

# 情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 15 回（1 月 10 日）

- 3.4 周期関数のフーリエ変換とデルタ関数
- 3.5 窓関数と時間周波数分解能

# フーリエ変換の定義（復習）

## フーリエ変換と逆フーリエ変換

$\mathbb{R}$  で定義された関数  $f(x)$  に対して,

$$F(\xi) = \hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) e^{-i\xi x} dx$$

を  $f(x)$  のフーリエ変換という.  $\hat{f}$  を  $\mathcal{F}[f]$  とも表す. ( $x$  が時間を表す変数のとき,  $\xi$  は角周波数を表す変数である.)  $\mathbb{R}$  で定義された関数  $F(\xi)$  に対して,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

を  $F(\xi)$  の逆フーリエ変換という. このとき (適当な条件のもとで)

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

が成立する.

この最後の式は、 $\hat{f}(\xi)e^{i\xi x}$  という、角周波数が  $\xi$  で複素振幅が  $F(\xi)$  の単振動を、 $\xi$  について積分することで  $f(x)$  が表されることを意味しています。特に  $|\hat{f}(\xi)|$  は  $f(x)$  に含まれる（複素）単振動の角周波数の分布（スペクトル）を表しています。

**注意：**フーリエ変換は広義積分なので存在（収束）するとは限りません。一般に、区分的に連続な（複素数値）関数  $f(x)$  が  $(\mathbb{R} = (-\infty, \infty))$  で可積分であるとは、広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R |f(x)| dx$$

が存在（すなわち右辺の極限が収束）することと定義します。

$|f(x)e^{-i\xi x}| = |f(x)|$  なので、 $f(x)$  が可積分ならば  $f(x)e^{-i\xi x}$  も可積分であり、 $f(x)$  のフーリエ変換  $\hat{f}(\xi)$  は存在することがわかります。一方、たとえば定数関数  $f(x) = 1$  は可積分ではないので、そのフーリエ変換は（通常の関数としては）定義できません。

### 命題 3.1 (フーリエ変換の性質, その 1 — 線形性)

$f(x)$  と  $g(x)$  を  $\mathbb{R}$  で可積分な関数,  $c$  を定数 (複素数) とするとき

$$\mathcal{F}[f + g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \quad \mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f]$$

### 命題 3.2 (フーリエ変換の性質, その 2 — 周波数シフトと平行移動)

$f(x)$  のフーリエ変換を  $\hat{f}(\xi)$  とすると, 任意の実数  $a$  に対して

$$(1) \mathcal{F}[e^{iax} f(x)](\xi) = \hat{f}(\xi - a)$$

$$(2) \mathcal{F}[f(x - a)](\xi) = e^{-ia\xi} \hat{f}(\xi)$$

例 3.1  $A > 0$  として

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq A) \\ 0 & (|x| > A) \end{cases}$$

で定義される関数  $f(x)$  (パルス波) のフーリエ変換は,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-A}^A e^{-i\xi x} dx = \left[ \frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-A}^A \\ &= \frac{e^{-iA\xi} - e^{iA\xi}}{-i\xi} = \frac{2 \sin A\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

$\xi = 0$  のときは別に計算すると  $\widehat{f}(0) = 2A$  となりますが, これは上の式で  $\xi \rightarrow 0$  とした極限と一致します.

例 3.2  $A > 0$ ,  $a$  を任意の実数 として

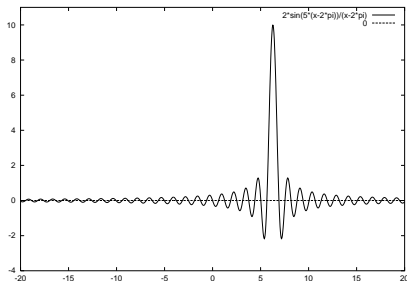
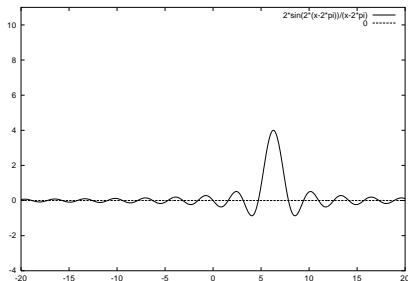
$$g(x) := \begin{cases} e^{iax} & (|x| \leq L) \\ 0 & (|x| > L) \end{cases}$$

