

情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 11 回（11 月 29 日）

- 第 2 章 離散フーリエ変換
- 2.1 サンプリングと離散フーリエ変換（復習）
- 2.2 逆離散フーリエ変換と標本化定理

2.1 サンプリングと離散フーリエ変換（復習）

$f(t)$ を周期 T , 基本角周波数 $\omega = \frac{2\pi}{T}$ の実数値周期関数とすると, その複素フーリエ級数と複素フーリエ係数は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t),$$
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-in\omega t) dt$$

で与えられます. (指数関数 e^x を $\exp(x)$ と表します.)

N を自然数として 1 周期の区間 $[0, T]$ を N 等分し刻み幅を $\Delta t = \frac{T}{N}$ としたときの $f(t)$ のサンプリング (標本化) $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ を

$$f_k = f(t_k), \quad t_k = \frac{T}{N}k \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

で定義します. 時刻 t の刻み幅 $\Delta t = \frac{T}{N}$ の逆数 $F_s = \frac{1}{\Delta t} = \frac{N}{T}$ のことをサンプリング周波数と呼びます (CD のサンプリング周波数は 44100Hz).

このとき、 $f(t)$ の複素フーリエ係数 c_n の値をリーマン和で近似した値を \tilde{c}_n とすると

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \exp(-in\omega t_k) \frac{T}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \exp(-in\omega t_k)$$

となります。リーマン和の $N \rightarrow \infty$ とした極限が定積分なので、 N を十分大きくとれば、 \tilde{c}_n は c_n に近いと考えられます。上のリーマン和の式

において $in\omega t_k = in\frac{2\pi}{T} \frac{T}{N} k = \frac{2\pi i}{N} nk$ であることに注意して、

$$W = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

とおくと、

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-nk} f_k = \frac{1}{N} (f_0 + W^{-n} f_1 + W^{-2n} f_2 + \cdots + W^{-(N-1)n} f_{N-1}) \quad (1)$$

という式が得られます。

ここで j, ℓ を整数として $n = jN + \ell$ ($0 \leq \ell \leq N - 1$) とすると,
 $W^{-N} = 1$ より

$$\tilde{c}_n = \tilde{c}_{jN+\ell} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(jN+\ell)k} f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-\ell k} f_k = \tilde{c}_\ell$$

が成立します. つまりフーリエ係数の近似値 \tilde{c}_n は, $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1}$ だけ
求めておけば, あとはこれらの繰り返しとなるわけです. (本当のフーリ
エ係数 c_n にはこのような性質はありません.)

そこで式 (1) において $n = 0, 1, \dots, N-1$ とすれば, (1) は複素数を成分とする N 次元ベクトル $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ から N 次元ベクトル $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ への線形変換 (線形写像)

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & W^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \dots & W^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を表していると考えることができます. この線形変換を離散フーリエ変換 (DFT, discrete Fourier transform) と呼びます. これは周期 T によらず N だけで定まります.

補題 2.1

実数のベクトル $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換 $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ は

$$\tilde{c}_{N-n} = \overline{\tilde{c}_n} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

を満たす. すなわち, \tilde{c}_{N-n} は \tilde{c}_n の共役複素数である.

証明: $W^N = 1$ と $\overline{W} = W^{-1}$ より $W^{-(N-n)k} = W^{nk} = \overline{W^{-nk}}$ であるから,

$$\tilde{c}_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(N-n)k} f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{W^{-nk}} f_k = \overline{\tilde{c}_n}$$

ここで f_k は実数であるから, $\overline{f_k} = f_k$ であることを用いた.

この補題により, $0 \leq n \leq \frac{N}{2}$ を満たす n について \tilde{c}_n を計算すれば,

$$\tilde{c}_n = \overline{\tilde{c}_{N-n}} \quad \left(\frac{N}{2} < n \leq N-1 \right)$$

により他の \tilde{c}_n も求まるので計算が簡略化されます.

2.2 逆離散フーリエ変換と標本化定理

定理 2.1 (逆離散フーリエ変換)

$(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ を $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換とするととき,

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} \tilde{c}_n \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (3)$$

が成立する.

(3) を行列で表せば,

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \dots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \dots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \dots & W^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (4)$$

となります. これを逆離散フーリエ変換といいます.

まず次の補題を示します.

補題 2.2

α が 1 と異なる複素数, N が自然数であって, $\alpha^N = 1$ であるとする, と,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{N-1} = 0$$

が成立する.

