情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 10 回（11 月 22 日）

- 第 2 章 離散フーリエ変換
- 2.1 サンプリングと離散フーリエ変換（続き）
- 2.2 逆離散フーリエ変換と標本化定理

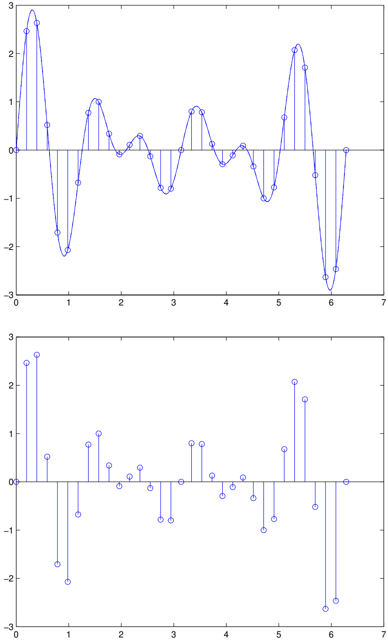
2.1 サンプリングと離散フーリエ変換（続き）

標本化 (サンプリング) とは，微小な時間間隔 Δt を固定し (CD の場合は 1/44100 秒)，その整数倍の時刻 $t = n\Delta t$ $(n = 0, 1, 2, \dots)$ における $f(t)$ の値，すなわち数列

$$f_0 = f(0),\ f_1 = f(\Delta t),\ f_2 = f(2\Delta t),\ f_3 = f(3\Delta t),\ \dots$$

を記録することです．(Δt の倍数以外の t に対する $f(t)$ の値は捨てられます．)

たとえば, $f(t) = \sin 4t + \sin 5t + \sin 6t$ のとき，1 周期に対応する区間 $[0, 2\pi]$ を 32 等分し $\Delta t = \dfrac{2\pi}{32} = \dfrac{\pi}{16}$ として，$f(t)$ を標本化した数列 $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{32}\}$ を棒グラフで表すと次のページの図のようになります．


3
2
1
0
−1
−2
−3
0
1
2
3
4
5
6
7

さて，$f(t)$ を周期 T，基本角周波数 ω の実数値周期関数とすると，その複素フーリエ級数と複素フーリエ係数は

$$f(t)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t}=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t),$$

$$c_n=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt=\frac{1}{T}\int_0^T f(t)\exp(-in\omega t)\,dt$$

で与えられます．(指数関数 e^x を $\exp(x)$ とも表します．) おのおのの整数 n に対して c_n の値をリーマン和で近似してみましょう．N を自然数として，区間 $[0,T]$ を N 等分して $\Delta t=\dfrac{T}{N}$ とおき，

$$t_k=k\Delta t=\frac{T}{N}k \qquad (k=0,1,\ldots,N)$$

とおくと，c_n を定義する積分に対応するリーマン和 $\tilde{c}_n$ は

$$\tilde{c}_n=\frac{1}{T}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\exp(-in\omega t_k)\frac{T}{N}=\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} f(t_k)\exp(-in\omega t_k)$$

となります．リーマン和の $N \to \infty$ とした極限が定積分なので，N を十分大きくとれば，$\tilde{c}_n$ は c_n に近いと考えられます．時刻 t の刻み幅 $\Delta t = \dfrac{T}{N}$ の逆数 $F_s = \dfrac{1}{\Delta t} = \dfrac{N}{T}$ のことを**サンプリング周波数**と呼びます．CD のサンプリング周波数は 44100 Hz です．

さて，上のリーマン和の式において $in\omega t_k = in\dfrac{2\pi}{T}\dfrac{T}{N}k = \dfrac{2\pi i}{N}nk$ であることに注意して，

$$f_k = f(t_k) \quad (k = 0, 1, \ldots, N-1), \qquad W = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

