代数解析学の考え方とその応用
—微分方程式と超関数と確率分布

東京女子大学学会連続講演会「神秘的な数学の世界」

大阿久 俊則

2023 年 11 月 1 日

代数解析学とは？

代数、幾何、解析を組み合わせた数学の研究分野名で代表的なのは

代数幾何学：代数多様体（円や放物線や双曲線などの一般化）と呼ばれる「図形」の研究（代数幾何学 $\neq$ 代数学 $\cup$ 幾何学)

解析幾何学：歴史的にはデカルトの創始した座標を用いて図形を調べる分野の名称であったが，現代数学では代数幾何学と対比して解析多様体を研究する分野（岡潔による多変数関数論が基礎となっている）.

代数解析学：歴史的には，極限の概念を前面に出さずに無限小などの概念や記号を導入して代数的に組み立てられた微積分の体系（ライプニッツ，オイラー，ラグランジュなどによる）を「代数解析」と呼んだ.

では，現代数学における代数解析学とは？
$\rightarrow$ 古典的な「代数解析」（特にオイラーの数学）の精神を受け継ぐ数学（佐藤幹夫先生が提唱）

佐藤幹夫先生 (1928–2023) と代数解析学

数学者．京都大学数理解析研究所教授 (1970–1992)，京都大学名誉教授．朝日賞，日本学士院賞，藤原賞，ショック賞（スウェーデン），ウルフ賞（イスラエル）など受賞．1984 年文化功労者．

佐藤幹夫：「オイラーの数学」（木村編：「佐藤幹夫の数学」所収）より

私はオイラー (1707–1783) の数学が好きで，自分たちの仲間でやっている数学にもオイラーの言葉を借用して「代数解析学」なんて呼んでいるくらいです．なぜオイラーに惹かれるか，一言で説明するのはうまくできないけれども，オイラーのやったことというのは数学のほとんどあらゆる分野にわたって，いちばんエッセンシャルなところをつかんで見せているということです.（中略）「代数解析」という言葉は，厳密に元どおり使っているとは言えないかもしれないけれども,「オイラー的数学」というのがいちばんいい説明かもしれません．

2003 年佐藤先生がウルフ (Wolf) 賞を受賞した際の紹介文より

受賞理由：for his creation of ‘algebraic analysis’, including hyperfunction and microfunction theory, holonomic quantum field theory, and a unified theory of soliton equations. （佐藤超関数とマイクロ関数の理論，ホロノミック量子場の理論，ソリトン方程式の統一理論を含む「代数解析学」の創造に対して）

紹介文の結語：Sato has generously shared his ideas with young mathematicians and has created a flourishing school of algebraic analysis in Japan. （佐藤は彼の着想を若い数学者達と惜しみなく共有し，実り豊かな日本の代数解析学派を生み出した.）

佐藤幹夫先生が創始した数学の分野

- 佐藤超関数 (hyperfunction): 1958 年頃

  シュワルツの超関数 (distribution, 1945 年頃) を超える究極の超関数
- D 加群 (連立線形偏微分方程式): 1960 年頃構想

  $\rightarrow$ 実質的には 1968 年以降に柏原正樹, J.Bernstein らにより発展
- 概均質ベクトル空間と b 関数: 1961 年頃
- 超局所解析 (microlocal analysis): 1968 年頃

  超関数と D 加群の融合発展 $\rightarrow$ SKK 論文 (1973)
- ソリトン方程式の佐藤理論: 1980 年頃

参考文献

- 柏原・河合・木村「代数解析学の基礎」(紀伊國屋書店 1980)
- 柏原正樹「代数解析学概論」(岩波書店 2000)
- 木村達雄編「佐藤幹夫の数学」(日本評論社 2007)
- 柏原正樹「代数解析と 50 年」2018 年京都賞受賞記念講演要旨 (Web)

今日の話の要旨

確率分布の話から始めて，代数解析学，特に超関数と D 加群の考え方を，確率分布への応用を目標として解説します.

（確率分布を例にとると直感的に理解しやすいと思われることと，代数解析学のデータサイエンス（？）への応用例として.）

1. 確率分布と超関数
2. 微分方程式とホロノミック（超）関数
3. 確率分布の代数解析

予備知識：高校数学 III 程度の微積分．ときどき専門家向けに難しい概念や用語も出てきますが，それは無視しても話の流れはわかるように話したいと思います.

今日のスライドは私のホームページ（日本語版）

`http://www.lab.twcu.ac.jp/~oaku/index_jp.html` にあります.

