

数理モデルと微分方程式

大阿久 俊則

はじめに：数理モデルと微分方程式の例

微分方程式とは、未知の関数とその導関数の間に成り立つ関係式のことである。その関係式を満たすような未知の関数を求めることを、微分方程式を解くという。特に1変数の未知関数とその導関数の間に成り立つ関係式のことを常微分方程式という。この授業では常微分方程式を扱うので、常微分方程式のことを単に微分方程式と呼ぶことにする。

一般に自然現象の背後にある法則は微分方程式で表されることが多い。I. Newton は1670年頃に物体の運動を統制する法則を見出した。これは Newton 力学と呼ばれ、次の2つの原理にまとめられる。

- (1) 運動している物体の質量（スカラー）と加速度（ベクトル）との積は、その物体に働いている力（ベクトル）に等しい (Newton の運動方程式)。
- (2) 2つの天体の間に働く重力は、その2つの天体の質量の積に比例し、2つの天体間の距離の2乗に反比例する（万有引力の法則）。

Newton はこの2つの原理（法則）から、天体の運動を表す微分方程式を導き、太陽のまわりを回る惑星の場合にこの微分方程式を解いて、惑星の軌道は楕円（円を含む）、放物線、双曲線のいずれかであることを示した。これによって、J. Kepler が T. Brahe による火星の観測データを整理して1620年頃に発見した法則 (Kepler の3法則) が数学的に証明された。正確に言えば、2つの法則のうち(2)については当時は実験で確かめることは不可能だったから、Newton は(2)を仮定すれば Kepler の法則が導けることを発見したということになる。そのためには、りんごが木から落ちるのを見るだけではなく、実際に微分方程式を解くという作業が必要であった。このように、実際に正しいかどうかかわからないが、「作業仮説」（計算を進めるためにとりあえず仮定する条件）として数学的に定式化した法則のことを、一般に数理モデルという。Newton は人類史上初めて本格的な数理モデルを考え、実際にそれを解き、その解が実際の現象と良く一致することを確かめたわけである。しかも Newton はそのために微分積分法を創始していた。

実際に惑星の運動を表す微分方程式を導いてみよう。簡単のため xy 平面で考え、原点に太陽があるとす。太陽と惑星の質量をそれぞれ M, m とし、惑星の時刻 t における位置を $(x, y) = (x(t), y(t))$ とすると、太陽と惑星の距離 r は $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ であ

る。よって (2) から太陽から惑星に作用する引力は、原点に向かう大きさ $GMmr^{-2}$ のベクトルである。ここで G は万有引力定数と呼ばれる正の定数である。点 (x, y) の極座標を (r, θ) とし、引力ベクトル \vec{F} を成分表示すると、

$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}(\cos \theta, \sin \theta) = -\frac{GMm}{r^3}(r \cos \theta, r \sin \theta) = -\frac{GMm}{r^3}(x, y) = -\frac{GMm}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}(x, y)$$

となる。よって Newton の運動方程式 (1) は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{GMmx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{GMmy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

と表すことができる。ここで G は万有引力定数と呼ばれる正の定数である。これは 2 つの未知関数 $x = x(t)$ と $y = y(t)$ についての 2 階の連立微分方程式である。

次に、力学とは全く異なる数理モデルの例として、次のような 2 つの生物の間の生存競争モデルを考えよう。ある海域に生息するサメの数を時間 t の関数として $y(t)$ とし、サメに捕食される小魚の数を $x(t)$ とする。サメは小魚を餌としていて、小魚はプランクトンを餌としている。プランクトンは常に豊富に存在すると仮定する。すると、小魚は餌が豊富に存在するので、サメがいなければ増加する。一方、サメは小魚に依存しているため、小魚がいなくなると数が減る。このとき、 $x(t)$ と $y(t)$ の間には次のような関係が成り立つことが期待される。

$$x'(t) = (a - by(t))x(t), \quad y'(t) = (cx(t) - d)y(t)$$

ここで a, b, c, d は正の定数である。この微分方程式（数理モデル）は以下のように意味づけられる。まず小魚の増加率 $\frac{x'(t)}{x(t)}$ は $a - by(t)$ である。サメがいなければ、すなわち $y(t) = 0$ ならば、小魚は指数関数的に増加する。しかしサメがいると、サメの数に比例して捕食されるので、増加率が $a - cy(t)$ となる。一方、サメは餌になる小魚がいなくなると生きていけないのでサメの増加率は負の値 $-d$ となり、指数関数的に減少する。小魚がいると、サメの増加率は小魚の量に比例して増えて $-d + cx(t)$ となる。この微分方程式は捕食者と被食者の間に成り立つ最も単純な数理モデルである。これは物理法則のようにある原理から導かれたものではないが、この微分方程式の解が求まれば、それを実際の現象と比較することによりこの数理モデルの妥当性を検証することができる。

この授業では、以上のような数理モデルを表す微分方程式の解を求めたり、あるいは解が求められない場合でも、解が存在するかどうか、存在すればどんな性質を満たすか、などを考察することが目標である。しかし、上記の 2 つの例は難しいので、前半では線形連立系とよばれる微分方程式を線形代数を用いて考察する。後半ではそれをもとにして、もう少し一般的な微分方程式の解の存在と一意性について考察し、その後上記の例を含めていくつかの具体的な数理モデルを詳しく扱う。「解析学の応用」で学習した事項、特に変数分離形の微分方程式の解法、定数変化法、定数係数 2 階線形微分方程式の解法などを必要に応じて（復習もしながら）用いる。

1 定数係数連立線形微分方程式

1.1 2個の未知関数についての連立微分方程式

ここでは2つの未知関数 $x_1(t)$ と $x_2(t)$ についての微分方程式を考察する. $x_1(t)$ と $x_2(t)$ についての1階連立微分方程式は, 一般に $f_1(x_1, x_2)$ と $f_2(x_1, x_2)$ を与えられた2変数関数として,

$$x_1'(t) = f_1(x_1(t), x_2(t)), \quad x_2'(t) = f_2(x_1(t), x_2(t))$$

と表すことができる. 以下では f_1 と f_2 が1次式 $f_1(x_1, x_2) = a_{11}x_1 + a_{12}x_2$, $f_2(x_1, x_2) = a_{21}x_1 + a_{22}x_2$ の場合, すなわち

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t), \quad \frac{d}{dt}x_2(t) = a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t)$$

という形の微分方程式を扱う. ここで a_{ij} は実数の定数である. 行列とベクトルを用いると,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad (1)$$

と表せる. これを解くことが以下の目標である.

まず A が対角行列, すなわち $a_{12} = a_{21} = 0$ の場合を考察しよう. このときは, (1) は2つの互いに独立な微分方程式

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = a_{11}x_1(t), \quad \frac{d}{dt}x_2(t) = a_{22}x_2(t)$$

となる. これらは変数分離形の微分方程式だから簡単に解けて, C_1, C_2 を任意定数として

$$x_1(t) = C_1e^{a_{11}t}, \quad x_2(t) = C_2e^{a_{22}t}$$

となることがわかる.

一般の連立微分方程式 (1) を解くために, P を2次正則行列として,

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) \quad \text{すなわち} \quad \mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$$

によって新しい未知関数 $y_1(t), y_2(t)$ を成分とする縦ベクトル $\mathbf{y}(t)$ を定める. このとき,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \frac{d}{dt}(P\mathbf{y}(t)) = P\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t), \quad A\mathbf{x}(t) = AP\mathbf{y}(t)$$

となるので, $\mathbf{x}(t)$ が微分方程式 (1) を満たすことと, $\mathbf{y}(t)$ が微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = (P^{-1}AP)\mathbf{y}(t) \quad (2)$$

を満たすことは同値である. そこで, $P^{-1}AP$ になるべく簡単な行列 (たとえば対角行列) となるように P を選ぶことを考える.

- A が対角化可能の場合

行列 A が対角化可能，すなわち実数を成分とする正則行列 P があって

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

となる場合を考察しよう。このとき， λ_1 と λ_2 は A の固有値である。また P の成分は実数と仮定しているので， λ_1, λ_2 は実数である。 $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ により未知関数のベクトルを $\mathbf{x}(t)$ から $\mathbf{y}(t)$ に変換すると， $\mathbf{y}(t) = {}^t(y_1(t), y_2(t))$ は

$$\frac{d}{dt}y_j(t) = \lambda_j y_j(t) \quad (j = 1, 2)$$

を満たすことがわかる。よって上の A が対角行列のときの議論から，ある定数 C_1, C_2 があって，

$$y_j(t) = C_j e^{\lambda_j t} \quad (j = 1, 2)$$

と表される。従って，(1) の解 $\mathbf{x}(t)$ は正則行列 P の第 (i, j) 成分を p_{ij} とおけば，

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_{11}C_1 e^{\lambda_1 t} + p_{12}C_2 e^{\lambda_2 t} \\ p_{21}C_1 e^{\lambda_1 t} + p_{22}C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t) \end{aligned} \quad (3)$$

と表される。ここで

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} \quad (4)$$

とおいた。 $\mathbf{x}_1(t)$ と $\mathbf{x}_2(t)$ はそれぞれ (3) で $C_1 = 1, C_2 = 0$ ，および $C_1 = 0, C_2 = 1$ としたときの $\mathbf{x}(t)$ だから， $\mathbf{x}_1(t)$ と $\mathbf{x}_2(t)$ は共に連立微分方程式 (1) の解である。

さらに， $\mathbf{x}_1(t)$ と $\mathbf{x}_2(t)$ は任意の $t \in \mathbb{R}$ を固定したとき，1次独立なベクトルとなる。実際，

$$C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t) = C_1 e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + C_2 e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

と仮定すると， P が正則行列であることから，その2つの列ベクトル ${}^t(p_{11}, p_{21})$ と ${}^t(p_{12}, p_{22})$ は1次独立であるから， $C_1 = C_2 = 0$ となる。以上により，連立微分方程式 (1) の解の全体は2次元のベクトル空間をなし， $\mathbf{x}_1(t)$ と $\mathbf{x}_2(t)$ はその基底になっていることがわかった。 $\mathbf{x}_1(t)$ と $\mathbf{x}_2(t)$ のように (1) の1次独立な2つの解のことを (1) の解の基本系という。解の基本系は解全体のなすベクトル空間の基底になっている。

$$A \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix}, \quad A \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = \lambda_2 \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

であるから，解の基本系 (4) は，行列 A の固有値と固有ベクトルから求められる。

以上では、最初に A が対角化可能と仮定したが、逆に λ_1 と λ_2 を A の2つの固有値として、 λ_1 も λ_2 も実数であると仮定する。 $\mathbf{p}_1 = {}^t(p_{11}, p_{21})$ を固有値 λ_1 に対する固有ベクトル、 $\mathbf{p}_2 = {}^t(p_{12}, p_{22})$ を固有値 λ_2 に対する固有ベクトルとする。このとき、もし \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 が1次独立であれば、これらを並べてできる 2×2 行列 $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{pmatrix}$ は正則行列であり、

$$AP = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$$

が成立するから、 A は（実数の範囲で）対角化可能である。次の補題により $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ならば \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は1次独立である。

補題 1.1 A を実数を成分とする 2×2 行列、 λ_1, λ_2 をその固有値とする。 λ_1, λ_2 を相異なる実数と仮定して、 λ_1 に対する固有ベクトルを \mathbf{p}_1 、 λ_2 に対する固有ベクトルを \mathbf{p}_2 とすると、 \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は1次独立である。

証明: \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 が1次独立でない、すなわち1次従属であるとする、 $C_1\mathbf{p}_1 + C_2\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ をみたます定数 C_1 と C_2 であって $(C_1, C_2) \neq (0, 0)$ をみたますものが存在する。仮定により $A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1$ 、 $A\mathbf{p}_2 = \lambda_2\mathbf{p}_2$ だから、

$$\mathbf{0} = A(C_1\mathbf{p}_1 + C_2\mathbf{p}_2) = C_1A\mathbf{p}_1 + C_2A\mathbf{p}_2 = C_1\lambda_1\mathbf{p}_1 + C_2\lambda_2\mathbf{p}_2$$