のフーリエ変換を求めてみましょう. 例 3.1 で  $A = L$  としたときの  $f(x)$  を用いると,  $g(x) = e^{iax}f(x)$  と表されるので, 命題 3.2 の (1) より,  $\xi \neq a$  のとき

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a) = \frac{2 \sin L(\xi - a)}{\xi - a}$$

$\xi = a$  のときは  $\widehat{g}(a) = 2L$  となります.  $\widehat{g}(\xi)$  は  $\mathbb{R}$  全体で連続な関数です.

$a = 2\pi$  とすると,  $L = 2$  のときと  $L = 5$  のときの  $\hat{g}(\xi)$  のグラフは下のようになります.



$L$  が大きいとき  $\hat{f}(x)$  のグラフは振動数  $L/2\pi$  で小刻みに振動し,  $\xi = a$  で最大値  $2L$  の鋭いピークを持ちます. また  $\xi \rightarrow \pm\infty$  のとき  $\hat{g}(\xi)$  は 0 に近付きます.

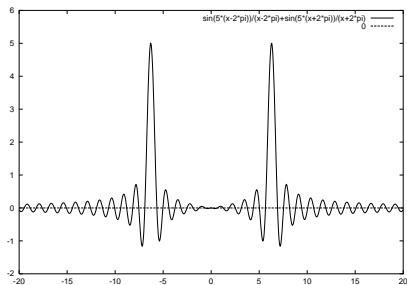
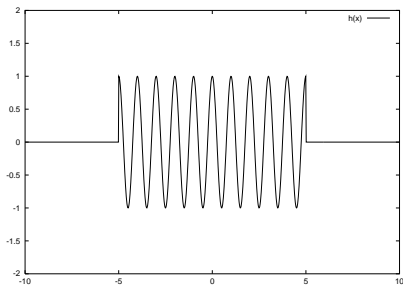
例 3.4  $A, a$  を任意の実数,  $L > 0$  として

$$f(x) := \begin{cases} \cos ax & (A - L \leq x \leq A + L) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

のフーリエ変換は,  $\cos ax = (e^{iax} + e^{-iax})/2$  と命題 3.1 を用いると前の例から

$$\hat{f}(\xi) = e^{-iA\xi} \left\{ \frac{\sin L(\xi - a)}{\xi - a} + \frac{\sin L(\xi + a)}{\xi + a} \right\}.$$

$A = 0, a = 2\pi, L = 5$  のときの  $f(x)$  と  $\hat{f}(\xi)$  のグラフは下のようになります.





例 3.5  $a > 0$  とすると  $f(x) = \exp(-a|x|) = e^{-a|x|}$  のフーリエ変換は

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-a|x|} dx \\&= \int_{-\infty}^0 e^{(a-i\xi)x} dx + \int_0^{\infty} e^{(-a-i\xi)x} dx \\&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi} \right]_{x=-R}^{x=0} + \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \frac{e^{(-a-i\xi)x}}{-a-i\xi} \right]_{x=0}^{x=R} \\&= \lim_{R \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{a-i\xi} - \frac{e^{(-a+i\xi)R}}{a-i\xi} - \frac{e^{(-a-i\xi)R}}{a+i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} \right) \\&= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}.\end{aligned}$$

ここで  $a > 0$  より

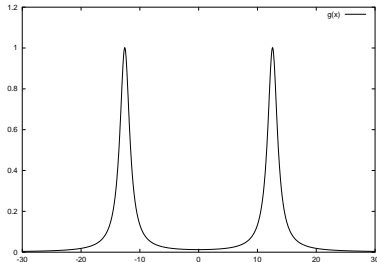
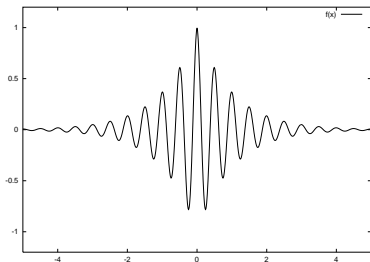
$$|e^{(-a \pm i\xi)R}| = e^{-aR} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow \infty)$$

