情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 4 回（10 月 11 日）

- 1.5 正規直交系とフーリエ級数

1.5 正規直交系とフーリエ級数

命題 1.5（前回の復習）

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ のとき

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} 1 \cdot 1 \, dx = 2\pi$$

(2) $n = 1, 2, 3, \ldots,\ m = 1, 2, 3, \ldots$ のとき

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \sin mx \, dx = 0.$$

(3) (4) $n = 1, 2, 3, \ldots,\ m = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \delta_{nm}\pi, \qquad \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = \delta_{nm}\pi.$$

ただし δ_{nm} は $n = m$ のとき 1, $n \neq m$ のとき 0 を表す記号.

ノルムを 1 にする (正規化) ために,

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & (n = 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx & (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおくと，命題 1.5 より $C([0, 2\pi])$ において

$$(\varphi_i, \varphi_j) = 0 \quad (i \neq j), \qquad (\psi_i, \psi_j) = 0 \quad (i \neq j),$$

$$(\varphi_i, \psi_j) = 0 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots, j = 1, 2, \ldots)$$

$$\|\varphi_i\| = 1 \quad (i = 0, 1, 2, \ldots), \qquad \|\psi_j\| = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

が成立します.

すなわち，$\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_1, \psi_2, \dots$ は互いに直交して (内積が 0) ノルムがすべて 1 となります．このとき，これらの関数は $C([0, 2\pi])$ における**正規直交系**であるといいます．

一般に正規直交系について，次のことが成り立ちます．

命題 1.6

区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $\psi_1, \dots, \psi_N$ が $C([a, b])$ の正規直交系，すなわち

$$(\psi_i, \psi_j) = 0 \quad (1 \le i < j \le N), \qquad \|\psi_i\| = 1 \quad (i = 1, \dots, N)$$

を満たすとする．任意の $f \in C([a, b])$ を固定して，実数 $c_1, \dots, c_N$ に対して 1 次結合 $c_1\psi_1 + \cdots + c_N\psi_N$ を考えるとノルム

$$\|f - (c_1\psi_1 + \cdots + c_N\psi_N)\|$$

は $c_n = (f, \psi_n)$ $(n = 1, \dots, N)$ のとき最小となる．

証明：ノルムの 2 乗を内積で表すと，内積の性質から

$$
\begin{aligned}
\|f-(c_1\psi_1+\cdots+c_N\psi_N)\|^2 &= \left(f-\sum_{j=1}^N c_j\psi_j,\ f-\sum_{k=1}^N c_k\psi_k\right)\\
&= (f,f)-\left(f,\sum_{k=1}^N c_k\psi_k\right)-\left(\sum_{j=1}^N c_j\psi_j,\ f\right)+\left(\sum_{j=1}^N c_j\psi_j,\ \sum_{k=1}^N c_k\psi_k\right)\\
&= (f,f)-2\sum_{j=1}^N c_j(f,\psi_j)+\sum_{j,k=1}^N c_jc_k(\psi_j,\psi_k)\\
&= \|f\|^2-2\sum_{j=1}^N c_j(f,\psi_j)+\sum_{j=1}^N c_j^2\\
&= \sum_{j=1}^N\{c_j-(f,\psi_j)\}^2+\|f\|^2-\sum_{j=1}^N(f,\psi_j)^2.
\end{aligned}
$$

この式は $c_j=(f,\psi_j)$ $(i=1,\ldots,N)$ のとき最小値 $\|f\|^2-\sum_{j=1}^N(f,\psi_j)^2$ をとる.（証明終わり）

命題 1.7

関数 $f \in C([0, 2\pi])$ に対して，自然数 N を固定するとき，有限フーリエ級数

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を考えると，$\|f - g\|^2$ は

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \geq 1)$$

のとき最小値 $\|f\|^2 - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^{N} (a_n^2 + b_n^2)$ をとる．

証明：

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} & (n = 0) \\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx & (n = 1, 2, \ldots) \end{cases}$$

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

とおくと命題 1.5 より φ_0, φ_1,ψ_1, φ_2, ψ_2, . . . は $C([0, 2\pi])$ において正規直交系である.

