情報解析学（2023 年度後期）

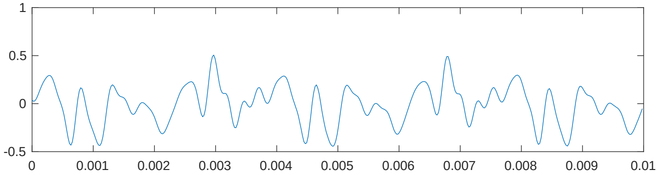
担当：大阿久 俊則

第 1 回（2023 年 9 月 20 日）

- 1 章 振動現象とフーリエ級数
- 1.1 三角関数と単振動
- 1.2 音階と和音

1 章 振動現象とフーリエ級数

私達の身近には振動現象がたくさんあります．たとえば地震が地面の振動だということは誰でもわかりますが，私達の生活で身近な音，光，電波なども実は振動現象です．たとえば下の図はクラリネットの音の波形の例です．横軸が時間 t（秒単位），縦軸は空気密度の変位（電気信号に変換）$f(t)$ を表します．

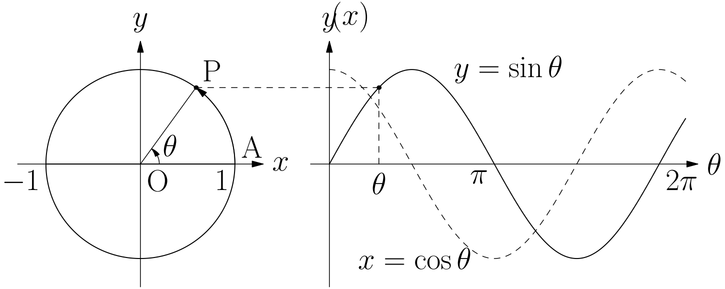


波形がほぼ $T = 0.0038$ 秒ごと (1 秒間に約 260 回）の繰り返しになっている，すなわち $f(t+T) = f(t)$ が成立することがわかります．

このように振動現象は一般には複雑ですが，それを単純な振動 (単振動) の組み合わせ (重ね合わせ) で表すことができます．単振動はサインとコサインで表されるので，数学的には一般の振動をサインとコサインを使って表現できることになります．このような数学的な手法を創始者の名前をとって**フーリエ (Fourier)** 解析といいます．

1.1 三角関数と単振動

座標平面で単位円周上の点 P を考えます．A(1, 0) として $\theta = \angle \mathrm{AOP}$ とおくと，P の y 座標が $\sin\theta$，P の x 座標が $\cos\theta$ です．角度 $\theta = \angle \mathrm{AOP}$ は弧 AP の長さで計ります（弧度法）．



さて，P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω (オメガ) で動いているとします．このとき $\theta = \omega t$ であり，時刻 t における P の座標は $(\cos\omega t, \sin\omega t)$ となります．

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする．

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする．

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする.

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω（オメガ）で動いているとする.

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする.

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする.

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする.

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする.

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω（オメガ）で動いているとする．

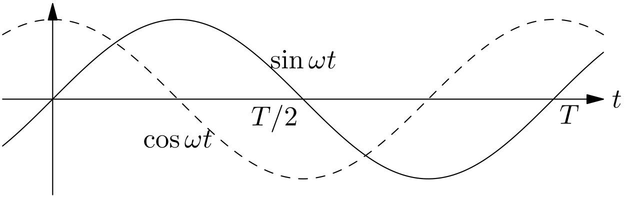
点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω（オメガ）で動いているとする．

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする．

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする．

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω （オメガ）で動いているとする.

これを横または上から見ると，P は -1 と 1 を結ぶ線分上を周期的に運動します．横軸を時刻 t，縦軸を P の y 座標とすると $y = \sin\omega t$ (下右の実線)，縦軸を P の x 座標とすると $x = \cos\omega t$ (破線) で表されます．



このサインとコサインの表す振動は，最も単純な振動であり，**単振動**と呼ばれます．たとえば，ばねにぶらさげた「おもり」を少し引っ張って離すと，おもりは単振動をします．音で言うと「音さ」の音が最も単振動に近いと言われています。

ω をこの単振動の**角周波数**または**角速度**と呼びます．$\omega t = 2\pi$ すなわち $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ となるとき，P は円周を 1 周するので，この単振動の**周期**は $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ となります．周期の逆数 $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ のことを**周波数**または**振動数**と呼びます．時間の単位を秒 (s) にとれば，周波数は 1 秒間の振動数 (回転数) を表します．このときの周波数の単位 (1/s) は **Hz(ヘルツ)** と呼ばれます．角周波数 ω は周波数 ν の 2π 倍 ($\omega = 2\pi\nu$) です．

角周波数が ω であるような任意の単振動は,

$$f(t) = c \sin(\omega t + \theta)$$

という式で表すことができます．ここで c は正の定数でこの単振動の**振幅**を表します．θ は実数の定数で**初期位相**と呼ばれ，波の平行移動を表します.