とおくと，

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W^{-nk} f_k = \frac{1}{N}(f_0 + W^{-n}f_1 + W^{-2n}f_2 + \cdots + W^{-(N-1)n}f_{N-1}) \tag{1}$$

という式が得られます．

ここで j, ℓ を整数として $n = jN + \ell \ (0 \le \ell \le N-1)$ とすると，$W^{-N} = 1$ より

$$\tilde{c}_n = \tilde{c}_{jN+\ell} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W^{-(jN+\ell)k} f_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W^{-\ell k} f_k = \tilde{c}_\ell$$

が成立します．つまりフーリエ係数の近似値 $\tilde{c}_n$ は，$\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{N-1}$ だけ求めておけば，あとはこれらの繰り返しとなるわけです．(本当のフーリエ係数 c_n にはこのような性質はありません．)

そこで式 (1) において $n = 0, 1, \ldots, N-1$ とすれば，(1) は複素数を成分とする N 次元ベクトル $(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ から N 次元ベクトル $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{N-1})$ への線形変換 (線形写像)

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \cdots & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \cdots & W^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \cdots & W^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \tag{2}$$

を表していると考えることができます．この線形変換を**離散フーリエ変換** (DFT, discrete Fourier transform) と呼びます．これは周期 T によらず N だけで定まります．

例 **2.1** $N=4$ のとき，$W=\exp(\frac{\pi i}{2})=i$ より離散フーリエ変換は $W^{-4}=1$ に注意すると

$$\begin{pmatrix}\tilde{c}_0\\ \tilde{c}_1\\ \tilde{c}_2\\ \tilde{c}_3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3}\\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & W^{-6}\\ 1 & W^{-3} & W^{-6} & W^{-9}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & W^{-3}\\ 1 & W^{-2} & 1 & W^{-2}\\ 1 & W^{-3} & W^{-2} & W^{-1}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 1\\ 1 & -i & -1 & i\\ 1 & -1 & 1 & -1\\ 1 & i & -1 & -i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\ f_1\\ f_2\\ f_3\end{pmatrix}$$

で与えられます.

たとえば $T=2\pi$, $N=4$, $\Delta t=\dfrac{\pi}{2}$ として関数 $f(t)=\cos t$ をサンプリングすると,

$$f_0=\cos 0=1,\quad f_1=\cos\frac{\pi}{2}=0,\quad f_2=\cos\pi=-1,\quad f_3=\cos\frac{3\pi}{2}=0$$

となるので，(f_0,f_1,f_2,f_3) の離散フーリエ変換は

$$\tilde{c}_0=0,\quad \tilde{c}_1=\frac{1}{2},\quad \tilde{c}_2=0,\quad \tilde{c}_3=\frac{1}{2}$$

一方 $f(t)=\sin t$ をサンプリングすると,

$$f_0=\sin 0=0,\quad f_1=\sin\frac{\pi}{2}=1,\quad f_2=\sin\pi=0,\quad f_3=\sin\frac{3\pi}{2}=-1$$

より離散フーリエ変換は

$$\tilde{c}_0=0,\quad \tilde{c}_1=-\frac{i}{2},\quad \tilde{c}_2=0,\quad \tilde{c}_3=\frac{i}{2}$$

例 2.2

$N=8$ のとき，$W=\exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ より $W^8=1$ に注意して

$$
\begin{aligned}
W^{-1} &= \exp\left(-\frac{\pi i}{4}\right) = \frac{1-i}{\sqrt{2}} \\
W^{-2} &= \exp\left(-\frac{\pi i}{2}\right) = -i \\
W^{-3} &= \exp\left(-\frac{3\pi i}{4}\right) = \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\
W^{-4} &= \exp(-\pi) = -1 \\
W^{-5} &= W^3 = \exp\left(\frac{3\pi i}{4}\right) = \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\
W^{-6} &= W^2 = \exp\left(\frac{\pi i}{2}\right) = i \\
W^{-7} &= W = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right) = \frac{1+i}{\sqrt{2}}
\end{aligned}
$$

