハ連分數ノ形ニテ表ハレ來タルヘシ」[42][15] と指摘しているように、

$$
x = 2 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{7 + \cfrac{1}{\ddots}}}} \tag{8}
$$

と連分数展開となる。漸化式 (5) による計算は、連分数展開 (8) と同等である。

12. おわりに

本論文では、「開方算式」の参照可能な 10 写本を精査し、5 写本の書写者を決定あるいは推定した。ついで全写本を校合して「開方算式」の写本群は 2 系統に分けることができることを示した。系統分けの結果を用いて「開方算式」の原本を復元した。ついで復元した原本と『大成算経』巻之三の良質な 3 写本を比較することにより、下記のことが判明した。

[41] 通商に基づく反復列は 1 次収束であるのに対し、窮商は 2 次収束である。

[42] これに対し藤原松三郎は「ソコマデ考ヘラレタモノカ否カ。イサヽカ疑ハシイ」[17] とコメントしている。

建部賢弘は、関孝和の「解隠題之法」などにおける開方式の商 (代数方程式の解) の研究に自らの研究 (と賢明の研究) を加え、関孝和編撰として「開方算式」にまとめた。「開方算式」は序文と課商以下に分割されて元禄の中頃 (1695 年頃) に完成した「算法大成」の一つの巻に取り込まれた。さらに元禄十四 (1701) 年以降、「算法大成」の当該の部分が『大成算経』巻之三に取り込まれた。建部賢明は (「算法大成」あるいは)『大成算経』巻之三の編集作業を担ったが、その際賢明は漢文にわずかに手を加え、再計算は行わなかった。

賢明が通商の条において「開方算式」の「百」を『大成算経』で「古」に書き換えたため『大成算経』の二巻と三巻で記述に矛盾が生じた。通商は商が不尽数 (開方式の商が有限桁の小数で表されない) のとき、商を小数部分の有理式で表す方法である。有理式は繰り返し適用することで、商を望むだけの精度で計算することができる。そのため、「百開分子方」になぞらえたと考えられる。林鶴一が指摘したように、平方式 (2 次方程式) に対し通商を繰り返し適用する計算法は連分数展開と同等である。

参考文献

[1] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一、『関孝和論序説』、岩波書店、2008

[2] 長田直樹、On manuscripts of「病題明致之法」(*Methods for Restoring Ill-proposed Problems*) edited by Seki Takakazu, International Symposiun on the History of Mathematics in East Asia, November 10, 2016.

[3] 長田直樹、関孝和の著作とそれらの伝播、日本数学会基礎論および数学史分科会特別講演アブストラクト、2022 年 3 月 28 日

[4] 長田直樹、元禄の中頃に成立した『算法大成』について、RIMS Kôkyûroku Bessatsu, B89 (2022), 49-76

[5] 加藤平左エ門、『算聖関孝和の業績』、槙書店、1972

[6] 顔之推、宇都宮清吉訳注、『顔氏家訓』2、東洋文庫 514, 平凡社、1990

[7] 国文学研究資料館、古典籍研究ガイダンス、笠間書院、2012

[8] 佐藤賢一、『近世日本数学史』、東大出版会、2005

[9] Silke Wimmer-Zagier and Don Zagier, Some questions and observations around the mathematics of Seki Takakazu, in *Seki, Founder of Modern Mathematics in Japan*, Spinger, 2013, 275-297.

[10] 沈括、梅原郁訳注、『夢渓筆談』1、東洋文庫 344, 平凡社、1978

[11] 中尾央・三中信宏、『文化系統学への招待』、勁草書房、2012

[12] 日本学士院編 (藤原松三郎)、『明治前日本数学史』第二巻、岩波書店、2008 (初版 1956)

[13] 日本学士院編 (藤原松三郎)、『明治前日本数学史』第三巻、岩波書店、2008 (初版 1957)

[14] 日本学士院編 (藤原松三郎)、『明治前日本数学史』第五巻、岩波書店、2008 (初版 1960)

[15] 林鶴一、和算ニ於ケル方程式論ニ就テ、東北數學雑誌、第一輯、第三十四巻 (1931), 145-185.

(『林鶴一博士和算研究集録』上、1937、所載)
[16] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄、『関孝和全集』、大阪教育図書、1974
[17] 藤原松三郎、關孝和ノ數字係数方程式解法、東北數學雜誌、第一輯、第四十七巻 (1940), 49-57. (『東洋数学史への招待』、2007、所載)
[18] Annick Horiuchi, *les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo*, J. Vrin, 1994.

Journal of the Japanese Society for the History of Mathematics
Series III, Vol.1 No.2 (2022), 45-71

On the *Kaihō Sanshiki* Edited and Selected by Seki Takakazu

Naoki Osada

Abstract

The *Kaihō Sanshiki* (Extraction of Roots from Equations) is the original draft on the *jisshō* (ten kinds of roots of algebraic equations). Most of the full text of the *Kaihō Sanshiki* is contained in the Chapter three "Kaihō" (Method of Extracting Roots) of the Volume three of the *Taisei Sankei* (Complete Mathematical Treatise). In this paper, we investigate the ten available manuscripts of the *Kaihō Sanshiki* and identify or estimate the copyists of five of them. We then find the differences between the manuscripts and show that the manuscripts can be divided into two branches, and we restore the original text of the *Kaihō Sanshiki*. Then, by comparing the restored the original text of the *Kaihō Sanshiki* with three high-quality manuscripts of Vol. 3 of the *Taisei Sankei*, the following points were clarified. Takebe Katahiro added his own to Seki Takakazu's research on the roots of algebraic equations in Seki's *Kai Indai no Hō* (Method of Solving Implicit Problems) and compiled it as *Kaihō Sanshiki*. On the *tsūshō* (one of the *jissho*) Takebe Kata'akira changed the word "hundred" in the *Kaihō Sanshiki* to "old" in the *Taisei Sankei*, which created a discrepancy between volume 2 and 3 of *Taisei Sankei*. The meaning of the *tsūshō* became clearer when based on "hundred" in the *Kaihō Sanshiki*, and as Tsuruichi Hayashi pointed out, the computational method of repeatedly applying the *tsūshō* to quadratic equations is equivalent to the continuous fraction expansion.

Key Words : Kaihō Sanshiki, Seki Takakazu, Takebe Katahiro, Takebe Kata'akira, Taisei Sankei, manuscript genealogy