この式から $\mathbf{0} = \lambda_1(C_1\mathbf{p}_1 + C_2\mathbf{p}_2)$ を辺々引いて

$$C_2(\lambda_2 - \lambda_1)\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

を得るが、 $\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$ 、 $\lambda_2 - \lambda_1 \neq 0$ だから $C_2 = 0$ でなければならない。同様に $\mathbf{0} = \lambda_2(C_1\mathbf{p}_1 + C_2\mathbf{p}_2)$ を辺々引いて $C_1 = 0$ を得る。よって \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は1次独立であることが示された。□

次に、 t_0 を与えられた実数、 $\mathbf{b} = {}^t(b_1, b_2)$ を与えられたベクトルとして、微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{b} \tag{5}$$

を満たすベクトル関数 $\mathbf{x}(t)$ がただ1つ定まることを示そう。 C_1, C_2 を任意定数として

$$\mathbf{x}(t) = C_1e^{\lambda_1 t} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + C_2e^{\lambda_2 t} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと、初期条件から

$$\mathbf{b} = \mathbf{x}(t_0) = C_1e^{\lambda_1 t_0} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + C_2e^{\lambda_2 t_0} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} C_1e^{\lambda_1 t_0} \\ C_2e^{\lambda_2 t_0} \end{pmatrix}$$

であるから、 $C'_1 := C_1e^{\lambda_1 t_0}$ と $C'_2 := C_2e^{\lambda_2 t_0}$ は

$$P \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = \mathbf{b} \quad \text{すなわち} \quad \begin{pmatrix} C'_1 \\ C'_2 \end{pmatrix} = P^{-1}\mathbf{b}$$

により一意的に定まる．（ P^{-1} を求めずに連立 1 次方程式を解いてもよい．）このとき、初期値問題 (5) の解は

$$\mathbf{x}(t) = C_1' e^{\lambda_1(t-t_0)} \begin{pmatrix} p_{11} \\ p_{21} \end{pmatrix} + C_2' e^{\lambda_2(t-t_0)} \begin{pmatrix} p_{12} \\ p_{22} \end{pmatrix}$$

で与えられる．

例 1.1 微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dx} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めよう．この行列を A とおいて A の固有値と固有ベクトルを求める．固有値 λ は、特性多項式（固有多項式）

$$\det(\lambda I_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 6 & 3 \\ -2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 6)(\lambda - 1) + 6 = \lambda^2 - 7\lambda + 12 = (\lambda - 3)(\lambda - 4)$$

より 3 と 4 である．固有値 3 に対する固有ベクトルを ${}^t(v_1, v_2)$ とすると、

$$(3I_2 - A) \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad 3I - A = \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より $v_1 = v_2$ ．よってたとえば $v_1 = v_2 = 1$ とすれば ${}^t(1, 1)$ は固有値 3 に対する A の固有ベクトルである．固有値 4 に対する固有ベクトルとして

$$4I_2 - A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ -2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

より、たとえば ${}^t(3, 2)$ をとれる．以上により微分方程式 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ の一般解は、 C_1, C_2 を任意定数として

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{3t} + 3C_2 e^{4t} \\ C_1 e^{3t} + 2C_2 e^{4t} \end{pmatrix}$$

と表される．初期条件から

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

これを解いて $C_1 = -2, C_2 = 1$ ．よって求める解は

$$\mathbf{x}(t) = -2e^{3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{4t} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2e^{3t} + 3e^{4t} \\ -2e^{3t} + 2e^{4t} \end{pmatrix}$$

問題 1.1 次の微分方程式の一般解と、与えられた初期条件を満たす解をそれぞれ求めよ.

$$(1) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

• 2つの固有値が同一の場合

a, b, c, d を実数として, $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, $\mathbf{x}(t) = {}^t(x_1(t), x_2(t))$ とおき, 連立微分方程式

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) \tag{6}$$

を考察する. A の固有方程式は

$$\begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a)(\lambda - d) - bc = \lambda^2 - (a + d)\lambda + ad - bc = 0 \tag{7}$$

である.

補題 1.2 (Cayley-Hamilton の定理) $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ に対して

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O$$

が成立する. ただし I_2 は 2 次単位行列, O は 2×2 の零行列である. なお, $\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc)$ は A の固有多項式であり, 上の式は, 固有多項式の変数 λ に行列 A を代入すると零行列になることを意味している.

証明: $A^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$ を用いて成分を計算すればよい. □

以下では (7) が重根を持つと仮定する. このとき, (7) の重根は実数であるから, A はただ一つの固有値 $\alpha \in \mathbb{R}$ を持つ. この α に対する 2 つの 1 次独立な固有ベクトル \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 が存在すれば, A は \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 を並べてできる正則行列 P により対角化できるので既に述べたように一般解が求まる.

そこで, α に対する固有ベクトルで 1 次独立なものが一つしか存在しない場合を考察しよう. Cayley-Hamilton の定理により,

$$A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = O$$

が成立する．ここで α が (7) の重根であることから，固有多項式に対する根と係数の関係を用いると $a + d = 2\alpha$, $ad - bc = \alpha^2$ が成立するから，

$$(A - \alpha I_2)^2 = A^2 - 2\alpha A + \alpha^2 I_2 = O$$

を得る．仮定により A は対角行列ではないから $A \neq \alpha I_2$ である．よって $A - \alpha I_2$ は零行列ではないから， $(A - \alpha I_2)\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$ をみたす $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ が存在する． $\mathbf{p}_1 = (A - \alpha I_2)\mathbf{p}_2$ とおくと，

$$(A - \alpha I_2)\mathbf{p}_1 = (A - \alpha I_2)^2\mathbf{p}_2 = O\mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$$

となる．すなわち \mathbf{p}_1 は A の固有ベクトルである．

\mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は 1 次独立であることを示そう．1 次従属と仮定すると，ある実数 c が存在して $\mathbf{p}_1 = c\mathbf{p}_2$ と表せる． $\mathbf{p}_1 \neq \mathbf{0}$ だから $c \neq 0$ である．一方， \mathbf{p}_2 の選び方から

$$(A - \alpha I_2)\mathbf{p}_1 = c(A - \alpha I_2)\mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$$

であったから，これは $(A - \alpha I_2)\mathbf{p}_1 = \mathbf{0}$ に矛盾する．以上により， \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は 1 次独立であることがわかった．よって \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 を並べてできる 2 次正方行列を P とおくと P は正則行列であり， $A\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_1 + \alpha\mathbf{p}_2$ に注意すると

$$AP = \begin{pmatrix} A\mathbf{p}_1 & A\mathbf{p}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{p}_1 & \alpha\mathbf{p}_2 + \mathbf{p}_1 \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{すなわち} \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

が成立することがわかる．この右辺の上三角行列は A の Jordan(ジョルダン) 標準形と呼ばれる．

ここで $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ によって新しい未知関数の縦ベクトル $\mathbf{y}(t) = {}^t(y_1(t), y_2(t))$ を定めれば， $\mathbf{y}(t)$ は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = (P^{-1}AP)\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}\mathbf{y}(t) \tag{8}$$

すなわち，

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = \alpha y_1(t) + y_2(t), \quad \frac{d}{dt}y_2(t) = \alpha y_2(t)$$

という連立微分方程式を満たす．後者の方程式から C_2 を任意定数として $y_2(t) = C_2 e^{\alpha t}$ となることがわかる．従って $y_1(t)$ は

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = \alpha y_1(t) + C_2 e^{\alpha t}$$

という 1 階線形微分方程式を満たす．定数変化法により， $y_1(t) = C(t)e^{\alpha t}$ とおいて，この微分方程式に代入すると

$$C'(t)e^{\alpha t} + \alpha C(t)e^{\alpha t} = \alpha C(t)e^{\alpha t} + C_2 e^{\alpha t} \quad \text{すなわち} \quad C'(t) = C_2$$

となるから， C_1 を任意定数として， $C(t) = C_1 + C_2 t$ と表せる．以上により，(8) の一般解は

$$y_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\alpha t}, \quad y_2(t) = C_2 e^{\alpha t}$$

と表されることがわかった。逆にこれが (8) を満たすことも容易に確かめられる。以上により (6) の一般解は C_1, C_2 を任意定数として、

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = P \begin{pmatrix} (C_1 + C_2 t)e^{\alpha t} \\ C_2 e^{\alpha t} \end{pmatrix} = e^{\alpha t} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

と表されることがわかった。特に $(C_1, C_2) = (1, 0), (0, 1)$ のときの解を

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{\alpha t} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} P \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} \mathbf{p}_1, \\ \mathbf{x}_2(t) &= e^{\alpha t} P \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = e^{\alpha t} P \begin{pmatrix} t \\ 1 \end{pmatrix} = t e^{\alpha t} \mathbf{p}_1 + e^{\alpha t} \mathbf{p}_2 \end{aligned}$$

で定義すると、 $\mathbf{x}(t) = C_1 \mathbf{x}_1(t) + C_2 \mathbf{x}_2(t)$ が成立する。ここで、 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ 、すなわち $t \in \mathbb{R}$ について $\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ となったとすると、 $t = 0$ とおいて $C_1 \mathbf{p}_1 + C_2 \mathbf{p}_2 = \mathbf{0}$ を得る。 \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 は 1 次独立であったから、 $C_1 = C_2 = 0$ でなければならない。よって $\mathbf{x}_1(t)$ と $\mathbf{x}_2(t)$ は 1 次独立である。以上により、 $\mathbf{x}_1(t)$ と $\mathbf{x}_2(t)$ は (6) の解全体のなすベクトル空間 V の基底であることが示された。

例 1.2 未知関数 $\mathbf{x}(t) = {}^t(x_1(t), x_2(t))$ に対する連立微分方程式

$$\frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t)$$

の一般解を求めよう。 $A = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ の固有値は -1 のみである。 $\mathbf{p}_2 \in \mathbb{R}^2$ を

$$(A + I_2)\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{p}_2 \neq \mathbf{0}$$

となるように、たとえば $\mathbf{p}_2 = {}^t(1, 0)$ ととる。次に $\mathbf{p}_1 = (A + I_2)\mathbf{p}_2 = {}^t(-1, -1)$ とする。 \mathbf{p}_1 と \mathbf{p}_2 を並べてできる行列を P とすると、

$$P = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad P^{-1}AP = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

となることがわかる。従って一般解は

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = e^{-t} \begin{pmatrix} -1 & -t+1 \\ -1 & -t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}$$

$-C_1, -C_2$ を改めて C_1, C_2 とすれば

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1 & t-1 \\ 1 & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-t} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-t} \begin{pmatrix} t-1 \\ t \end{pmatrix}$$

問題 1.2 次の連立微分方程式の一般解を求めよ．また，与えられた初期条件を満たす解を求めよ．

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

• A の固有値が虚数の場合

$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ の固有方程式 $\lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc) = 0$ の根の一つを α とすると， $\alpha^2 - (a+d)\alpha + (ad-bc) = 0$ が成立する．複素共役をとると， a, b, c, d は実数だから $\bar{\alpha}^2 - (a+d)\bar{\alpha} + (ad-bc) = 0$ となるから， $\bar{\alpha}$ も固有方程式の根である．よって， A の2つの固有値は α と $\bar{\alpha}$ である． α に対する固有ベクトルを \mathbf{p} とする． α が複素数であるから， \mathbf{p} の成分も複素数である．このとき $A\mathbf{p} = \alpha\mathbf{p}$ の複素共役をとると， $A\bar{\mathbf{p}} = \bar{\alpha}\bar{\mathbf{p}}$ となるから， $\bar{\mathbf{p}}$ は $\bar{\alpha}$ に対する固有ベクトルである． \mathbf{p} と $\bar{\mathbf{p}}$ は \mathbb{C} 上1次独立であることを示そう． C_1, C_2 を複素数として $C_1\mathbf{p} + C_2\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ となったとすると，両辺に A を左から掛けて

$$\mathbf{0} = C_1A\mathbf{p} + C_2A\bar{\mathbf{p}} = C_1\alpha\mathbf{p} + C_2\bar{\alpha}\bar{\mathbf{p}}$$