従って離散フーリエ変換は

$$
\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \\ \tilde{c}_4 \\ \tilde{c}_5 \\ \tilde{c}_6 \\ \tilde{c}_7 \end{pmatrix}
= \frac{1}{8}
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} \\
1 & -i & -1 & i & 1 & -i & -1 & i \\
1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} \\
1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & -1 \\
1 & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{1-i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} \\
1 & i & -1 & -i & 1 & i & -1 & -i \\
1 & \frac{1+i}{\sqrt{2}} & i & \frac{-1+i}{\sqrt{2}} & -1 & \frac{-1-i}{\sqrt{2}} & -i & \frac{1-i}{\sqrt{2}}
\end{pmatrix}
\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \\ f_4 \\ f_5 \\ f_6 \\ f_7 \end{pmatrix}
$$

たとえば，周期 $T = 2\pi$ の関数 $f(t) = \cos t$ のサンプリングは

$$f_k = f(k\Delta t) = \cos\left(\frac{k\pi}{4}\right) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 7)$$

より

$$f_0 = 1, \quad f_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_2 = 0, \quad f_3 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_4 = -1,$$
$$f_5 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad f_6 = 0, \quad f_7 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

これを前ページの式に代入すれば離散フーリエ変換 $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_7)$ が求まります．しかしこの場合は，次のように求めることもできます．

$$
\begin{aligned}
f_k = f(k\Delta t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) &= \frac{1}{2}\left\{\exp\left(\frac{\pi i}{4}k\right) + \exp\left(-\frac{\pi i}{4}k\right)\right\} \\
&= \frac{1}{2}(W^k + W^{-k}) \qquad (k = 0, 1, \dots, 7)
\end{aligned}
$$

に注意すると，

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_n &= \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} W^{-nk} f_k = \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{7} W^{-nk}(W^k + W^{-k}) \\
&= \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{7} W^{-(n-1)k} + \frac{1}{16}\sum_{k=0}^{7} W^{-(n+1)k}
\end{aligned}
$$

ここで等比級数の和の公式から，$n \neq 1$ ならば

$$\sum_{k=0}^{7} W^{-(n-1)k} = \frac{1 - W^{-8(n-1)}}{1 - W^{-(n-1)}} = 0,$$

$n = 1$ のときは $\sum_{k=0}^{7} W^{-(n-1)k} = 8$ となることがわかります．同様に，$n + 1 \neq 8$ すなわち $n \neq 7$ ならば

$$\sum_{k=0}^{7} W^{-(n+1)k} = \frac{1 - W^{-8(n+1)}}{1 - W^{-(n+1)}} = 0,$$

$n = 7$ のときは $\sum_{k=0}^{7} W^{-(n+1)k} = 8$ となります．以上により

$$\tilde{c}_0 = 0, \quad \tilde{c}_1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{c}_2 = 0, \quad \tilde{c}_3 = 0, \quad \tilde{c}_4 = 0, \quad \tilde{c}_5 = 0, \quad \tilde{c}_6 = 0, \quad \tilde{c}_7 = \frac{1}{2}$$

同様に，$f(t) = \sin t$ のときはサンプリング

$$
\begin{aligned}
f_k = f(k\Delta t) = \sin\left(\frac{\pi}{4}k\right) &= -\frac{i}{2}\left\{\exp\left(\frac{\pi i}{4}k\right) - \exp\left(-\frac{\pi i}{4}k\right)\right\} \\
&= -\frac{i}{2}(W^k - W^{-k}) \qquad (k = 0, 1, \ldots, 7)
\end{aligned}
$$

