情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 7 回（11 月 1 日）

- 1.6 一般の周期関数のフーリエ展開（復習）
- 1.7 複素フーリエ級数

一般の周期関数のフーリエ展開（復習）

フーリエ級数展開

$f(t)$ を周期 T の周期関数として $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ （角周波数）とおく．

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt \qquad (n \geq 0)$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt \qquad (n \geq 1)$$

を $f(t)$ のフーリエ係数といい，

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$$

を $f(t)$ のフーリエ級数展開という．

このとき $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ は，$f(t)$ のフーリエ展開に含まれる基本角周波数が $n\omega$ であるような正弦波 $a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ の振幅を表しており，$f(t)$ のスペクトルと呼ばれます．これが音（の場合は）の特徴 (楽器ならば音色，言葉なら母音の違い) を表しています．

たとえば周期 T のパルス波 $f(t)$，すなわち区間 $[0, T)$ では

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq t < \frac{T}{2}) \\ 0 & (\frac{T}{2} \leqq t < T) \end{cases}$$

で定義され，これを周期 T で $\mathbb{R}$ に拡張した関数 $f(t)$ のフーリエ展開は

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)\omega t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega t + \cdots \end{aligned}$$

1.7 複素フーリエ級数

まず今後重要となるオイラーの等式について復習（？）します.

オイラー (Euler) の等式

x, y を実数，i を虚数単位とするとき

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

が成立する．特に $x = 0$ とすると $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ が成立する．

これは e^x, $\cos x$, $\sin x$ のテイラー展開を比較することにより導くことが可能ですが，ここでは複素数 $x + iy$ の指数関数 e^{x+iy} の定義式であると考えます.

重要なのは，このように複素数の指数関数を定義したとき，実数の指数関数と同じく指数法則や微分の公式が成立することです.

複素数の指数関数の性質

(1) x を実数とするとき

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin x = -\frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$$

(2) 複素数 z_1, z_2 に対して

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

(3) 複素数 z に対して

$$e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(4) x, y を実数として複素数 $z = x + iy$ の実部を $\mathrm{Re}\, z = x$ とすると $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$

(5) α を複素数の定数, x を実数の変数とするとき

$$\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$$

複素フーリエ級数

角周波数 ω の関数 $f(t)$ のフーリエ展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{1}$$

において，

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}), \qquad \sin n\omega t = -\frac{i}{2}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})$$

を代入すると

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega t}.$$

そこで整数 n に対して複素数 c_n を

$$
\begin{aligned}
&n > 0 \text{ のとき} \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\
&n = 0 \text{ のとき} \qquad c_0 = \frac{a_0}{2} \\
&n < 0 \text{ のとき} \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n})
\end{aligned}
$$

で定義すれば

$$
f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \tag{1}
$$

という展開が得られます．これを $f(t)$ の**複素フーリエ (級数) 展開**といいます．**複素フーリエ係数** c_n はすべての整数 n について

$$
c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} \, dt \tag{2}
$$

で計算できることがわかります．

実際 $n > 0$ のときは

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\cos n\omega t - i\sin n\omega t\right)\, dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\, dt$$

$n = 0$ のときは

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\, dt$$

$n < 0$ のときは $n = -m$ とすれば,

$$c_n = c_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + ib_m) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\cos m\omega t + i\sin m\omega t\right)\, dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{im\omega t}\, dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\, dt$$

となり，いずれの場合にも (2) が成立することがわかりました.

複素フーリエ級数の一般項 $c_n e^{in\omega t}$ は，t が時間を表す変数とすれば，複素平面における原点を中心とする半径 $|c_n|$ の円周上を角速度 $n\omega$ (n が負のときは負の向きに）で回転します．このような回転運動の重ね合わせが複素フーリエ級数です．

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2}\overline{(a_n - ib_n)} = \overline{c_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

より

$$|c_n| + |c_{-n}| = 2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成立します．従って，定数 2 を無視すれば，数列 $|c_n|$ $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ が $f(t)$ のスペクトルを表します．また，このとき複素フーリエ級数は，$c_n e^{in\omega t}$ の共役複素数が $c_{-n}e^{-in\omega t}$ であることに注意すると，

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{in\omega t} + c_{-n}e^{-in\omega t}) = c_0 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t}\right)$$

と $n \geq 0$ の項だけで表すこともできます．

特に有限フーリエ級数 $f_N(t)$ は

$$
\begin{aligned}
f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) &= \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} \\
&= c_0 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{N} c_n e^{in\omega t}\right)
\end{aligned}
$$

と表されます.

