情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 8 回（11 月 8 日）

- 1.8 フーリエ級数の収束の証明

1.8 フーリエ級数の収束の証明

定理 1.1

周期 2π の連続関数 $f(x)$ に対して a_n, b_n を

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx\,dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx \quad (n \geq 1)$$

で定義し，自然数 N に対して

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とすると

$$\lim_{N\to\infty}\|f - f_N\| = \lim_{N\to\infty}\sqrt{\int_0^{2\pi}\{f(x) - f_N(x)\}^2\,dx} = 0$$

が成立する.

この定理を証明するためにまず次の命題を示します.

命題 1.9

$f(x)$ を $\mathbb{R}$ で定義された周期 2π の連続関数とする．a_k, b_k を f のフーリエ係数として

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

とおく．一方，自然数 N に対して有限フーリエ級数 g_N を $f_0, f_1, \ldots, f_{N-1}$ の平均，すなわち

$$g_N(x) = \frac{1}{N}\{f_0(x) + f_1(x) + \cdots + f_{N-1}(x)\}$$

で定義すると，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} g_N(x) = f(x)$ が成立する．さらに詳しく

$$\lim_{N\to\infty} \max_{0\le x\le 2\pi} |g_N(x) - f(x)| = 0.$$

証明： $f_n(x)$ の定義と補題 1.1 より

$$
\begin{aligned}
f_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(t-x) \right) dt \\
&= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kt \right) dt. \qquad (1)
\end{aligned}
$$

ここで Euler の等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いると，

$$
\sum_{k=1}^{n} \cos kt = \mathrm{Re} \left(\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} \right)
$$

と表されるので，等比数列の和の公式 (初項と公比が複素数の場合でも成立）を用いると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} e^{ikt} &= e^{it}\frac{e^{int}-1}{e^{it}-1} = e^{it}\frac{e^{int/2}(e^{int/2}-e^{-int/2})}{e^{it/2}(e^{it/2}-e^{-it/2})} \\
&= e^{i(n+1)t/2}\frac{e^{int/2}-e^{-int/2}}{e^{it/2}-e^{-it/2}} \\
&= \left(\cos\frac{n+1}{2}t + i\sin\frac{n+1}{2}t\right)\frac{\sin\dfrac{n}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}}
\end{aligned}
$$

この実部をとって積和の公式を用いると

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}\cos kt &= \cos\frac{n+1}{2}t\cdot\frac{\sin\dfrac{n}{2}t}{\sin\dfrac{t}{2}} = \frac{1}{2\sin\dfrac{t}{2}}\left(\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t - \sin\frac{t}{2}\right) \\
&= \frac{1}{2}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{t}{2}} - \frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

よって

$$\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos kt=\frac{1}{2}\frac{\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin\dfrac{t}{2}}=\frac{1}{2}\,\frac{\sin\dfrac{t}{2}\sin\left(n+\dfrac{1}{2}\right)t}{\sin^2\dfrac{t}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}\,\frac{\cos nt-\cos(n+1)t}{\sin^2\dfrac{t}{2}}.$$

これを式 (1) に代入すれば

$$f_n(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\,\frac{\cos nt-\cos(n+1)t}{\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt.$$

従って

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1}f_n(x)=\frac{1}{4N\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\frac{1-\cos Nt}{\sin^2\dfrac{t}{2}}\,dt \\ &= \frac{1}{2N\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(x+t)\left(\frac{\sin\dfrac{Nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)^2 dt. \end{aligned} \tag{2}$$

特に $f(x) = 1$ のとき，$a_0 = 2$ かつ $a_k = b_k = 0$ $(k \geq 1)$ より $f_n(x) = 1$，従って $g_N(x) = 1$ であるから，

$$1 = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \dfrac{Nt}{2}}{\sin \dfrac{t}{2}} \right)^2 dt.$$

この両辺に最初の $f(x)$ を掛けて

$$f(x) = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{\sin \dfrac{Nt}{2}}{\sin \dfrac{t}{2}} \right)^2 dt. \tag{3}$$