となることを用いています。

例 3.6  $a > 0$ ,  $b$  を任意の実数として  $f(x) = e^{-a|x|} \cos bx$  のフーリエ変換を命題 3.2 の (1) を使って計算すると, 例 3.5 から

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-a|x|}e^{ibx}](\xi) + \frac{1}{2}\mathcal{F}[e^{-a|x|}e^{-ibx}](\xi) \\ &= \frac{a}{a^2 + (\xi - b)^2} + \frac{a}{a^2 + (\xi + b)^2}.\end{aligned}$$

$a = 1$ ,  $b = 4\pi$  のときの  $f(x)$  と  $\widehat{f}(\xi)$  のグラフは下のようになります.



### 定理 3.1 (フーリエ変換の性質, その 3 — 微分と掛け算の交換)

- (1) 関数  $f(x)$  とその導関数  $f'(x)$  が  $\mathbb{R}$  で可積分で  $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$  ならば

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = i\xi \hat{f}(\xi).$$

- (2)  $f(x)$  と  $xf(x)$  が  $\mathbb{R}$  で可積分ならば

$$\mathcal{F}[xf(x)](\xi) = i \frac{d}{d\xi} \hat{f}(\xi)$$

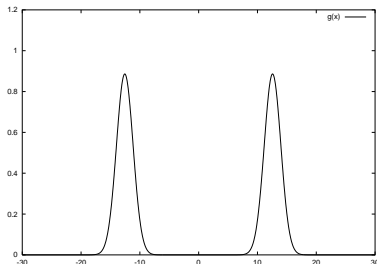
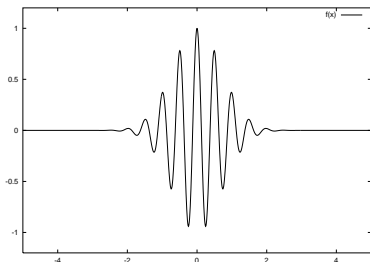
例 3.7  $a > 0$  のとき  $f(x) = \exp(-ax^2)$  のフーリエ変換は

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)$$

この結果と周波数シフトの法則を使うと  $\exp(-ax^2) \cos bx$  のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[\exp(-ax^2) \cos bx](\xi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{(\xi - b)^2}{4a}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{(\xi + b)^2}{4a}\right)$$

$\exp(-x^2) \cos 4\pi x$  とそのフーリエ変換のグラフは下のようになります。



## 3.4 周期関数のフーリエ変換とデルタ関数

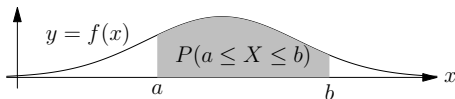
$f(x) = e^{iax}$  や  $f(x) = \sin ax$  ( $a$  は定数) のように  $f(x)$  が周期関数である場合には,  $f(x)$  は  $\mathbb{R}$  で可積分ではないので, フーリエ変換  $\hat{f}(\xi)$  は広義積分が収束しないため, 通常関数としては定義することができません. そこで関数の定義を少し拡張する必要があります. それが超関数の理論ですが, ここでは最も簡単な超関数であるデルタ関数について解説します.

