情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 2 回（9 月 27 日）

- 前回の復習
- 1.3 周期関数と三角関数
- 1.4 関数空間と有限フーリエ級数

前回の復習（単振動と純正律）

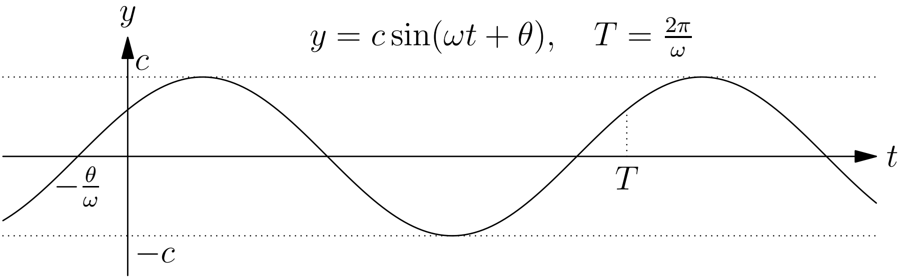
単振動（正弦波）とは変位（元の位置からのずれ）が時刻 t の関数

$$f(t) = c\sin(\omega t + \theta)$$

で表される現象のこと．バネの振動，音叉（おんさ）の音など．ここで

- c は 0 以上の実数で**振幅**（しんぷく）と呼ばれる．
- ω （オメガ）は正の実数で**角周波数**と呼ばれる．
- θ （シータ）は任意の実数（例えば $0 \leq \theta < 2\pi$ としてもよい）で，**初期位相**と呼ばれる．
- このとき**周期**は $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$.
- **周波数**（振動数）は $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$.

単振動は半径 c の円周上を，角度 θ から出発して一定の角速度 ω で動いている点を横から見た（y 座標に着目した）運動である．



加法定理を用いると単振動は

$$f(t) = c\sin\theta\cos\omega t + c\cos\theta\sin\omega t = \underline{a\cos\omega t + b\sin\omega t}$$

という形で表すこともできます.（フーリエ解析では単振動をこの形で表します.）ここで a, b は

$$a = c\sin\theta, \quad b = c\cos\theta$$

で決まる定数です．逆に a, b を最初に与えれば,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}$$

で c と θ を決めることができます．従って $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ で表される単振動の振幅は $\sqrt{a^2 + b^2}$ となります.

純正律では音階の周波数の比が分数になる．1 オクターブ違う音の周波数の比は 1 : 2,（完全）5 度の関係の 2 つの音の周波数の比は 2 : 3,（完全) 4 度の関係の 2 つの音の周波数の比は 3 : 4 など.

例えばドミソの和音の周波数の比は 4 : 5 : 6 で，ド，ミ，ソの各音が単振動（音叉の音）だとすると，ドミソの和音を表す関数は，$\omega = 2\pi \cdot 66$ として

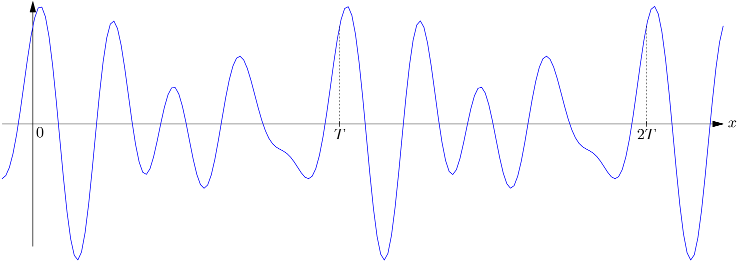
$$f(t) = a_4 \cos 4\omega t + b_4 \sin 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + b_5 \sin 5\omega t + a_6 \cos 6\omega t + b_6 \sin 6\omega t$$

という形で表すことができます ($a_4.a_5, a_6, b_4, b_5, b_6$ は定数）．ここで 66 は 2 オクターブ下のドの周波数で，ド，ミ，ソの周波数はそれぞれ 66 の 4 倍，5 倍，6 倍となっています（音階についての資料を参照）.
このような形の関数を**有限フーリエ級数**と言います.

