情報解析学（2023 年度後期）

担当：大阿久 俊則

第 6 回（10 月 25 日）

- 1.6 一般の周期関数のフーリエ展開
- 1.7 複素フーリエ級数

1.6 一般の周期関数のフーリエ展開

前節では周期 2π の周期関数を考えましたが，ここでは一般に周期 T の周期関数 $f(t)$ のフーリエ展開を考えましょう．$f(t)$ の角周波数を ω とすると，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ という関係が成り立ちます．$x = \omega t$ すなわち $t = \dfrac{x}{\omega} = \dfrac{Tx}{2\pi}$ として，

$$g(x) = f\left(\frac{x}{\omega}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$$

とおくと，

$$g(x+2\pi) = f\left(\frac{T(x+2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = g(x)$$

より $g(x)$ は周期 2π の周期関数になります．

従って

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos nx\,dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin nx\,dx \quad (n \geq 1)$$

とおくと

$$g(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とフーリエ展開されます．この両辺に $x = \omega t$ を代入すると

$$f(t) = g(\omega t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{1}$$

となります．この右辺を周期 T (角周波数 ω) の関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開といいます．

フーリエ係数 a_n, b_n は置換積分 $(x = \omega t)$ を用いて

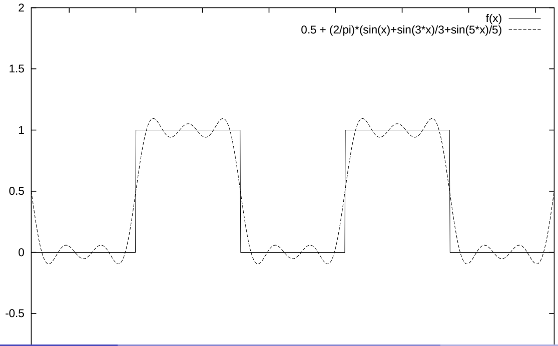
$$
\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\cos nx\,dx = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\cos n\omega t\,dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\cos n\omega t\,dt \quad (n \geq 0) \\
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g(x)\sin nx\,dx = \frac{\omega}{\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t)\sin n\omega t\,dt \\
&= \frac{2}{T}\int_0^{T} f(t)\sin n\omega t\,dt \quad (n \geq 1)
\end{aligned}
$$

と計算できます．このとき $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ は，(1) のフーリエ展開に含まれる基本角周波数が $n\omega$ であるような正弦波 $a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ の振幅を表しており，$f(t)$ のスペクトルと呼ばれます．これが音の特徴 (楽器ならば音色，言葉なら母音の違い) を表しています．

例 1.5 (一般の周期のパルス波) 周期 2π のパルス波 $f(x)$ のフーリエ展開は

$$
\begin{aligned}
f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin x + \frac{2}{3\pi}\sin 3x + \frac{2}{5\pi}\sin 5x + \cdots
\end{aligned}
$$

でした（例 1.2）．



周期 T のパルス波 $g(t)$ は，区間 $[0, T)$ では

$$g(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leqq t < \frac{T}{2}) \\ 0 & (\frac{T}{2} \leqq t < T) \end{cases}$$

で定義され，これを周期 T で $\mathbb{R}$ に拡張した関数です．このときの角周波数を $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$, $x = \omega t$ とおくと，$f(x) = f(\omega t) = g(t)$ と例 1.2 より，

$$\begin{aligned} g(t) = f(x) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x \\ &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)\omega t \\ &= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega t + \cdots \end{aligned}$$

別解として a_n, b_n を公式を用いて改めて計算すると，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ として

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\cos n\omega t\, dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t\, dt \qquad (n \geq 0)$$

よって $n = 0$ のときは

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} 1\, dx = \frac{2}{T}\cdot\frac{T}{2} = 1$$

$n \geq 1$ のときは，$\sin\left(n\omega\cdot\dfrac{T}{2}\right) = \sin\left(n\dfrac{2\pi}{T}\cdot\dfrac{T}{2}\right) = \sin n\pi = 0$ より

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \cos n\omega t\, dt = \frac{2}{T}\left[\frac{1}{n\omega}\sin n\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}} = 0$$