を得る．これを $\alpha(C_1\mathbf{p} + C_2\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0}$ から引いて $C_2(\alpha - \bar{\alpha})\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{0}$ を得る． α は実数ではないから $\alpha - \bar{\alpha} \neq 0$ なので， $C_2 = 0$ でなければならない．よって $C_1\mathbf{p} = \mathbf{0}$ すなわち $C_1 = 0$ を得る．以上により \mathbf{p} と $\bar{\mathbf{p}}$ は \mathbb{C} 上1次独立であることが示された．

そこで \mathbf{p} と $\bar{\mathbf{p}}$ を並べてできる行列を P とすると， P は複素数を成分とする2次正則行列であり，

$$AP = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{p} & \bar{\alpha}\bar{\mathbf{p}} \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$$

が成立する． $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ とおくと， $\mathbf{y}(t) = {}^t(y_1(t), y_2(t))$ は複素数値の未知関数からなる2次元縦ベクトルであり，

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = P^{-1}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = P^{-1}A\mathbf{x}(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \bar{\alpha} \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

を満たす．成分ごとに書くと

$$y_1'(t) = \alpha y_1(t), \quad y_2'(t) = \bar{\alpha} y_2(t)$$

となる． $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると，ある複素数の定数 C_1, C_2 が存在して

$$\begin{aligned} y_1(t) &= C_1 e^{\alpha t} = C_1 e^{at+ibt} = C_1 e^{at} (\cos bt + i \sin bt), \\ y_2(t) &= C_2 e^{\bar{\alpha} t} = C_2 e^{at-ibt} = C_2 e^{at} (\cos bt - i \sin bt) \end{aligned}$$

と表せることを示そう。 $z(t) = e^{-\alpha t}y_1(t)$ とおくと、 $z(t)$ は複素数値関数であり、

$$z'(t) = (e^{-\alpha t})'y_1(t) + e^{-\alpha t}y_1'(t) = -\alpha e^{-\alpha t}y_1(t) + e^{-\alpha t}\alpha y_1(t) = 0$$

となるから、 $z(t)$ は定数である（ $z(t)$ の実部と虚部の導関数が 0 だから、実部も虚部も定数となる）。 よって $z(t) = C_1$ とおけば $y_1(t) = C_1 e^{\alpha t}$ となる。 $y_2(t)$ についても同様である。

以上により、微分方程式 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ の複素数値の解 $\mathbf{x}(t)$ は、 C_1, C_2 を複素数の任意定数として

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= P\mathbf{y}(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{at}(\cos bt + i \sin bt) \\ C_2 e^{at}(\cos bt - i \sin bt) \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\mathbf{p} + C_2 e^{at}(\cos bt - i \sin bt)\bar{\mathbf{p}} \end{aligned}$$

と表されることがわかった。この $\mathbf{x}(t)$ が実数ベクトルになるための条件を導こう。 $\mathbf{x}(t)$ が実数値であるための必要十分条件は $\bar{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t)$ すなわち

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}}(t) &= \bar{C}_1 e^{at}(\cos bt - i \sin bt)\bar{\mathbf{p}} + \bar{C}_2 e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\mathbf{p} \\ &= C_1 e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\mathbf{p} + C_2 e^{at}(\cos bt - i \sin bt)\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{x}(t) \end{aligned}$$

が成立することである。 \mathbf{p} と $\bar{\mathbf{p}}$ が \mathbb{C} 上 1 次独立なことに注意すると、この条件は、 $C_2 = \bar{C}_1$ と同値であることがわかる。この条件が成立するとき

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C_1 e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\mathbf{p} + \bar{C}_1 e^{at}(\cos bt - i \sin bt)\bar{\mathbf{p}} \\ &= 2\operatorname{Re}\{C_1 e^{at}(\cos bt + i \sin bt)\mathbf{p}\} \end{aligned}$$

である。ここで $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2$, $C_1 = c_1 + ic_2$ （ c_1, c_2 は実数、 $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ は実数を成分とする 2 次元縦ベクトル）とおくと、

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= 2\operatorname{Re}\{(c_1 + ic_2)e^{at}(\cos bt + i \sin bt)(\mathbf{p}_1 + i\mathbf{p}_2)\} \\ &= 2c_1 e^{at}\{(\cos bt)\mathbf{p}_1 - (\sin bt)\mathbf{p}_2\} - 2c_2 e^{at}\{(\sin bt)\mathbf{p}_1 + (\cos bt)\mathbf{p}_2\} \end{aligned}$$

となる。よって $2c_1, -2c_2$ をあらためて実数の定数 C_1, C_2 とすれば、微分方程式 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ の実数値の一般解は C_1, C_2 を実数の任意定数として

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C_1 e^{at}\{(\cos bt)\mathbf{p}_1 - (\sin bt)\mathbf{p}_2\} + C_2 e^{at}\{(\sin bt)\mathbf{p}_1 + (\cos bt)\mathbf{p}_2\} \\ &= e^{at} \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される。

例 1.3 微分方程式の初期値問題

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 4 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

の解を求めよう。この行列を A とおくと、固有多項式

$$\begin{vmatrix} \lambda - 3 & 2 \\ -4 & \lambda + 1 \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 5$$

より A の固有値は $1 \pm 2i$ である。 $1 + 2i$ に対する固有ベクトルとして、たとえば ${}^t(1, 1 - i)$ がとれることがわかる。従って、 $\mathbf{p}_1 = {}^t(1, 1)$, $\mathbf{p}_2 = {}^t(0, -1)$ とおくと、一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= C_1 e^t \{(\cos 2t)\mathbf{p}_1 - (\sin 2t)\mathbf{p}_2\} + C_2 e^t \{(\sin 2t)\mathbf{p}_1 + (\cos 2t)\mathbf{p}_2\} \\ &= C_1 e^t \begin{pmatrix} \cos 2t \\ \cos 2t + \sin 2t \end{pmatrix} + C_2 e^t \begin{pmatrix} \sin 2t \\ \sin 2t - \cos 2t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される。初期条件から $C_1 = 1, C_2 = -1$ となるので、求める解は

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} \cos 2t - \sin 2t \\ 2 \cos 2t \end{pmatrix}$$

問題 1.3 次の連立微分方程式の一般解を求めよ。また、与えられた初期条件を満たす解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1.2 解の軌道

前節で考察した2つの未知関数に関する連立微分方程式の解を $\mathbf{x}(t)$ とする。 $\mathbf{x}(t)$ は平面 \mathbb{R}^2 の中の曲線を表している。これを連立微分方程式の解曲線または解の軌道 (orbit) という。

• A が実数の範囲で対角化可能の場合。まず、最初から A が対角行列 $A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$ (λ_1, λ_2 は実数) の場合を考えよう。このとき連立微分方程式 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$ の一般解は

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} \quad (C_1, C_2 \text{ は任意定数})$$

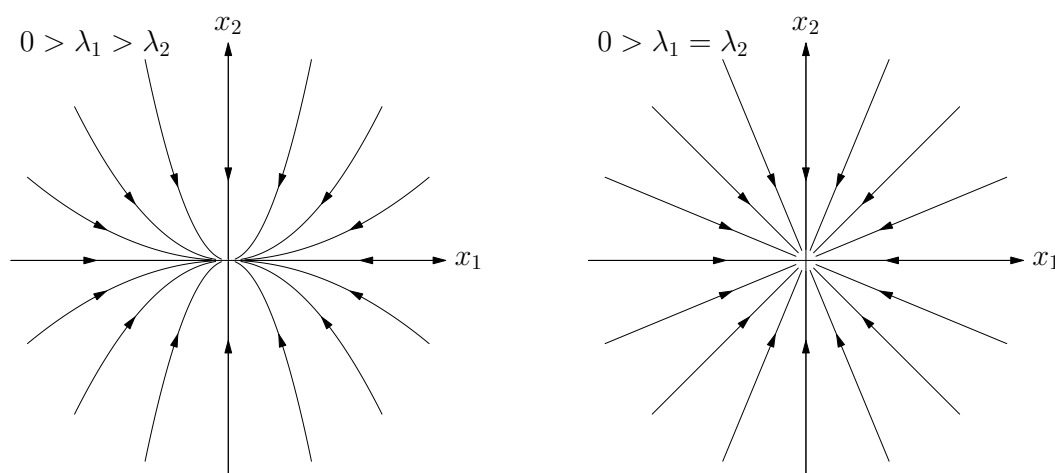
である。 $C_1 \neq 0$ のとき、 $x_2 = x_2(t)$ を $x_1 = x_1(t)$ で表すと

$$x_2 = C_2 e^{\lambda_2 t} = C_2 \exp\left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \lambda_1 t\right) = C_2 (e^{\lambda_1 t})^{\lambda_2/\lambda_1} = C_2 \left(\frac{x_1}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$$

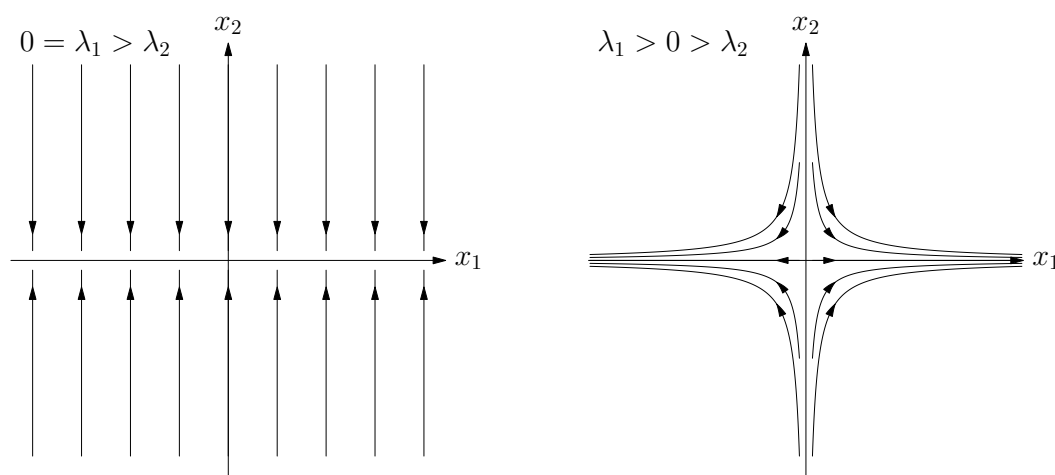
となる． x_1/C_1 は常に正であることを注意する． $t \rightarrow \infty$ のとき， $\lambda_1 > 0$ かつ $C_1 > 0$ ならば $x_1(t) \rightarrow \infty$ ， $\lambda_1 > 0$ かつ $C_1 < 0$ ならば $x_1(t) \rightarrow -\infty$ ， $\lambda_1 < 0$ ならば $x_1(t) \rightarrow 0$ となる． $x_2(t)$ についても同様である．

特に $t \rightarrow \infty$ のときの振る舞いに着目して解の軌道を考察しよう．以下では $\lambda_1 \geq \lambda_2$ と仮定する．

(i) $0 > \lambda_1 \geq \lambda_2$ のとき： $t \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{x}(t)$ は曲線 $C_2 \left(\frac{x_1}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$ に沿って限りなく原点 $\mathbf{0}$ に近づく．（原点から出発する軌道は原点に留まる．）