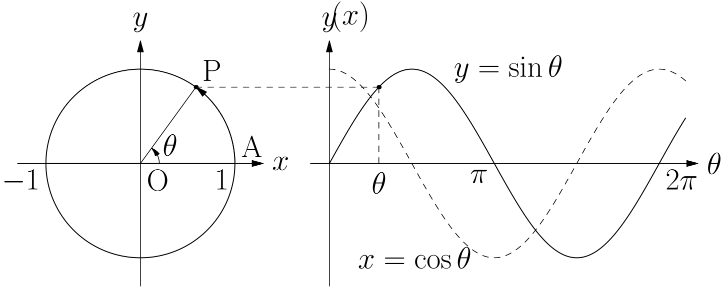
周期関数と三角関数

実際の波動現象ではふつう時刻 t を変数としますが，これからは通常の数学と同じく変数を x で表すことにします.（ただし具体的な音波などでは時刻 t を変数とします.）

一般に、関数 $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ が $T > 0$ を周期とする**周期関数**であるとは，$\underline{f(x+T) = f(x)}$ がすべての実数 x について成立することです。このような周期 $T > 0$ のうち最小のものを f の**基本周期**といいます．このとき基本周期の自然数倍が f の（基本周期とは限らない）周期になります.



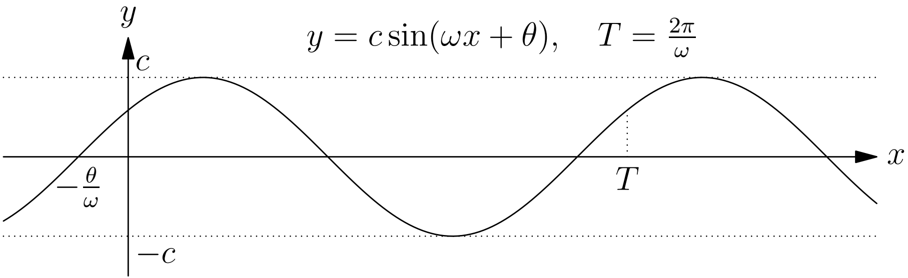
たとえば $\sin x$ と $\cos x$ は共に 2π を基本周期とする周期関数です。



一般に正弦波（単振動）は，c, ω, θ を定数として

$$f(x) = c\sin(\omega x + \theta)$$

と表されます．ここで c は振幅，ω は角周波数, θ は初期位相を表します．

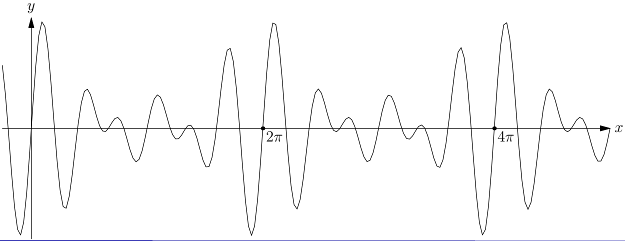


$f(x)$ は $\sin\omega x$ を $\dfrac{\theta}{\omega}$ だけ左に平行移動したものなので，$f(x)$ の基本周期は $\sin\omega x$ の基本周期 $\dfrac{2\pi}{\omega}$ と同じです．

例 $b_4 \neq 0$, $b_5 \neq 0$, $b_6 \neq 0$ のとき，$f(x) = b_4 \sin 4x + b_5 \sin 5x + b_6 \sin 6x$ の基本周期は 2π です．実際

$$\begin{aligned} f(x+2\pi) &= b_4 \sin 4(x+2\pi) + b_5 \sin 5(x+2\pi) + b_6 \sin 6(x+2\pi) \\ &= b_4 \sin(4x+8\pi) + b_5 \sin(5x+10\pi) + b_6 \sin(6x+12\pi) \\ &= b_4 \sin 4x + b_5 \sin 5x + b_6 \sin 6x = f(x) \end{aligned}$$

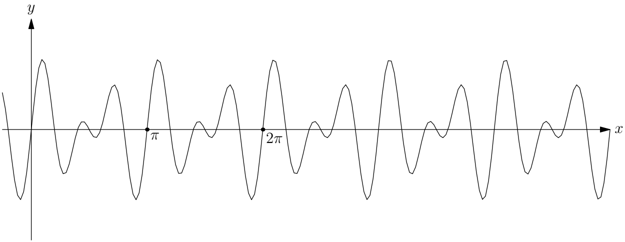
より 2π は $f(x)$ の周期（の一つ）ですが，$4, 5, 6$ の最大公約数が 1 であることから 2π が最小の周期すなわち基本周期であることがわかります．（後で一般的に考察します．）