の離散フーリエ変換 $\tilde{c}_n$ $(n = 0, 1, \ldots, 7)$ は

$$
\begin{aligned}
\tilde{c}_n = \frac{1}{8}\sum_{k=0}^{7} W^{-nk} f_k &= -\frac{i}{16}\sum_{k=0}^{7} W^{-nk}(W^k - W^{-k}) \\
&= -\frac{i}{16}\sum_{k=0}^{7} W^{-(n-1)k} + \frac{i}{16}\sum_{k=0}^{7} W^{-(n+1)k}
\end{aligned}
$$

これと前ページの結果より $n \neq 1, 7$ のとき $\tilde{c}_n = 0$ であり

$$
\tilde{c}_0 = 0,\ \tilde{c}_1 = -\frac{i}{2},\ \tilde{c}_2 = 0,\ \tilde{c}_3 = 0,\ \tilde{c}_4 = 0,\ \tilde{c}_5 = 0,\ \tilde{c}_6 = 0,\ \tilde{c}_7 = \frac{i}{2}.
$$

補題 2.1

実数のベクトル $(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換 $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{N-1})$ は

$$\tilde{c}_{N-n} = \overline{\tilde{c}_n} \qquad (n = 0, 1, \ldots, N-1)$$

を満たす．すなわち，$\tilde{c}_{N-n}$ は $\tilde{c}_n$ の共役複素数である．

証明：$W^N = 1$ と $\overline{W} = W^{-1}$ より $W^{-(N-n)k} = W^{nk} = \overline{W^{-nk}}$ であるから，

$$\tilde{c}_{N-n} = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} W^{-(N-n)k} f_k = \frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} \overline{W^{-nk} f_k} = \overline{\tilde{c}_n}$$

ここで f_k は実数であるから，$\overline{f_k} = f_k$ であることを用いた．

この補題により，$0 \le n \le \dfrac{N}{2}$ を満たす n について $\tilde{c}_n$ を計算すれば，

$$\tilde{c}_n = \overline{\tilde{c}_{N-n}} \qquad \left(\frac{N}{2} < n \le N-1\right)$$

により他の $\tilde{c}_n$ も求まるので計算が簡略化されます．

高速フーリエ変換 (FFT)

離散フーリエ変換の計算は，方法を工夫することにより，（データが実数でなく複素数のときでも）効率化することができます．特に N が 2 のべき，つまりある自然数 p によって $N = 2^p$ という形で表される場合には顕著に高速化できます．

簡単のため $N = 2^2 = 4$ の場合を考えましょう．$W = \exp\left(\frac{2\pi}{4}\right) = i$, $W^{-1} = -i$ として $g_n = N\tilde{c}_n$ (N で割る前の値）とおくと，$W^{-4} = 1$ に注意して (W^{-1}, W^{-2}, W^{-3} はあらかじめ計算しておく）

$$g_0 = f_0 + f_1 + f_2 + f_3$$
$$g_1 = f_0 + W^{-1}f_1 + W^{-2}f_2 + W^{-3}f_3$$
$$g_2 = f_0 + W^{-2}f_1 + W^{-4}f_2 + W^{-6}f_3 = f_0 + W^{-2}f_1 + f_2 + W^{-2}f_3$$
$$g_3 = f_0 + W^{-3}f_1 + W^{-6}f_2 + W^{-9}f_3 = f_0 + W^{-3}f_1 + W^{-2}f_2 + W^{-1}f_3$$

となるので，必要な演算回数は和が $3 \times 4 = 12$ 回，積が 8 回で

合計 20 回となります．

高速フーリエ変換では，この g_0, g_1, g_2 の式を以下のように変形します．

$$
\begin{aligned}
g_0 &= (f_0 + f_2) + (f_1 + f_3) \\
g_1 &= (f_0 + W^{-2} f_2) + W^{-1}(f_1 + W^{-2} f_3) \\
g_2 &= (f_0 + f_2) + W^{-2}(f_1 + f_3) \\
g_3 &= (f_0 + W^{-2} f_2) + W^{-3}(f_1 + W^{-2} f_3)
\end{aligned}
$$