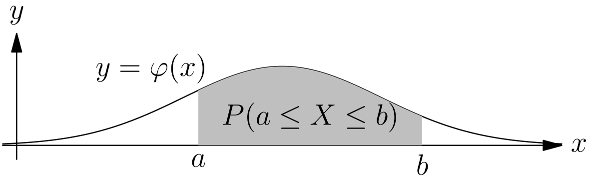
第 1 章：確率分布と超関数

確率密度関数と分布関数

実数のランダムな値を取る**確率変数** X の**確率密度関数**が $\varphi(x)$ であるとは，$a < b$ のとき，$a \leq X \leq b$ となる確率 $P(a \leq X \leq b)$ が

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b \varphi(x)\,dx$$

で与えられること．これによって X の確率分布が定まる．



特に

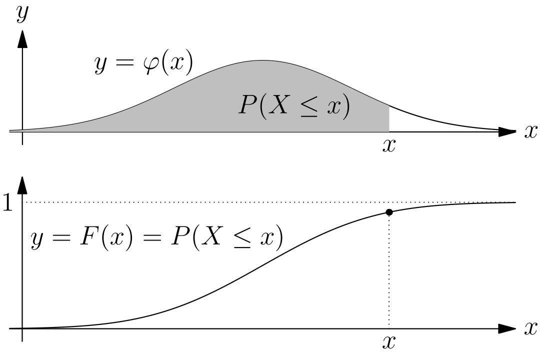
$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\,dx = P(-\infty < X < \infty) = 1$$

でなければならない．

また，

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} \varphi(t)\,dt$$

を確率変数 X の（累積）分布関数という．



逆に分布関数から確率分布が定まる．実際

$$P(a < X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

このように確率分布が確率密度関数の積分で与えられるとき，**連続分布**という．さらに密度関数 $\varphi(x)$ が連続ならば $F'(x) = \varphi(x)$ が成立する．

専門家向けの補足

一般に，確率変数 X の分布関数 $F(x) = P(X \leq x)$ は単調増加かつ右連続，すなわち

$$x \leq y \ \Rightarrow \ f(x) \leq f(y), \qquad \lim_{h \to +0} F(x+h) = F(x)$$

であり

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

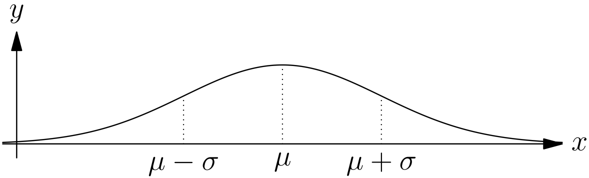
を満たす．逆に，このような性質を持つ関数 $F(x)$ が与えられると，$F(x)$ を分布関数とする確率分布が定まる．この確率分布が（連続とは限らないボレル可測な）密度関数の積分で表されるための条件は，$F(x)$ がさらに「絶対連続」という条件を満たすことである（ラドン・ニコディムの定理）．このとき密度関数の確率 0 の集合（零集合）での値の差は無視する．

正規分布

確率変数 X の確率密度関数が，μ を実数，σ を正の実数として

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$

で与えられるとき，X は期待値 μ, 分散（$(x-\mu)^2$ の期待値）σ^2 の**正規分布**に従うという．ただし $\exp(x) = e^x$ は指数関数を表す．特に $\mu = 0$ かつ $\sigma = 1$ の場合は**標準正規分布**と呼ばれる．正規分布は最も重要な連続分布であり，統計学ではデータの母集団（全体）が正規分布に従うと仮定して，母集団から抽出されたデータから種々の推論を行うことが多い．



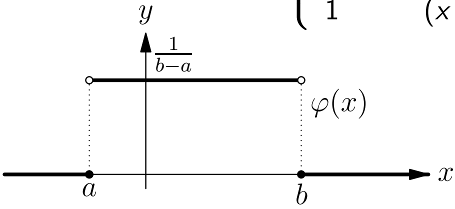
一様分布

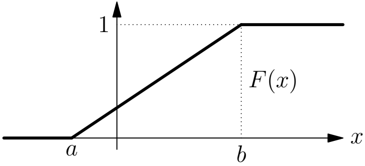
$a < b$ とする．確率変数 X が区間 $[a, b]$ の値（すなわち $a \leq X \leq b$）を均等の確率で取る分布を**一様分布**という．確率密度関数 $\varphi(x)$ は

$$\varphi(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a} & (a < x < b \text{ のとき}) \\ 0 & （\text{それ以外のとき}） \end{cases}$$

で与えられる．分布関数 $F(x)$ は

$$F(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq a \text{ のとき}) \\ \dfrac{x-a}{b-a} & (a < x < b \text{ のとき}) \\ 1 & (x \geq b \text{ のとき}) \end{cases}$$





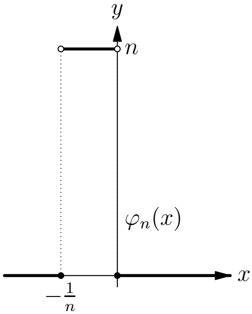
一様分布の極限

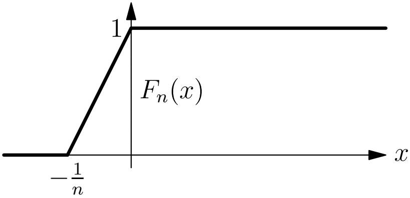
n を自然数とするとき区間 $\left[-\dfrac{1}{n}, 0\right]$ における一様分布の確率密度関数 $\varphi_n(x)$ は

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} n & (-\frac{1}{n} < x < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

