情報解析学（2023 年度後期）

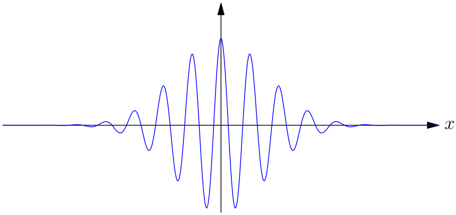
担当：大阿久 俊則

第 13 回（12 月 13 日）

- 第 3 章 フーリエ変換
- 3.1 導入—複素フーリエ係数からフーリエ変換へ
- 3.2 フーリエ変換の性質

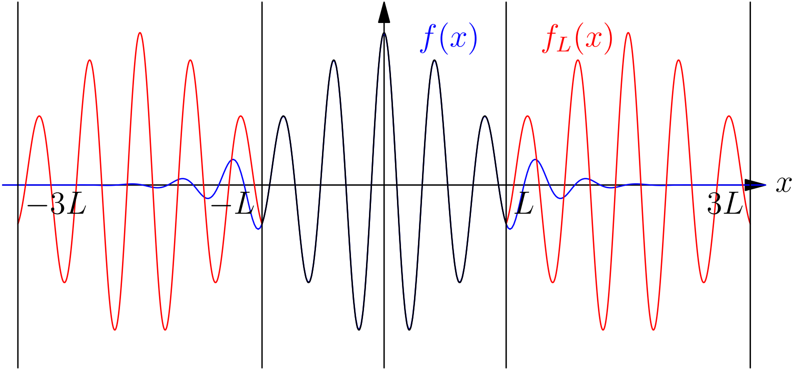
3.1 複素フーリエ係数からフーリエ変換へ

今までは周期関数のみを考えましたが，周期関数にならないような振動現象もたくさんあります．たとえば地震波は有限時間の間だけ振動するので，周期関数ではありません．言葉の音で言えば，母音は周期関数ですが，子音は継続しないので，周期関数にはなりません．



このように周期関数にはならないような振動を考えるために，フーリエ展開で周期 T を無限大にした極限を考えてみましょう．

$f(x)$ を実数全体 $\mathbb{R}$ で定義された（周期関数とは限らない）関数とします．$L > 0$ として，$f(x)$ を区間 $[-L, L]$ に制限してから周期 $T = 2L$ で $\mathbb{R}$ に拡張した関数を $f_L(x)$ で表しましょう．$f_L(x)$ は区間 $[-L, L]$ では $f(x)$ に一致しますが，この区間の外では一般には $f(x)$ とは異なります．



周期 $T = 2L$ の関数 $f_L(x)$ の複素フーリエ係数は，角周波数が $\omega = \dfrac{2\pi}{T} = \dfrac{\pi}{L}$ であることに注意すると

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x)e^{-i\pi nx/L}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\pi nx/L}\,dx$$

となります．ここで ξ を新しい変数として

$$F_L(\xi) := \int_{-L}^{L} f(x)e^{-i\xi x}\,dx, \qquad \xi_n = \frac{\pi n}{L}$$

とおけば

$$c_n = \frac{1}{2L}F_L(\xi_n)$$

という関係が得られます．(c_n は L に依存することに注意してください.)

複素フーリエ展開の式

$$f_L(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x}$$

から，$-L < x < L$ のとき，

$$f(x) = f_L(x) = \frac{1}{2L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\xi_n) e^{i\xi_n x}$$

が導かれます．この式は，区間 $[-L, L]$ において $f(x)$ を角周波数が $\xi_n = \dfrac{n\pi}{L}$ (周波数は $\dfrac{\xi_n}{2\pi} = \dfrac{n}{2L}$) の単振動の和に分解していると考えられます．

ここで L を限りなく大きくすると，この角周波数 ξ_n の間隔 $\dfrac{\pi}{L}$ は限りなく小さくなり，すべての実数値をとるようになると考えられます．

そこで，$F_L(\xi)$ の式で $L \to \infty$ として

$$\boxed{F(\xi) = \lim_{L\to\infty} F_L(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx}$$

を $f(x)$ の**フーリエ変換**と呼び $F(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ または $F(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$ (あるいは変数 ξ を省略して $F = \mathcal{F}[f]$) などと表します ($\mathcal{F}$ は F の筆記体）.