一般に  $\mathbb{R}$  上の関数  $f(x)$  があって、 $f(x) \geq 0$  かつ  $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = 1$  を満たすとする、 $\mathbb{R}$  上の確率分布を次のように定めることができます：

$X$  を実数値をランダムにとる確率変数として、 $X$  の値が区間  $[a, b]$  に入る確率が

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x) dx$$

で与えられるとします。このとき  $f(x)$  は、この確率分布の確率密度関数と呼ばれます。



しかし  $\mathbb{R}$  上の任意の確率分布に対してその確率密度関数が存在するとは限りません。たとえば原点に集中する (すなわち  $X$  が常に値 0 をとる) 確率分布は

$$P(a \leq X \leq b) = \begin{cases} 1 & (a \leq 0 \leq b \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外の場合}) \end{cases}$$

で与えられますが、その確率密度関数は通常関数では表せません。この確率密度関数を「仮想的に」表すのがデルタ（超）関数です。

## 定義

デルタ関数 (delta function)  $\delta(x)$  は次の 2 つの性質を満たす「超関数」である。

$$(1) \quad x\delta(x) = 0 \qquad (2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) dx = 1$$

この (1) の性質から  $x \neq 0$  のとき  $\delta(x) = 0$  であることがわかります。これから通常関数としては  $\delta(x)$  の積分は 0 となり、(2) に矛盾します。逆に言えば、 $\delta(x)$  は通常関数ではない、ということになります。たとえば、実数の世界には存在しない虚数単位  $i$  を  $i^2 = -1$  を満たす「数」と定義して導入したように、デルタ関数は上の (1),(2) をみたす「関数」である、と定義するわけです。デルタ関数のもう少し具体的なイメージを描けるように、以下では、 $\delta(x)$  を通常関数の極限で表してみましょう。

関数列  $\{f_n(x)\}$  がデルタ近似列であるとは、次の条件が成立することである。

(1)  $f_n(x)$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) は  $\mathbb{R}$  で可積分かつ  $f_n(x) \geq 0$  を満たす。

(2)  $\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

(3) 任意の正の実数  $\varepsilon$  に対して  $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x) dx = 1$

このとき  $f_n(x)$  は確率密度関数であり、 $f_n(x)$  の定める確率分布の  $n \rightarrow \infty$  での極限が、原点に集中した確率分布となる。従って  $f_n(x)$  の (確率分布としての) 極限  $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x)$  はデルタ関数  $\delta(x)$  である。

証明：確率密度関数  $f_n(x)$  に対応する確率変数を  $X_n$  とすると、任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P(-\varepsilon \leq X_n \leq \varepsilon) = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x) dx = 1$$



例：  $n$  を自然数として

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - n|x|) & \left( |x| \leq \frac{1}{n} \text{ のとき} \right) \\ 0 & \left( |x| > \frac{1}{n} \text{ のとき} \right) \end{cases}$$

と定義すると、 $\{f_n(x)\}$  はデルタ近似列である．実際，条件 (1) と (2) は明らか．条件 (3) は  $n > \frac{1}{\varepsilon}$  のとき  $\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx = 1$  が成立することからわかる．

注意： この例の  $f_n(x)$  の通常の意味での極限は

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

となるが，これは（無限大の値もとるような）通常の意味での関数（値の対応）であり，デルタ（超）関数とは異なる．実際，この極限の積分は 0 である（ $y$  軸の正の部分（半直線）の面積は 0 なので．）

$a$  を実数の定数とするととき,  $\delta(x-a)$  は  $\delta(x)$  を  $a$  だけ右に平行移動した「関数」を表します. 従って  $\delta(x-a)$  は

$$(x-a)\delta(x-a)=0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) dx = 1$$

という性質で特徴づけられます.  $\{f_n(x)\}$  がデルタ近似列であるとき,  
 $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x-a) = \delta(x-a)$  が成り立ちます.

デルタ関数はさらに次のような性質を満たします.

## 命題

- (1)  $a$  を 0 でない定数とするととき,  $\delta(ax) = \frac{1}{|a|} \delta(x)$ .
- (2)  $f(x)$  を  $\mathbb{R}$  で  $C^1$  級の関数 ( $f'(x)$  が存在して連続),  $a$  を任意の実数とするととき,

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a) dx = f(a).$$

証明：(1)  $\{f_n(x)\}$  をデルタ近似列とする． $g_n(x) = |a|f_n(ax)$  とおくと  $\{g_n(x)\}$  もデルタ近似列になることを示せばよい． $ax = y$  とおいて置換積分すると