であり，分布関数 $F_n(x)$ は

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \leq -\frac{1}{n}) \\ nx + 1 & (-\frac{1}{n} < x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

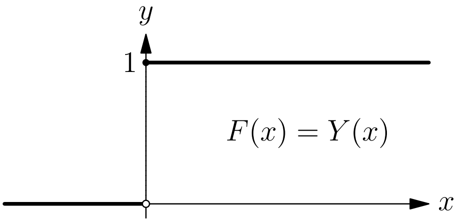




ここで $n \to \infty$ とすると

$$F(x) = \lim_{n\to\infty} F_n(x) = \begin{cases} 0 & (x < 0) \\ 1 & (x \geq 0) \end{cases}$$

となることがわかる．



この（不連続）関数 $F(x)$ はヘビサイド **(Heaviside) 関数**と呼ばれ，
以後 $Y(x)$ で表す.

（註）Oliver Heaviside (1850–1925): イギリスの電気工学者．電信回路の設計などに従事したが，独学で数学（ベクトル解析，演算子法）や物理 (Maxwell 方程式の簡易化，電離層の予言) にも独創的な貢献をした．

$F(x) = Y(x)$ は単調増加かつ右連続で

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x \to \infty} F(x) = 1$$

だから確率分布を定める．この確率分布に従う確率変数を X とすると，$a < b$ のとき

$$\begin{aligned} P(a < X \leq b) &= P(X \leq b) - P(X \leq a) \\ &= F(b) - F(a) = \begin{cases} 1 & (a < 0 \leq b \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

従って $\underline{X \text{ は確率 } 1 \text{ で } X = 0 \text{ となる.}}$

$F(x) = Y(x)$ は $x = 0$ で不連続だから，この確率分布の密度関数は存在しない．

一方，$n \to \infty$ のときの密度関数 $\varphi_n(x)$ の極限は

$$\varphi(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = 0 \qquad \text{（各点収束）}$$

となる．実際，$x \geq 0$ のときは定義より $\varphi_n(x) = 0$ であり，$x < 0$ のときは n が十分大きいとき $x < -\dfrac{1}{n}$ となるので $\varphi_n(x) = 0$ である．

密度関数 $\varphi_n(x)$ の関数としての極限 $\varphi(x) = 0$ は密度関数ではない．

そこで，$\varphi_n(x)$ の $n \to \infty$ のときの極限を，通常の関数の範囲ではなく，もっと広い「超関数」の世界で考えたものが，**デルタ超関数** $\delta(x)$ である．とりあえず，$\delta(x)$ は不連続関数 $Y(x)$ の形式的な（つまり意味は不問として）「導関数」

$$\delta(x) = Y'(x) \quad \left(= \lim_{n\to\infty} F_n'(x) = \lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) \neq 0 \right)$$

であると考えればよい．$\delta(x)$ が 0 (常に値 0 をとる定数関数）と異なることは，後の積分の計算からわかる．

ノーベル賞物理学者 Dirac (1902–1984) は，有名な量子力学の教科書で $\delta(x)$ という記号を導入して系統的に用いたので，$\delta(x)$ はディラックのデルタ関数とも呼ばれる.

P.A.M. Dirac: 'The Principles of Quantum Mechanics' (1930) より

$\delta(x)$ is not a function of x according to the usual mathematical definition of a function, which requires a function to have a definite value for each point in its domain, but is something more general, which we may call an 'improper function' to show up its difference from a function defined by the usual definition. Thus $\delta(x)$ is not a quantity which can be generally used in mathematical analysis like an ordinary function, but its use must be confied to certain simple types of expression for which it is obvious that no inconsistency can arise.

（和訳）$\delta(x)$ は通常の数学的な定義に従えば関数（関数はその定義域の各点に対して確定した値を持たなければならない）ではなく,「もっと一般的な何か」である．我々はそれを通常の定義での関数と区別するために「特異関数」とでも呼ぼう．従って $\delta(x)$ は通常の関数のように数学解析で一般的に用いられる量ではなく，矛盾が起こらないことが明らかであるようなある種の簡単な式に制限して用いられるべきである.

講演者註： 例えば積 $\delta(x)^2 = \delta(x) \cdot \delta(x)$ は定義できない.

もっと一般に，ヘビサイド関数のように通常の微積分の意味では微分できない関数の「導関数」を次々に仮想的に考えたものが超関数である．（実数の世界では解けない $x^2=-1$ という方程式を解くために虚数（想像上の数）i を導入したように．虚数は量子力学では必要不可欠である.）例えば $\delta(x)$ の導関数 $\delta'(x)$ も超関数である．

今日の話では，計算の途中で超関数が出てくるが，最終的な結果は通常の関数なので，Dirac 流に計算規則さえ明確にすれば十分である．

超関数の厳密な定義について（簡単な紹介）

超関数（の全体）を厳密に定義する方法は，大別すると，シュワルツ超関数（distribution）の理論 (1945) と佐藤超関数（hyperfunction) の理論 (1958) がある．

