情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 14 回（12 月 20 日）

- 3.2 フーリエ変換の性質

フーリエ変換の定義（復習）

フーリエ変換と逆フーリエ変換

$\mathbb{R}$ で定義された関数 $f(x)$ に対して，

$$F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx = \lim_{R\to\infty}\int_{-R}^{R} f(x)e^{-i\xi x}\,dx$$

を $f(x)$ の**フーリエ変換**という．$\widehat{f}$ を $\mathcal{F}[f]$ とも表す．(x が時間を表す変数のとき，ξ は角周波数を表す変数である.) $\mathbb{R}$ で定義された関数 $F(\xi)$ に対して，

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

を $F(\xi)$ の**逆フーリエ変換**という．このとき（適当な条件のもとで）

$$f(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{i\xi x}\,d\xi$$

が成立する．

この最後の式は，$F(\xi)e^{i\xi x}$ という，角周波数が ξ で複素振幅が $F(\xi)$ の単振動を，ξ について積分することで $f(x)$ が表されることを意味しています．特に $|\widehat{f}(\xi)|$ は $f(x)$ に含まれる（複素）単振動の角周波数の分布（スペクトル）を表しています．

注意：フーリエ変換は広義積分なので存在（収束）するとは限りません．一般に，区分的に連続な（複素数値）関数 $f(x)$ が（$\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ で）**可積分**であるとは，広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|\, dx = \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} |f(x)|\, dx$$

が存在（すなわち右辺の極限が収束）することと定義します．

$|f(x)e^{-i\xi x}| = |f(x)|$ なので，$f(x)$ が可積分ならば $f(x)e^{-i\xi x}$ も可積分であり，$f(x)$ のフーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ は存在することがわかります．一方，たとえば定数関数 $f(x) = 1$ は可積分ではないので，そのフーリエ変換は（通常の関数としては）定義できません．

例 **3.1** $A > 0$ として

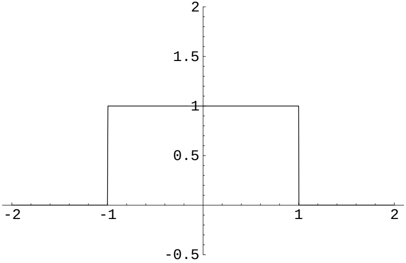
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqq A) \\ 0 & (|x| > A) \end{cases}$$

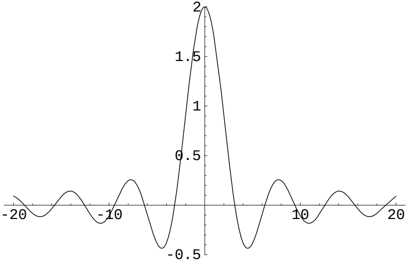
で定義される関数 $f(x)$ (パルス波) のフーリエ変換は,

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-A}^{A} e^{-i\xi x}\, dx = \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-A}^{A} \\ &= \frac{e^{-iA\xi} - e^{iA\xi}}{-i\xi} = \frac{2\sin A\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

$\xi = 0$ のときは別に計算すると $\widehat{f}(0) = 2A$ となりますが，これは上の式で $\xi \to 0$ とした極限と一致します.

左は $A = 1$ のときの $f(x)$ のグラフ，右は $\widehat{f}(\xi)$ のグラフです．





3.2 フーリエ変換の性質

命題 3.1（フーリエ変換の性質，その 1 — 線形性）

$f(x)$ と $g(x)$ を $\mathbb{R}$ で可積分な関数，c を定数 (複素数) とするとき

$$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \qquad \mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f]$$

証明：定義より

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}[f+g] &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)+g(x)\} e^{-i\xi x}\,dx \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\xi x}\,dx = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \\
\mathcal{F}[cf] &= \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)e^{-i\xi x}\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx = c\mathcal{F}[f].
\end{aligned}$$

命題 3.2（フーリエ変換の性質，その 2 — 周波数シフトと平行移動）

$f(x)$ のフーリエ変換を $\widehat{f}(\xi)$ とすると，任意の実数 a に対して

(1) $\mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right](\xi) = \widehat{f}(\xi - a)$

(2) $\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi)$

証明：(1)

$$\mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\xi-a)x}\,dx = \widehat{f}(\xi-a).$$

(2) 置換積分 $x - a = y$ を用いて

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi(y+a)}\,dy = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi).$$