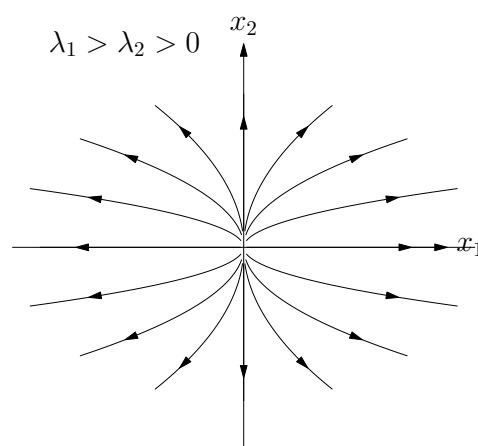
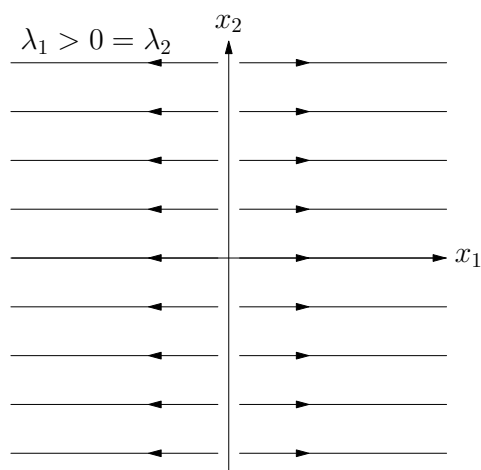
(ii) $0 = \lambda_1 > \lambda_2$ のとき： x_1 の値は一定値 C_1 であり， $t \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{x}(t)$ は直線 $x_1 = C_1$ に沿って点 $(C_1, 0)$ に限りなく近づく．（ x_1 軸上の点から出発する軌道は動かない．）



(iii) $0 = \lambda_1 = \lambda_2$ のとき： $\mathbf{x}(t)$ は動かない．

(iv) $\lambda_1 > 0 > \lambda_2$ のとき： $t \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{x}(t)$ は曲線 $x_2 = C_2 \left(\frac{x_1}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$ 上で $x_1 \rightarrow \pm\infty$ ， $x_2 \rightarrow 0$ となる（ x_1 軸上の点から出発する軌道は x_1 軸上に沿って限りなく原点から離れて行く． x_2 軸上の点から出発する軌道は x_2 軸上に沿って限りなく原点に近づく．）

(v) $\lambda_1 > 0 = \lambda_2$ のとき： x_2 の値は一定値 C_2 であり， $t \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{x}(t)$ は直線 $x_2 = C_2$ に沿って $x_1 \rightarrow \pm\infty$ となる．（ x_2 軸上の点から出発する軌道は動かない．）

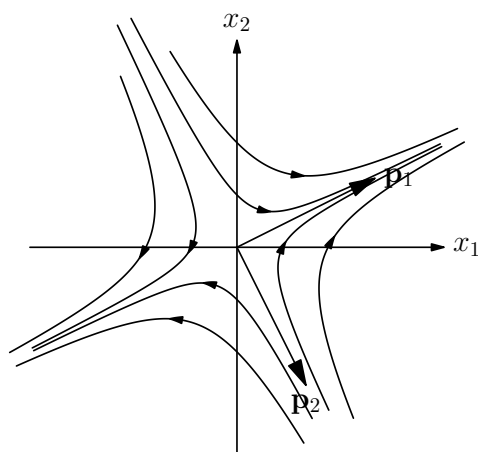
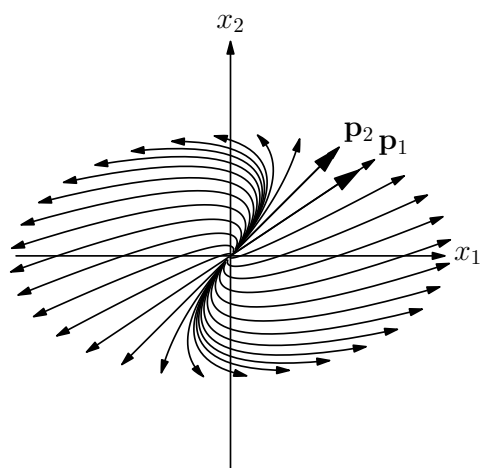


(vi) $\lambda_1 \geq \lambda_2 > 0$ のとき $t \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{x}(t)$ は曲線 $x_2 = C_2 \left(\frac{x_1}{C_1}\right)^{\lambda_2/\lambda_1}$ に沿って $x_1 \rightarrow \pm\infty$ となる。(原点から出発する軌道は原点に留まる.)

A が最初から対角行列でない場合は, A の λ_1 に対する固有ベクトル \mathbf{p}_1 と λ_2 に対する固有ベクトル \mathbf{p}_2 をとって $P = \begin{pmatrix} \mathbf{p}_1 & \mathbf{p}_2 \end{pmatrix}$ とすれば,

$$\mathbf{x}(t) = P \begin{pmatrix} C_1 e^{\lambda_1 t} \\ C_2 e^{\lambda_2 t} \end{pmatrix} = C_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{p}_1 + C_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{p}_2$$

であるから, 上記の (i)–(vi) において, $\lambda_1 \geq \lambda_2$ のとき x_1 軸を \mathbf{p}_1 方向, x_2 軸を \mathbf{p}_2 方向と読み替えればよい. たとえば, 例 1.1 と問題 1.1(1) の微分方程式の解の軌道は, それぞれ左下と右下のようになる.



● A の固有値が 1 つで対角化できない場合. A の固有値を α とする. α は実数である. まず $A = \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$ の場合を考察しよう. このときは, C_1, C_2 を任意定数として,

$$x_1 = x_1(t) = (C_1 + C_2 t)e^{\alpha t}, \quad x_2 = x_2(t) = C_2 e^{\alpha t}$$

と表される。 $C_2 = 0$ のときは $x_2(t) = 0, x_1(t) = C_1 e^{\alpha t}$ となるから、 $\mathbf{x}(t) = {}^t(x_1(t), x_2(t))$ は x_1 軸上を動く。

$C_2 \neq 0$ とすると、 $e^{\alpha t} = \frac{x_2}{C_2}$ より $t = \frac{1}{\alpha} \log \frac{x_2}{C_2}$ となるから、 これらを $x_1(t)$ の式に代入して

$$x_1(t) = \left(C_1 + \frac{C_2}{\alpha} \log \frac{x_2}{C_2} \right) \frac{x_2}{C_2}$$

$s = \frac{x_2}{C_2}$ とおくと $s > 0$ であり、

$$x_1 = g(s) = \left(C_1 + \frac{C_2}{\alpha} \log s \right) s$$

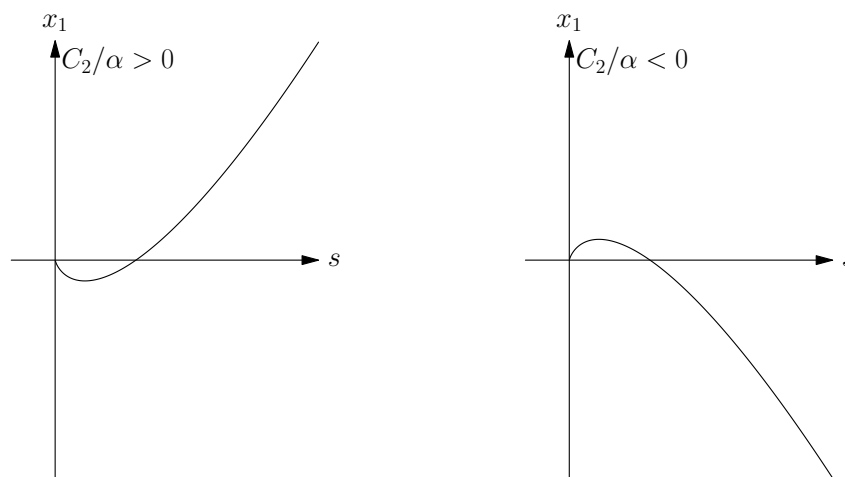
となる。 $g(s)$ の $s > 0$ での増減を調べるために微分すると、

$$g'(s) = C_1 + \frac{C_2}{\alpha} \log s + \frac{C_2}{\alpha} = \frac{C_2}{\alpha} \left(\log s + 1 + \alpha \frac{C_1}{C_2} \right)$$

よって $C_2/\alpha > 0$ ならば $g(s)$ は $s = s_0 = \exp\left(-1 - \alpha \frac{C_1}{C_2}\right)$ で極小値（かつ最小値）をとり、 $C_2/\alpha < 0$ ならば $s = s_0$ で極大値（かつ最大値）をとる。 極小値または極大値は

$$g(s_0) = \left\{ C_1 + \frac{C_2}{\alpha} \left(-1 - \alpha \frac{C_1}{C_2} \right) \right\} \exp\left(-1 - \alpha \frac{C_1}{C_2}\right) = -\frac{C_2}{\alpha} \exp\left(-1 - \alpha \frac{C_1}{C_2}\right)$$

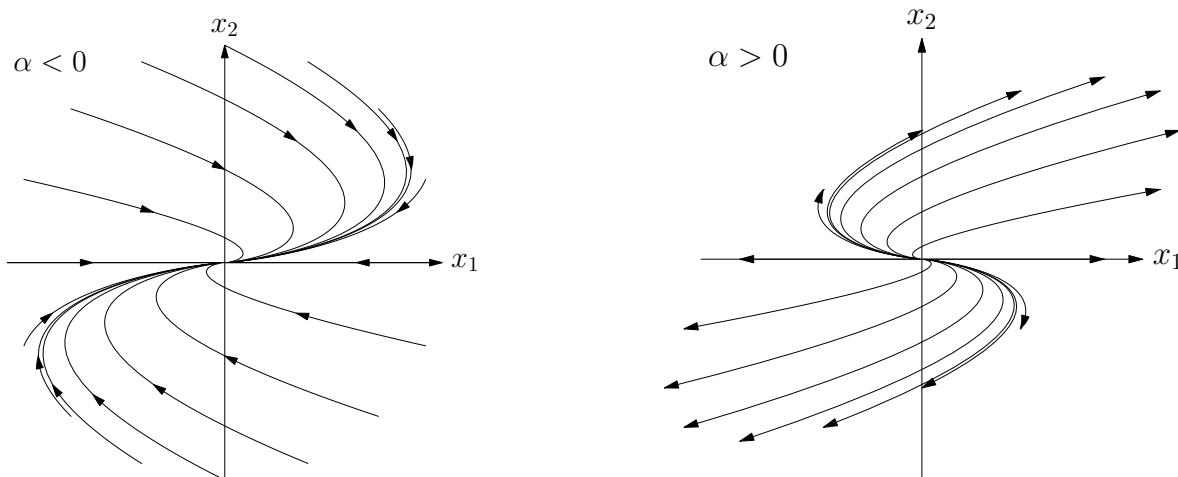
である。 また、 $\lim_{s \rightarrow +0} s \log s = 0$ より $\lim_{s \rightarrow +0} g(s) = 0$ となる。 以上により、 $g(s)$ のグラフは下のようになることがわかる。（原点で x_1 軸（縦軸）に接している。）



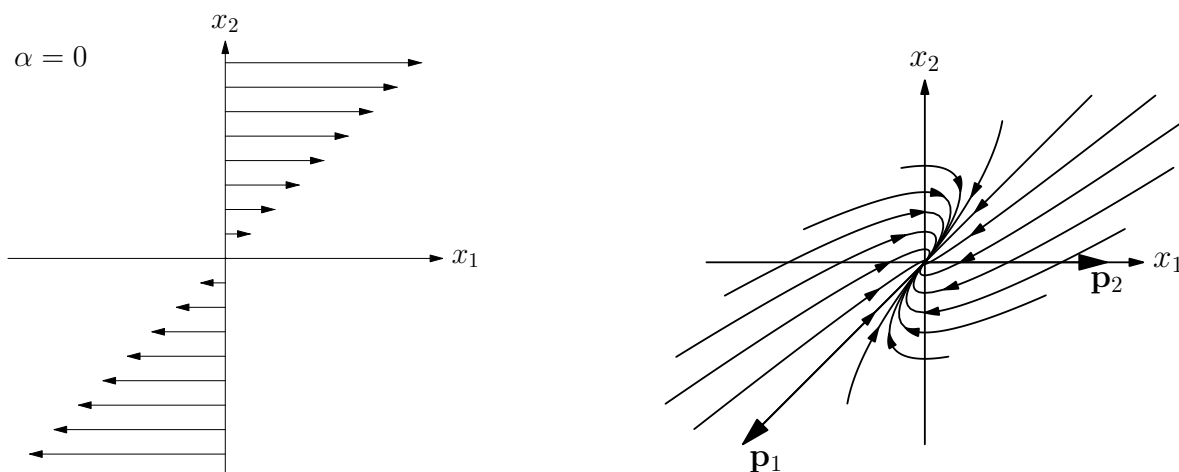
解の軌道を α の符号によって場合分けして求めよう。

(i) $\alpha < 0$ のとき： $x_2 > 0$ のときは $C_2/\alpha < 0$, $x_2 < 0$ のときは $C_2/\alpha > 0$ となることに注意すると、 解の軌道は左下図のようになり、 $t \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{x}(t)$ は原点に限りなく近づく。（原点から出発する解は原点に留まる。）