命題 1.6 より

$$g = a_0' \varphi_0 + \sum_{n=1}^{N} (a_n' \varphi_n + b_n' \psi_n)$$

とおくと，$\|f - g\|$ は

$$a_0' = (f, \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x)\,dx$$

$$a_n' = (f, \varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots),$$

$$b_n' = (f, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx\,dx \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

のとき最小値をとる．

g を $\cos nx$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, N)$ と $\sin nx$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ の 1 次結合で表すと

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} a_0' \cdot 1 + \sum_{n=1}^{N} \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} a_n' \cos nx + \frac{1}{\sqrt{\pi}} b_n' \sin nx \right)$$

これを命題 1.7 の $g(x)$ の式

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と比較すると

$$a_0 = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} a_0' = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} (f, \varphi_0) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \, dx = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \, dx$$

また $n \geq 1$ のときは

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} a'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (f, \varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx \, dx$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx$$

$$b_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} b'_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (f, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \, dx$$
$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx$$

のとき $\|f - g\|^2$ は最小となり，最小値は命題 1.6 の証明より

$$\|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} (f, \varphi_n)^2 - \sum_{n=1}^{N} (f, \psi_n)^2 = \|f\|^2 - \sum_{n=0}^{N} {a'_n}^2 - \sum_{n=1}^{N} {b'_n}^2$$

$$= \|f\|^2 - \frac{\pi}{2} a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^{N} a_n^2 - \pi \sum_{n=1}^{N} b_n^2$$

である.（証明終わり）

そこで周期 2π の関数 $f(x)$ と自然数 N に対して，a_n, b_n を

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \geq 1)$$

で定めて

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

と定義します．これは有限フーリエ級数なので，一般には $f(x)$ とは異なりますが，次の定理が成り立ちます．

定理 1.1

$f(x)$ が周期 2π の連続関数ならば，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\|f - f_N\| = 0$ が成立する．

実は $f(x)$ がいくつかの点で不連続である場合にもこの定理は成立します．この定理の証明は後で行います．

定義 1.1

周期 2π の関数 $f(x)$ に対して a_n, b_n を

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \geq 1)$$

で定義するとき，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx)$$

と書いて，この右辺を $f(x)$ のフーリエ展開またはフーリエ級数という．

f のフーリエ展開の $n = N$ までの部分和

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を考えると，定理 1.1 によって $\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\| = 0$ が成り立つので，f_N はノルムで測ったとき f に限りなく近付くことになります (ノルム収束)．しかしすべての x に対して $\lim_{N\to\infty} f_N(x) = f(x)$ が成立する (各点収束) とは限りません (後の例を参照)．しかし「ほとんどの」x に対してこの等式が成立することが知られています．つまりフーリエ展開の式

$$f(x) \ \sim\ \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

において記号 $\sim$ は「ほとんど $=$」 だと思ってよいことになります．

さて，f のフーリエ展開

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

の「第 n 項」

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(nx + \theta_n) \qquad (\theta_n \text{ はある実数})$$

(ただし $n = 0$ のときは $a_0/2$) は $f(x)$ の表す波に含まれる周期 $2\pi/n$ (周波数が基本周波数 $1/2\pi$ の n 倍) の正弦波の成分を表していると考えられます．そこでそれぞれの正弦波の振幅を数列で表すと

$$\frac{|a_0|}{2}, \quad \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \sqrt{a_3^2 + b_3^2}, \quad \ldots$$

となり，これは $f(x)$ に，基本振動数の n 倍の振動数の正弦波がどれだけ含まれているかを表しており，$f(x)$ のスペクトルと呼ばれます．

フーリエ係数の計算に便利な性質を示します.