まとめ

複素フーリエ級数展開

$f(t)$ を周期 T の（実数値）周期関数として $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ とおく．整数 n に対して

$$c_n = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$$

と定義して $f(t)$ の複素フーリエ級数といい，

$$\begin{aligned} f(t) &= c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \\ &= c_0 + 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t}\right) \end{aligned}$$

を $f(t)$ の複素フーリエ **(級数)** 展開という．

例 1.8（$\cos^3 x$ と $\sin^3 x$ の複素フーリエ展開）

$\cos^3 x$ と $\sin^3 x$ の有限フーリエ級数展開（スライド 3 の p. 9) を用いると

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x = \frac{3}{8}(e^{ix} + e^{-ix}) + \frac{1}{8}(e^{3ix} + e^{-3ix}) \\
&= \frac{3}{8}e^{ix} + \frac{1}{8}e^{3ix} + \frac{3}{8}e^{-ix} + \frac{1}{8}e^{-3ix} = 2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{8}e^{ix} + \frac{1}{8}e^{3ix}\right), \\
\sin^3 x &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = -\frac{3i}{8}(e^{ix} - e^{-ix}) + \frac{i}{8}(e^{3ix} - e^{-3ix}) \\
&= -\frac{3}{8}ie^{ix} + \frac{1}{8}ie^{3ix} + \frac{3}{8}ie^{-ix} - \frac{1}{8}ie^{-3ix} = 2\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{8}ie^{ix} + \frac{1}{8}ie^{3ix}\right).
\end{aligned}$$

別解として，$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ と $\sin^3 x = -\frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$ を用いて直接計算すると

$$
\begin{aligned}
\cos^3 x &= \frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})^3 \\
&= \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{8}e^{ix} + \frac{1}{8}e^{3ix}\right), \\
\sin^3 x &= \frac{i}{8}(e^{ix} - e^{-ix})^3 \\
&= \frac{i}{8}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix}) \\
&= 2\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{8}ie^{ix} + \frac{1}{8}ie^{3ix}\right).
\end{aligned}
$$

例 1.9（パルス波の複素フーリエ展開）$f(t)$ を基本角周波数 ω のパルス波，a_n, b_n をそのフーリエ係数とすると，

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0 \quad (n > 0), \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \quad (n: \text{奇数}), \quad b_n = 0 \quad (n: \text{偶数})$$

でしたから，$c_0 = \dfrac{1}{2}$ であり，$n \geq 1$ のとき

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \begin{cases} -\dfrac{i}{n\pi} & (n\text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \begin{cases} \dfrac{i}{n\pi} & (n\text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

従って $f(t)$ の複素フーリエ展開は

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{(2k-1)\pi} e^{-i(2k-1)\omega t} \\
&= \frac{1}{2} + \frac{-i}{\pi} e^{i\omega t} + \frac{-i}{3\pi} e^{3i\omega t} + \frac{-i}{5\pi} e^{5i\omega t} + \cdots \\
&\quad + \frac{i}{\pi} e^{-i\omega t} + \frac{i}{3\pi} e^{-3i\omega t} + \frac{i}{5\pi} e^{-5i\omega t} + \cdots \\
&= \frac{1}{2} + 2\mathrm{Re}\left(\frac{-i}{\pi} e^{i\omega t} + \frac{-i}{3\pi} e^{3i\omega t} + \frac{-i}{5\pi} e^{5i\omega t} + \cdots \right)
\end{aligned}
$$

となります.

別解：c_n を公式を用いて直接計算してみましょう．まず，一般に α を 0 でない複素数の定数とするとき，$\dfrac{d}{dt}e^{\alpha t} = \alpha e^{\alpha t}$ が成立することを示したので，不定積分について

$$\int e^{\alpha t}\,dt = \frac{1}{\alpha}e^{\alpha t} + C \qquad （C \text{ は複素数の定数}）$$

という公式が成立することに注意しましょう．これを用いると $n \neq 0$ のとき $\omega T = 2\pi$ に注意して

$$\begin{aligned} c_n &= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega t}\,dt \\ &= \frac{1}{T}\left[-\frac{1}{in\omega}e^{-in\omega t}\right]_0^{\frac{T}{2}} = \frac{i}{n\omega T}(e^{-in\omega\frac{T}{2}} - 1) \\ &= \frac{i}{2n\pi}(e^{-in\pi} - 1) = \begin{cases} -\dfrac{i}{n\pi} & (n \text{ が奇数のとき}) \\ 0 & (n \text{ が偶数のとき}) \end{cases} \end{aligned}$$

また $n = 0$ のときは

$$c_0 = \frac{1}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} dt = \frac{1}{2}$$

よって

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{\{-(2k-1)\pi\}} e^{-i(2k-1)\omega t} \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{(2k-1)\pi} e^{-i(2k-1)\omega t} \\ &= \frac{1}{2} + 2\mathrm{Re}\left\{ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t} \right\} \end{aligned}$$

例 1.10 整流正弦波 $f(t) = \max\{\sin \omega t, 0\}$

オイラーの等式 $\sin \omega t = -\frac{i}{2}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})$ を用いて