フーリエ変換 $\widehat{f}(\xi)$ は角周波数を表す変数 ξ の関数です.

一方，$\xi_n - \xi_{n-1} = \dfrac{\pi}{L}$ に注意して $f_L(x)$ のフーリエ級数の式を

$$f(x) = f_L(x) = \frac{1}{2L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\xi_n)e^{i\xi_n x} = \frac{1}{2\pi}\sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\xi_n)e^{i\xi_n x}(\xi_n - \xi_{n-1})$$

と書き換えて $L \to \infty$ とすると，積分のリーマン和による定義より

$$\boxed{f(x) = \lim_{L\to\infty} f_L(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)e^{i\xi x}\, d\xi}$$

が成立すると考えられます（厳密な証明ではないですが）．この右辺の式を $F(\xi)$ の**逆フーリエ変換**といいます.

この式は，$F(\xi)e^{i\xi x}$ という，角周波数が ξ で複素振幅が $F(\xi)$ の単振動を，ξ について積分することで $f(x)$ が表されることを意味しています. 特に $|\widehat{f}(\xi)|$ は $f(x)$ に含まれる（複素）単振動の角周波数の分布（スペクトル）を表しています.

まずは簡単な例を考えてみましょう．

例 3.1 $A > 0$ として

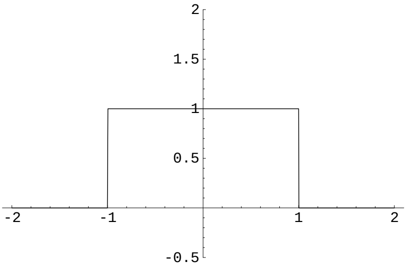
$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leqq A) \\ 0 & (|x| > A) \end{cases}$$

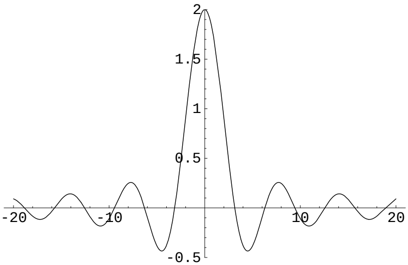
で定義される関数 $f(x)$ (パルス波) のフーリエ変換は，$\xi \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x}\, dx = \int_{-A}^{A} e^{-i\xi x}\, dx = \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-A}^{A} \\ &= \frac{e^{-iA\xi} - e^{iA\xi}}{-i\xi} = \frac{2 \sin A\xi}{\xi}. \end{aligned}$$

$\xi = 0$ のときは別に計算すると $\widehat{f}(0) = 2A$ となりますが，これは上の式で $\xi \to 0$ とした極限と一致します．つまり $\widehat{f}(\xi)$ は $\mathbb{R}$ 全体で連続な関数です．($f(x)$ は $x = \pm 1$ で不連続なことに注意．)

左は $A=1$ のときの $f(x)$ のグラフ，右は $\widehat{f}(\xi)$ のグラフです．





フーリエ展開との関連を見るために，$L>A$ として $f(x)$ を区間 $[-L,L]$ で考え，その外に周期 $2L$ で拡張した関数を $f_L(x)$ とすると，$f_L(x)$ の複素フーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} f_L(x) e^{-in\pi x/L}\,dx = \frac{1}{2L}\int_{-A}^{A} e^{-in\pi x/L}\,dx$$

より，$c_0 = \dfrac{A}{L}$ で，$n \neq 0$ のときは

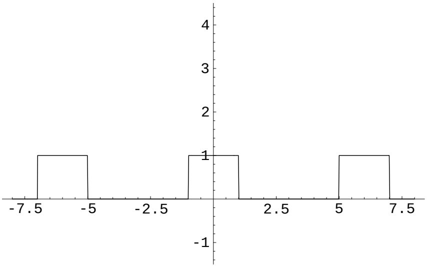
$$c_n = \frac{1}{2L}\frac{L}{-in\pi}\left(e^{-in\pi A/L} - e^{in\pi A/L}\right) = \frac{\sin\dfrac{n\pi A}{L}}{n\pi}$$