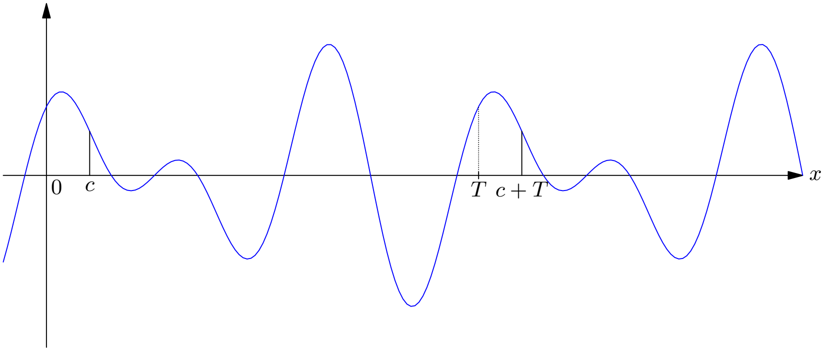
補題 1.1

$f(x)$ が周期 T の周期関数のとき、任意の定数 c に対して

$$\int_0^T f(x)\,dx = \int_c^{T+c} f(x)\,dx.$$

証明： たとえば $0 < c < T$ のとき

$$\begin{aligned}\int_c^{T+c} f(x)\,dx &= \int_c^T f(x)\,dx + \int_T^{T+c} f(x)\,dx \\ &= \int_c^T f(x)\,dx + \int_T^{T+c} f(x+T)\,dx \\ &= \int_c^T f(x)\,dx + \int_0^c f(x)\,dx = \int_0^T f(x)\,dx\end{aligned}$$



命題 1.8

f を周期 2π の周期関数とするとき，

(1) f が偶関数，すなわち $f(-x) = f(x)$ が成立すれば，すべての $n = 1, 2, 3, \ldots$ について $b_n = 0$.

(2) f が奇関数，すなわち $f(-x) = -f(x)$ が成立すれば，すべての $n = 0, 1, 2, 3, \ldots$ について $a_n = 0$.

証明：補題 1.1 によって，$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx$. まず $f(x)$ が偶関数ならば $f(x)\sin nx$ は奇関数なので

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0 \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

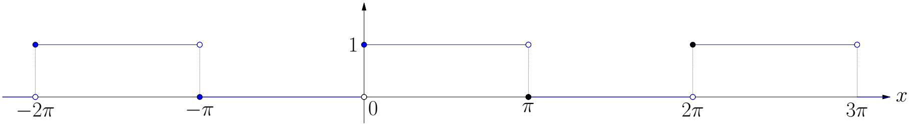
となります。また $f(x)$ が奇関数ならば $f(x)\cos nx$ も奇関数なので

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

例 1.2（パルス波）

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leqq x < 2\pi) \end{cases}$$

で定義される関数 f を周期 2π の周期関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数を同じ記号 f で表しましょう。



f のフーリエ展開を計算してみましょう.

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx\,dx \qquad (n \geq 0)$$

よって $n = 0$ のときは

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} 1\,dx = 1$$

$n \geq 1$ のときは

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \cos nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{\pi} = 0$$

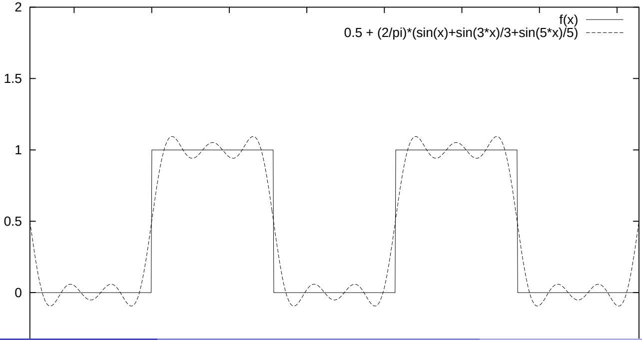
同様に $n \geq 1$ のとき

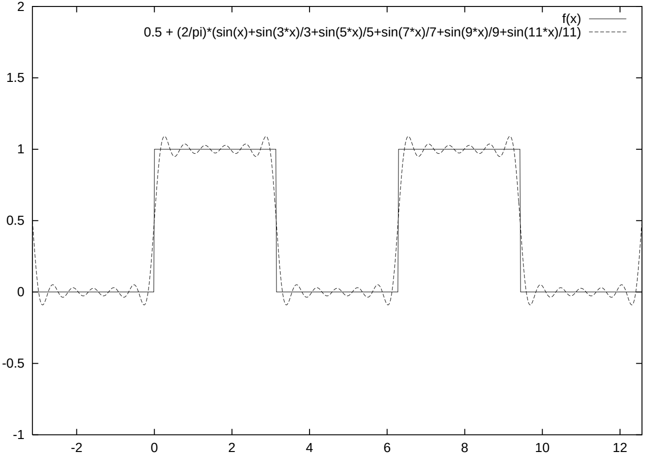
$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin nx \, dx = \frac{1}{\pi}\left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{\pi} \\
&= \frac{1}{n\pi}(\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{1}{n\pi}\{1 - (-1)^n\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases}
\end{aligned}$$