まず最初に，確率論の枠組みの中では，分布関数 $Y(x)$ の定める確率分布は原点に集中した（**確率**）**測度**として定義される．従って，確率密度関数 $\varphi_n(x)$ の $n \to \infty$ のときの確率分布としての極限 $\delta(x)$ は（密度関数では表せない）測度である．

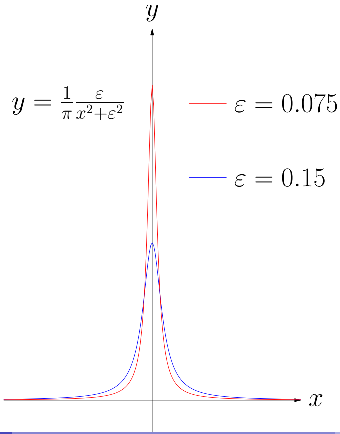
$\delta(x)$ は測度であるが，その「導関数」$\delta'(x)$ は測度ではないので，確率論の枠内では定義できない．シュワルツは，測度の概念を一般化して微分が自由に行えるようにするという観点から超関数の理論を創始して，彼の超関数を，確率測度とのアナロジーで distribution（分布）と名付けた．

日本ではシュワルツの著書を和訳する際に distribution を「分布」ではなく「超関数」と意訳した．佐藤先生はその日本語「超関数」を英訳して自ら定義した（佐藤）超関数を hyperfunction と命名した．
（英語では超関数は generalized function とも呼ばれる．）

佐藤超関数の理論では，$\delta(x)$ は複素数 $x+iy$ を変数とする**正則関数** $\dfrac{1}{x+iy}$ の極限（実軸への境界値）として

$$\delta(x) = -\frac{1}{2\pi i}\lim_{\varepsilon\to+0}\left(\frac{1}{x+i\varepsilon}-\frac{1}{x-i\varepsilon}\right) = \frac{1}{\pi}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{\varepsilon}{x^2+\varepsilon^2}$$

で定義される.（コーシー分布の極限）



ノーベル賞物理学者ペンローズは著書の中で佐藤超関数を数ページにわたって紹介して最後に以下のようにコメントしている.

Roger Perose: 'The Road to Reality' (2005) より

It is a wonderful notion put forward by the Japanese mathematician Mikio Sato in 1958. . . .

In trying to generalize the notion of 'function' as far as we can away from the apparent very restrictive notion of a 'holomorphic' function—the type of function that would have made Euler happy—we have come round to the extremely general and flexible notion of a hyperfunction. But hyperfunctions are themselves defined, in a basically very simple way, in terms of these very same 'Eulerian' holomorphic functions that we thought we had reluctantly abandoned. In my view, this is one of the supreme magical achievements of complex numbers. If only Euler had been alive to appreciate this wonderful fact!

（抄訳）これは日本の数学者佐藤幹夫によって 1958 年に提唱された素晴らしい概念である. . . . とても限定的に見える（オイラーが夢想した）「正則関数」の概念から離れて，可能な限り「関数」の概念を拡張しようと試みた結果，我々は非常に一般的かつ柔軟性に富む「佐藤超関数」の概念に到達した．佐藤超関数は，我々が（関数概念の拡張のために）不本意ながらも放棄してしまったと思っていた「オイラー的な」正則関数そのものから定義されるのである．私見によれば，これは複素数の魔法のような至高の成果の一つである．もしオイラーが生きていたら，この素晴らしい事実を知って喜んだだろうに！

講演者註：オイラーは関数を単なる値の対応と捉えるのではなく，何か「天与の規則」を備えたものと考えていた．これはその後コーシーやリーマンの**複素関数論**において**解析接続**として実現された（高木貞治「解析概論」参照）.

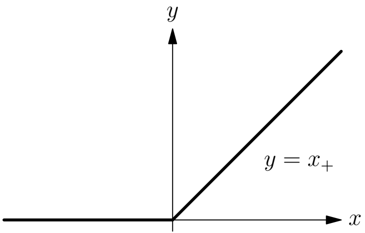
オイラーの等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ や複素関数論も「複素数の魔法のような至高の成果」である.（この本には 'magical complex numbers' という章がある.）

ヘビサイド関数とデルタ超関数の計算規則（Dirac 流）

まず

$$x_+ = xY(x) = \begin{cases} x & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$$

とする．



x_+ の微分は $x > 0$ では 1 で $x < 0$ では 0 だから

$$\underline{(x_+)' = Y(x)}$$

と考える．ただし $x = 0$ での値は考えない（あるいは任意の値とする）．

次に $\underline{\delta(x) = Y'(x)}$ によってデルタ超関数 $\delta(x)$ を定義する.