例 **3.2** $A > 0$, a を任意の実数 として

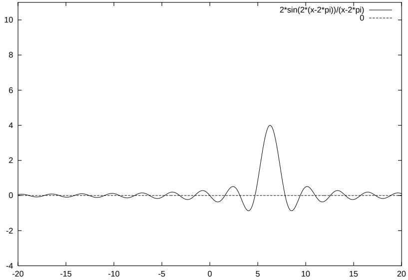
$$g(x) := \begin{cases} e^{iax} & (|x| \leqq L) \\ 0 & (|x| > L) \end{cases}$$

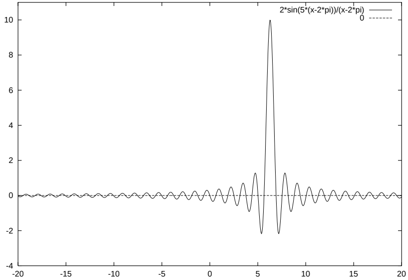
のフーリエ変換を求めてみましょう．例 3.1 で $A = L$ としたときの $f(x)$ を用いると，$g(x) = e^{iax} f(x)$ と表されるので，命題 3.2 の (1) より，
$\xi \neq a$ のとき

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a) = \frac{2 \sin L(\xi - a)}{\xi - a}$$

$\xi = a$ のときは $\widehat{g}(a) = 2L$ となります．$\widehat{g}(\xi)$ は $\mathbb{R}$ 全体で連続な関数です．

$a = 2\pi$ とすると，$L = 2$ のときと $L = 5$ のときの $\widehat{g}(\xi)$ のグラフは下のようになります．





L が大きいとき $\widehat{f}(x)$ のグラフは振動数 $L/2\pi$ で小刻みに振動し，$\xi = a$ で最大値 $2L$ の鋭いピークを持ちます．また $\xi \to \pm\infty$ のとき $\widehat{g}(\xi)$ は 0 に近付きます．

例 **3.3** A, a を任意の実数，$L > 0$ として

$$h(x) := \begin{cases} e^{iax} & (A - L \leq x \leq A + L) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義します．例 3.2 の $g(x)$ を用いると， $h(x) = g(x - A)$ と表されるので，命題 3.2 の (1) より，

$$\widehat{h}(\xi) = e^{-iA\xi}\widehat{g}(\xi) = e^{-iA\xi}\frac{2\sin L(\xi - a)}{\xi - a}$$

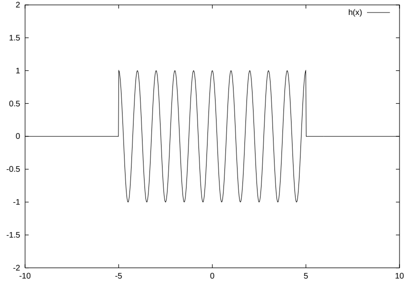
例 3.4 A, a を任意の実数，$L > 0$ として

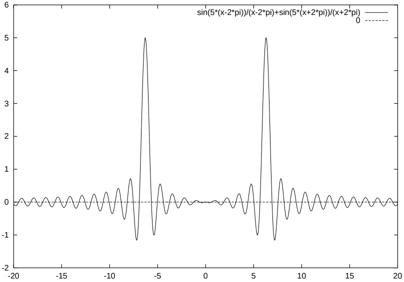
$$f(x) := \begin{cases} \cos ax & (A - L \leq x \leq A + L) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

のフーリエ変換は，$\cos ax = (e^{iax} + e^{-iax})/2$ と命題 3.1 を用いると前の例から

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-iA\xi} \left\{ \frac{\sin L(\xi - a)}{\xi - a} + \frac{\sin L(\xi + a)}{\xi + a} \right\}.$$

$A = 0$, $a = 2\pi$, $L = 5$ のときの $f(x)$ と $\widehat{f}(\xi)$ のグラフは下のようになります.