(ii) $\alpha > 0$ のとき： $x_2 > 0$ のときは $C_2/\alpha < 0$, $x_2 < 0$ のときは $C_2/\alpha > 0$ となることに注意すると、 解の軌道は右下図のようになり、 $t \rightarrow \infty$ のとき $\mathbf{x}(t)$ は原点から限りなく遠ざかる。（原点から出発する解は原点に留まる。）



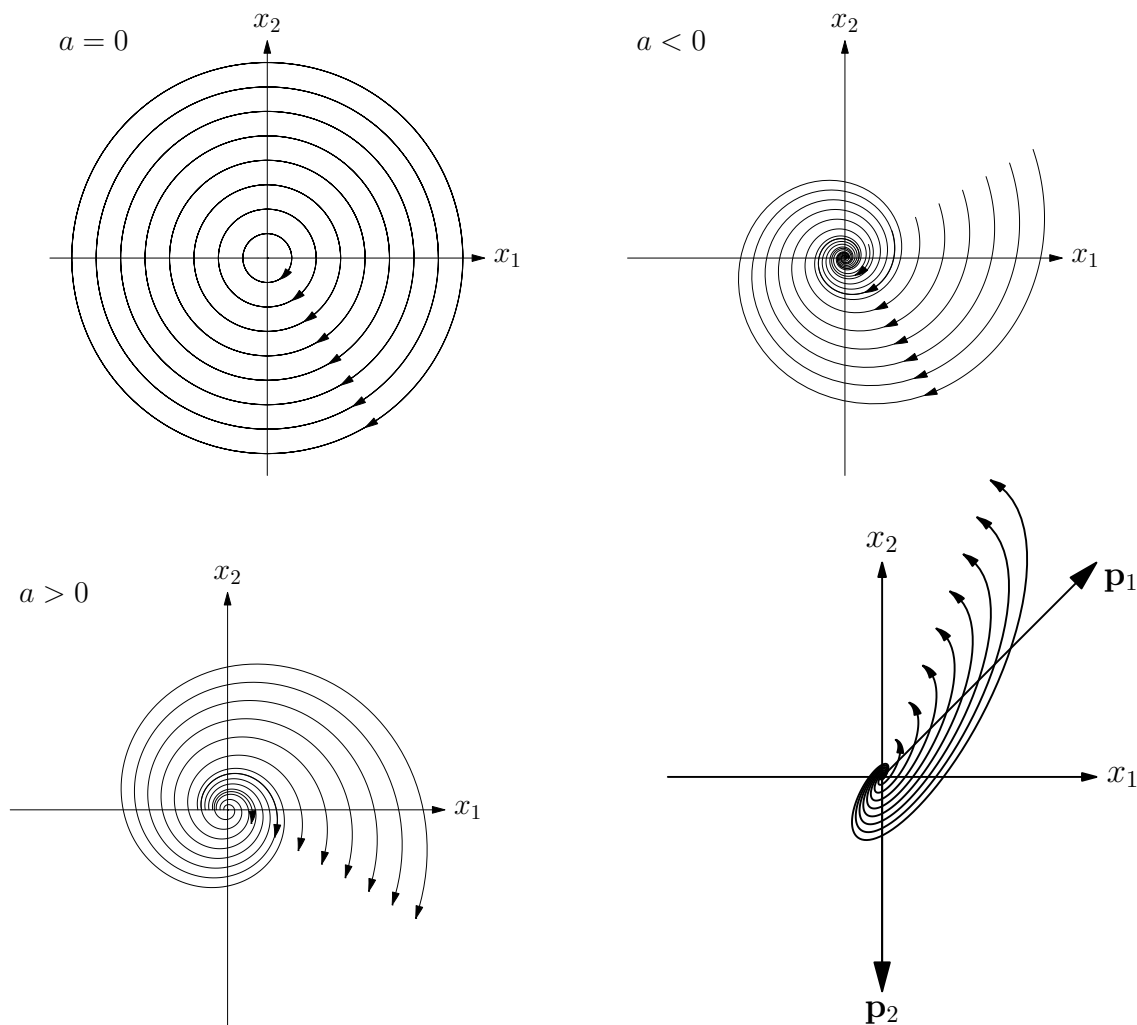
(iii) $\alpha = 0$ のとき : $x_1(t) = C_1 + C_2t, x_2(t) = C_2$ より, $x_2 > 0$ の点から出発する解は x_1 軸の正の方向に一定速度 C_2 で進み, $x_2 < 0$ の点から出発する解は x_1 軸の負の方向に一定速度 $-C_2$ で進む. $x_2 = 0$ の点から出発する解は動かない. x_2 軸上の点から出発する解の一定時間での軌道は左下のようなになる.



一般の場合には, \mathbf{p}_1 を x_1 軸, \mathbf{p}_2 を x_2 軸と読み替えればよい. たとえば例 1.2 の解の軌道は右上のようなになる.

● 固有値が虚数の場合.

まず, $P = (\mathbf{p}_1 \ \mathbf{p}_2)$ が単位行列の場合を考察する. 行列 $\begin{pmatrix} \cos bt & \sin bt \\ -\sin bt & \cos bt \end{pmatrix}$ による 1 次変換は, 原点を中心とする角度 $-bt$ ラジアン of 回転であるから, $a = \text{Re } \alpha = 0$ のときは, $\mathbf{x}(t)$ は負の向きに角速度 b で原点を中心とする円上を動く. $a > 0$ のときは, t が増加するにつれて原点から離れて行くようならせん軌道を描く. $a < 0$ のときは, t が増加するにつれて原点に近づいて行くようならせん軌道を描く. ただし, いずれの場合にも原点から出発する軌道は原点に留まる.



一般の場合は、これらの軌道を行列 P の表す 1 次変換でうつした軌道上を動く．たとえば例 1.3 の解の軌道は右上のようになる．

問題 1.4 問題 1.1 の (1),(2),(3)，問題 1.2 の (1),(2)，問題 1.3 の (1),(2) で求めた初期値問題の解（それぞれ一つずつ）の軌道のおおよその様子を描け．

1.3 行列の Jordan 標準形

$A = (a_{ij})$ を複素数を成分とする n 次正方行列とする． λ を変数とするとき、 A の特性多項式（または固有多項式） $\Phi_A(\lambda)$ は、 I_n を n 次単位行列として

$$\Phi_A(\lambda) = \det(\lambda I_n - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \cdots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \cdots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \cdots & \lambda - a_{nn} \end{vmatrix}$$

で定義される λ の多項式である．行列式の定義によって展開したときに $\det(\lambda I_n - A)$ は $(\lambda - a_{11}) \cdots (\lambda - a_{nn})$ という項を含み、その他の項は λ について $n - 1$ 次以下だか

ら、 $\Phi_A(\lambda)$ は λ の n 次多項式であり、かつモニック (λ^n の係数が 1) であることがわかる。

α が A の固有値であるとは、複素数を成分とするあるベクトル $\mathbf{p} \neq \mathbf{0}$ が存在して、

$$A\mathbf{p} = \lambda\mathbf{p}$$

が成立することである。このとき \mathbf{p} を固有値 λ に対する固有ベクトルという。 λ が A の固有値であるための必要十分条件は $\Phi_A(\lambda) = 0$ が成立することである。固有値 λ を決めるとき、それに対する固有ベクトル \mathbf{p} は (たとえば行基本変形によって) $(A - \lambda I_n)\mathbf{p} = \mathbf{0}$ から求めることができる。

定理 1.1 (Cayley-Hamilton) n 次正方行列 A の特性多項式を

$$\Phi_A(\lambda) = \lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + \cdots + c_{n-1}\lambda + c_n$$

として O を n 次零行列とすると、

$$\Phi_A(A) = A^n + c_1A^{n-1} + \cdots + c_{n-1}A + c_nI_n = O$$

が成立する。

証明: 行列 $\lambda I_n - A$ の余因子行列を $Q(\lambda)$ とする。 $Q(\lambda)$ の (i, j) 成分は $\lambda I_n - A$ の (j, i) 余因子、すなわち $\lambda I_n - A$ の第 j 行と第 i 行を除いてできる $n - 1$ 次正方行列の行列式に $(-1)^{i+j}$ を掛けたものである。 $Q(\lambda)$ は λ の多項式を成分とする n 次行列であり、

$$(\lambda I_n - A)Q(\lambda) = Q(\lambda)(\lambda I_n - A) = \det(\lambda I_n - A)I_n = \Phi_A(\lambda)I_n \tag{9}$$

が成立する。たとえば $n = 2$ のときは

$$Q(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda - a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & \lambda - a_{11} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -a_{22} & a_{12} \\ a_{21} & -a_{11} \end{pmatrix}$$

である。 $Q(\lambda)$ の各成分は λ について高々 $n - 1$ 次だから、複素数を成分とする (λ を含まない) n 次正方行列 Q_1, \dots, Q_n が存在して、

$$Q(\lambda) = \lambda^{n-1}Q_1 + \lambda^{n-2}Q_2 + \cdots + \lambda Q_{n-1} + Q_n$$

と表せる。このとき (9) の左辺は

$$\begin{aligned} (\lambda I_n - A)Q(\lambda) &= (\lambda I_n - A)(\lambda^{n-1}Q_1 + \lambda^{n-2}Q_2 + \cdots + \lambda Q_{n-1} + Q_n) \\ &= \lambda^n Q_1 + \lambda^{n-1}(Q_2 - AQ_1) + \cdots + \lambda(Q_n - AQ_{n-1}) - AQ_n \end{aligned}$$

となり、右辺は

$$\Phi_A(\lambda)I_n = \lambda^n I_n + c_1\lambda^{n-1}I_n + \cdots + c_{n-1}\lambda I_n + c_n I_n$$

である。(9)は λ についての恒等式だから、 λ についての各次数の係数を比較して、

$Q_1 = I_n, Q_2 - AQ_1 = c_1 I_n, Q_3 - AQ_2 = c_2 I_n, \dots, Q_n - AQ_{n-1} = c_{n-1} I_n, -AQ_n = c_n I_n$
が成立することがわかる。従って

$$\begin{aligned} \Phi_A(A) &= A^n I_n + A^{n-1}(c_1 I_n) + A^{n-2}(c_2 I_n) + \dots + A(c_{n-1} I_n) + c_n I_n \\ &= A^n Q_1 + A^{n-1}(Q_2 - AQ_1) + A^{n-2}(Q_3 - AQ_2) + \dots + A(Q_n - AQ_{n-1}) - AQ_n \\ &= A^n Q_1 + (A^{n-1} Q_2 - A^n Q_1) + (A^{n-2} Q_3 - A^{n-1} Q_2) + \dots + (AQ_n - A^2 Q_{n-1}) - AQ_n \\ &= O \end{aligned}$$

を得る。□

$\Phi_A(\lambda) = 0$ を満たす複素数 λ のうち、相異なるものを $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ とする。このときある自然数 n_1, \dots, n_m があつて、

$$\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{n_1} \dots (\lambda - \alpha_m)^{n_m}$$

と因数分解される。次数を比較して $n_1 + n_2 + \dots + n_m = n$ が成立することがわかる。 $j = 1, \dots, m$ とするとき、 n_j のことを固有値 α_j の重複度という。

定理 1.2 以上の仮定のもとで、数ベクトル空間 \mathbb{C}^n は次のように m 個の部分空間の直和に分解される：

$$\mathbb{C}^n = \text{Ker}(A - \alpha_1 I_n)^{n_1} \oplus \dots \oplus \text{Ker}(A - \alpha_m I_n)^{n_m}$$

すなわち、任意の $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して、

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \dots + \mathbf{v}_m, \quad (A - \alpha_j I_n)^{n_j} \mathbf{v}_j = \mathbf{0} \quad (1 \leq j \leq m)$$