一方，$b_5 = 0$, $b_4 \neq 0$, $b_6 \neq 0$ のときは $f(x) = b_4 \sin 4x + b_6 \sin 6x$ の基本周期は π です．実際

$$\begin{aligned} f(x+\pi) &= b_4 \sin 4(x+\pi) + b_6 \sin 6(x+\pi) \\ &= b_4 \sin(4x+4\pi) + b_6 \sin(6x+6\pi) \\ &= b_4 \sin 4x + b_6 \sin 6x = f(x) \end{aligned}$$

より π は $f(x)$ の周期であり（後で行う考察から）基本周期であることがわかります.



ドレミの和音

$$f(t) = a_4 \cos 4\omega t + b_4 \sin 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + b_5 \sin 5\omega t + a_6 \cos 6\omega t + b_6 \sin 6\omega t$$

ただし

$$\omega = 2\pi \cdot 66, \quad (a_4, b_4) \neq (0,0), \quad (a_5, b_5) \neq (0,0), \quad (a_6, b_6) \neq (0,0)$$

の基本周期は，$x = \omega t$ として前の例と同様に $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{1}{66}$，従って基本周波数（基本周期の逆数）は 66 (Hz) (2 オクターブ下のド）であることがわかります.

一方，ドとソを合わせた音の基本周波数は $2 \times 66 = 132$(Hz)（1 オクターブ下のド）となります.

同じ基本周期の正弦波の重ね合わせ

同じ基本周期の 2 つの正弦波を重ね合わせたものも同じ基本周期を持つ正弦波となります．実際，加法定理を用いて

$$
\begin{aligned}
&a_1 \sin(\omega x + \theta_1) + a_2 \sin(\omega x + \theta_2) \\
&= a_1(\sin\theta_1 \cos\omega x + \cos\theta_1 \sin\omega x) + a_2(\sin\theta_2 \cos\omega x + \cos\theta_2 \sin\omega x) \\
&= (a_1 \sin\theta_1 + a_2 \sin\theta_2)\cos\omega x + (a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2)\sin\omega x \\
&= \sqrt{(a_1\sin\theta_1 + a_2\sin\theta_2)^2 + (a_1\cos\theta_1 + a_2\cos\theta_2)^2}\ \sin(\omega x + \theta_3) \\
&= \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}\ \sin(\omega x + \theta_3) \qquad (\theta_3 \text{ は適当な実数})
\end{aligned}
$$

となり，これは角周波数 ω，振幅 $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_1 - \theta_2)}$ の単振動を表します．

この合成された単振動の振幅は，$\theta_1 - \theta_2 = 0$（もとの 2 つの単振動の位相が同じ）ときに最大で

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2} = a_1 + a_2$$

となり，$\theta_1 - \theta_2 = \pm\pi$（位相差が π）のときに最小で

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2\cos(\theta_1 - \theta_2)} = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2} = |a_1 - a_2|$$

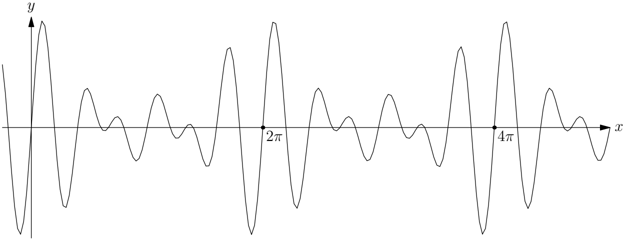
となることがわかります。つまり，2 つの単振動を合わせると，必ずしも振幅が大きくなるとは限りません．この原理は雑音の消去に用いられます。

基本周期の異なる正弦波の重ね合わせ

一方，基本周期の異なる正弦波の合成は一般には正弦波にはなりませんが，基本周期の比が整数であれば，周期関数になることがわかります．たとえば，例で見たように

$$f(x) = \sin 4x + \sin 5x + \sin 6x$$

は基本周期 2π の周期関数ですが，グラフは正弦波ではなく複雑です．



ここで三角関数について復習しておきましょう．加法公式

$$
\begin{aligned}
\sin(x+y) &= \sin x\cos y + \cos x\sin y,\\
\sin(x-y) &= \sin x\cos y - \cos x\sin y,\\
\cos(x+y) &= \cos x\cos y - \sin x\sin y,\\
\cos(x-y) &= \cos x\cos y + \sin x\sin y
\end{aligned}
$$