例 3.5 $a > 0$ とすると $f(x) = \exp(-a|x|) = e^{-a|x|}$ のフーリエ変換は

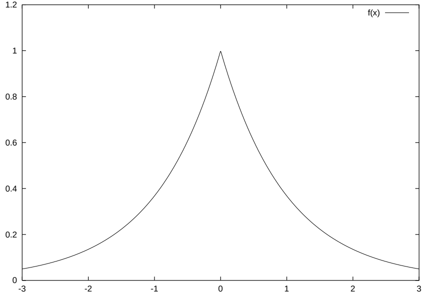
$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-a|x|}\, dx \\
&= \int_{-\infty}^{0} e^{(a-i\xi)x}\, dx + \int_{0}^{\infty} e^{(-a-i\xi)x}\, dx \\
&= \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{(a-i\xi)x}}{a-i\xi} \right]_{x=-R}^{x=0} + \lim_{R\to\infty} \left[\frac{e^{(-a-i\xi)x}}{-a-i\xi} \right]_{x=0}^{x=R} \\
&= \lim_{R\to\infty} \left(\frac{1}{a-i\xi} - \frac{e^{(-a+i\xi)R}}{a-\imath\xi} - \frac{e^{(-a-i\xi)R}}{a+\imath\xi} + \frac{1}{a+i\xi} \right) \\
&= \frac{1}{a-i\xi} + \frac{1}{a+i\xi} = \frac{2a}{a^2+\xi^2}.
\end{aligned}$$

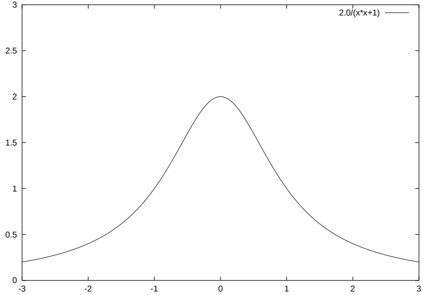
ここで $a > 0$ より

$$|e^{(-a\pm i\xi)R}| = e^{-aR} \longrightarrow 0 \quad (R \to \infty)$$

となることを用いています.

$a = 1$ のときの $f(x)$ と $\widehat{f}(\xi)$ のグラフは下のようになります.

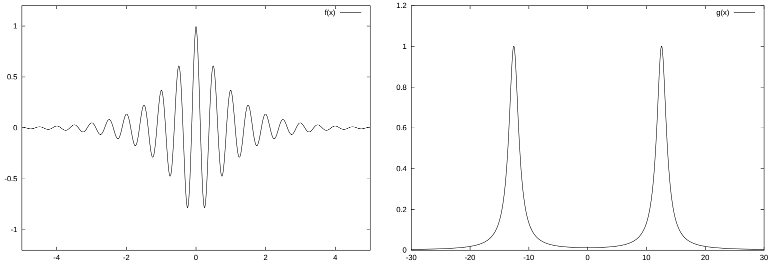




例 3.6 $a > 0$, b を任意の実数として $f(x) = e^{-a|x|}\cos bx$ のフーリエ変換を命題 3.2 の (1) を使って計算すると，例 3.5 から

$$
\begin{aligned}
\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}e^{ibx}\right](\xi) + \frac{1}{2}\mathcal{F}\left[e^{-a|x|}e^{-ibx}\right](\xi) \\
&= \frac{a}{a^2+(\xi-b)^2} + \frac{a}{a^2+(\xi+b)^2}.
\end{aligned}
$$

$a = 1$, $b = 4\pi$ のときの $f(x)$ と $\widehat{f}(\xi)$ のグラフは下のようになります.



3.3 フーリエ変換と微分

定理 3.1（フーリエ変換の性質，その 3 — 微分と掛け算の交換）

(1) 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が $\mathbb{R}$ で可積分で $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ ならば

$$\mathcal{F}\Big[f'(x)\Big](\xi) = i\xi\widehat{f}(\xi).$$

(2) $f(x)$ と $xf(x)$ が $\mathbb{R}$ で可積分ならば

$$\mathcal{F}\big[xf(x)\big](\xi) = i\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$$

証明：(1) 部分積分を用いて

$$
\begin{aligned}
\mathcal{F}[f'(x)](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x}\,dx \\
&= \lim_{R\to\infty}\Bigl[f(x)e^{-i\xi x}\Bigr]_{-R}^{R} + \int_{-\infty}^{\infty} i\xi f(x)e^{-i\xi x}\,dx \\
&= i\xi\widehat{f}(\xi).
\end{aligned}
$$

ここで， $\displaystyle\lim_{R\to\infty}|f(\pm R)e^{\mp i\xi R}| = \lim_{R\to\infty}|f(\pm R)| = 0$ を用いた．

(2) $\displaystyle\frac{\partial}{\partial\xi}\Bigl(f(x)e^{-i\xi x}\Bigr) = -ixf(x)e^{-i\xi x}$ かつ $|-ixf(x)e^{-i\xi x}| = |xf(x)|$ は可積分だから「積分記号下での微分法」により

$$
\begin{aligned}
\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = \frac{d}{d\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx &= \int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\xi}\Bigl(f(x)e^{-i\xi x}\Bigr)\,dx \\
= -i\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\xi x}\,dx &= -i\mathcal{F}[xf(x)](\xi).
\end{aligned}
$$