を満たすような $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_m \in \mathbb{C}^n$ がただ一組存在する。ベクトル空間

$$V(\alpha_j) = \text{Ker}(A - \alpha_j I_n)^{n_j} = \{\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n \mid (A - \alpha_j I_n)^{n_j} \mathbf{v} = \mathbf{0}\}$$

のことを A の固有値 α_j に対する**広義固有空間**という。 $V(\alpha_j)$ の次元は n_j である。

さらに、 n 次正則行列 P と n_j 次正方行列 A_j ($j = 1, \dots, m$)が存在して $P^{-1}AP$ は

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & O & \dots & O \\ O & A_2 & \dots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \dots & A_m \end{pmatrix}$$

とブロック分解され、 A_j の特性多項式は $\Phi_{A_j}(\lambda) = (\lambda - \alpha_j)^{n_j}$ である。

証明: 簡単のため $m = 2$ の場合に証明する。($m \geq 3$ の場合は以下の議論を繰り返せばよい。) このとき、 $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha_1)^{n_1} (\lambda - \alpha_2)^{n_2}$ である。2つの多項式 $f_1(\lambda) := (\lambda - \alpha_1)^{n_1}$ と $f_2(\lambda) = (\lambda - \alpha_2)^{n_2}$ は互いに素だから、拡張ユークリッドの互除法によって、

$$g_1(\lambda)f_1(\lambda) + g_2(\lambda)f_2(\lambda) = 1 \tag{10}$$

を満たす2つの多項式 $g_1(\lambda)$ と $g_2(\lambda)$ を見出すことができる。たとえば $f_1(\lambda) = \lambda^2$, $f_2(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ の場合は,

$$(\lambda - 1)^2 = 1 \cdot \lambda^2 + (-2\lambda + 1), \quad \lambda^2 = -\frac{1}{4}(2\lambda + 1)(-2\lambda + 1) + \frac{1}{4}$$

より

$$\begin{aligned} 1 &= 4\lambda^2 + (2\lambda + 1)(-2\lambda + 1) = 4\lambda^2 + (2\lambda + 1)\{(\lambda - 1)^2 - \lambda^2\} \\ &= (-2\lambda + 3)f_1(\lambda) + (2\lambda + 1)f_2(\lambda) \end{aligned}$$

さて、(10)において λ に行列 A を代入すると、

$$g_1(A)f_1(A) + g_2(A)f_2(A) = I_n \tag{11}$$

を得る。任意のベクトル $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$ に対して、

$$\mathbf{v}_1 = g_2(A)f_2(A)\mathbf{v} = g_2(A)(A - \alpha_2 I_n)^{n_2}\mathbf{v}, \quad \mathbf{v}_2 = g_1(A)f_1(A)\mathbf{v} = g_1(A)(A - \alpha_1 I_n)^{n_1}\mathbf{v}$$

とおくと、Cayley-Hamilton の定理により $\Phi_A(A) = O$ であるから、

$$(A - \alpha_1 I_n)^{n_1}\mathbf{v}_1 = g_2(A)\Phi_A(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}, \quad (A - \alpha_2 I_n)^{n_2}\mathbf{v}_2 = g_1(A)\Phi_A(A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

が成立する。従って、 $j = 1, 2$ について、 \mathbf{v}_j は $\text{Ker}(A - \alpha_j I_n)^{n_j}$ に属する。さらに(11)より $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ が成り立つことがわかる。

このような分解 $\mathbf{v} = \mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ の一意性を示そう。 $\mathbf{v} = \mathbf{v}'_1 + \mathbf{v}'_2$ かつ

$$(A - \alpha_j I_n)^{n_j}\mathbf{v}'_j = \mathbf{0} \quad (j = 1, 2)$$

が成立すると仮定して $\mathbf{w} = \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}'_1 = \mathbf{v}'_2 - \mathbf{v}_2$ とおくと、

$$f_j(A)\mathbf{w} = (A - \alpha_j I_n)^{n_j}\mathbf{w} = \mathbf{0} \quad (j = 1, 2)$$

が成立することがわかる。これと(11)より $7ujj$

$$\mathbf{w} = g_1(A)f_1(A)\mathbf{w} + g_2(A)f_2(A)\mathbf{w} = \mathbf{0}$$

を得る。よって $\mathbf{v}'_j = \mathbf{v}_j$ ($j = 1, 2$) が成立するから分解の一意性が示された。

最後に $V(\alpha_j)$ の次元が n_j であることを示そう。まず、 $\mathbf{v} \in V(\alpha_j)$ のとき $A\mathbf{v} \in V(\alpha_j)$ となることに注意する。実際、 $(A - \alpha_j I_n)^{n_j}\mathbf{v} = \mathbf{0}$ より

$$(A - \alpha_j I_n)^{n_j}A\mathbf{v} = A(A - \alpha_j I_n)^{n_j}\mathbf{v} = \mathbf{0}$$

となる。 $V(\alpha_j)$ の次元を d_j として、 $\mathbf{v}_{j,1}, \dots, \mathbf{v}_{j,d_j}$ が $V(\alpha_j)$ の基底であるとする。

$$P = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_{1,1} & \cdots & \mathbf{v}_{1,d_1} & \cdots & \mathbf{v}_{m,1} & \cdots & \mathbf{v}_{m,d_m} \end{pmatrix}$$

とおくと、 P は n 次の正則行列であり、 $A\mathbf{v}_{j,k}$ ($1 \leq k \leq d_j$) が $V(\alpha_j)$ に属することから、 d_j 次正方行列 A_j が存在して

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_m \end{pmatrix}$$

が成立する。 A_j の固有値は α_j のみであることを示そう。簡単のため $j = 1$ とする。 β を A_1 の固有値とすると $A_1\mathbf{w} = \beta\mathbf{w}$ かつ $\mathbf{w} \neq \mathbf{0}$ を満たすような $\mathbf{w} \in \mathbb{C}^{d_1}$ が存在する。このとき、最初の d_1 個の成分は \mathbf{w} と一致し、第 $d_1 + 1$ 成分以降はすべて 0 であるような n 次元縦ベクトルを \mathbf{v} とすると、

$$P^{-1}AP\mathbf{v} = \begin{pmatrix} A_1 & O & \cdots & O \\ O & A_2 & \cdots & O \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ O & O & \cdots & A_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{w} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_1\mathbf{w} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta\mathbf{w} \\ \mathbf{0} \\ \vdots \\ \mathbf{0} \end{pmatrix} = \beta\mathbf{v}$$

となる。一方 $P\mathbf{v}$ は $\mathbf{v}_{1,1}, \dots, \mathbf{v}_{1,d_1}$ の 1 次結合であるから、 $V(\alpha_1)$ に属する。従って $(A - \alpha_1 I_n)^{n_1} P\mathbf{v} = \mathbf{0}$ である。よって、

$$\mathbf{0} = P^{-1}(A - \alpha_1 I_n)^{n_1} P\mathbf{v}$$

となる。一方、

$$P^{-1}(A - \alpha_1 I_n)P\mathbf{v} = P^{-1}AP\mathbf{v} - \alpha_1\mathbf{v} = \beta\mathbf{v} - \alpha_1\mathbf{v} = (\beta - \alpha_1)\mathbf{v}$$

より、帰納法で

$$\mathbf{0} = P^{-1}(A - \alpha_1 I_n)^{n_1} P\mathbf{v} = (\beta - \alpha_1)^{n_1} \mathbf{v}$$

となることがわかる。以上により $\beta = \alpha_1$ が示されたから、 A_1 の固有値は α_1 のみである。特に A_1 の特性多項式は $(\lambda - \alpha_1)^{d_1}$ である。

さて、 $B = P^{-1}AP$ とおくと B の特性多項式は

$$\begin{aligned} \Phi_B(\lambda) &= \det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_n - P^{-1}AP) = \det(P^{-1}(\lambda I_n - A)P) \\ &= \det P^{-1} \det(\lambda I_n - A) \det P = \det(\lambda I_n - A) = \Phi_A(\lambda) \\ &= (\lambda - \alpha_1)^{n_1} \cdots (\lambda - \alpha_m)^{n_m} \end{aligned}$$

であるが、一方 B のブロック分解より

$$\det(\lambda I_n - B) = \det(\lambda I_{d_1} - A_1) \cdots \det(\lambda I_{d_m} - A_m) = (\lambda - \alpha_1)^{d_1} \cdots (\lambda - \alpha_m)^{d_m}$$

となる。よって $\dim V(\alpha_j) = d_j = n_j$ ($j = 1, \dots, m$) が成立すること、従って A_j の固有多項式は $(\lambda - \alpha_j)^{n_j}$ であることが示された。□

定理 1.3 n 次正方行列 A の特性多項式が $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^n$ であるとするとき、

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & \varepsilon_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \alpha & \varepsilon_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \alpha & \varepsilon_{n-1} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

かつ $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{n-1}$ がそれぞれ 0 または 1 であるような正則行列 P が存在する。

証明: $n = 2$ の場合は既に示した。一般の場合の証明は複雑なので、ここでは $n = 3$ の場合に証明しよう。すると A は 3 次行列で $\Phi_A(\lambda) = (\lambda - \alpha)^3$ であるから、Cayley-Hamilton の定理によって $(A - \alpha I_3)^3 = O$ が成立する。 $A - \alpha I_3$ と $(A - \alpha I_3)^2$ が零行列かどうかに着目して 3 通りに場合分けして示そう。

(i) $A - \alpha I_3 = O$, すなわち $A = \alpha I_3$ のとき: $P = I_3$ かつ $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 0$ とすれば主張が成立する。

(ii) $A - \alpha I_3 \neq O$ かつ $(A - \alpha I_3)^2 = O$ のとき: 任意のベクトル \mathbf{v} に対して $(A - \alpha I_3)\mathbf{v}$ は $A - \alpha I_3$ の核に属するから

$$\text{Im}(A - \alpha I_3) \subset \text{Ker}(A - \alpha I_3) \quad \text{従って} \quad \dim \text{Im}(A - \alpha I_3) \leq \dim \text{Ker}(A - \alpha I_3)$$

が成立する (Im は像を表す)。この不等式と次元公式により

$$\dim \text{Ker}(A - \alpha I_3) \geq \dim \text{Im}(A - \alpha I_3) = 3 - \dim \text{Ker}(A - \alpha I_3)$$

となるから、 A の固有空間 $\text{Ker}(A - \alpha I_3)$ の次元は $3/2$ 以上、従って 2 以上である。一方 $A - \alpha I_3 \neq O$ より $\text{Ker}(A - \alpha I_3)$ の次元は 2 以下であるから、結局次元は 2 でなければならない。

まず、 $A - \alpha I_3 \neq O$ より $(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ を満たすベクトル \mathbf{v}_3 が存在する。 $\mathbf{v}_2 = (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3$ とおくと、 \mathbf{v}_2 は固有空間 $\text{Ker}(A - \alpha I_3)$ に属する。固有空間の次元は 2 だから、 \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 は 1 次独立で共に固有空間に属するような \mathbf{v}_1 が存在する。このとき

$$(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_1 = (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}, \quad (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$$

である。 $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立であることを示そう。 C_1, C_2, C_3 をスカラー (複素数) として、 $C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 + C_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \alpha I_3)(C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 + C_3\mathbf{v}_3) \\ &= C_1(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_1 + C_2(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_2 + C_3(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3 = C_3\mathbf{v}_2 \end{aligned}$$

より $C_3 = 0$, 従って $C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ となるが、 \mathbf{v}_1 と \mathbf{v}_2 は 1 次独立であったから $C_1 = C_2 = 0$ である。以上によって $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立であることが示された。

そこで $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ を並べてできる 3 次正則行列を P とすると,

$$AP = \begin{pmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & A\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{v}_1 & \alpha\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

すなわち

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

が成立する.