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x) dx &= |a| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(ax) dx = |a| \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} f_n(y) \frac{1}{a} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(y) dy = 1\end{aligned}$$

ここで  $\pm$  は  $a$  の符号とした．同様に，任意の  $\varepsilon$  に対して

$$\begin{aligned}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_n(x) dx &= |a| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(ax) dx = |a| \int_{\mp|a|\varepsilon}^{\pm|a|\varepsilon} f_n(y) \frac{1}{a} dy \\ &= \int_{-|a|\varepsilon}^{|a|\varepsilon} f_n(y) dy \longrightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty)\end{aligned}$$

(2)  $x \neq a$  のとき  $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$  とおくと,  $\lim_{x \rightarrow a} = f'(a)$  であるから,  $g(a) = f'(a)$  と定義すれば  $g(x)$  は  $\mathbb{R}$  で連続であり,  $f(x) - f(a) = (x - a)g(x)$  が成り立つ. 従ってデルタ関数の定義から

$$f(x)\delta(x - a) - f(a)\delta(x - a) = g(x)(x - a)\delta(x - a) = 0$$

となり,  $f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$  が示された. この両辺を積分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x - a) dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(x - a) dx = f(a) \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x - a) dx = f(a)$$

を得る.

この命題を用いると，デルタ関数のフーリエ変換を次のように求めることができます．

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{-i\xi x} dx = e^{-ia\xi}$$

すなわち， $\delta(x-a)$  のフーリエ変換は角周波数  $-a$  の複素単振動になります．スペクトルは  $|e^{-ia\xi}| = 1$  なので， $\delta(x-a)$  はすべての周波数の成分を均等に持つことがわかります．

例： $n$  を自然数として

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1 + n^2x^2)}$$

とおくと， $\{f_n(x)\}$  はデルタ近似列である．実際，

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x) dx &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{n dx}{1 + n^2x^2} = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \lim_{R \rightarrow \infty} \left[ \tan^{-1} y \right]_{-R}^R = \frac{1}{\pi} \left( \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right) = 1\end{aligned}$$

同様に，任意の  $\varepsilon > 0$  に対して

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x) dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{n dx}{1 + n^2x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\pi} \int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon} \frac{dy}{1 + y^2} \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{1 + y^2} = 1\end{aligned}$$

であるから， $\{f_n(x)\}$  はデルタ近似列の条件を満たす．

次に、 $a$  を実数の定数として、複素単振動  $e^{iax}$  のフーリエ変換を求めてみましょう。 $n$  を自然数として

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{n}\right) e^{iax}, \quad f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$$

と定義すると、例 3.5 と命題 3.2 より

$$\widehat{g}_n(\xi) = \frac{\frac{2}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\xi - a)^2} = \frac{2n}{1 + n^2(\xi - a)^2} = 2\pi f_n(\xi - a)$$

$f_n(x)$  はデルタ近似列なので  $n \rightarrow \infty$  とすると

$$\mathcal{F}[e^{iax}] = \mathcal{F}\left[\lim_{n \rightarrow \infty} g_n(x)\right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{F}[g_n(x)] = \lim_{n \rightarrow \infty} 2\pi f_n(\xi - a) = 2\pi\delta(\xi - a)$$

となることがわかります。ここで  $\lim_{n \rightarrow \infty}$  とフーリエ変換の順序が交換できることを仮定しています。さらにこれから

$$\mathcal{F}[\cos ax] = \pi\delta(\xi - a) + \pi\delta(\xi + a), \quad \mathcal{F}[\sin ax] = -\pi i\delta(\xi - a) + \pi i\delta(\xi + a)$$

が導かれます。

一般の周期関数のフーリエ変換を計算してみましょう． $f(x)$  を周期  $T$ ，角周波数  $\omega = \frac{\pi}{T}$  の周期関数とすると，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$

とフーリエ展開されます．ここで複素フーリエ係数  $c_n$  は

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} dx$$

で定義されます．これから

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}[e^{in\omega x}] = 2\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \delta(\xi - n\omega)$$

