

情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 9 回（11 月 15 日）

- 1.8 フーリエ級数の収束の証明（続き）
- 第 2 章 離散フーリエ変換
- 2.1 サンプリングと離散フーリエ変換

1.8 フーリエ級数の収束の証明 (続き)

定理 1.1

周期 2π の連続関数 $f(x)$ に対して a_n, b_n を

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \geq 1)$$

で定義し、自然数 N に対して

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とすると

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \sqrt{\int_0^{2\pi} \{f(x) - f_N(x)\}^2 \, dx} = 0$$

が成立する.

$f(x)$ が不連続点を持つ場合

次に関数が不連続な点を持つ場合を考察しましょう。

定義

周期 T の関数 $f(x)$ が区分的に連続とは、 $0 \leq a_1 < \cdots < a_k < T$ をみたす有限個の点 a_1, \dots, a_k が存在して、 $f(x)$ は、点 $a_j + nT$ ($1 \leq j \leq k$, $n \in \mathbb{Z}$) を除いて連続であり、各 a_k において右極限 $\lim_{x \rightarrow a_k+0} f(x)$ と左極限

$\lim_{x \rightarrow a_k-0} f(x)$ が存在すること。ただし、 $a_j + nT$ においては $f(x)$ の値は定義されていなくてもよい。

たとえば、パルス波やのこぎり波は区分的に連続ですが、

$f(x) = \frac{1}{x}$ ($-\pi < x < \pi$) を周期 2π で拡張した関数は、 $x = 0$ での右極限と左極限が存在しないので、区分的に連続にはなりません。

補題 1.2

$f(x)$ を周期 T の区分的に連続な関数とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\|f - g\| = \left(\int_0^T (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

を満たすような周期 T の連続関数 $g(x)$ が存在する. (g は ε による.)

証明: $f(x)$ の不連続点の近傍で 1 次式 (直線) に置き換えた関数を $g(x)$ とすればよい.

補題 1.3

区分的に連続な周期 T の関数 f, g に対して

$$(1) \quad |(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

$$(2) \quad \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

証明 : t を任意の実数とすると,

$$0 \leq \|tf + g\|^2 = (tf + g, tf + g) = t^2(f, f) + 2t(f, g) + (g, g).$$

従ってこの2次式の判別式が0以下であるから,

$$(f, g)^2 - (f, f)(g, g) = (f, g)^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0.$$

これから (1) を得る. この計算と (1) を用いて

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

両辺の平方根をとって (2) を得る.

定理 1.2

$f(t)$ を周期 T の区分的に連続な関数として, $\omega = \frac{2\pi}{T}$ とおく.

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t),$$

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (n \geq 0),$$

$$b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt \quad (n \geq 1)$$

とおくと,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_0^T (f(t) - f_N(t))^2 \, dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

が成立する.

証明： $\omega t = x$ とおくことにより， $f(t)$ は周期 2π の区分的に連続な関数としてよい．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，補題 1.2 より $\|f - g\| \leq \varepsilon$ を満たしかつ連続な周期 2π の関数 $g(t)$ が存在する． $g(t)$ のフーリエ係数を a'_n, b'_n として，

$$g_N(t) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$$

とおくと，定理 1.1 より， $\lim_{N \rightarrow \infty} \|g - g_N\| = 0$ となる．

命題 1.7（スライド 4）と補題 1.3 より， N が十分大きいとき，

$$\|f - f_N\| \leq \|f - g_N\| = \|(f - g) + (g - g_N)\| \leq \|f - g\| + \|g - g_N\| < \varepsilon + \|g - g_N\|$$

が成立する．ここで ε はいくらでも小さくとれるから $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0$ が証明された．

定理 1.3

$f(t)$ を周期 T の区分的に連続な（実数値）関数として $\omega = \frac{2\pi}{T}$ とおく.

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$f_N(t) = c_0 + \sum_{n=1}^N c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^N c_{-n} e^{-in\omega t}$$

とおくと

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_0^T (f(t) - f_N(t))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

が成立する.

