# 情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 3 回（10 月 4 日）

- 1.4 関数空間と有限フーリエ級数

# （抽象）ベクトル空間

線形代数学では主に数ベクトルからなるベクトル空間（線形空間）を考察しますが，ベクトル空間の概念は以下のように一般化されます．

### 定義（ベクトル空間）

$K$ を実数の全体 $\mathbb{R}$ あるいは複素数の全体 $\mathbb{C}$ とする．集合 $V$ が $K$ 上の **ベクトル空間** であるとは，$V$ の元 $\mathbf{v}$,$\mathbf{w}$ と $K$ の元（スカラー）$a$ に対して $V$ の元 $\mathbf{v}+\mathbf{w}$ （和）と $a\mathbf{v}$ （スカラー倍）が定まって次の性質を満たすことである．($\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_1$ などは $V$ の元，$a, b, c$ などは $K$ の元（スカラー）とする.)

(1) $(\mathbf{v}_1+\mathbf{v}_2)+\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1+(\mathbf{v}_2+\mathbf{v}_3)$, $\mathbf{v}+\mathbf{w} = \mathbf{w}+\mathbf{v}$

(2) 零（ゼロ）ベクトル $\mathbf{0} \in V$ が存在して $\mathbf{v}+\mathbf{0} = \mathbf{v}$

(3) $\mathbf{v}$ に対して $-\mathbf{v}$ が存在して $\mathbf{v}+(-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(4) $(a+b)\mathbf{v} = a\mathbf{v}+b\mathbf{v}$, $a(\mathbf{v}+\mathbf{w}) = a\mathbf{v}+a\mathbf{w}$, $(ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$, $1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

## 定義（1次結合）

$V$ を $K=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする． $V$ のいくつかの元 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ とスカラー $c_1,\ldots,c_n\in K$ に対して

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n$$

も $V$ の元となる．これを $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ の **1 次結合**という．

## 定義（1次独立）

$V$ を $K=\mathbb{R}$ または $\mathbb{C}$ 上のベクトル空間とする． $V$ の元 $\mathbf{v}_1,\ldots,\mathbf{v}_n$ が ($K$ 上)**1 次独立**であるとは，スカラー $c_1,\ldots,c_n\in K$ に対して

$$c_1\mathbf{v}_1+\cdots+c_n\mathbf{v}_n=\mathbf{0}\quad\Leftrightarrow\quad c_1=\cdots=c_n=0$$

であること．

注意： $\Leftarrow$ は常に成立するから， $\Leftrightarrow$ の代わりに $\Rightarrow$ としてもよい．

# 関数空間と有限フーリエ級数

ある性質を持つ関数全体のなすベクトル空間（関数空間）を考えます．

**命題 1.1**

有界閉区間 $[a,b]$ で連続な (実数値) 関数の全体を $C([a,b])$ または $C([a,b],\mathbb{R})$ で表すと，$C([a,b])$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる．

証明：$f,g \in C([a,b])$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して 1 次結合 $c_1 f + c_2 g$ を

$$(c_1 f + c_2 g)(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

で定義すれば，これも $[a,b]$ 上の連続関数になる．零ベクトルは恒等的に 0 という値をとる関数である．この関数を単に 0 という記号で表す（スカラーの 0 とは文脈で区別する）．関数 $f$ に対して $-f$ という関数を $(-f)(x) = -f(x)$ で定める，つまり $x$ において $-f(x)$ という値をとる関数とすれば，$f + (-f) = 0$ が成立する．性質 (1),(4) は定義から明らかである．

## 命題 1.2

$f, g \in C([a,b])$ に対して，$f$ と $g$ の内積 $(f,g)$ を

$$(f,g) = \int_a^b f(x)g(x)\,dx$$

で定義すると，任意の $f, g, f_1, f_2 \in C([a,b])$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して次が成立する:

$$(f,g) = (g,f), \quad (cf,g) = (f,cg) = c(f,g)$$
$$(f_1 + f_2, g) = (f_1, g) + (f_2, g)$$