$Y(x) = (x_+)'$, $\delta(x) = Y'(x)$, $xY(x) = x_+$ と積の微分の公式より

$$Y(x) = (x_+)' = (xY(x))' = Y(x) + xY'(x) = Y(x) + x\delta(x)$$

よって $\underline{x\delta(x) = 0}$. この両辺をもう一度微分すると

$$0 = (x\delta(x))' = x\delta'(x) + \delta(x) \quad \text{従って} \quad \underline{x\delta'(x) = -\delta(x)}$$

また,

$$Y(-x) = 1 - Y(x) \quad (x \neq 0), \quad \frac{d}{dx}Y(-x) = -Y'(x) = -\delta(x)$$

と $\dfrac{d}{dx}Y(-x) = -Y'(-x) = -\delta(-x)$ より $\underline{\delta(-x) = \delta(x)}$.

超関数の積分と積分記号の下での微分法

一般に $u(x)$ を超関数とすると，$u(x)$ の原始超関数，すなわち $U'(x) = u(x)$ を満たす超関数 $U(x)$ が存在する．このとき超関数 $u(x)$ の（定）積分を

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \{U(R) - U(-R)\}$$

によって（この右辺が意味を持つ場合に）定義する．

例 $Y'(x) = \delta(x)$ より

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\,dx = \lim_{R\to\infty} \{Y(R) - Y(-R)\} = 1 - 0 = 1$$

さらに一般に $u(x,t)$ を2変数の超関数で x に関してコンパクト台を持つ，すなわち $|x|$ が十分大きいところでは $u(x,t)=0$ であるとする.（あるいは，もっと一般に，x について「急減少」でもよい.）

このとき，$u(x,t)$ の x についての積分

$$v(t)=\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx$$

が超関数として定義できる．具体的には $\dfrac{\partial U}{\partial x}=u(x,t)$ となる超関数 $U(x,t)$ を用いて

$$v(t)=\lim_{R\to\infty}\{U(R,t)-U(-R,t)\}$$

という式が超関数として意味を持つ.

このとき，次の 2 つの性質が成り立つ．

- $v'(t) = \dfrac{d}{dt}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial t}(x,t)\,dx$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)\,dx = \lim_{R\to\infty}\{u(R,t) - u(-R,t)\} = 0$

この最初の式を積分記号のもとでの微分法という．

第２章：微分方程式とホロノミック（超）関数

ホロノミック（超）関数

1 変数の（超）関数 $u(x)$ が（多項式係数の斉次）線形微分方程式

$$a_0(x)u^{(m)}(x) + a_1(x)u^{(m-1)}(x) + \cdots + a_{m-1}(x)u'(x) + a_m(x)u(x) = 0$$

（$a_0, \ldots, a_m$ は x の多項式で $a_0 \neq 0$）を満たすとき，**ホロノミック（超）関数**という（ホロノミックという用語は佐藤幹夫による）．1 つの線形微分方程式を満たす（超）関数の全体は有限次元のベクトル空間をなす．

デルタ超関数の満たす方程式 $x\delta(x) = 0$ は 0 階の線形微分方程式であるから $\delta(x)$ はホロノミック超関数である．逆に $xu(x) = 0$ を満たす超関数 $u(x)$ は $\delta(x)$ の定数倍である．

また，ヘビサイド関数は $xY'(x) = 0$ という 1 階の線形微分方程式を満たすから，ホロノミック関数である．逆に $xu'(x) = 0$ を満たす（超）関数 $u(x)$ は $Y(x)$ と $Y(-x)$ の 1 次結合である．

ホロノミック関数の概念は 2 変数以上の関数の場合にも拡張されるが，定義は難しい（D 加群理論が必要）．

ごく大雑把に言うと，解の全体が有限次元となるような連立の線形偏微分方程式（D 加群）をホロノミック系と言い，その解となる（超）関数をホロノミック（超）関数と呼ぶ．

ホロノミック関数の満たすホロノミック系 (D 加群）を調べることによってホロノミック関数の性質を（ある程度）導くことができる．これが代数解析学の基本的な考え方の一つである．古典的な特殊関数（超幾何関数，ベッセル関数など）はその典型例である．たとえばベッセル関数 $u(x) = J_a(x)$ は

$$x^2 u''(x) + xu'(x) + (x^2 - a^2)u = 0$$

という 2 階の線形微分方程式を満たす．この微分方程式からベッセル関数の種々の性質が導かれる．

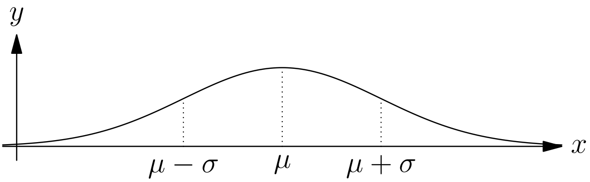
ホロノミックな確率密度関数

重要な連続確率分布の密度関数 $\varphi(x)$ の多くはホロノミックである.

(1) **正規分布** $\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \quad (\mu \in \mathbb{R},\ \sigma > 0)$

$$\varphi'(x) = -\frac{x-\mu}{\sigma^2}\varphi(x) \quad \text{すなわち} \quad \varphi'(x) + \frac{x-\mu}{\sigma^2}\varphi(x) = 0$$

より $\varphi(x)$ はホロノミックである.