となることがわかります．これは  $f(x)$  に含まれる単振動の角周波数が  $\omega$  の整数倍に集中していることを意味しています．



## 3.5 窓関数と時間周波数分解能

以下では  $t$  が時間を表す変数として、音声信号  $f(t)$  について考察します。  $f(t)$  のフーリエ変換は角周波数を表す変数  $\omega$  の関数として

$$\hat{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

で定義されます。これは無限時間の積分なので、 $f(t)$  のスペクトル（角周波数分布）  $|\hat{f}(\omega)|$  は、たとえば音楽で言うと、一つの曲全体に含まれる単振動の角周波数の分布を表しています。音楽は時間に従って音符（周波数）が変化しますが、フーリエ変換ではこのような周波数の時間変化を追うことはできません。（逆フーリエ変換によって  $\hat{f}(\omega)$  から  $f(t)$  を復元することはできますが。）

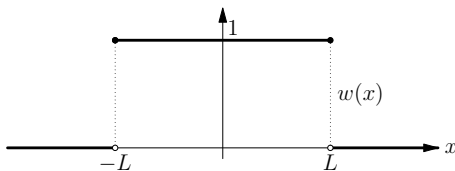
そこで、(簡単のため) 時刻 0 におけるスペクトルを求めたい場合には、 $t = 0$  の前後で 1 に近い値を取り、それ以外では 0 に近い値をとるような関数  $w(t)$  を用いて  $f(t)$  の代わりに  $w(t)f(t)$  をフーリエ変換します。すると音声信号  $f(t)$  のうち  $t = 0$  に近い時刻における部分を取り出してフーリエ変換したことになります。このような用途で用いられる関数  $w(t)$  のことを窓関数と呼びます。この窓関数を用いて、時刻  $s$  と角周波数  $\omega$  の関数  $F(s, \omega)$  を

$$F(s, \omega) = \mathcal{F}[w(t - s)f(t)](\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} w(t - s)f(t)e^{-i\omega t} dt$$

で定義します。これは時刻  $t = s$  の付近での  $f(t)$  の角周波数分布を表していると考えられます。つまり  $F(s, \omega)$  はスペクトルの時間変化を表します。

窓関数はいろいろ考案されており目的に応じて使い分けられていますが、ここでは数学的に簡明な2種類の窓関数について考察します。

## 矩形（長方形）窓



$L > 0$  として

$$w(t) = \begin{cases} 1 & (|t| \leq L) \\ 0 & (|t| > L) \end{cases}$$

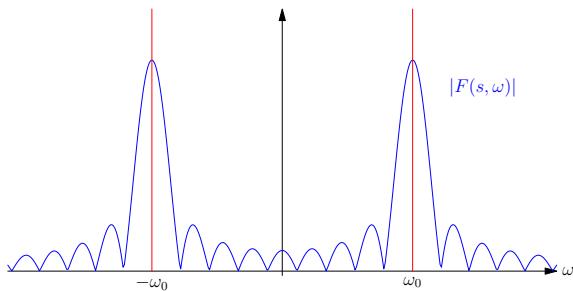
とすると

$$F(s, \omega) = \int_{s-L}^{s+L} f(t) e^{-i\omega t} dt$$

一番簡単な音声信号として，単振動  $f(t) = \cos \omega_0 t$  の場合を考えると，  
例 3.4 より ( $\xi = \omega$ ,  $a = \omega_0$ ,  $A = s$  とする)

$$F(s, \omega) = e^{-is\omega} \left\{ \frac{\sin L(\omega - \omega_0)}{\omega - \omega_0} + \frac{\sin L(\omega + \omega_0)}{\omega + \omega_0} \right\}$$

となり，スペクトル  $|F(s, \omega)|$  のグラフは  $s$  によらず下のようになります．



$|F(s, \omega)|$  は  $\omega = \omega_0$  で強いピークを持ち， $\omega_0 \pm \frac{\pi}{L}$  で値がほぼ 0 となります．