同様に $n \geq 1$ のとき

$$
\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_0^T g(t)\sin n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\int_0^{\frac{T}{2}} \sin n\omega t\,dt = \frac{2}{T}\left[-\frac{1}{n\omega}\cos n\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}} \\
&= \frac{1}{n\pi}(\cos 0 - \cos n\pi) = \frac{1}{n\pi}\{1-(-1)^n\} \\
&= \begin{cases} \dfrac{2}{n\pi} & (n\text{ が奇数のとき}) \\[2ex] 0 & (n\text{ が偶数のとき}) \end{cases}
\end{aligned}
$$

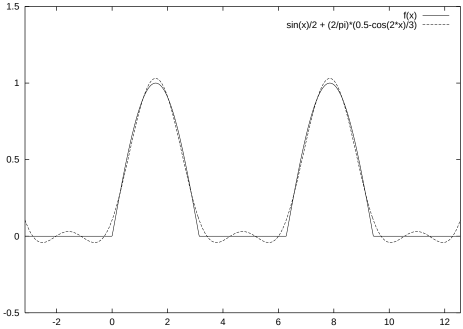
以上により

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi}\sin(2k-1)\omega t \\
&= \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi}\sin\omega t + \frac{2}{3\pi}\sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi}\sin 5\omega t + \cdots
\end{aligned}
$$

例 1.6 (一般の周期の整流正弦波) 周期 2π の整流正弦波 f のフーリエ展開は

$$f(x) = \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2kx$$
$$= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin x - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2x + \frac{1}{15}\cos 4x + \frac{1}{35}\cos 6x + \cdots\right)$$

でした（例 1.3）.



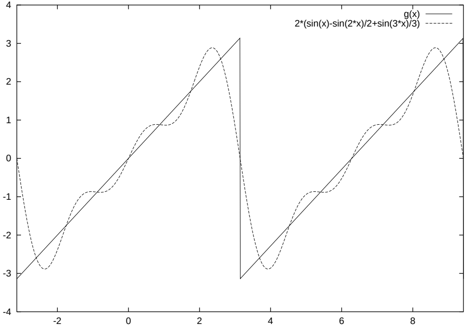
角周波数 ω の整流正弦波 $f(t) = \max\{\sin\omega t, 0\}$ のフーリエ展開は,

$$
\begin{aligned}
f(t) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\omega t - \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\cos 2k\omega t \\
&= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2}\sin\omega t - \frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{3}\cos 2\omega t + \frac{1}{15}\cos 4\omega t + \frac{1}{35}\cos 6\omega t + \cdots\right)
\end{aligned}
$$

例 1.7 (一般の周期ののこぎり波) 周期 2π ののこぎり波は
$f(x) = x \quad (-\pi < x \leqq \pi)$ を周期 2π の周期関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数でした．フーリエ展開は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = 2\left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots\right)$$

でした（例 1.4）．



周期 T ののこぎり波は，$g(t) = t \quad (-\dfrac{T}{2} < t \leq \dfrac{T}{2})$ を周期 T の周期関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数です．この関数を同じ記号 $g(t)$ で表します．$g(t)$ のフーリエ係数を公式を用いて計算しましょう．

まず $g(t)$ は奇関数なので $a_n = 0 \ (n \geq 0)$.

$t \sin n\omega t$ が偶関数であることと部分積分を用いて ($\omega T = 2\pi$ に注意)

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{2}{T}\int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} t \sin n\omega t \, dt = \frac{4}{T}\int_{0}^{\frac{T}{2}} t \sin n\omega t \, dt \\
&= \frac{4}{T}\left(-\left[\frac{t\cos n\omega t}{n\omega}\right]_0^{\frac{T}{2}} + \int_0^{\frac{T}{2}} \frac{\cos n\omega t}{n\omega}\, dt\right) \\
&= \frac{4}{T}\left\{-\frac{T\cos n\pi}{2n\omega} + \left[\frac{1}{n^2\omega^2}\sin n\omega t\right]_0^{\frac{T}{2}}\right\} \\
&= \frac{2(-1)^{n-1}}{n\omega} = \frac{(-1)^{n-1}T}{n\pi}
\end{aligned}$$

よって g のフーリエ展開は，$\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ として

$$
\begin{aligned}
g(t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} T}{n\pi} \sin n\omega t \\
&= \frac{T}{\pi} \sin \omega t - \frac{T}{2\pi} \sin 2\omega t + \frac{T}{3\pi} \sin 3\omega t - \frac{T}{4\pi} \sin 4\omega t + \frac{T}{5\pi} \sin 5\omega t - \cdots
\end{aligned}
$$

1.7 複素フーリエ級数

まず今後重要となるオイラーの等式について復習（？）します.