積分記号下での微分法

任意の実数 x とある開区間 I に属する t に対して定義された 2 変数関数 $f(x,t)$ を考える． $f(x)$ が次の 3 条件

(1) 任意の $t \in I$ を固定すると $f(x,t)$ は x について可積分である．

(2) t についての偏導関数 $f_t(x,t) = \dfrac{\partial f}{\partial t}(x,t)$ が存在して連続である．

(3) $\mathbb{R}$ で可積分な関数 $g(x)$ が存在して，$|f_t(x,t)| \leq g(x)$ $(x \in \mathbb{R},\ t \in I)$ が成立する．

を満たしていると仮定する．このとき

$$\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty} f(x,t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f_t(x,t)\,dx$$

が成立する.（積分変数 x と微分の変数 t が異なることに注意.）

この証明については教材「情報解析学 II」の 1.4 節 (9 – 12 ページ) を参照してください．定理 3.1 の証明では $f(x)e^{-i\xi x}$ を $f(x,\xi)$ と考え，$g(x) = |f(x)|$ として積分記号下での微分法を適用します..

例 3.7 $a > 0$ として $f(x) = \exp(-ax^2)$ を考えましょう．まず $f(x)$ は微分方程式

$$f'(x) = -2axf(x) \tag{1}$$

を満たすことは容易にわかります．逆に関数 $f(x)$ が微分方程式 (1) を満たせば，ある定数 C によって $f(x) = C\exp(-ax^2)$ と書けます．実際 $g(x) := \exp(ax^2)f(x)$ とおくと (1) より

$$\begin{aligned} g'(x) &= \exp(ax^2)f'(x) + 2ax\exp(ax^2)f(x) \\ &= -2ax\exp(ax^2)f(x) + 2ax\exp(ax^2)f(x) \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるので $g(x) = C$ (定数)，すなわち $f(x) = C\exp(-ax^2)$ が導かれます.

$f(x), xf(x), f'(x)$ はすべて可積分であることが容易にわかるので，定理 3.1 より

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\xi\widehat{f}(\xi), \qquad \mathcal{F}[-2axf(x)] = -2ia\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi)$$

となり，この 2 つの式は等しいので

$$\frac{d}{d\xi}\widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{2a}\widehat{f}(\xi)$$

となります．これは (1) で a の代わりに $1/4a$ とした式なので，ある定数 C があって

$$\widehat{f}(\xi) = C\exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)$$

となることがわかります．$\sqrt{a}x = y$ とおいて置換積分を行うと

$$C = \widehat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2)\,dx = \frac{1}{\sqrt{a}}\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2)\,dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

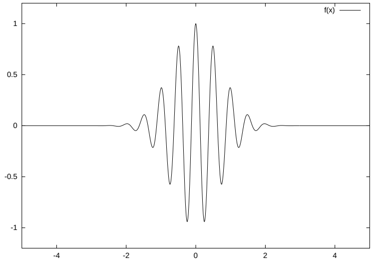
となるので結局 $f(x)$ のフーリエ変換は

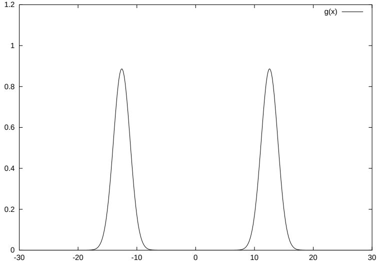
$$\widehat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)$$

となります．この結果と周波数シフトの法則を使うと $\exp(-ax^2)\cos bx$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[\exp(-ax^2)\cos bx](\xi) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{(\xi-b)^2}{4a}\right) + \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{(\xi+b)^2}{4a}\right)$$

$\exp(-x^2)\cos 4\pi x$ とそのフーリエ変換のグラフは下のようになります．





3.4 周期関数のフーリエ変換とデルタ関数

$f(x)=e^{iax}$ や $f(x)=\sin ax$ (a は定数) のように $f(x)$ が周期関数である場合には，$f(x)$ は $\mathbb{R}$ で可積分ではないので，フーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ は広義積分が収束しないため，通常の関数としては定義することができません．そこで関数の定義を少し拡張する必要があります．それが超関数の理論ですが，ここでは最も簡単な超関数であるデルタ関数について解説します．