式 (2) と (3) より，

$$g_N(x) - f(x) = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) \left(\frac{\sin \dfrac{Nt}{2}}{\sin \dfrac{t}{2}} \right)^2 dt. \tag{4}$$

ここで $f(x)$ は (一様) 連続なので，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，ある $\delta > 0$ があって，

$$|t| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon \tag{5}$$

が成り立つようにできる．この δ を用いて，(4) の被積分関数を $G(x,t)$ とおいて，

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x,t)\,dt = \int_{-\pi}^{-\delta} G(x,t)\,dt + \int_{-\delta}^{\delta} G(x,t)\,dt + \int_{\delta}^{\pi} G(x,t)\,dt$$

と 3 つに分ける．すると (5) と (3) より

$$\frac{1}{2N\pi}\left|\int_{-\delta}^{\delta} G(x,t)\,dt\right| \le \frac{\varepsilon}{2N\pi}\int_{-\delta}^{\delta}\left(\frac{\sin\dfrac{Nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)^2 dt$$

$$\le \frac{\varepsilon}{2N\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left(\frac{\sin\dfrac{Nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)^2 dt \;=\; \varepsilon.$$

また，$|f(x)|$ の最大値を M とすれば，$|f(x+t)-f(x)| \leq 2M$ より

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{2N\pi}\left|\int_{-\pi}^{-\delta} G(x,t)\,dt + \int_{\delta}^{\pi} G(x,t)\,dt\right| \\
&\leq \frac{2M}{2N\pi}\left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi}\right)\left(\frac{\sin\dfrac{Nt}{2}}{\sin\dfrac{t}{2}}\right)^2 dt \\
&< \frac{2M}{2N\pi}\cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\sin^2\dfrac{\delta}{2}} = \frac{2M}{N\sin^2\dfrac{\delta}{2}}\,.
\end{aligned}
$$

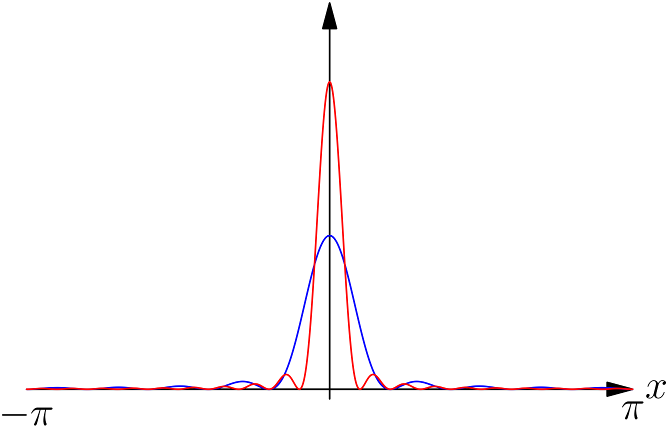
以上により，

$$
|g_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{N\sin^2\dfrac{\delta}{2}}
$$

となり，この右辺は ε を小さく，N を大きくとれば，(x に無関係に) いくらでも小さくできる．

従って，$g_N(x)$ は $N\to\infty$ とするとき $f(x)$ に一様収束する．（証明終）

上記の証明中に現われた式 $\frac{1}{2N\pi}\left(\frac{\sin\frac{Nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2$ のグラフを $N=10$（青）と $N=20$ （赤）のときに描いてみると下のようになります．どちらも積分（面積）は 1 で，N が大きくなると原点の近くに集中します.（原点での値は $N/2\pi$）従って，区間 $[-\pi,-\delta]$ と $[\delta,\pi]$ での積分の値は $N\to\infty$ のとき 0 に収束します.