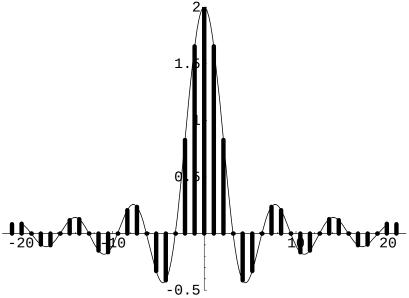
となります．従って $f_L(x)$ の複素フーリエ展開は

$$f_L(x) = \frac{A}{L} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin\frac{n\pi A}{L}}{n\pi}\left(e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L}\right)$$

と表されます．

このフーリエ展開を，横軸を角周波数 $\xi = \dfrac{n\pi x}{L}$，縦軸を $2Lc_n$ としてグラフで表してみましょう．左は $A = 1$, $L = 3$ のときの $f_L(x)$ のグラフ，右は $2Lc_n$ の棒グラフです．曲線は $f(x)$ のフーリエ変換を表します．L を大きくして行くと，左の $f_L(x)$ のグラフのパルスの間隔は開いて行き，右のフーリエ係数の棒グラフの間隔はだんだん狭まって $\widehat{f}(\xi)$ のグラフに近づいて行きます．





3.2 フーリエ変換の性質

命題 3.1（フーリエ変換の性質，その 1 — 線形性）

$f(x)$ と $g(x)$ を $\mathbb{R}$ で可積分な関数，c を定数 (複素数) とするとき

$$\mathcal{F}[f+g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \qquad \mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f]$$

証明：定義より

$$\mathcal{F}[f+g] = \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x)+g(x)\}e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x)e^{-i\xi$$

$$\mathcal{F}[cf] = \int_{-\infty}^{\infty} cf(x)e^{-i\xi x}\,dx = c\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x}\,dx = c\mathcal{F}[f].$$

命題 3.2（フーリエ変換の性質，その 2 — 周波数シフトと平行移動）

$f(x)$ のフーリエ変換を $\widehat{f}(\xi)$ とすると，任意の実数 a に対して

(1) $\mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right](\xi) = \widehat{f}(\xi - a)$

(2) $\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi)$

証明：(1)

$$\mathcal{F}\left[e^{iax}f(x)\right](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\xi-a)x}\,dx = \widehat{f}(\xi-a).$$

(2) 置換積分 $x-a=y$ を用いて

$$\mathcal{F}[f(x-a)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-a)e^{-i\xi x}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi(y+a)}\,dy = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi).$$

例 3.2 $A > 0$, a を任意の実数 として

$$g(x) := \begin{cases} e^{iax} & (|x| \leqq L) \\ 0 & (|x| > L) \end{cases}$$

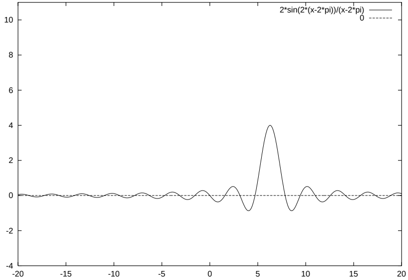
のフーリエ変換を求めてみましょう．例 3.1 で $A = L$ としたときの $f(x)$ を用いると，$g(x) = e^{iax} f(x)$ と表されるので，命題 3.2 の (1) より，

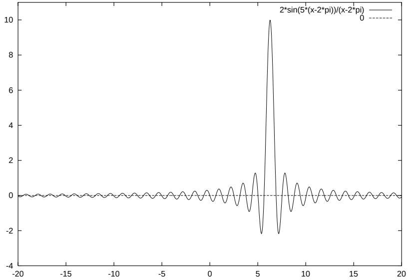
$\xi \neq a$ のとき

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a) = \frac{2 \sin L(\xi - a)}{\xi - a}$$

$\xi = a$ のときは $\widehat{g}(a) = 2L$ となります．$\widehat{g}(\xi)$ は $\mathbb{R}$ 全体で連続な関数です．

$a = 2\pi$ とすると，$L = 2$ のときと $L = 5$ のときの $\widehat{g}(\xi)$ のグラフは下のようになります.





L が大きいとき $\widehat{f}(x)$ のグラフは振動数 $L/2\pi$ で小刻みに振動し，$\xi = a$ で最大値 $2L$ の鋭いピークを持ちます．また $\xi \to \pm\infty$ のとき $\widehat{g}(\xi)$ は 0 に近付きます.