さらに，$f$ の $(L^2)$ ノルム $\|f\| = \|f\|_2$ を

$$\|f\| = \sqrt{(f,f)}$$

で定義すると，$\|f\| \geq 0$ で，等号は $f = 0$ (恒等的に 0 の関数) のときに限り成立する．

**証明：** 定積分の性質から

$$(f,g)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)f(x)\,dx=(g,f)$$

$$(cf,g)=\int_a^b (cf(x))g(x)\,dx=\int_a^b f(x)(cg(x))\,dx$$

$$=\int_a^b cf(x)g(x)\,dx=c\int_a^b f(x)g(x)\,dx=c(f,g)$$

$$(f_1+f_2,g)=\int_a^b (f_1(x)+f_2(x))g(x)\,dx=\int_a^b (f_1(x)g(x)+f_2(x)g(x))\,dx$$

$$=\int_a^b f_1(x)g(x)\,dx+\int_a^b f_2(x)g(x)\,dx=(f_1,g)+(f_2,g)$$

また $f(x)^2\geq 0$ より

$$(f,f)=\int_a^b f(x)^2\,dx\geq 0$$

であり，もし $f(c)\neq 0$ となる $c$ が区間 $[a,b]$ 内にあれば，$f(x)$ は連続だから $c$ の近傍で $f(x)^2>0$ となるので $(f,f)>0$ である．

## 命題 1.3

$f_1, \ldots, f_n$ を 0 ではない $C([a,b])$ の元とする．もし $1 \leq i < j \leq n$ を満たす任意の $i, j$ について $(f_i, f_j) = 0$ が成立すれば $f_1, \ldots, f_n$ は 1 次独立である．

証明：もし定数 $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ があって $c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n = 0$，すなわち

$$c_1 f_1(x) + \cdots + c_n f_n(x) = 0 \qquad (a \leq \forall x \leq b)$$

が成り立ったとすれば，$c_1 = \cdots = c_n = 0$ であることを示せばよい．このとき，任意の $i = 1, \ldots, n$ に対して内積の性質から

$$0 = (f_i, c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n) = c_1 (f_i, f_1) + \cdots + c_n (f_i, f_n) = c_i (f_i, f_i)$$

となり，$f_i \neq 0$ より $(f_i, f_i) = \|f_i\|^2 > 0$ であるから，$c_i = 0$ を得る．

簡単のため，しばらくの間，周期 $2\pi$ の周期関数，あるいは区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数を考えます.

## 有限フーリエ級数

$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \cdots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \cdots$ はすべて周期 $2\pi$ の周期関数なので, それらの有限個の 1 次結合

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \qquad (a_n, b_n \in \mathbb{R}) \tag{1}$$

はまた周期 $2\pi$ の周期関数である．ここで $N$ は任意の自然数, $a_0, a_1, \ldots, a_N, b_1, \ldots, b_N$ は任意の実数とする．(1) の右辺を**有限フーリエ級数**と言う．(最初の定数項を $a_0$ でなく $\dfrac{a_0}{2}$ としたのは後で計算を簡単にするため．)

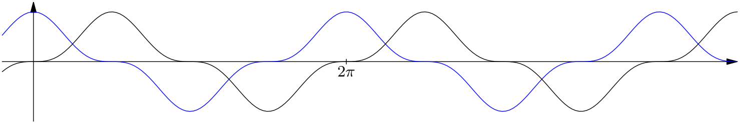
有限フーリエ級数の例を考えましょう．$n$ を自然数とするとき，$\sin^n x$ と $\cos^n x$ は有限フーリエ級数で表されます．たとえば

$$\cos^2 x = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x, \qquad \sin^2 x = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\cos 2x,$$
$$\cos^3 x = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x, \qquad \sin^3 x = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x.$$

実際，$\cos^2 x$ と $\sin^2 x$ は半角の公式より．$\cos^3 x$ と $\sin^3 x$ についてはこれと積和の公式を用いて

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \cos^2 x \cos x = \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{2}\cos 2x \cos x \\
&= \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}(\cos 3x + \cos x) = \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x \\
\sin^3 x &= \sin^2 x \sin x = \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{2}\cos 2x \sin x \\
&= \frac{1}{2}\sin x - \frac{1}{4}(\sin 3x - \sin x) = \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x
\end{aligned}$$

$\cos^3 x$ と $\sin^3 x$ のグラフ




さらに一般に次のことが証明できます.

**命題 1.4**

$n$ を自然数とするとき $\sin^n x$, $\cos^n x$ は，$1, \cos x$, $\cos 2x$, $\ldots$, $\cos nx$, $\sin x$, $\sin 2x$, $\ldots$, $\sin nx$ の 1 次結合で表せる．(1 はすべての $x$ に対する値が 1 である関数を表す.)