が基本的です．これを使うと，一般の正弦波（単振動） $a\sin(\omega x+c)$ は

$$
a\sin(\omega x+c) = a\cos c\ \sin\omega x + a\sin c\ \cos\omega x
$$

と，$\sin\omega x$ と $\cos\omega x$ の 1 次結合 (定数倍の和) で表されることがわかります．

加法公式から積を和に直す公式

$$
\begin{aligned}
\sin x \cos y &= \frac{1}{2}\{\sin(x+y)+\sin(x-y)\}, \\
\cos x \sin y &= \frac{1}{2}\{\sin(x+y)-\sin(x-y)\}, \\
\cos x \cos y &= \frac{1}{2}\{\cos(x+y)+\cos(x-y)\}, \\
\sin x \sin y &= -\frac{1}{2}\{\cos(x+y)-\cos(x-y)\}
\end{aligned}
$$

や

和を積に直す公式

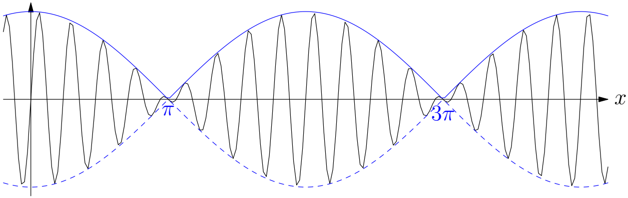
$$
\begin{aligned}
\sin x + \sin y &= 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\sin x - \sin y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2},\\
\cos x + \cos y &= 2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2},\\
\cos x - \cos y &= -2\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x-y}{2}
\end{aligned}
$$

が導かれます.

これを使うと，たとえば（ドとレの周波数の比）

$$f(x) = \sin 8x + \sin 9x = 2\cos\frac{1}{2}x\,\sin\frac{17}{2}x$$

のように周波数の比が 1 に近いような 2 つの正弦波を重ね合わせると，振動数の大きな正弦波と振動数の小さな正弦波の積となります．ここで $\cos\frac{1}{2}x$ は（$\sin\frac{17}{2}x$ と比較して）ゆっくり振動するので，短時間ではほとんど定数と考えることができます．そこで $f(x)$ は近似的に振幅が $2\left|\cos\frac{1}{2}x\right|$ で角周波数が $\frac{17}{2}$ の正弦波と考えることができます．そして振幅（青の曲線）が角周波数 1 (周期 2π）で周期的に変化することになります．これは「うなり現象」と呼ばれます．



一般に，角周波数 ω_1 と ω_2 の比が 1 に近いとき

$$\sin \omega_1 x + \sin \omega_2 x = 2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x \ \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} x$$

となり，$|\omega_1 - \omega_2|$ は $\omega_1 + \omega_2$ に比較して小さいので，角周波数 $\dfrac{\omega_1 + \omega_2}{2} \simeq \omega_1$ の振動の振幅 $2 \left| \cos \dfrac{\omega_1 - \omega_2}{2} x \right|$ が角周波数 $|\omega_1 - \omega_2|$ で変化すると考えることができます．これはたとえば弦楽器の調律に用いられます.（周波数の差を周波数とする「うなり」が発生する.）

なお，2 つの正弦波の振幅が異なるときは，たとえば

$$\sin \omega_1 t + 2 \sin \omega_2 t = 2 \cos \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} x \ \sin \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} x + \sin \omega_2 t$$

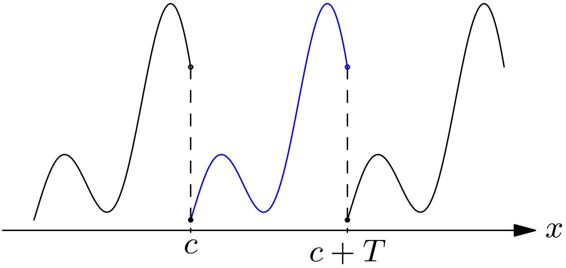
のようにうなりと元の音が合わさった音になります.