証明: f_N は定理 1.2 の f_N をオイラーの等式で書き換えただけなので, 定理 1.3 の主張は定理 1.2 の主張と同じである.

2.1 サンプリングと離散フーリエ変換

たとえば音楽や音声などを録音する場合，音を表す関数 $f(t)$ を記録することになります．以前に用いられていたレコードでは $f(t)$ を溝の深さとしてレコード盤に刻み，テープレコーダーでは磁気の強さとして磁気テープ(カセットテープ等)に記録していました．これは関数 $f(t)$ をそのまま，つまりアナログ信号として録音する方式です．

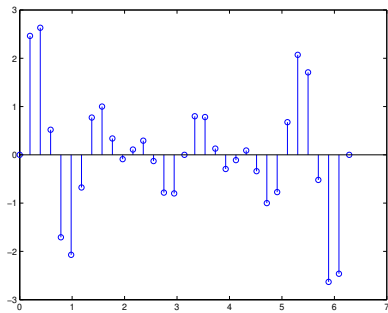
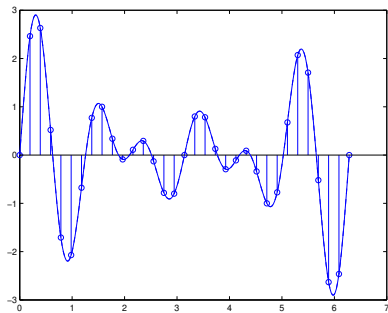
しかし現在主に用いられている CD やデジタル録音機(コンピュータでの録音を含む)などでは，音を表す関数 $f(t)$ をそのまま記録するのではなく，標本化(と量子化)という手続きによって数列 $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ に直して記録しています．(ここでは話を簡単にするため，量子化については触れないことにします．)

標本化 (サンプリング) とは、微小な時間間隔 Δt を固定し (CD の場合は $1/44100$ 秒), その整数倍の時刻 $t = n\Delta t$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) における $f(t)$ の値, すなわち数列

$$f_0 = f(0), f_1 = f(\Delta t), f_2 = f(2\Delta t), f_3 = f(3\Delta t), \dots$$

を記録することです. (Δt の倍数以外の t に対する $f(t)$ の値は捨てられます.)

たとえば, $f(t) = \sin 4t + \sin 5t + \sin 6t$ のとき, 1 周期に対応する区間 $[0, 2\pi]$ を 32 等分し $\Delta t = \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16}$ として, $f(t)$ を標本化した数列 $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{32}\}$ を棒グラフで表すと次のページの図のようになります.



さて、 $f(t)$ を周期 T 、基本角周波数 ω の実数値周期関数とすると、その複素フーリエ級数と複素フーリエ係数は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t),$$
$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-in\omega t) dt$$

で与えられます. (指数関数 e^x を $\exp(x)$ と表します.) おのこの整数 n に対して c_n の値をリーマン和で近似してみましょう. N を自然数として、区間 $[0, T]$ を N 等分して $\Delta t = \frac{T}{N}$ とおき、

$$t_k = k\Delta t = \frac{T}{N}k \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

とおくと、 c_n を定義する積分に対応するリーマン和 \tilde{c}_n は

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \exp(-in\omega t_k) \frac{T}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \exp(-in\omega t_k)$$

となります。リーマン和の $N \rightarrow \infty$ とした極限が定積分なので、 N を十分大きくとれば、 \tilde{c}_n は c_n に近いと考えられます。時刻 t の刻み幅

$\Delta t = \frac{T}{N}$ の逆数 $F_s = \frac{1}{\Delta t} = \frac{N}{T}$ のことをサンプリング周波数と呼びます。CD のサンプリング周波数は 44100 Hz です。

さて、上のリーマン和の式において $in\omega t_k = in\frac{2\pi}{T}\frac{T}{N}k = \frac{2\pi i}{N}nk$ であることに注意して、

$$f_k = f(t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad W = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

とおくと、

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-nk} f_k = \frac{1}{N} (f_0 + W^{-n} f_1 + W^{-2n} f_2 + \dots + W^{-(N-1)n} f_{N-1}) \quad (1)$$

という式が得られます。

ここで j, ℓ を整数として $n = jN + \ell$ ($0 \leq \ell \leq N - 1$) とすると,
 $W^{-N} = 1$ より

$$\tilde{c}_n = \tilde{c}_{jN+\ell} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(jN+\ell)k} f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-\ell k} f_k = \tilde{c}_\ell$$

が成立します. つまりフーリエ係数の近似値 \tilde{c}_n は, $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1}$ だけ
求めておけば, あとはこれらの繰り返しとなるわけです. (本当のフーリ
エ係数 c_n にはこのような性質はありません.)