従って f のフーリエ展開は

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x$$
$$= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \cdots$$

となります．この右辺の $2n-1=5$ までの部分和 (左) と，$2n-1=11$ までの部分和 (右) のグラフは



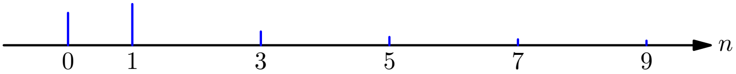


となり，項を増やしていくとフーリエ級数の有限和が f に近付いて行く様子が良くわかります．(ただし f の不連続点 $k\pi$ (k は整数) ではフーリエ級数は $\frac{1}{2} \neq f(k\pi)$ に収束する．)

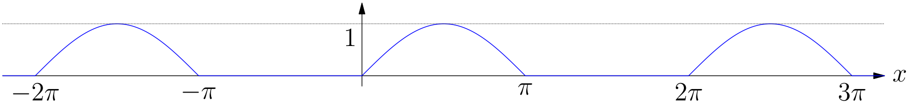
また，パルス波 f のスペクトルは

$$\frac{1}{2},\ \frac{\pi}{2},\ 0,\ \frac{2}{3\pi},\ 0,\ \frac{2}{5\pi},\ldots$$

となります.



例 **1.3**（整流正弦波）$f(x) = \max\{\sin x, 0\} = \frac{1}{2}(|\sin x| + \sin x)$ のフーリエ展開を計算しましょう．これは x が時刻を表すとすれば，たとえば正弦波の交流電圧を，一方向にしか電流を通さないダイオード (半導体) に加えたときの電流を表しています.



$n = 1$ のときは

$$a_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\cos 2x\right]_0^{\pi} = 0$$

$n \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \sin x\cos nx\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1}\right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi}\frac{1-(-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2\pi}\frac{1-(-1)^{n-1}}{n-1} \end{aligned}$$

で，これは n が奇数のときは 0, n が偶数のときは

$$\frac{1}{2\pi}\left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1}\right) = -\frac{2}{\pi(n^2-1)}$$

となります.

同様にして

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\sin x\sin nx\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}\{-\cos(n+1)x+\cos(n-1)x\}\,dx \end{aligned}$$

従って，$n=1$ のときは

$$b_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi}(-\cos 2x+1)\,dx = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{2}\sin 2x + x\right]_0^{\pi} = \frac{1}{2}$$

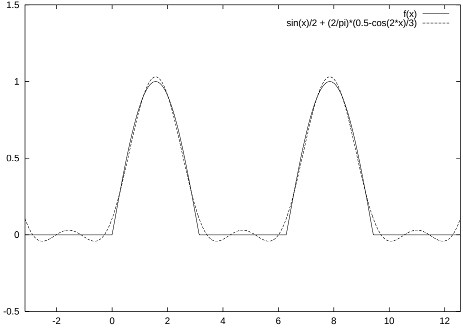
$n \neq 1$ のときは

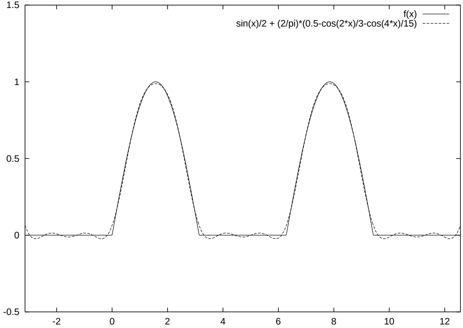
$$b_n = \frac{1}{2\pi}\left[-\frac{1}{n+1}\sin(n+1)x + \frac{1}{n-1}\sin(n-1)x\right]_0^{\pi} = 0$$