証明 : $S = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{N-1}$ とおくと,

$$(1-\alpha)S = S - \alpha S = (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{N-1}) - (\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^N) = 1 - \alpha^N = 0$$

である. これと $1 - \alpha \neq 0$ より $S = 0$ となる.

定理 2.1 の証明：離散フーリエ変換 (2) の行列 ($1/N$ 以外の部分) を A , 逆離散フーリエ変換 (4) の行列を B とすると, A の (n, k) 成分は W^{-nk} , B の (n, k) 成分は W^{nk} であるから, AB の (n, k) 成分は

$$\sum_{j=0}^{N-1} W^{-nj} W^{jk} = \sum_{j=0}^{N-1} W^{(k-n)j} = \sum_{j=0}^{N-1} (W^{k-n})^j$$

$k \neq n$ のときは, $-N < k - n < N$ かつ $k - n \neq 0$ より $W^{k-n} \neq 1$ であるから, 補題 2.2 よりこの和は 0 である. $n = k$ のときは $W^{k-n} = 1$ よりこの和は N となる. 従って $AB = NI_N$ (I_N は N 次単位行列) が示された. これより $B = (\frac{1}{N}A)^{-1}$ であるから, (4) が (2) の逆変換であることがわかった.

例 2.3 $N = 4$ のとき, $W = \exp(\frac{\pi i}{2}) = i$ より離散フーリエ変換と逆離散フーリエ変換は次のようになります.

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$
$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix}$$

逆離散フーリエ変換の式 (3) の意味を考えてみましょう. (3) を角周波数 ω と t_k を用いて書き直すと

$$\begin{aligned} f_k &= \sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} \tilde{c}_n = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N} nk\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n \exp\left(in \frac{2\pi}{T} \frac{T}{N} k\right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n \exp(in\omega t_k) \quad (0 \leq k \leq N-1) \end{aligned}$$

となります. ここで角周波数 $n\omega$ の (複素) 単振動を表す関数

$$e_n(t) = \exp(in\omega t)$$

を導入すれば,

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n e_n(t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (5)$$

となります.

ここで右辺の t_k を t にした関数

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n e_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n \exp(in\omega t)$$

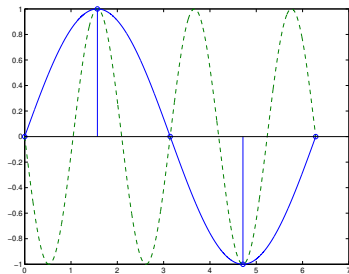
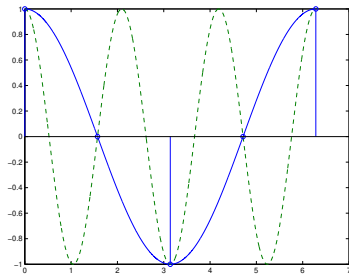
は有限複素フーリエ級数の形をしていますが、負の n に対応する項がなく、実数値関数の複素フーリエ展開の形はしていません．そこで

$$\begin{aligned} \exp(i(n-N)\omega t_k) &= \exp\left(i(n-N)\frac{2\pi}{T}\frac{T}{N}k\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(n-N)k\right) \\ &= \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) \exp(-2\pi ik) = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) \\ &= \exp\left(in\frac{2\pi}{T}\frac{T}{N}k\right) = \exp(in\omega t_k) \end{aligned}$$

より $e_{n-N}(t_k) = e_n(t_k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) が成立することに注意します．

2つの関数 $e_{n-N}(t)$ と $e_n(t)$ は異なりますが、標本点 t_k における値は一致するため、標本化すると区別できなくなるというわけです．

たとえば $N = 4$ のとき、 $e_1(t)$ （実線）と $e_{-3}(t)$ （点線）は標本点 $t_k = \frac{T}{4}k$ ($k = 0, 1, 2, 3$) において同じ値を取るため、標本化すると区別できません。下の図は $e_1(t)$ と $e_{-3}(t)$ とその標本化を表したものです（左が実部、右が虚部）。



実線 $e_1(t)$ と破線 $e_{-3}(t)$ は標本点で交わっています。このような現象をエイリアシング (aliasing) と呼びます。

例： $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ とおく． 区間 $[0, T]$ を 4 等分し $t_k = \frac{kT}{4}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) として周期 T の関数 $f(t) = \sin \omega t$ をサンプリングして離散フーリエ変換を求めると ($\omega t_k = \frac{k\pi}{2}$ に注意)

$$(f_0, f_1, f_2, f_3) = (0, 1, 0, -1), \quad (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) = (0, -\frac{i}{2}, 0, \frac{i}{2})$$