証明： $n$ についての帰納法で，自然数 $n$ に対してある実数 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ があって

$$\cos^n x = a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx$$

が成立することを示す．($n = 1$ のときは $a_0 = 0$, $a_1 = 1$ として成立する.）このとき帰納法の仮定と積和の公式より

$$\begin{aligned}
\cos^{n+1} x &= \cos^n x \cos x = (a_0 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + \cdots + a_n \cos nx) \cos x \\
&= a_0 \cos x + \frac{1}{2} a_1 (\cos 2x + \cos 0x) + \frac{1}{2} a_2 (\cos 3x + \cos x) \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{2} a_n (\cos(n+1)x + \cos(n-1)x) \\
&= \frac{1}{2} a_1 + \frac{1}{2}(2a_0 + a_2) \cos x + \frac{1}{2}(a_1 + a_3) \cos 2x \\
&\quad + \cdots + \frac{1}{2}(a_{n-2} + a_n) \cos(n-1)x + \frac{1}{2} a_{n-1} \cos nx \\
&\quad + \frac{1}{2} a_n \cos(n+1)x
\end{aligned}$$

従って帰納法により主張が示された．$\sin^n x$ については

$$\sin^n x = \cos^n\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = a_0 + a_1 \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cdots + \cos n\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$$

と $k = 1, \ldots, n$ に対して $\cos k\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos\frac{k\pi}{2}\cos kx + \sin\frac{k\pi}{2}\sin kx$ が成立することから示される.（証明終わり）

では，このような 1 次結合による表示は一意的 (一通り) でしょうか? そのためには，$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots$ が 1 次独立であることを示せばよいですが，そのために $C([0, 2\pi])$ における内積

$$(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$$

を考えます．（$f$ と $g$ は区間 $[0, 2\pi]$ で連続な関数.）

## 命題 1.5

(1) $n = 1, 2, 3, \ldots$ のとき

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0.$$

(2) $n = 1, 2, 3, \ldots,\ m = 1, 2, 3, \ldots$ のとき

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \sin mx \, dx = 0.$$

(3) $n = 1, 2, 3, \ldots,\ m = 1, 2, 3, \ldots$ かつ $n \neq m$ ならば

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = 0, \qquad \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = 0.$$

(4) $n = 1, 2, 3, \ldots$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi, \qquad \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi.$$

証明：(1)

$$\int_0^{2\pi} \cos nx\,dx = \left[\frac{1}{n}\sin nx\right]_0^{2\pi} = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin nx\,dx = \left[-\frac{1}{n}\cos nx\right]_0^{2\pi} = 0$$

(2) 積和の公式より

$$\cos nx \cdot \sin mx = \frac{1}{2}\sin(n+m)x - \frac{1}{2}\sin(n-m)x$$

なので $n \neq m$ ならば

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \sin mx\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n+m)x\,dx - \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \sin(n-m)x\,dx$$

$$= -\frac{1}{2(n+m)}\left[\cos(n+m)x\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2(n-m)}\left[\cos(n-m)x\right]_0^{2\pi}$$

$$= -\frac{1}{2(n+m)}(1-1) + \frac{1}{2(n-m)}(1-1) = 0$$

$n = m$ のときは第 2 項は $\sin(n-m)x = 0$ なので 0 となり，第 1 項の積分は上の式が成立して 0 となる．

(3),(4) 積和の公式より

$$\cos nx \cdot \cos mx = \frac{1}{2}\cos(n+m)x + \frac{1}{2}\cos(n-m)x$$

なので $n \neq m$ ならば

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)x \, dx$$
$$= \frac{1}{2(n+m)}\left[\sin(n+m)x\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2(n-m)}\left[\sin(n-m)x\right]_0^{2\pi} = 0$$

$n = m$ のときは

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (1 + \cos 2nx) \, dx = \frac{1}{2}\left[x + \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$\sin nx \cdot \sin mx = -\frac{1}{2}\cos(n+m)x + \frac{1}{2}\cos(n-m)x$$

より $n \neq m$ ならば

$$\int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n+m)x \, dx + \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \cos(n-m)x \, dx$$
$$= -\frac{1}{2(n+m)}\left[\sin(n+m)x\right]_0^{2\pi} + \frac{1}{2(n-m)}\left[\sin(n-m)x\right]_0^{2\pi} = 0$$

$n = m$ のときは

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2nx)\, dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2n}\sin 2nx\right]_0^{2\pi} = \pi$$

この命題は $1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \sin x, \sin 2x, \ldots$ を $C([0, 2\pi])$ の元とみなしたとき，どの 2 つの内積も 0 になることを言っているので，命題 1.3 よりこれらは 1 次独立となり，有限フーリエ級数の表示の一意性がわかります．