(iii) $(A - \alpha I_3)^2 \neq O$ のとき: $(A - \alpha I_3)^2 \mathbf{v}_3 \neq \mathbf{0}$ となるようなベクトル \mathbf{v}_3 が存在する.

$$\mathbf{v}_2 = (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3, \quad \mathbf{v}_1 = (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_2$$

とおくと,

$$(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_1 = (A - \alpha I_3)^3 \mathbf{v}_3 = \mathbf{0}, \quad (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1, \quad (A - \alpha I_3)\mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$$

が成立する. $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ は 1 次独立であることを示そう. C_1, C_2, C_3 をスカラーとして, $C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 + C_3\mathbf{v}_3 = \mathbf{0}$ と仮定すると

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= (A - \alpha I_3)^2(C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 + C_3\mathbf{v}_3) \\ &= C_1(A - \alpha I_3)^2\mathbf{v}_1 + C_2(A - \alpha I_3)^2\mathbf{v}_2 + C_3(A - \alpha I_3)^2\mathbf{v}_3 \\ &= C_1(A - \alpha I_3)^2\mathbf{v}_1 + C_2(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_1 + C_3\mathbf{v}_1 = C_3\mathbf{v}_1 \end{aligned}$$

より $C_3 = 0$, 従って $C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2 = \mathbf{0}$ となる.

$$\mathbf{0} = (A - \alpha I_3)(C_1\mathbf{v}_1 + C_2\mathbf{v}_2) = C_1(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_1 + C_2(A - \alpha I_3)\mathbf{v}_2 = C_2\mathbf{v}_1$$

より $C_2 = 0$, 従って $C_1 = 0$ となる. 以上により $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ が 1 次独立であることが示されたので, この 3 つのベクトルを並べてできる 3 次正則行列を P とすると,

$$AP = \begin{pmatrix} A\mathbf{v}_1 & A\mathbf{v}_2 & A\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha\mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_1 + \alpha\mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_2 + \alpha\mathbf{v}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 & \mathbf{v}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

すなわち

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

が成立する. \square

以上の 2 つの定理によって, 次の定理が示された.

定理 1.4 A を複素数を成分とする n 次正方行列とすると、複素数を成分とする n 次正則行列 P が存在して、 $J = P^{-1}AP$ が次のような形の行列となる：

$$J = J(\alpha_1, n_1) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m, n_m) = \begin{pmatrix} J(\alpha_1, n_1) & & \\ & \ddots & \\ & & J(\alpha_m, n_m) \end{pmatrix},$$

$$J(\alpha_j, n_j) = \begin{pmatrix} \alpha_j & 1 & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & 1 \\ & & & \alpha_j \end{pmatrix} \quad (n_j \text{ 次正方行列}) \quad (j = 1, \dots, m).$$

ただし $n_j = 1$ のときは $J(\alpha_j, 1) = (\alpha_j)$ とする．ここで $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は（互いに異なるとは限らない） A の固有値であり、 n_1, \dots, n_m は自然数である．この J を行列 A の **Jordan**（ジョルダン）標準形、各々の $J(\alpha_j, n_j)$ を **Jordan ブロック**（または Jordan 細胞）といい、 n_j をその次数（または大きさ）という．Jordan ブロックを並べる順序は任意である．

例 1.4 複素数を成分とする 2 次正方行列の Jordan 標準形は

$$(i) \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} \alpha & 1 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の 2 種類である．ただし $\alpha = \beta$ でもよい．(i) は次数 1 の Jordan ブロック 2 個、(ii) は次数 2 の Jordan ブロック 1 個からなる．

例 1.5 複素数を成分とする 3 次正方行列の Jordan 標準形は

$$(i) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix} \quad (ii) \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 1 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad \text{または} \quad \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{pmatrix} \quad (iii) \begin{pmatrix} \alpha & 1 & 0 \\ 0 & \alpha & 1 \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$$

の 3 種類である．ただし α, β, γ のうち 2 つ以上が一致してもよい．(i) は次数 1 の Jordan ブロック 3 個、(ii) は次数 1 の Jordan ブロックと次数 2 の Jordan ブロック、(iii) は次数 3 の Jordan ブロック 1 個からなる．

Jordan 標準形の具体的な計算例については次節で微分方程式に即して述べる．

1.4 一般の定数係数連立線形微分方程式

t を独立変数、 A を実数を成分とする n 次正方行列、 $\mathbf{x}(t) = {}^t(x_1(t), \dots, x_n(t))$ を n 個の未知関数 $x_1 = x_1(t), \dots, x_n = x_n(t)$ からなる縦ベクトルとして、連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t) \tag{12}$$

を考察しよう．複素数を成分とする n 次正則行列 P が存在して

$$P^{-1}AP = J = J(\alpha_1, n_1) \oplus \cdots \oplus J(\alpha_m, n_m)$$

となる．ここで $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は A の（相異なるとは限らない）固有値， n_1, \dots, n_m は $n_1 + \cdots + n_m = n$ となるような自然数である． $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ すなわち $\mathbf{y}(t) = P^{-1}\mathbf{x}(t)$ とおくと， $\mathbf{y}(t)$ は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = P^{-1}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = P^{-1}A\mathbf{x}(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t) = J\mathbf{y}(t)$$

という微分方程式を満たす．そこで $\mathbf{y}(t)$ を J のブロック分解に対応して

$$\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{y}_1(t) \\ \vdots \\ \mathbf{y}_m(t) \end{pmatrix} \quad (\mathbf{y}_j(t) \text{ は } n_j \text{ 次元ベクトル})$$

とブロック分解すると，各々の $\mathbf{y}_j(t)$ は

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}_j(t) = J(\alpha_j, n_j)\mathbf{y}_j(t) \quad (j = 1, \dots, m)$$

という微分方程式を満たす．この微分方程式の一般解は， C_1, \dots, C_{n_j} を複素数の任意定数として

$$\begin{aligned} \mathbf{y}_j(t) &= e^{\alpha_j t} \begin{pmatrix} C_1 + C_2 t + C_3 \frac{t^2}{2!} + \cdots + C_{n_j} \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ C_2 + C_3 t + \cdots + C_{n_j} \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ \vdots \\ C_{n_j-1} + C_{n_j} t \\ C_{n_j} \end{pmatrix} \\ &= C_1 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{\alpha t} \begin{pmatrix} t \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \cdots + C_{n_j-1} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \frac{t^{n_j-2}}{(n_j-2)!} \\ \vdots \\ t \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_{n_j} e^{\alpha t} \begin{pmatrix} \frac{t^{n_j-1}}{(n_j-1)!} \\ \vdots \\ \frac{t^2}{2} \\ t \\ 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表されることを n_j についての帰納法で示そう． n_j が 1 および 2 のときは既に 1.1 節で示した．

記号を簡潔にするために， n_j を単に n で表し， α_j を α と表し， $\mathbf{y}_j(t)$ を $\mathbf{y}(t)$ で表して， $\mathbf{y}(t) = {}^t(y_1(t), \dots, y_n(t))$ と書こう．すると $y_1(t), \dots, y_n(t)$ は連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}y_k(t) = \alpha y_k(t) + y_{k+1}(t) \quad (1 \leq k \leq n-1), \quad \frac{d}{dt}y_n(t) = \alpha y_n(t)$$

を満たす. $y_2(t), \dots, y_n(t)$ に対して帰納法の仮定を適用すれば, ある定数 C_2, C_3, \dots, C_n が存在して

$$y_k(t) = e^{\alpha t} \left\{ C_k + C_{k+1}t + \dots + C_n \frac{t^{n-k}}{(n-k)!} \right\} \quad (2 \leq k \leq n)$$

が成立する. よって $y_1(t)$ を求めればよい. 上の微分方程式から,

$$\frac{d}{dt}y_1(t) = \alpha y_1(t) + y_2(t) = \alpha y_1(t) + e^{\alpha t} \left\{ C_2 + C_3t + \dots + C_n \frac{t^{n-2}}{(n-2)!} \right\}$$

であるから, 定数変化法により $C(t)$ を未知関数として $y_1(t) = C(t)e^{\alpha t}$ とおいて上の式に代入して整理すると

$$C'(t) = C_2 + C_3t + \dots + C_n \frac{t^{n-2}}{(n-2)!}$$

を得る. これから, C_1 を任意定数として

$$y_1(t) = C(t)e^{\alpha t} = e^{\alpha t} \left\{ C_1 + C_2t + C_3 \frac{t^2}{2} + \dots + C_n \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} \right\}$$

となることがわかるので, 帰納法により主張が示された.

以上により連立微分方程式 (12) の複素数値の一般解 (すべての解) $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ が求まった. 特に, (12) の複素数値の解の全体は, \mathbb{C} 上の n 次元ベクトル空間である (n 個の複素数の任意定数を含むから). これから (12) の実数値の解の全体は, \mathbb{R} 上の高々 n 次元のベクトル空間であることがわかる. (実はちょうど n 次元になることが次節の解の存在と一意性の定理からわかる.)

A の固有値がすべて実数であれば, 行列 P の成分はすべて実数としてよいので, これですべての実数値の解が求まったことになる. A が虚数の固有値 α を持てば複素共役 $\bar{\alpha}$ も同じ重複度の固有値であることがわかるので, 下の補題によって, 複素数値の解の実部と虚部をとればよい. このようにして \mathbb{R} 上 1 次独立な n 個の実数値の解が求まれば, それが実数値の解全体のなすベクトル空間の基底となる. すなわち, 任意の解はそれら n 個の解の (実数を係数とする) 1 次結合で表される.

補題 1.3 A を実数を成分とする $n \times n$ 行列, $\mathbf{z}(t)$ を t の複素数値関数を成分とする n 次元ベクトルで連立微分方程式 $\mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t)$ を満たすものとする. このとき, $\mathbf{z}(t)$ の各成分の実部からなるベクトルを $\mathbf{x}(t) = \operatorname{Re} \mathbf{z}(t)$, $\mathbf{z}(t)$ の各成分の虚部からなるベクトルを $\mathbf{y}(t) = \operatorname{Im} \mathbf{z}(t)$ とすると,

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = A\mathbf{y}(t)$$

が成立する. さらに, $\alpha\mathbf{z}(t)$ のすべての成分が実数値関数となるような 0 でない複素数 α が存在しなければ, $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{y}(t)$ は \mathbb{R} 上 1 次独立である.

証明: 仮定により

$$\mathbf{x}'(t) + i\mathbf{y}'(t) = \mathbf{z}'(t) = A\mathbf{z}(t) = A(\mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)) = A\mathbf{x}(t) + iA\mathbf{y}(t)$$

が成立するので、両辺の実部と虚部を比較して、 $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t)$, $\mathbf{y}'(t) = A\mathbf{y}(t)$ を得る. $\mathbf{x}(t)$ と $\mathbf{y}(t)$ が 1 次従属であると仮定すると、 $a\mathbf{x}(t) + b\mathbf{y}(t) = 0$ を満たす実数の組 $(a, b) \neq (0, 0)$ が存在する. このとき $\alpha = b + ia$ とおけば

$$\alpha\mathbf{z}(t) = (b + ia)(\mathbf{x}(t) + i\mathbf{y}(t)) = b\mathbf{x}(t) - a\mathbf{y}(t) + i(ax(t) + by(t)) = b\mathbf{x}(t) - a\mathbf{y}(t)$$

は実数値の関数となる. 従って後半の主張の対偶が示された. \square

例 1.6 $n = 3$ として初期値問題

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -4 \\ 4 & 1 & -4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

の解を求めよう. この行列 A の特性多項式は、たとえば A の第 2 行の -2 倍を第 3 行に加えて余因子展開すると

$$\begin{aligned} \det(\lambda I_3 - A) &= \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 3 & 4 \\ -4 & -1 & \lambda + 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 & 1 \\ -2 & \lambda - 3 & 4 \\ 0 & -2\lambda + 5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1) \begin{vmatrix} \lambda - 3 & 4 \\ -2\lambda + 5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -2\lambda + 5 & \lambda - 4 \end{vmatrix} \\ &= (\lambda - 1)(\lambda^2 + \lambda - 8) + 2(\lambda - 1) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3) \end{aligned}$$

よって固有値は $1, 2, -3$ である. 固有値 $1, 2, -3$ に対する固有ベクトルとして、

$$\mathbf{p}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

がとれる. $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を並べてできる行列を P として $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ とおくと、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