この逆離散フーリエ変換の式は $W = \exp(\frac{\pi i}{2}) = i$ とおくと

$$f_0 = 0 \cdot W^0 + \left(-\frac{i}{2}\right) \cdot W^0 + 0 \cdot W^0 + \frac{i}{2} \cdot W^0 = -\frac{i}{2}e^{i\omega t_0} + \frac{i}{2}e^{3i\omega t_0}$$

$$f_1 = 0 \cdot W^0 + \left(-\frac{i}{2}\right) \cdot W + 0 \cdot W^2 + \frac{i}{2} \cdot W^3 = -\frac{i}{2}e^{i\omega t_1} + \frac{i}{2}e^{3i\omega t_1}$$

$$f_2 = 0 \cdot W^0 + \left(-\frac{i}{2}\right) \cdot W^2 + 0 \cdot W^4 + \frac{i}{2} \cdot W^6 = -\frac{i}{2}e^{i\omega t_2} + \frac{i}{2}e^{3i\omega t_2}$$

$$f_3 = 0 \cdot W^0 + \left(-\frac{i}{2}\right) \cdot W^3 + 0 \cdot W^6 + \frac{i}{2} \cdot W^9 = -\frac{i}{2}e^{i\omega t_3} + \frac{i}{2}e^{3i\omega t_3}$$

となり，さらに右辺の $e_3(t_k) = e^{3i\omega t_k}$ を $e_{-1}(t_k) = e^{-i\omega t_k}$ で置き換えれば

$$f_k = -\frac{i}{2}e^{i\omega t_k} + \frac{i}{2}e^{3i\omega t_k} = -\frac{i}{2}e^{i\omega t_k} + \frac{i}{2}e^{-i\omega t_k} \quad (k = 0, 1, 2, 3)$$

と変形できます. この右辺は $f(t)$ の複素フーリエ級数展開

$$f(t) = \sin \omega t = -\frac{i}{2}e^{i\omega t} + \frac{i}{2}e^{-i\omega t}$$

の $t = t_k$ における値を表していることに着目しましょう. 特に $f(t)$ の複素フーリエ係数 c_n は

$$c_1 = -\frac{i}{2}, \quad c_{-1} = \frac{i}{2}, \quad c_n = 0 \quad (n \neq \pm 1)$$

となり, $c_0 = \tilde{c}_0 = 0, c_1 = \tilde{c}_1 = -\frac{i}{2}$ が成立しています.

定理 2.2 (標本化定理)

$f(t)$ を周期 T の周期関数として $\omega = \frac{2\pi}{T}$ とおき, c_n を $f(t)$ の複素フーリエ係数とする. また N を自然数として区間 $[0, T]$ を N 等分し $t_k = \frac{k}{N}T$ として, $(\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ を $(f(t_0), \dots, f(t_{N-1}))$ の離散フーリエ変換とする. このときもし

$$n \geq \frac{N}{2} \Rightarrow c_n = 0 \quad (\text{A})$$

ならば

$$0 \leq n < \frac{N}{2} \Rightarrow \tilde{c}_n = c_n \quad (\text{B})$$

が成立する.

証明の前に仮定 (A) と結論 (B) の意味を考えましょう. M を $\frac{N}{2}$ より小さい最大の整数, すなわち N が偶数の時は $M = \frac{N}{2} - 1$, N が奇数のときは $M = \frac{N-1}{2}$ とすると, 仮定 (A) は $f(t)$ の複素フーリエ級数が

$$f(t) = \sum_{n=-M}^M c_n e^{in\omega t} = c_0 + \sum_{n=1}^M (c_n e^{in\omega t} + \overline{c_n} e^{-in\omega t})$$

と表されることを意味します. これは $f(t)$ に含まれる単振動の角周波数 $n\omega$ が

$$n\omega \leq M\omega < \frac{N\omega}{2} = \frac{\pi N}{T} = \pi F_s$$

を満たすこと, すなわち $f(t)$ に含まれる単振動の周波数が $\frac{1}{2}F_s$ より小さいことを意味します ($F_s = \frac{N}{T}$ はサンプリング周波数).