定理 1.1 の証明： $f(x)$ を周期 2π の連続関数，a_n, b_n をそのフーリエ係数として，

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \qquad g_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f_n(x)$$

とおく．命題 1.9 より任意の $\varepsilon > 0$ に対して，N を十分大きくとれば $|f(x) - g_N(x)| < \varepsilon$ がすべての x について成立するから，

$$\|f - g_N\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - g_N(x)|^2 \, dx\right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi}\,\varepsilon.$$

従って，$\displaystyle\lim_{N\to\infty} \|f - g_N\| = 0$ が成立する．

一方 $g_N(x)$ は $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos(N-1)x, \sin(N-1)x$ の 1 次結合で書ける．実際定義より，

$$g_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N-n}{N}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

となることがわかる．従って命題 1.7（スライド 4 の 6 ページ）により，

$$\|f - f_{N-1}\| \leq \|f - g_N\|$$

が成立する．上で示したように $\lim_{N\to\infty} \|f - g_N\| = 0$ であるから，はさみうちの論法により，

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\| = \lim_{N\to\infty} \|f - f_{N-1}\| = 0$$

が証明された．（証明終）

$f(x)$ が不連続点を持つ場合

次に関数が不連続な点を持つ場合を考察しましょう.

定義

周期 T の関数 $f(x)$ が**区分的に連続**とは，$0 \leq a_1 < \cdots < a_k < T$ をみたす有限個の点 $a_1, \ldots, a_k$ が存在して，$f(x)$ は，点 $a_j + nT$ $(1 \leq j \leq k,$ $n \in \mathbb{Z})$ を除いて連続であり，各 a_k において右極限 $\lim\limits_{x \to a_k + 0} f(x)$ と左極限 $\lim\limits_{x \to a_k - 0} f(x)$ が存在すること．ただし，$a_j + nT$ においては $f(x)$ の値は定義されていなくてもよい.

たとえば，パルス波やのこぎり波は区分的に連続ですが，
$f(x) = \dfrac{1}{x}$ $(-\pi < x < \pi)$ を周期 2π で拡張した関数は，$x = 0$ での右極限と左極限が存在しないので，区分的に連続にはなりません.

補題 1.2

$f(x)$ を周期 T の区分的に連続な関数とすると，任意の $\varepsilon > 0$ に対して，

$$\|f - g\| = \left(\int_0^T (f(x) - g(x))^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

を満たすような周期 T の連続関数 $g(x)$ が存在する.（g は ε による.）

証明：$f(x)$ の不連続点の近傍で 1 次式（直線）に置き換えた関数を $g(x)$ とすればよい.

補題 1.3

区分的に連続な周期 T の関数 f, g に対して

(1) $|(f, g)| \leq \|f\|\|g\|$.

(2) $\|f+g\| \leq \|f\| + \|g\|$.

証明：t を任意の実数とすると,

$$0 \leq \|tf + g\|^2 = (tf + g, tf + g) = t^2(f, f) + 2t(f, g) + (g, g).$$

従ってこの 2 次式の判別式が 0 以下であるから,

$$(f, g)^2 - (f, f)(g, g) = (f, g)^2 - \|f\|^2\|g\|^2 \leq 0.$$

これから (1) を得る．この計算と (1) を用いて

$$\begin{aligned} \|f+g\|^2 &= (f+g, f+g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\|\|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

両辺の平方根をとって (2) を得る．

定理 1.2

$f(t)$ を周期 T の区分的に連続な関数として，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$,

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t\right),$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\,dt \quad (n \geq 0),$$

$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\,dt \quad (n \geq 1)$$

とおくと，

$$\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\| = \lim_{N\to\infty} \left(\int_0^T (f(t) - f_N(x))^2\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

が成立する．

証明：$\omega t = x$ とおくことにより，$f(t)$ は周期 2π の区分的に連続な関数としてよい．

任意の $\varepsilon > 0$ に対して，補題 1.2 より $\|f - g\| \leq \varepsilon$ を満たしかつ連続な周期 2π の関数 $g(t)$ が存在する．$g(t)$ のフーリエ係数を a'_n, b'_n として，

$$g_N(t) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^{N}(a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$$

とおくと，定理 1.1 より，$\lim_{N\to\infty} \|g - g_N\| = 0$ となる．
命題 1.7（スライド 4）と補題 1.3 より，N が十分大きいとき，

$$\|f - f_N\| \leq \|f - g_N\| = \|(f - g) + (g - g_N)\| \leq \|f - g\| + \|g - g_N\| < \varepsilon + \|g - g_N\|$$

が成立する．ここで ε はいくらでも小さくとれるから $\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\| = 0$ が証明された．