そこで式 (1) において $n = 0, 1, \dots, N-1$ とすれば, (1) は複素数を成分とする N 次元ベクトル $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ から N 次元ベクトル $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ への線形変換 (線形写像)

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \dots & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \dots & W^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \dots & W^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (2)$$

を表していると考えられます. この線形変換を離散フーリエ変換 (DFT, discrete Fourier transform) と呼びます. これは周期 T によらず N だけで定まります.

例 2.1 $N = 4$ のとき, $W = \exp(\frac{\pi i}{2}) = i$ より離散フーリエ変換は

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

で与えられます. たとえば $T = 2\pi$, $N = 4$, $f(t) = \cos t$ とすると,
 $\Delta t = \frac{\pi}{2}$ で

$$f_0 = \cos 0 = 1, \quad f_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f_2 = \cos \pi = -1, \quad f_3 = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

より

$$\tilde{c}_0 = 0, \quad \tilde{c}_1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{c}_2 = 0, \quad \tilde{c}_3 = \frac{1}{2}$$

例 2.2 $T = 2\pi$, $N = 8$, $(\Delta t = \frac{\pi}{4})$, $f(t) = \cos t$ のとき, $W = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} f_k = f(k\Delta t) &= \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) = \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(\frac{\pi i}{4}k\right) + \exp\left(-\frac{\pi i}{4}k\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2}(W^k + W^{-k}) \quad (k = 0, 1, \dots, 7) \end{aligned}$$

の離散フーリエ変換 \tilde{c}_n ($n = 0, 1, \dots, 7$) は

$$\begin{aligned} \tilde{c}_n &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 W^{-nk} f_k = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^7 W^{-nk} (W^k + W^{-k}) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^7 W^{-(n-1)k} + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^7 W^{-(n+1)k} \end{aligned}$$

と変形できます。

ここで等比級数の和の公式から, $n \neq 1$ ならば

$$\sum_{k=0}^7 W^{-(n-1)k} = \frac{1 - W^{-8(n-1)}}{1 - W^{-(n-1)}} = 0,$$

$n = 1$ のときは $\sum_{k=0}^7 W^{-(n-1)k} = 8$ となることがわかります. 同様に,
 $n + 1 \neq 8$ すなわち $n \neq 7$ ならば

$$\sum_{k=0}^7 W^{-(n+1)k} = \frac{1 - W^{-8(n+1)}}{1 - W^{-(n+1)}} = 0,$$

$n = 7$ のときは $\sum_{k=0}^7 W^{-(n+1)k} = 8$ となります. 以上により

$$\tilde{c}_0 = 0, \quad \tilde{c}_1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{c}_2 = 0, \quad \tilde{c}_3 = 0, \quad \tilde{c}_4 = 0, \quad \tilde{c}_5 = 0, \quad \tilde{c}_6 = 0, \quad \tilde{c}_7 = \frac{1}{2}$$

補題 2.1

実数のベクトル $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換 $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ は

$$\tilde{c}_{N-n} = \overline{\tilde{c}_n} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

を満たす. すなわち, \tilde{c}_{N-n} は \tilde{c}_n の共役複素数である.

証明: $W^N = 1$ と $\overline{W} = W^{-1}$ より $W^{-(N-n)k} = W^{nk} = \overline{W^{-nk}}$ であるから,

$$\tilde{c}_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(N-n)k} f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{nk} f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{W^{-nk} f_k} = \overline{\tilde{c}_n}$$

ここで f_k は実数であるから, $\overline{f_k} = f_k$ であることを用いた.