従って f のフーリエ展開は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

となります． $k = 1$ $(n = 2)$ までの部分和と $k = 2$ $(n = 4)$ のグラフは下のようになります．

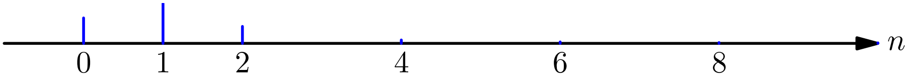

f(x)
sin(x)/2 + (2/pi)*(0.5-cos(2*x)/3)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-2
0
2
4
6
8
10
12


f(x)
sin(x)/2 + (2/pi)*(0.5-cos(2*x)/3-cos(4*x)/15)
1.5
1
0.5
0
-0.5
-2
0
2
4
6
8
10
12

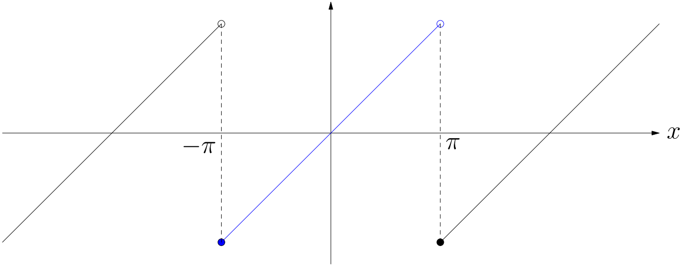
また整流正弦波 f のスペクトルは

$$\frac{1}{\pi},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{3\pi},\ 0,\ \frac{2}{15\pi}, 0, \ldots$$

となります.



例 1.4 （のこぎり波）$f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)$ を周期 2π の周期関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数を同じ記号 $f(x)$ で表し，そのフーリエ展開を計算しましょう．



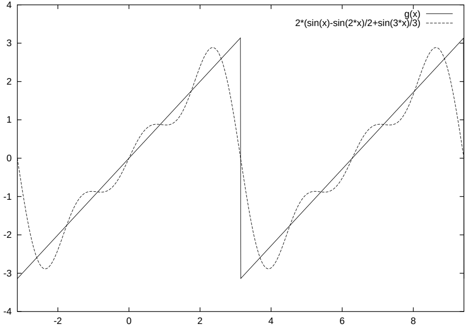
$f(x)$ は奇関数なので $a_n = 0$ で

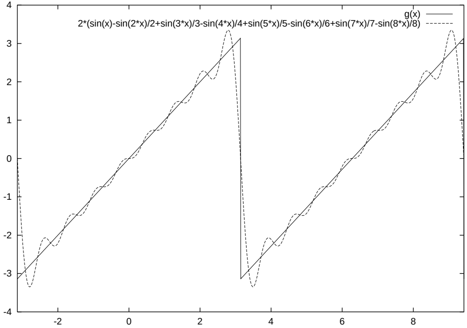
$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} x \sin nx \, dx \\
&= \frac{2}{\pi}\left(-\left[\frac{x\cos nx}{n}\right]_0^{\pi} + \int_0^{\pi} \frac{\cos nx}{n}\, dx\right) \\
&= \frac{2}{\pi}\left\{-\frac{\pi\cos n\pi}{n} + \left[\frac{1}{n^2}\sin nx\right]_0^{\pi}\right\} = \frac{2(-1)^{n-1}}{n}
\end{aligned}
$$

よって f のフーリエ展開は

$$
f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n}\sin nx = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right)
$$

$n=3$ までと $n=8$ までの部分和のグラフは下のようになります.


g(x)
2*(sin(x)-sin(2*x)/2+sin(3*x)/3)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2
0
2
4
6
8


g(x)
2*(sin(x)-sin(2*x)/2+sin(3*x)/3-sin(4*x)/4+sin(5*x)/5-sin(6*x)/6+sin(7*x)/7-sin(8*x)/8)
4
3
2
1
0
-1
-2
-3
-4
-2
0
2
4
6
8

のこぎり波 f のスペクトルは

$$0,\ 2,\ 1,\ \frac{2}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{2}{5},\ldots$$

となります.