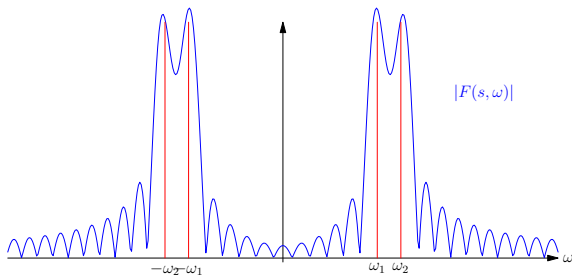
次に角周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の二つの単振動の和

$$f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

の場合は

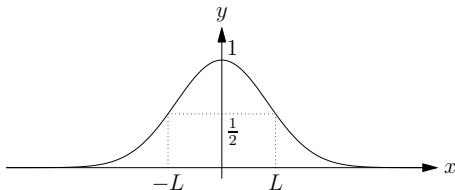
$$F(s, \omega) = e^{-is\omega} \left\{ \frac{\sin L(\omega - \omega_1)}{\omega - \omega_1} + \frac{\sin L(\omega + \omega_1)}{\omega + \omega_1} \right. \\ \left. + \frac{\sin L(\omega - \omega_2)}{\omega - \omega_2} + \frac{\sin L(\omega + \omega_2)}{\omega + \omega_2} \right\}$$

となり、スペクトル  $|F(s, \omega)|$  は  $s$  によらず下のようになります。



$|\omega_1 - \omega_2| \geq \frac{2\pi}{L}$  ならば  $\omega = \omega_1$  と  $\omega = \omega_2$  (付近) の二つのピークを区別することができます. つまり周波数分解能はおよそ  $\frac{1}{L}$  と考えられます. 一方, 矩形窓の時間間隔は  $2L$  なので, 時間分解能は  $2L$  となります. すなわち時間分解能と周波数分解能の積は  $2$  となり, お互いに反比例します.

## ガウス窓



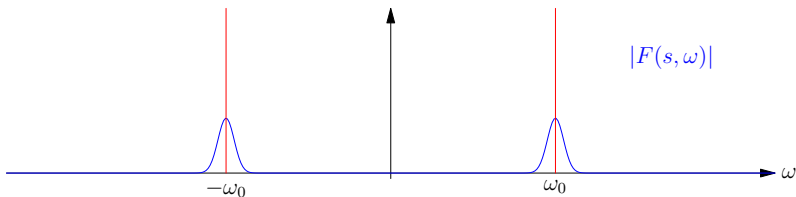
$L > 0$  として

$$w(x) = \exp\left(-\frac{\log 2}{L^2} x^2\right)$$

$w(x)$  のグラフは  $x = 0$  で最大値 1 をとり,  $x = \pm L$  のとき  $w(\pm L) = \frac{1}{2}$  となります.  $f(x) = \cos \omega_0 t$  のときは, 例 3.7 で  $a = \frac{\log 2}{L^2}$  として

$$F(s, \omega) = \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\log 2}} e^{-is\omega} \exp\left(-\frac{L^2}{4 \log 2} (\omega - \omega_0)^2\right) \\ + \frac{L}{2} \sqrt{\frac{\pi}{\log 2}} e^{-is\omega} \exp\left(-\frac{L^2}{4 \log 2} (\omega + \omega_0)^2\right)$$

となり、スペクトル  $|F(s, \omega)|$  は  $s$  によらず下のようになります。

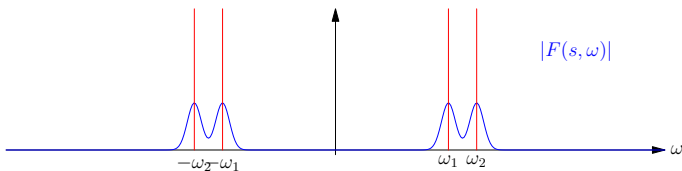




次に角周波数  $\omega_1$  と  $\omega_2$  の二つの単振動の和

$$f(t) = \cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t$$

の場合は  $|F(s, \omega)|$  のグラフは下のようになります。



矩形窓のときより角周波数の識別がしやすいことがわかります。