オイラー (Euler) の等式

x, y を実数，i を虚数単位とするとき

$$e^{x+iy} = e^x(\cos y + i \sin y)$$

が成立する．特に $x = 0$ とすると $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ が成立する.

これは e^x, $\cos x$, $\sin x$ のテイラー展開を比較することにより導くことが可能ですが，ここでは複素数 $x + iy$ の指数関数 e^{x+iy} の定義式であると考えます.

重要なのは，このように複素数の指数関数を定義したとき，実数の指数関数と同じく指数法則や微分の公式が成立することです.

複素数の指数関数の性質

(1) x を実数とするとき

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \qquad \sin x = -\frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$$

(2) 複素数 z_1, z_2 に対して

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} e^{z_2}$$

(3) 複素数 z に対して

$$e^z = 1 \quad \Leftrightarrow \quad z = 2n\pi i \quad (n \in \mathbb{Z})$$

(4) x, y を実数として複素数 $z = x + iy$ の実部を $\mathrm{Re}\, z = x$ とすると $|e^z| = e^{\mathrm{Re}\, z}$

(5) α を複素数の定数, x を実数の変数とするとき

$$\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$$

証明：(1)

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \qquad e^{-ix} = \cos(-x) + i \sin(-x) = \cos x - i \sin x$$

より

$$e^{ix} + e^{-ix} = 2\cos x, \qquad e^{ix} - e^{-ix} = 2i \sin x$$

従って

$$\cos x = \frac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix}), \quad \sin x = \frac{1}{2i}(e^{ix} - e^{-ix}) = -\frac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$$

(2) x_k, y_k を実数として $z_k = x_k + iy_k$ $(k = 1, 2)$ とおくと指数法則と三角関数に対する加法定理により

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2}\{\cos(y_1+y_2) + i\sin(y_1+y_2)\} \\ &= e^{x_1}e^{x_2}\{\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)\} \\ &= e^{x_1}e^{x_2}(\cos y_1 + i\sin y_1)(\cos y_2 + i\sin y_2) = e^{z_1}e^{z_2} \end{aligned}$$

(3) $z = x + iy$ とおくと

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad e^x \cos y = 1,\ e^x \sin y = 0$$

であるが $e^x \neq 0$ だから $\sin y = 0$ よって $y = k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ と書ける．このとき $e^x \cos y = e^x \cos k\pi = e^x(-1)^k = 1$ と $e^x > 0$ より k は偶数 $2n$ $(n \in \mathbb{Z})$ でなければならない．すると $e^x = 1$ より $x = 0$．よって $z = 0 + ik\pi = 2n\pi i$.

逆に $e^{2n\pi i} = \cos 2n\pi + i \sin 2n\pi = 1$ だから示された．

(4) $e^z = e^x \cos y + ie^x \sin y$ より

$$|e^z|^2 = (e^x \cos y)^2 + (e^x \sin y)^2 = e^{2x}(\cos^2 y + \sin^2 y) = e^{2x} = (e^x)^2$$

と $|e^z| \geq 0$ より $|e^z| = e^x = e^{\mathrm{Re}\ z}$.

(5) a, b を実数として $\alpha = a + ib$ とおくと

$$e^{\alpha x} = e^{ax+ibx} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = e^{ax} \cos bx + ie^{ax} \sin bx$$

より

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dx}e^{\alpha x} &= \frac{d}{dx}(e^{ax} \cos bx) + i\frac{d}{dx}(e^{ax} \sin bx) \\
&= ae^{ax} \cos bx - be^{ax} \sin bx + i(ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx) \\
&= (a + bi)e^{ax} \cos bx + (-b + ia)e^{ax} \sin bx \\
&= (a + bi)e^{ax} \cos bx + i(a + bi)e^{ax} \sin bx \\
&= (a + bi)e^{ax}(\cos bx + i \sin bx) = \alpha e^{\alpha x}
\end{aligned}$$

複素フーリエ級数

角周波数 ω の関数 $f(t)$ のフーリエ展開

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \tag{1}$$

において,

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}), \qquad \sin n\omega t = -\frac{i}{2}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})$$