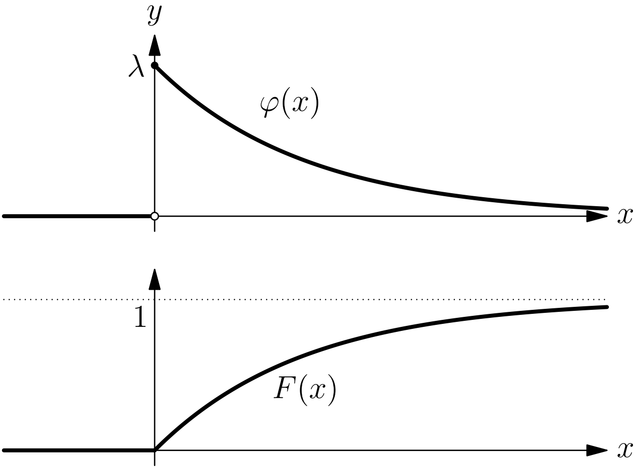
(2) 指数分布 $\varphi(x) = \lambda e^{-\lambda x} Y(x) \qquad (\lambda > 0)$

$$\varphi'(x) = -\lambda^2 e^{-\lambda x} Y(x) + \lambda e^{-\lambda x} \delta(x)$$

と $x\delta(x) = 0$ より，超関数として

$$x\varphi'(x) + \lambda x \varphi(x) = \lambda e^{-\lambda x} x \delta(x) = 0$$

が成立するから，$\varphi(x)$ はホロノミックである．



$\varphi(x)$ は $x=0$ で不連続であるから通常の意味では微分できないが，上のように超関数としては（何回でも）微分できる．

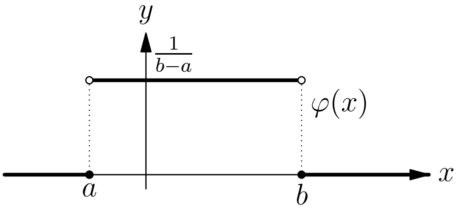
(3) 一様分布 $\varphi(x) = \dfrac{1}{b-a} Y(x-a) Y(b-x) \qquad (a < b)$

$$\varphi'(x) = \frac{1}{b-a}\delta(x-a) - \frac{1}{b-a}\delta(b-x)$$

より超関数として

$$\begin{aligned}(x-a)(x-b)\varphi'(x) &= \frac{x-b}{b-a}(x-a)\delta(x-a) + \frac{x-a}{b-a}(b-x)\delta(b-x) \\ &= 0\end{aligned}$$

が成立するから，$\varphi(x)$ はホロノミックである．



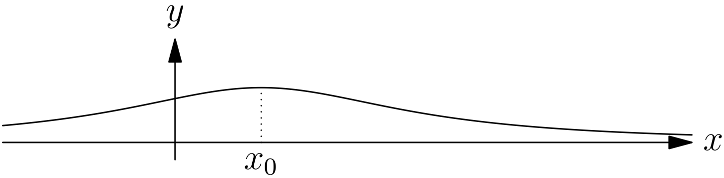
(4) コーシー分布 $\varphi(x) = \dfrac{1}{\pi}\dfrac{\gamma}{(x-x_0)^2+\gamma^2} \qquad (x_0 \in \mathbb{R},\ \gamma > 0)$

$$\varphi'(x) = -\frac{1}{\pi}\frac{2\gamma(x-x_0)}{\{(x-x_0)^2+\gamma^2\}^2}$$

より

$$\{(x-x_0)^2+\gamma^2\}\varphi'(x) + \frac{2\gamma}{\pi}(x-x_0)\varphi(x) = 0$$

が成立するから，$\varphi(x)$ はホロノミックである.



（ただし,「急減少」ではないので，期待値や分散が存在しないなど，積分を考える際には注意が必要.）

多変数のホロノミックな確率密度関数

- $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_n(x)$ がホロノミックな密度関数ならば,

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_1(x_1) \cdots \varphi_n(x_n)$$

は n 変数のホロノミックな確率密度関数である.

- n 次元の正規分布の密度関数（簡単のため平均値が 0 ベクトルとすると）

$$\varphi(x_1, \ldots, x_n) = \frac{\sqrt{\det A}}{(\sqrt{2\pi})^n} \exp\left(-\frac{1}{2} {}^t\mathbf{x} A \mathbf{x}\right)$$

（A は正定値対称行列，$\mathbf{x} = {}^t(x_1, \ldots, x_n)$ ）はホロノミックである.