加法定理を用いると単振動は

$$f(t) = c\sin\theta\cos\omega t + c\cos\theta\sin\omega t = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

という形で表すこともできます．ここで a, b は

$$a = c\sin\theta, \quad b = c\cos\theta$$

で決まる定数です．逆に a, b を最初に与えれば,

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin\theta = \frac{a}{c}, \quad \cos\theta = \frac{b}{c}$$

で c と θ を決めることができます．従って $a\cos\omega t + b\sin\omega t$ で表される単振動の振幅は $\sqrt{a^2 + b^2}$ となります.

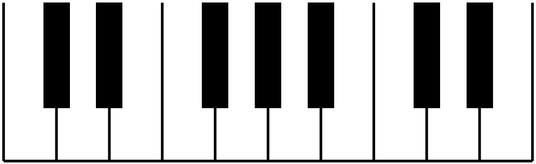
1.2 音階と和音

音の高さはその周波数で表されます．たとえば中央のラの音は 440Hz で，１オクターブ上のラの音は 880Hz，１オクターブ下のラの音は 220Hz です．このように１オクターブとは 1:2 の周波数の比を表しています．音階は１オクターブを更に細かく分割することで成り立っています．その決め方には分数を用いる**純正律**と，対数を用いる**平均律**という２通りの決め方があります．純正律ではハ長調の音階の周波数は次のように決められます．

音階	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
振動数 (Hz)	264	297	330	352	396	440	495	528
比 (ド = 1)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

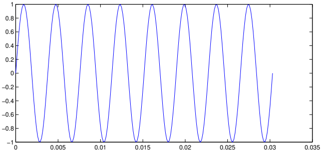
この音階の決め方を，もう少し詳しく見てみましょう．説明と図は清水脩著「標準音楽通論」という本からの抜粋です.（Classroom に置いてあります.）

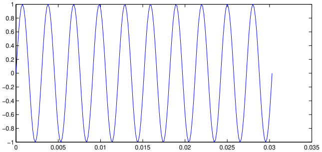
純正律では周波数の比が整数であるため，和音が正確に協和するという特徴があります．しかしこの方法では移調が困難なので現在では純正律ではなく平均律が採用されています．平均律では，1 オクターブの周波数の比 1 : 2 を 12 の半音に (対数で) 均等に割り振るので，半音違った音 (例えばミとファ) の振動数の比がすべて $2^{1/12} = 1.05946...$ となります．つまり音階の周波数の比 r の 2 を底する対数 $\log_2 r$ は $\dfrac{1}{12}$ の倍数になっています．ピアノの鍵盤 (白鍵と黒鍵を合わせて) は周波数の対数目盛りということになります．

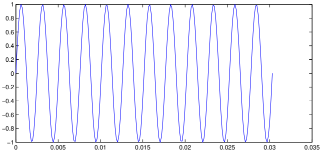


例えばドとソの周波数の比 (完全 5 度) は純正律ではちょうど $2:3=1:1.5$ ですが，平均律では $1:2^{7/12}=1:1.498307\ldots$ となります．これはバイオリンの隣同士の弦 (GDAE) の周波数の比に相当します．

次に和音について考えましょう．純正律ではドミソの音の周波数の比は 4:5:6 となります．



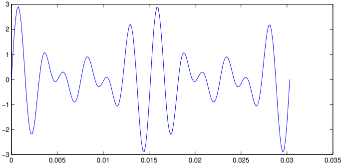




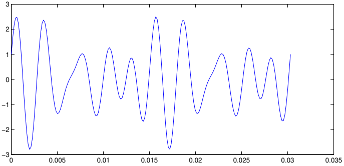
ドミソの和音を表す関数は，$\omega = 2\pi \cdot 66$ として

$$f(t) = a_4 \cos 4\omega t + b_4 \sin 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + b_5 \sin 5\omega t + a_6 \cos 6\omega t + b_6 \sin 6\omega t \tag{1}$$

という形で表すことができます．たとえば $a_4 = a_5 = a_6 = 0$, $b_4 = b_5 = b_6 = 1$ とすると $f(t)$ は左のグラフ，$b_4 = a_5 = a_6 = 0$, $a_4 = b_5 = b_6 = 1$ とすると右のグラフのようになります．



$\sin(2\pi \cdot 264t) + \sin(2\pi \cdot 330t) + \sin(2\pi \cdot 396t)$



$\cos(2\pi \cdot 264t) + \sin(2\pi \cdot 330t) + \sin(2\pi \cdot 396t)$

ところで皆さんは和音を聴いて，それがどんな音でできているか言い当てることができるでしょうか？それができる人は上の関数 $f(t)$ を耳で聴いて，それを (脳の中で)(1) の右辺の式に分解していることになります．これを数学的に行う道具がフーリエ解析です．