を代入すると

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega t}.$$

そこで整数 n に対して複素数 c_n を

$$\begin{aligned} &n > 0 \text{ のとき} \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ &n = 0 \text{ のとき} \qquad c_0 = \frac{a_0}{2} \\ &n < 0 \text{ のとき} \qquad c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \end{aligned}$$

で定義すれば

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \tag{2}$$

という展開が得られます．これを $f(t)$ の**複素フーリエ (級数) 展開**といいます．**複素フーリエ係数** c_n はすべての整数 n について

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t}\, dt \tag{3}$$

で計算できることがわかります．

実際 $n > 0$ のときは

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\cos n\omega t - i\sin n\omega t\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$$

$n = 0$ のときは

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\,dt$$

$n < 0$ のときは $n = -m$ とすれば,

$$c_n = c_{-m} = \frac{1}{2}(a_m + ib_m) = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\left(\cos m\omega t + i\sin m\omega t\right)\,dt$$
$$= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{im\omega t}\,dt = \frac{1}{T}\int_0^T f(t)e^{-in\omega t}\,dt$$

となり，いずれの場合にも (3) が成立することがわかりました.

複素フーリエ級数の一般項 $c_n e^{in\omega t}$ は，t が時間を表す変数とすれば，複素平面における原点を中心とする半径 $|c_n|$ の円周上を角速度 $n\omega$ (n が負のときは負の向きに）で回転します．このような回転運動の重ね合わせが複素フーリエ級数です．

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + ib_n) = \frac{1}{2}\overline{(a_n - ib_n)} = \overline{c_n} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

より

$$|c_n| + |c_{-n}| = 2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \qquad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成立します．従って，定数 2 を無視すれば，数列 $|c_n|$ $(n = 0, 1, 2, 3, \dots)$ が $f(t)$ のスペクトルを表します．また，このとき複素フーリエ級数は，$c_n e^{in\omega t}$ の共役複素数が $c_{-n} e^{-in\omega t}$ であることに注意すると，

$$f(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(c_n e^{in\omega t} + c_{-n} e^{-in\omega t}) = c_0 + 2\mathrm{Re}\left\{\sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t}\right\}$$

と $n \geq 0$ の項だけで表すこともできます．

有限フーリエ級数 $f_N(t)$ は

$$
\begin{aligned}
f_N(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n e^{in\omega t} \\
&= c_0 + 2\mathrm{Re}\left\{ \sum_{n=1}^{N} c_n e^{in\omega t} \right\}
\end{aligned}
$$

と表されます.

例 1.8（$\cos^3 x$ と $\sin^3 x$ の複素フーリエ展開）

$\cos^3 x$ と $\sin^3 x$ の有限フーリエ級数展開（スライド 3 の p. 9) を用いると

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{4}\cos 3x = \frac{3}{8}(e^{ix}+e^{-ix}) + \frac{1}{8}(e^{3ix}+e^{-3ix}) \\
&= \frac{3}{8}e^{ix} + \frac{1}{8}e^{3ix} + \frac{3}{8}e^{-ix} + \frac{1}{8}e^{-3ix} = 2\mathrm{Re}\left(\frac{3}{8}e^{ix} + \frac{1}{8}e^{3ix}\right), \\
\sin^3 x &= \frac{3}{4}\sin x - \frac{1}{4}\sin 3x = -\frac{3i}{8}(e^{ix}-e^{-ix}) + \frac{i}{8}(e^{3ix}-e^{-3ix}) \\
&= -\frac{3}{8}ie^{ix} + \frac{1}{8}ie^{3ix} + \frac{3}{8}ie^{-ix} - \frac{1}{8}ie^{-3ix} = 2\mathrm{Re}\left(-\frac{3}{8}ie^{ix} + \frac{1}{8}ie^{3ix}\right).
\end{aligned}$$

別解として，$\cos x = \dfrac{1}{2}(e^{ix} + e^{-ix})$ と $\sin^3 x = -\dfrac{i}{2}(e^{ix} - e^{-ix})$ を用いて直接計算すると

$$\begin{aligned}
\cos^3 x &= \frac{1}{8}(e^{ix} + e^{-ix})^3 \\
&= \frac{1}{8}(e^{3ix} + 3e^{ix} + 3e^{-ix} + e^{-3ix}) \\
\sin^3 x &= \frac{i}{8}(e^{ix} - e^{-ix})^3 \\
&= \frac{i}{8}(e^{3ix} - 3e^{ix} + 3e^{-ix} - e^{-3ix})
\end{aligned}$$