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega t} \sin \omega t \, dt = -\frac{i}{2T}\int_0^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega t}(e^{i\omega t} - e^{-i\omega t})\, dt \\
&= -\frac{i}{2T}\int_0^{\frac{T}{2}} (e^{-i(n-1)\omega t} - e^{-i(n+1)\omega t})\, dt
\end{aligned}
$$

これから $n \neq \pm 1$ のときは $\omega T = 2\pi$ に注意して

$$
\begin{aligned}
c_n &= -\frac{i}{2T}\left[-\frac{1}{i(n-1)\omega}e^{-i(n-1)\omega t} + \frac{1}{i(n+1)\omega}e^{-i(n+1)\omega t}\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{4(n-1)\pi}(e^{-i(n-1)\pi} - 1) - \frac{1}{4(n+1)\pi}(e^{-i(n+1)\pi} - 1)
\end{aligned}
$$

よって n が偶数のときは

$$c_n = \frac{-2}{4(n-1)\pi} + \frac{2}{4(n+1)\pi} = -\frac{1}{(n^2-1)\pi}$$

n が奇数かつ $n \neq \pm 1$ のときは $c_n = 0$. また

$$\begin{aligned} c_1 &= -\frac{i}{2T}\int_0^{\frac{T}{2}} (1 - e^{-2i\omega t})\,dt = -\frac{i}{2T}\left[t + \frac{1}{2i\omega}e^{-2i\omega t}\right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{i}{2T}\left\{\frac{T}{2} + \frac{1}{2i\omega}(e^{-2\pi i} - 1)\right\} = -\frac{i}{4} \\ c_{-1} &= -\frac{i}{2T}\int_0^{\frac{T}{2}} (e^{2i\omega t} - 1)\,dt = -\frac{i}{2T}\left[\frac{1}{2i\omega}e^{2i\omega t} - t\right]_0^{\frac{T}{2}} \\ &= -\frac{i}{2T}\left\{\frac{1}{2i\omega}(e^{2\pi i} - 1) - \frac{T}{2}\right\} = \frac{i}{4} \end{aligned}$$

以上により

$$
\begin{aligned}
f(t) &= c_0 + c_1 e^{\omega t} + c_{-1} e^{-i\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} (c_{2k} e^{2ki\omega t} + c_{-2k} e^{-2ki\omega t}) \\
&= \frac{1}{\pi} - \frac{i}{4} e^{i\omega t} + \frac{i}{4} e^{-i\omega t} \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ -\frac{1}{(4k^2-1)\pi} e^{2ki\omega t} - \frac{1}{(4k^2-1)\pi} e^{-2ki\omega t} \right\} \\
&= \frac{1}{\pi} + 2\mathrm{Re} \left\{ -\frac{i}{4} e^{i\omega t} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(4k^2-1)\pi} e^{2ki\omega t} \right\}
\end{aligned}
$$

$n \geq 1$ のとき $c_{-n} = \overline{c_n}$ が成立するので，実は c_{-n} $(n \geq 1)$ の計算は不要でした．

例 1.11 のこぎり波

$T > 0$ として，$-\dfrac{T}{2} < t \leq \dfrac{T}{2}$ のとき $f(t) = t$ という関数を周期 T で $\mathbb{R}$ 全体に拡張した関数を同じ記号 $f(t)$ で表します．部分積分により $n \neq 0$ のとき

$$
\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} te^{-in\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\left[-\frac{1}{in\omega}te^{-in\omega t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} + \frac{1}{in\omega T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} e^{-in\omega t}\,dt \\
&= \frac{i}{2n\pi}\left\{\frac{T}{2}e^{-n\pi i} - \left(-\frac{T}{2}\right)e^{n\pi i}\right\} + \frac{1}{2n\pi i}\left[-\frac{1}{in\omega}e^{-in\omega t}\right]_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{Ti}{4n\pi}(e^{-n\pi i} + e^{n\pi i}) + \frac{1}{2n^2\pi\omega}(e^{-n\pi i} - e^{n\pi i})
\end{aligned}
$$

ここで n が偶数のときは $e^{n\pi i} = e^{-n\pi i} = 1$ であり，n が奇数のときは $e^{n\pi i} = e^{-n\pi i} = -1$ だから，

$$
c_n = \frac{(-1)^n Ti}{2n\pi} \qquad (n \neq 0)
$$

また $n=0$ のときは

$$c_0 = \frac{1}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t\,dt = 0$$

以上により，のこぎり波 $f(t)$ の複素フーリエ展開は

$$\begin{aligned} f(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Ti}{2n\pi} e^{in\omega t} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Ti}{2n\pi} e^{-in\omega t} \\ &= 2\mathrm{Re}\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n Ti}{2n\pi} e^{in\omega t}\right) \end{aligned}$$