第 3 章：確率分布の代数解析

確率変数の多項式の分布関数と密度関数

簡単のため 1 次元の（すなわち一つの）確率変数 X を考える．
（以下の議論は X が任意次元の確率ベクトルの場合に拡張できる．）

仮定

- 確率変数 X の確率密度関数 $\varphi(x)$ はホロノミックであるとする．
- $f(x)$ を x の（実数係数の定数でない）多項式とする．

目標

このとき，確率変数 $T = f(X)$ の確率密度関数の満たす微分方程式を求めること．
$\Rightarrow$ 微分方程式を用いて T の分布の性質を調べたり数値計算を行うことが可能となる．

T の分布関数 $F(t)$ は

$$F(t) = \int_{f(x)\le t} \varphi(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) Y(t - f(x))\,dx$$

で与えられる．$f(x)$ が定数でないことから，$F(t)$ は連続関数である．

被積分関数 $\varphi(x)Y(t-f(x))$ は，t と x の 2 変数関数としてホロノミックであることがわかる．このことと D 加群理論（ホロノミック関数の積分はホロノミック）により，<u>$F(t)$ はホロノミック関数である．</u>

$F(t)$ の<u>超関数の意味での</u>導関数は，積分記号下での微分法により

$$F'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial t}\{\varphi(x) Y(t - f(x))\}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(t - f(x))\,dx$$

$F(t)$ はホロノミック関数なので，有限個の特異点を除いて滑らか（何回でも微分可能）であり，最初に注意したように特異点においても連続であることから，$F(t)$ の超関数としての導関数 $F'(t)$ は，有限個の点を除いて滑らかで実数全体で可積分な通常の（連続とは限らない）関数であることがわかる．

従って $F'(t)$ は確率論の意味での T の確率密度関数である．

さらに $F(t)$ および $F'(t)$ の満たす微分方程式を求めるアルゴリズムも存在する．これは D 加群の代数的な意味の積分を求めることに帰着され，それを計算する厳密なアルゴリズムは 1997 年頃講演者によって導入された．(「発見的」な方法はそれ以前から種々考案されていたが，それらは超関数にも適用できること、答として微分方程式が（理論上）必ず求まることの 2 点が保証されていなかった．)

例：自由度 1 の χ^2 分布

確率変数 X に対する確率密度関数は標準正規分布

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2\right)$$

であるとする．このとき $T = X^2$ の分布関数は

$$F(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x) Y(t - x^2)\, dx$$

であり，確率密度関数は

$$v(t) := F'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(t - x^2)\, dx$$

である．この被積分関数を

$$u(x, t) = \varphi(x)\delta(t - x^2)$$

とおく．

$u(x,t)=\varphi(x)\delta(t-x^2)$ を t と x で偏微分し，$\varphi(x)$ の満たす微分方程式 $\varphi'(x)=-x\varphi(x)$ を用いると

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial t} &= \varphi(x)\delta'(t-x^2),\\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \varphi'(x)\delta(t-x^2)-2x\varphi(x)\delta'(t-x^2)\\
&= -x\varphi(x)\delta(t-x^2)-2x\frac{\partial u}{\partial t}
\end{aligned}
$$

となる．これから被積分関数 $u(x,t)$ は

$$
(t-x^2)u=0, \qquad \frac{\partial u}{\partial x}+2x\frac{\partial u}{\partial t}+xu=0
$$

というホロノミックな連立線形偏微分方程式を満たすことがわかる．

この 2 つの微分方程式から

$$
\begin{aligned}
0 &= x\left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2x\frac{\partial u}{\partial t} + xu\right) + \left(1 + 2\frac{\partial}{\partial t}\right)\{(t-x^2)u\} \\
&= x\frac{\partial u}{\partial x} + 2x^2\frac{\partial u}{\partial t} + x^2u + (t-x^2)u + 2\frac{\partial}{\partial t}\{(t-x^2)u\} \\
&= x\frac{\partial u}{\partial x} + 2x^2\frac{\partial u}{\partial t} + x^2u + (t-x^2)u + 2u + 2(t-x^2)\frac{\partial u}{\partial t} \\
&= x\frac{\partial u}{\partial x} + 2t\frac{\partial u}{\partial t} + (t+2)u \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(xu) - u + 2t\frac{\partial u}{\partial t} + (t+2)u \\
&= \frac{\partial}{\partial x}(xu) + 2t\frac{\partial u}{\partial t} + (t+1)u
\end{aligned}
$$

を得る．この両辺を x で積分すると

$u(x,t)$ は $|x|$ が十分大きいとき 0 となることと，積分記号下での微分法により

$$
\begin{aligned}
0 &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \frac{\partial}{\partial x}(xu) + 2t\frac{\partial u}{\partial t} + (t+1)u \right\} dx \\
&= \lim_{x\to\infty} xu(x,t) - \lim_{x\to-\infty} xu(x,t) \\
&\quad + 2t\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx + (t+1)\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx \\
&= 2t\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx + (t+1)\int_{-\infty}^{\infty} u(x,t)\,dx
\end{aligned}
$$