一般に $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ があって，$f(x) \geq 0$ かつ $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$ を満たすとすると，$\mathbb{R}$ 上の確率分布を次のように定めることができます：
X を実数値をランダムにとる確率変数として，X の値が区間 $[a, b]$ に入る確率が

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)\, dx$$

で与えられるとします．このとき $f(x)$ は，この確率分布の確率密度関数と呼ばれます．しかし $\mathbb{R}$ 上の任意の確率分布に対してその確率密度関数が存在するとは限りません．たとえば原点に集中する (すなわち X が常に値 0 をとる) 確率分布は

$$P(a \leq X \leq b) = \begin{cases} 1 & (a \leq 0 \leq b \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

で与えられますが，その確率密度関数は通常の関数では表せません．この確率密度関数を「仮想的に」表すのがデルタ（超）関数です．

定義

デルタ関数 (delta function) $\delta(x)$ は次の 2 つの性質を満たす「超関数」である．

$$(1) \quad x\delta(x) = 0 \qquad\qquad (2) \quad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$$

この (1) の性質から $x \neq 0$ のとき $\delta(x) = 0$ であることがわかります．これから通常の関数としては $\delta(x)$ の積分は 0 となり，(2) に矛盾します．逆に言えば，$\delta(x)$ は通常の関数ではない，ということになります．たとえば，実数の世界には存在しない虚数単位 i を $i^2 = -1$ を満たす「数」と定義して導入したように，デルタ関数は上の (1),(2) をみたす「関数」である，と定義するわけです．デルタ関数のもう少し具体的なイメージを描けるように，以下では，$\delta(x)$ を通常の関数の極限で表してみましょう．

定義・命題

関数列 $\{f_n(x)\}$ がデルタ近似列であるとは，次の条件が成立することである．

(1) $f_n(x)$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ は $\mathbb{R}$ で可積分かつ $f_n(x) \geq 0$ を満たす．

(2) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = 1 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$

(3) 任意の正の実数 ε に対して $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)\,dx = 1$

このとき $f_n(x)$ は確率密度関数であり，$f_n(x)$ の定める確率分布の $n \to \infty$ での極限が，原点に集中した確率分布となる．従って $f_n(x)$ の（確率分布としての）極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(x)$ はデルタ関数 $\delta(x)$ である．

証明：確率密度関数 $f_n(x)$ に対応する確率変数を X_n とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} P(-\varepsilon \leq X_n \leq \varepsilon) = \lim_{n\to\infty} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)\,dx = 1$$

例：n を自然数として

$$f_n(x) = \begin{cases} n(1 - n|x|) & \left(|x| \leq \frac{1}{n} \text{のとき}\right) \\ 0 & \left(|x| > \frac{1}{n} \text{のとき}\right) \end{cases}$$

と定義すると，$\{f_n(x)\}$ はデルタ近似列である．

注意： この例の $f_n(x)$ の通常の極限は

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \begin{cases} 0 & (x \neq 0) \\ \infty & (x = 0) \end{cases}$$

となるが，これは（無限大の値もとるような）通常の関数（値の対応）であり，デルタ（超）関数とは異なる．実際，この極限の積分は 0 である（y 軸の正の部分（半直線）の面積は 0 なので.）

a を実数の定数とするとき，$\delta(x-a)$ は $\delta(x)$ を a だけ右に平行移動した「関数」を表します．従って $\delta(x-a)$ は

$$(x-a)\delta(x-a) = 0, \qquad \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx = 1$$

という性質で特徴づけられます．$\{f_n(x)\}$ がデルタ近似列であるとき，$\lim_{n\to\infty} f_n(x-a) = \delta(x-a)$ が成り立ちます．

デルタ関数はさらに次のような性質を満たします．

命題

(1) a を 0 でない定数とするとき，$\delta(ax) = \dfrac{1}{|a|}\delta(x)$.

(2) $f(x)$ を $\mathbb{R}$ で C^1 級の関数 ($f'(x)$ が存在して連続)，a を任意の実数とするとき，

$$f(x)\delta(x-a) = f(a)\delta(x-a), \qquad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = f(a).$$

証明：(1) $\{f_n(x)\}$ をデルタ近似列とする．$g_n(x) = |a| f_n(ax)$ とおくと $\{g_n(x)\}$ もデルタ近似列になることを示せばよい．$ax = y$ とおいて置換積分すると

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(x)\,dx = |a| \int_{-\infty}^{\infty} f_n(ax)\,dx = |a| \int_{\mp\infty}^{\pm\infty} f_n(y) \frac{1}{a}\,dy$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} f_n(y)\,dy = 1$$