結論 (B) は

$$c_0 = \tilde{c}_0, \quad c_1 = \tilde{c}_1, \quad \dots, \quad c_M = \tilde{c}_M$$

を意味するので、仮定 (A) と合わせて $f(t)$ のすべての複素フーリエ係数 c_n が $f(t)$ のサンプリングデータ $(f(t_0), f(t_1), \dots, f(t_{N-1}))$ から離散フーリエ変換によって正確に求まります. 従って $f(t)$ 自体が有限フーリエ級数

$$f(t) = \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^M (\tilde{c}_n e^{in\omega t} + \overline{\tilde{c}_n} e^{-in\omega t})$$

によって完全に復元できることになります.

以上をまとめると、標本化定理は、もとの関数 $f(t)$ がサンプリング周波数の $\frac{1}{2}$ 以上の周波数の単振動を含まなければ、このサンプリングによって情報は全く失われない、つまり $f(t)$ をサンプリングデータだけから完全に復元できることを意味しています.

標本化定理の証明： $\exp(in\omega t_k) = \exp\left(in\frac{2\pi}{T}\frac{kT}{N}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right)$ であるが、 $n < 0$ のときはさらに $\exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(n+N)k\right)$ に注意すると、

$$\begin{aligned}
 f(t_k) &= \sum_{n=-M}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) \\
 &= \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) + \sum_{n=1}^M c_{-n} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(-n)k\right) \\
 &= \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) + \sum_{n=1}^M c_{-n} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(N-n)k\right) \\
 &= \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) + \sum_{n=N-M}^{N-1} c_{n-N} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right)
 \end{aligned}$$

を得る．ここで最後の行ではその上の行の $N-n$ をあらためて n とした．

N が奇数のときは, $M = \frac{N-1}{2}$, $N - M = \frac{N+1}{2} = M + 1$ であり,

$$f_k = f(t_k) = \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N} nk\right) + \sum_{n=M+1}^{N-1} c_{n-N} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} nk\right)$$

となる. この式は $(c_0, c_1, \dots, c_M, c_{-M}, c_{-(M-1)}, \dots, c_{-1})$ の逆離散フーリエ変換が $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ であることを意味している. 従って, $(c_0, c_1, \dots, c_M, c_{-M}, c_{-(M-1)}, \dots, c_{-1})$ は $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換である. 一方, $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ は $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換であったから,

$$(c_0, c_1, \dots, c_M, c_{-M}, c_{-(M-1)}, \dots, c_{-1}) = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$$

が成立する. これから結論を得る.

一方, N が偶数のときは $M = \frac{N}{2} - 1$, $N - M = 2(M + 1) - M = M + 2$ より,

$$f_k = f(t_k) = \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N} nk\right) + \sum_{n=M+2}^{N-1} c_{n-N} \exp\left(\frac{2\pi i}{N} nk\right)$$

となるから, 上と同様の議論により,

$$(c_0, c_1, \dots, c_M, 0, c_{-M}, \dots, c_{-1}) = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$$

が成立することがわかる, (証明終わり)

例： $T > 0$, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ とおく． 区間 $[0, T]$ を 4 等分し $t_k = \frac{kT}{4}$ ($k = 0, 1, 2, 3$) として周期 T の関数 $f(t) = \sin^3 \omega t$ をサンプリングして離散フーリエ変換を求めると ($\omega t_k = \frac{k\pi}{2}$ に注意) $\sin \omega t$ のときと同様に

$$(f_0, f_1, f_2, f_3) = (0, 1, 0, -1), \quad (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \tilde{c}_2, \tilde{c}_3) = (0, -\frac{i}{2}, 0, \frac{i}{2})$$

一方 $f(t)$ の複素フーリエ級数展開は (スライド 7 の例 1.8)

$$\begin{aligned} f(t) &= \sin^3 \omega t = \left(-\frac{i}{2}\right)^3 (e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})^3 \\ &= -\frac{3i}{8}e^{i\omega t} + \frac{i}{8}e^{3i\omega t} + \frac{3i}{8}e^{-i\omega t} - \frac{i}{8}e^{-3i\omega t} \end{aligned}$$

なので, $f(t)$ の複素フーリエ係数 c_n は

$$c_0 = 0, \quad c_1 = -\frac{3i}{8}, \quad c_2 = 0, \quad c_3 = \frac{i}{8}, \quad c_n = 0 \quad (n \neq \pm 1, \pm 3)$$

となり, $c_1 \neq \tilde{c}_1$, $c_3 \neq \tilde{c}_3$ となります． よって 1 周期を $N = 4$ 等分したサンプリングではもとの関数 $f(t)$ を復元できません． では N をいくつ以上にとれば, サンプリングから $f(t)$ を復元できるでしょうか？