を得る．

以上により確率密度関数 $v(t) = F'(t)$ は（超関数として）微分方程式

$$2t\frac{dv}{dt} + (t+1)v = 0$$

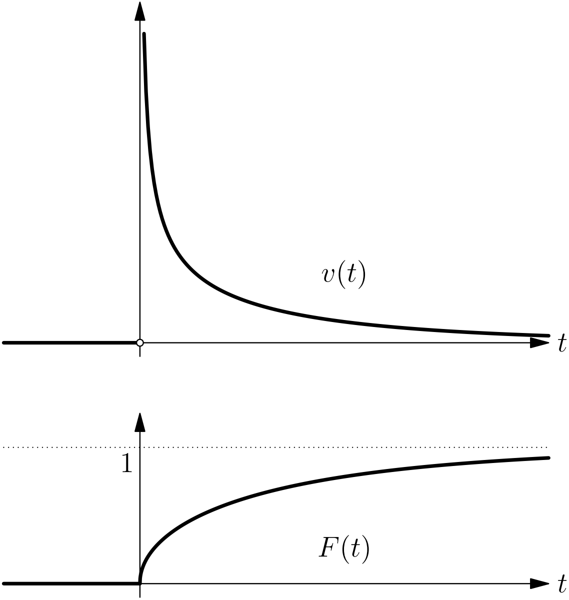
を満たすことがわかった．これは変数分離形の微分方程式であり，

$$\int \frac{dv}{v} = -\int \left(\frac{t+1}{2t}\right) dt = -\frac{1}{2}t - \frac{1}{2}\log|t|$$

より，C_+, C_- を定数として

$$v(t) = \begin{cases} C_+ t^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) & (t > 0) \\ C_- |t|^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2}t\right) & (t < 0) \end{cases}$$

となることがわかる．ここで X^2 は負の値をとらないことから，$C_- = 0$ である．C_+ は確率密度関数の条件 $\int_{-\infty}^{\infty} v(t)\,dt = 1$ から $C_+ = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ となることがわかる．なお，値 $v(0)$ は定まらないが，$v(t)$ が可積分であることから，0 を含めた実数全体において確率密度が定まる．$v(t)$ を超関数とみなしたときに，実数全体で上記の微分方程式を満たしている．


v(t)
t
1
F(t)
t

通常の方法との比較

$t > 0$ のとき

$$t - x^2 \geq 0 \iff -\sqrt{t} \leq x \leq \sqrt{t}$$

だから,

$$F(t) = \int_{-\sqrt{t}}^{\sqrt{t}} \varphi(x)\,dx$$

これを微分して（微分積分学の基本公式を用いる）

$$\begin{aligned} F'(t) &= \frac{1}{2\sqrt{t}}\varphi(\sqrt{t}) + \frac{1}{2\sqrt{t}}\varphi(-\sqrt{t}) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi t}}\exp\left(-\frac{1}{2}t\right) \qquad (t > 0) \end{aligned}$$

$f(x)$ が一般の多項式の場合は，$f(x) \leq t$ を満たす x の範囲を具体的に t の式として求める必要がある．これは $f(x)$ が 5 次以上だと（一般には）原理的に不可能（アーベルの定理）．

例：標準正規分布で $f(X) = X^5 - 5X$ の場合

$\varphi(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{1}{2}x^2\right)$, $f(x) = x^5 - 5x$ のとき，

$$v(t) = F'(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(x)\delta(t - x^5 + 5x)\,dx$$

は D 加群理論を用いた（コンピュータによる）計算から

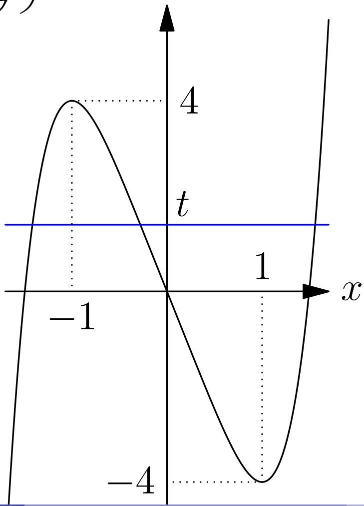
$$\begin{aligned} &a_0(t)v^{(6)}(t) + a_1(t)v^{(5)}(t) + a_2(t)v^{(4)}(t) + a_3(t)v^{(3)}(t) \\ &\qquad + a_4(t)v''(t) + a_5(t)v'(t) + a_6(t)v(t) = 0, \\ &a_0(t) = t^4 - 256 = (t-4)(t+4)(t^2+16) \end{aligned}$$

($a_1, \ldots, a_6$ は複雑なので省略)

という 6 階の線形微分方程式を満たすことがわかる.

たとえば $t=1$ のとき x^5-5x-1 は $\mathbb{Q}$ 上既約で 3 実根を持つことから $\mathbb{Q}$ 上のガロア群が 5 次対称群であることがわかるので, $x^5-5x=t$ を満たす x を（根号と四則演算による)t の式で表すことはできない.

$f(x)=x^5-5x$ のグラフ



2 変数の確率変数の例

X と Y を標準正規分布に従う互いに独立な確率変数とするとき，積 XY の確率密度関数

$$v(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}y^2\right) \delta(t - xy)\, dxdy$$

は

$$tv''(t) + v'(t) - tv(t) = 0$$

という微分方程式を満たす．これから $v(t)$ はベッセル関数（の一種のハンケル関数）で表されることがわかる．

以上，正規分布の場合の計算例を示したが，ガンマ分布（指数分布を含む），ベータ分布（一様分布を含む），更にそれらの切断分布（確率変数の範囲を制限した分布）などにも適用できる．