ここで $\pm$ は a の符号とした．同様に，任意の ε に対して

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} g_n(x)\,dx = |a| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(ax)\,dx = |a| \int_{\mp|a|\varepsilon}^{\pm|a|\varepsilon} f_n(y) \frac{1}{a}\,dy$$
$$= \int_{-|a|\varepsilon}^{|a|\varepsilon} f_n(y)\,dy \longrightarrow 1 \qquad (n \to \infty)$$

(2) $x \neq a$ のとき $g_(x) = \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ とおくと，$\lim_{x \to a} = f'(a)$ であるから，
$g(a) = f'(a)$ と定義すれば $g(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であり，
$f(x) - f(a) = (x - a)g(x)$ が成り立つ．従ってデルタ関数の定義から

$$f(x)\delta(x - a) - f(a)\delta(x - a) = g(x)(x - a)\delta(x - a) = 0$$

となり，$f(x)\delta(x - a) = f(a)\delta(x - a)$ が示された．この両辺を積分すれば

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\delta(x-a)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(a)\delta(x-a)\,dx = f(a)\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a)\,dx = f(a)$$

を得る．

この命題を用いると，デルタ関数のフーリエ変換を次のように求めることができます.

$$\mathcal{F}[\delta(x-a)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x-a) e^{-i\xi x}\, dx = e^{-ia\xi}$$

すなわち，$\delta(x-a)$ のフーリエ変換は角周波数 $-a$ の複素単振動になります．この絶対値は 1 なので，$\delta(x-a)$ はすべての周波数の成分を均等に持つことがわかります.

例：n を自然数として

$$f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$$

とおくと，$\{f_n(x)\}$ はデルタ近似列である．実際，

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_n(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{n\,dx}{1+n^2x^2} = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\lim_{R\to\infty}\Big[\tan^{-1} y\Big]_{-R}^{R} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

同様に，任意の $\varepsilon > 0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} f_n(x)\,dx = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon}\frac{n\,dx}{1+n^2x^2} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi}\int_{-n\varepsilon}^{n\varepsilon}\frac{dy}{1+y^2}$$
$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dy}{1+y^2} = 1$$

であるから，$\{f_n(x)\}$ はデルタ近似列の条件を満たす．

次に，a を実数の定数として，複素単振動 e^{iax} のフーリエ変換を求めてみましょう．n を自然数として

$$g_n(x) = \exp\left(-\frac{|x|}{n}\right)e^{iax}, \qquad f_n(x) = \frac{n}{\pi(1+n^2x^2)}$$

と定義すると，例 3.5 と命題 3.2 より

$$\widehat{g}_n(\xi) = \frac{\frac{2}{n}}{(\frac{1}{n})^2 + (\xi - a)^2} = \frac{2n}{1 + n^2(\xi - a)^2} = 2\pi f_n(\xi - a)$$

$f_n(x)$ はデルタ近似列なので $n \to \infty$ とすると

$$\mathcal{F}[e^{iax}] = \mathcal{F}[\lim_{n\to\infty} g_n(x)] = \lim_{n\to\infty} \mathcal{F}[g_n(x)] = \lim_{n\to\infty} 2\pi f_n(\xi - a) = 2\pi\delta(\xi - a)$$

となることがわかります．ここで $\lim_{n\to\infty}$ とフーリエ変換の順序が交換できることを仮定しています．さらにこれから

$$\mathcal{F}[\cos ax] = \pi\delta(\xi-a)+\pi\delta(\xi+a), \qquad \mathcal{F}[\sin ax] = -\pi i\delta(\xi-a)+\pi i\delta(\xi+a)$$

が導かれます．

一般の周期関数のフーリエ変換を計算してみましょう．$f(x)$ を周期 $T = 2L$ の周期関数とすると，

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp\left(\frac{i\pi}{L} nx\right)$$

とフーリエ展開されます．ここで複素フーリエ係数 c_n は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_0^{2L} f(x) \exp\left(\frac{i\pi}{L} nx\right)$$

で定義されます．これから

$$\mathcal{F}[f(x)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \mathcal{F}\left[\exp\left(\frac{i\pi}{L} nx\right)\right] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} 2\pi c_n \delta\left(\xi - \frac{\pi n}{L}\right)$$

となることがわかります．これは $f(x)$ に含まれる単振動の角周波数が $\dfrac{\pi}{L}$ の整数倍に集中していることを意味しています．