ここで g_3 の式の右辺で $W^{-5} = W^{-1}$ を用いています．この式に従って，まず

$$
f_0 + f_2, \quad f_0 + W^{-2} f_2, \quad f_1 + f_3, \quad f_1 + W^{-2} f_3
$$

を 4 回の加法と 2 回の乗法で計算し，次に 4 回の加法と 3 回の乗法で g_0, g_2, g_2, g_3 を求めることができます．合計すると和が 8 回，積が 5 回の計 13 回で計算できます．

$N = 2^2 = 4$ のときは演算回数が 20 回から 13 回へ少し減っただけですが，$N = 2^p$ で p が大きいときは，同様の方法により計算回数を著しく少なくすることができます．離散フーリエ変換をこのように計算する技法を高速フーリエ変換 **(fast Fourier transform)** といい，FFT と略称されます．

MATLAB では fft という関数（命令）で高速フーリエ変換の計算が実行できます．ただし MATLAB の fft は N で割る前の値，すなわち前ページの $g_0, g_1, \ldots$ を返すので，（この授業での定義による）離散フーリエ変換を求めるには，実行結果（の各成分）を N で割る必要があります．

2.2 逆離散フーリエ変換と標本化定理

定理 2.1（逆離散フーリエ変換）

$(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \ldots, \tilde{c}_{N-1})$ を $(f_0, f_1, \ldots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換とするとき，

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} W^{nk}\, \tilde{c}_n \qquad (k = 0, 1, \ldots, N-1) \tag{3}$$

が成立する．

(3) を行列で表せば，

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{N-1} \end{pmatrix} \tag{4}$$

となります．これを**逆離散フーリエ変換**といいます．

まず次の補題を示します.

補題 2.2

α が 1 と異なる複素数, N が自然数であって，$\alpha^N = 1$ であるとすると,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{N-1} = 0$$

が成立する.

証明：$S = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = 1 + \alpha + \cdots + \alpha^{N-1}$ とおくと,

$$(1-\alpha)S = S - \alpha S = (1+\alpha+\cdots+\alpha^{N-1}) - (\alpha+\alpha^2+\cdots+\alpha^N) = 1-\alpha^N = 0$$

である．これと $1-\alpha \neq 0$ より $S = 0$ となる.

定理 2.1 の証明： 離散フーリエ変換 (2) の行列（$1/N$ 以外の部分）を A, 逆離散フーリエ変換 (4) の行列を B とすると，A の (n,k) 成分は W^{-nk}，B の (n,k) 成分は W^{nk} であるから，AB の (n,k) 成分は

$$\sum_{j=0}^{N-1} W^{-nj} W^{jk} = \sum_{j=0}^{N-1} W^{(k-n)j} = \sum_{j=0}^{N-1} (W^{k-n})^j$$

$k \neq n$ のときは，$-N < k-n < N$ より $W^{k-n} \neq 1$ であるから，補題 2.2 よりこの和は 0 である．$n=k$ のときは $W^{k-n}=1$ よりこの和は N となる．従って $AB = NI_N$ (I_N は N 次単位行列) が示された．これより $B = \left(\frac{1}{N}A\right)^{-1}$ であるから，(4) が (2) の逆変換であることがわかった．

例 **2.3** $N=4$ のとき，$W=\exp(\frac{\pi i}{2})=i$ より離散フーリエ変換と逆離散フーリエ変換は次のようになります.

$$\begin{pmatrix}\tilde{c}_0\\\tilde{c}_1\\\tilde{c}_2\\\tilde{c}_3\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&-i&-1&i\\1&-1&1&-1\\1&i&-1&-i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f_0\\f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}f_0\\f_1\\f_2\\f_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1&1&1\\1&i&-1&-i\\1&-1&1&-1\\1&-i&-1&i\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{c}_0\\\tilde{c}_1\\\tilde{c}_2\\\tilde{c}_3\end{pmatrix}$$