### 有限フーリエ級数の一意性

$a_n, b_n, a'_n, b'_n$ を定数とするとき，$0 \le x \le 2\pi$ に対して

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a'_n \cos nx + b'_n \sin nx)$$

が成立すれば，$a_n = a'_n$ $(n = 0, 1, \ldots, N)$，$b_n = b'_n$ $(n = 1, 2, \ldots, N)$ である．

証明： 移項すると

$$\frac{1}{2}(a_0 - a_0') \cdot 1 + \sum_{n=1}^{N} \{(a_n - a_n')\cos nx + (b_n - b_n')\sin nx\} = 0$$

となり，$1, \cos x, \cos 2x, \ldots, \cos Nx,\ \sin x, \sin 2x, \ldots \sin Nx$ は 1 次独立だから

$$a_0 - a_n' = 0 \quad (n = 0, 1, \ldots, N), \qquad b_0 - b_n' = 0 \quad (n = 1, \ldots, N)$$

を得る.（証明終わり）

有限フーリエ級数の一意性の応用として，有限フーリエ級数の基本周期について考察しましょう.

## 命題（有限フーリエ級数の基本周期）

有限フーリエ級数

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

において $(a_n, b_n) \neq (0,0)$ であるような自然数 $n$ $(1 \leq n \leq N)$ の最大公約数を $d$ とすると，$f(x)$ の基本周期は $\dfrac{2\pi}{d}$ である．

たとえば

$$f(x) = \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$$

では，$d = \mathrm{GCD}(4,5,6) = 1$ なので基本周期は $2\pi$.

$$f(x) = \sin 4x + \sin 6x$$

では，$d = \mathrm{GCD}(4,6) = 2$ なので基本周期は $\dfrac{2\pi}{2} = \pi$.

証明：$T > 0$ を定数とすると

$$\begin{aligned} f(x+T) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{a_n \cos n(x+T) + b_n \sin n(x+T)\} \\ &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{a_n(\cos nx \cos nT - \sin nx \sin nT) \\ &\qquad + b_n(\sin nx \cos nT + \cos nx \sin nT)\} \end{aligned}$$

これを $\cos nx$ と $\sin nx$ の 1 次結合の形に整理すると

$$\begin{aligned} f(x+T) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \{&(a_n \cos nT + b_n \sin nT) \cos nx \\ &+ (-a_n \sin nT + b_n \cos nT) \sin nx\} \end{aligned}$$

有限フーリエ級数の一意性によって，$T$ が $f(x)$ の周期，すなわち
$f(x+T)=f(x)$ が成立するための必要十分条件は

$$a_n \cos nT + b_n \sin nT = a_n, \quad -a_n \sin nT + b_n \cos nT = b_n \quad (n = 1, \ldots, N)$$

が成立することである．移項すると

$$a_n(\cos nT - 1) + b_n \sin nT = -a_n \sin nT + (\cos nT - 1)b_n = 0$$

これを行列で書くと

$$
\begin{pmatrix} \cos nT - 1 & \sin nT \\ -\sin nT & \cos nT - 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

となる．$(a_n, b_n) \neq (0, 0)$ となる $n$ については，この行列の行列式は 0 でなければならないから，

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} \cos nT - 1 & \sin nT \\ -\sin nT & \cos nT - 1 \end{vmatrix} \\
&= (\cos nT - 1)^2 + \sin^2 nT = 2(1 - \cos nT)
\end{aligned}
$$

すなわち $\cos nT = 1$ でなければならない．

ここで $T$ を $f(x)$ の基本周期とすると，$2\pi$ は $f(x)$ の周期だから，$2\pi$ は $T$ の倍数でなければならない．よってある自然数 $k$ があって $2\pi = kT$ 従って $T = \dfrac{2\pi}{k}$ となる．$(a_n, b_n) \neq (0,0)$ のときは

$$1 = \cos nT = \cos \frac{2n\pi}{k} = \cos\left(2\pi \frac{n}{k}\right)$$

より $\dfrac{n}{k}$ は整数，つまり $k$ は $n$ の約数である．

以上により $k$ は $(a_n, b_n) \neq (0,0)$ かつ $1 \leq n \leq N$ を満たすすべての $n$ の公約数である．従って，$k$ がそれらの最大公約数 $d$ に等しいとき $T = \dfrac{2\pi}{k} = \dfrac{2\pi}{d}$ が最小となる．上の議論を逆に辿れば $T = \dfrac{2\pi}{d}$ は確かに $f(x)$ の周期であることがわかる．以上により，$T = \dfrac{2\pi}{d}$ が $f(x)$ の最小の周期，すなわち基本周期であることが示された．