関数空間と有限フーリエ級数

$f(x)$ を実数全体 $\mathbb{R}$ で定義された周期 T の周期関数とすると，長さ T の区間 $[c, c+T)$ で $f(x)$ の値を考えれば十分です．逆に $[c, c+T)$ で定義された関数 f に対して，$\mathbb{R}$ 上の関数 $\tilde{f}$ を，任意の整数 n に対して

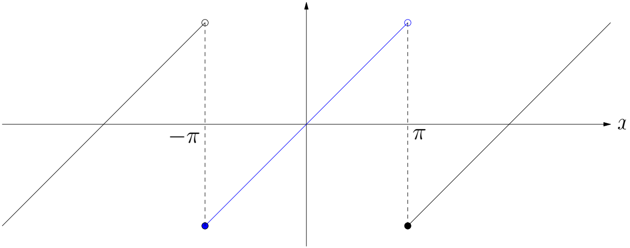
$$\tilde{f}(x+nT) = f(x) \qquad (c \leq x < c+T)$$

となるように定義できます．このとき $\tilde{f}$ は周期 T の周期関数になります．これを f の周期 T での拡張と言います．



例 1.1 区間 $[-\pi, \pi)$ において $f(x) = x$ で定義された関数 $f(x)$ の周期 2π での拡張 $\tilde{f}$ は，$\{(2n+1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で不連続な周期関数となる．$\tilde{f}$ を区間 $[0, 2\pi]$ で考えれば

$$f(x) = \begin{cases} x & (-\pi \leq x < \pi) \\ -\pi & (x = \pi) \end{cases}$$



そこで，周期 T の周期関数のかわりに，有界区間 $[c, c+T)$ または $[c, c+T]$ で定義された関数を考えることができます．

（抽象）ベクトル空間

線形代数学では主に数ベクトルからなるベクトル空間（線形空間）を考察しますが，ベクトル空間の概念は以下のように一般化されます．

定義（ベクトル空間）

K を実数の全体 $\mathbb{R}$ あるいは複素数の全体 $\mathbb{C}$ とする．集合 V が K 上の **ベクトル空間** であるとは，V の元 $\mathbf{v},\mathbf{w}$ および K の元（スカラー）a, b に対して，$a\mathbf{v} + b\mathbf{w}$ という V の元（**1 次結合**）が定まって次の性質を満たすことである．($\mathbf{v}, \mathbf{w}, \mathbf{v}_1$ などは V の元，a, b, c などは K の元（スカラー）とする.）

(1) $(\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2) + \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1 + (\mathbf{v}_2 + \mathbf{v}_3)$, $\quad \mathbf{v} + \mathbf{w} = \mathbf{w} + \mathbf{v}$

(2) 零（ゼロ）ベクトル $\mathbf{0} \in V$ が存在して $\mathbf{v} + \mathbf{0} = \mathbf{v}$

(3) $\mathbf{v}$ に対して $-\mathbf{v}$ が存在して $\mathbf{v} + (-\mathbf{v}) = \mathbf{0}$

(4) $(a + b)\mathbf{v} = a\mathbf{v} + b\mathbf{v}$, $\ a(\mathbf{v} + \mathbf{w}) = a\mathbf{v} + a\mathbf{w}$, $\ (ab)\mathbf{v} = a(b\mathbf{v})$, $\ 1\mathbf{v} = \mathbf{v}$

解析学ではしばしば関数をベクトルと考えます.

命題 1.1

有界閉区間 $[a, b]$ で連続な (実数値) 関数の全体を $C([a, b])$ または $C([a, b], \mathbb{R})$ で表すと，$C([a, b])$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる.

証明：$f, g \in C([a, b])$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して 1 次結合 $c_1 f + c_2 g$ を

$$(c_1 f + c_2 g)(x) = c_1 f(x) + c_2 g(x)$$

で定義すれば，これも $[a, b]$ 上の連続関数になる．零ベクトルは恒等的に 0 という値をとる関数である．この関数を単に 0 という記号で表す（スカラーの 0 とは文脈で区別する）．関数 f に対して $-f$ という関数を $(-f)(x) = -f(x)$ で定める，つまり x において $-f(x)$ という値をとる関数とすれば，$f + (-f) = 0$ が成立する．性質 (1),(4) は定義から明らかである.