よって C_1, C_2, C_3 を実数の任意定数として

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 e^t \\ C_2 e^{2t} \\ C_3 e^{-3t} \end{pmatrix} = C_1 e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_3 e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

が一般解である。初期条件を満たす解は

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 7 \\ 1 & 1 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

を解いて $C_1 = 1, C_2 = -\frac{1}{5}, C_3 = \frac{1}{5}$, すなわち

$$\mathbf{x}(t) = e^t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{1}{5}e^{2t} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{5}e^{-3t} \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix}$$

例 1.7 $n = 3$ として初期値問題

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 2 & -3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

の解を求めよう。右辺の行列 A の特性多項式は

$$\det(\lambda I_3 - a) = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2)$$

だから A の固有値は -1 （重複度 2）と -2 （重複度 1）である。まず -2 に対する固有ベクトルとして $\mathbf{p}_1 = {}^t(0, 1, 1)$ がとれる。次に

$$(A + I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

より、固有値 -1 に対する広義固有空間 $V(-1)$ の基底として、たとえば $\mathbf{v}_1 = {}^t(1, 1, 0)$ と $\mathbf{v}_2 = {}^t(0, 0, 1)$ がとれる。（このうち \mathbf{v}_1 は固有ベクトルである。）従って $V(-1)$ に属する任意のベクトル \mathbf{v} はある定数 c_1, c_2 によって $\mathbf{v} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2$ と表される。このとき

$$(A + I_3)\mathbf{v} = c_1(A + I_3)\mathbf{v}_1 + c_2(A + I_3)\mathbf{v}_2 = c_1 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = c_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

となるから、たとえば $c_1 = 0, c_2 = 1$ とすればこれは零ベクトルではない。そこで、

$$\mathbf{p}_3 = \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_2 = (A + I_3)\mathbf{p}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

とおけば、 \mathbf{p}_2 は固有値 -1 に対する固有ベクトルであり、 P を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を列ベクトルとする行列として、 $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ とおけば

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = P^{-1}\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = P^{-1}A\mathbf{x}(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

が成立する。従って C_1, C_2, C_3 を任意定数として

$$\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1e^{-2t} \\ (C_2 + C_3t)e^{-t} \\ C_3e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (C_2 + C_3t)e^{-t} \\ C_1e^{-2t} + (C_2 + C_3t)e^{-t} \\ C_1e^{-2t} + C_3e^{-t} \end{pmatrix}$$

が一般解である。初期条件を満たす解は

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

を解いて $C_1 = 0, C_2 = 1, C_3 = 1$, すなわち

$$\mathbf{x}(t) = e^{-t} \begin{pmatrix} 1+t \\ 1+t \\ 1 \end{pmatrix}$$

例 1.8 $n = 3$ として初期値問題

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -3 & 2 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めよう。右辺の行列 A の特性多項式は $(\lambda - 2)^3$ である。

$$A - 2I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad (A - 2I_3)^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

より、たとえば $\mathbf{p}_3 = {}^t(0, 0, 1)$ とすれば $(A - 2I_3)^2\mathbf{p}_3 \neq \mathbf{0}$ となるので、

$$\mathbf{p}_2 = (A - 2I_3)\mathbf{p}_3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{p}_1 = (A - 2I_3)\mathbf{p}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

とにおいて $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{p}_3$ を列ベクトルとする行列を P として、 $\mathbf{x}(t) = P\mathbf{y}(t)$ とすると、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = P^{-1}AP\mathbf{y}(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \mathbf{y}(t)$$

となる．以上により，一般解は

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(t) &= P\mathbf{y}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 + C_2t + \frac{1}{2}C_3t^2 \\ C_2 + C_3t \\ C_3 \end{pmatrix} \\ &= e^{2t} \begin{pmatrix} C_2 + C_3t \\ C_1 - C_2 + (C_2 - C_3)t + \frac{1}{2}C_3t^2 \\ -C_1 + 2C_2 + C_3 + (2C_3 - C_2)t - \frac{1}{2}C_3t^2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

初期条件を満たす解は，

$$\mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ C_3 \end{pmatrix}$$

を解いて $C_1 = C_2 = 1, C_3 = -1$ ，すなわち

$$\mathbf{x}(t) = e^{2t} \begin{pmatrix} 1 - t \\ 2t - \frac{1}{2}t^2 \\ -3t + \frac{1}{2}t^2 \end{pmatrix}$$

例 1.9 $n = 3$ として初期値問題

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

の解を求めよう．右辺の行列 A の特性多項式は $(\lambda - 1)(\lambda^2 + 1)$ であるから，固有値は $1, \pm i$ である．固有値 1 に対する固有ベクトルとして $\mathbf{p}_1 = {}^t(0, 1, 0)$ がとれる．固有値 i に対する固有ベクトルとして $\mathbf{v} = {}^t(1, -1, -1+i)$ がとれる．このとき $\bar{\mathbf{v}}$ は固有値 $-i$ に対する固有ベクトルである．よって複素数値の解は， C_1, C_2, C_3 を複素数の定数として

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} + C_3 e^{-it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1-i \end{pmatrix}$$

と表される．これから実数値の解として，

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{x}_2(t) = \operatorname{Re} \left(e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix}, \\ \mathbf{x}_3(t) &= \operatorname{Im} \left(e^{it} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1+i \end{pmatrix} \right) = \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

を得る。これらは補題 1.3 より 1 次独立であることがわかるので、実数値の一般解は、 C_1, C_2, C_3 を実数の定数として

$$\mathbf{x}(t) = C_1 e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + C_3 \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix}$$

と表される。初期条件を満たす解は $C_1 = 2, C_2 = C_3 = 1$, すなわち

$$\mathbf{x}(t) = 2e^t \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \cos t \\ -\cos t \\ -\cos t - \sin t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin t \\ -\sin t \\ \cos t - \sin t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t + \sin t \\ 2e^t - \cos t - \sin t \\ -2 \sin t \end{pmatrix}$$

問題 1.5 次の初期値問題の解を求めよ。

$$(1) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(2) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(3) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$(4) \quad \frac{d}{dt} \mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

2 非線形常微分方程式

2.1 連立常微分方程式

t を変数 (具体的には時間を表すことが多い), $x_1(t), \dots, x_n(t)$ を t の (未知) 関数, $F_1(t, x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(t, x_1, \dots, x_n)$ を t, x_1, \dots, x_n の既知 (与えられた) 関数として, 未知関数 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ に関する (連立) 常微分方程式

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{dx_n}{dt} = F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases} \quad (13)$$

を考えよう。任意の常微分方程式は、この形に書き換えることができる。例えば、前節で扱った定数係数の連立線形微分方程式は、 a_{ij} を実数の定数として

$$F_k(t, x_1, \dots, x_n) = a_{k1}x_1 + \dots + a_{kn}x_n \quad (1 \leq k \leq n)$$

の場合であった．一般に $F_k(t, x_1, \dots, x_n)$ が x_1, \dots, x_n の (t の関数を係数とする) 1 次式であるとき, (13) を線形連立微分方程式という．線形でない微分方程式を非線形微分方程式という．

例 2.1 (Lotka-Volterra の方程式) 時刻 t における被食者 (小魚) の量 $x(t)$ と捕食者 (サメ) の量 $y(t)$ についての数理モデルを表す連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}x(t) = ax(t) - bx(t)y(t), \quad \frac{d}{dt}y(t) = cx(t)y(t) - dy(t)$$

(a, b, c, d は正の定数) は, (13) で $n = 2$, $F_1(t, x, y) = ax - bxy$, $F_2(t, x, y) = cxy - dy$ の場合に相当する． F_1, F_2 は x と y の 2 次式なので, これは非線形微分方程式である．

例 2.2 (Newton の運動方程式) xy 平面内での質量 m の物体の運動を考える．時刻 t における物体の位置を $(x(t), y(t))$ とする．時刻 t で物体が位置 (x, y) にあるときにこの物体が受ける力のベクトルを $(F_1(t, x, y), F_2(t, x, y))$ とすると, Newton の運動方程式は

$$\begin{cases} m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1(t, x, y), \\ m \frac{d^2y}{dt^2} = F_2(t, x, y) \end{cases}$$

となる．これは 2 階の連立常微分方程式である．そこで, $x_1(t) = x(t)$, $x_2(t) = x'(t)$, $x_3(t) = y(t)$, $x_4(t) = y'(t)$ とおくと,

$$\begin{cases} \frac{dx_1}{dt} = x_2 \\ \frac{dx_2}{dt} = \frac{1}{m}F_1(t, x_1, x_3) \\ \frac{dx_3}{dt} = x_4 \\ \frac{dx_4}{dt} = \frac{1}{m}F_2(t, x_1, x_3) \end{cases}$$

という 1 階の連立常微分方程式に書き直される．天体の運動の場合には, 力は Newton の万有引力の法則から定まる．最も簡単な 2 体問題の場合には, 考えている物体が原点にある天体の引力を受けて運動しているとすれば, K を定数として次のように表される．

$$F_1(t, x, y) = -\frac{Kx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_2(t, x, y) = -\frac{Ky}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

前節で扱った定数係数の線形連立微分方程式や「解析学の応用」で扱ったような簡単な単独 (未知関数が一つ) の微分方程式は具体的に解を求めることができたが, 一般の常微分方程式の解を具体的に求めることは困難または不可能である．そこで, 次の 2 つの問題が重要となる．

解の存在と一意性 与えられた常微分方程式の解は存在するか？また、存在するとすれば、どのような条件のもとで解を一つに決められるか？

解の定性的性質 たとえば時間が限りなく大きくなるときの解の挙動や、解が周期的（時間がたつと最初の位置にもどること）かどうか、など解の性質を調べること。

連立常微分方程式 (13) を簡潔に記述するために、ベクトルの記号を用いよう。

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

とおくと、(13) は

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}) \tag{14}$$

と表される。ベクトル値関数 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ が (14) の解であるとは、

$$\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t))$$

が (t がある区間に属するとき) 恒等的に成り立つことである。

ある時刻 t_0 における \mathbf{x} の値 \mathbf{x}_0 を指定して、 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たすような (13) の解を求めることを、(13) に対する初期値問題、 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ のことを初期条件という。

たとえば例 2.2 の場合には、初期条件として $x_1(t_0) = x(t_0)$, $x_2(t_0) = x'(t_0)$, $x_3(t_0) = y(t_0)$, $x_4(t_0) = y'(t_0)$ の 4 つの値を指定することになる。これは時刻 t_0 における物体の位置と速度を指定することを意味する。物理的には、この初期条件から物体の未来の運動が一意的に定まることが予想される。これは数学的には Newton の運動方程式がこの初期条件のもとでただ一つの解を持つということである。このことは証明を要する。

2.2 常微分方程式の解の存在と一意性

一般に n 次元ベクトル $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ に対して、そのノルム $|\mathbf{x}|$ を

$$|\mathbf{x}| = \max\{|x_k| \mid 1 \leq k \leq n\}$$

で定義する。たとえば $m = 2$ のとき $|(1, -1)| = 1$, $|(-2, 3)| = 3$ である。このとき三角不等式

$$|\mathbf{x} + \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}| + |\mathbf{y}| \quad (\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n)$$

が成立することは容易に確かめられる。 $n + 1$ 個の変数 $(t, \mathbf{x}) = (t, x_1, \dots, x_n)$ のベクトル値関数

$$\mathbf{F}(t, \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} F_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}$$

に対して、その偏導関数を

$$\frac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{x})}{\partial t} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial t}(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{F}(t, \mathbf{x})}{\partial x_k} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_k}(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \frac{\partial F_n}{\partial x_k}(t, x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} \quad (k = 1, \dots, n)$$

で定義する。

初期条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たすような微分方程式 (13) の解がただ一つ存在することを示そう。そのために、 a, b を正の定数として、 $\mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ は領域

$$R = \{(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid t_0 \leq t \leq t_0 + a, |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0| \leq b\}$$

で連続かつ x_1, \dots, x_n について偏微分可能で、それらの導関数は連続であると仮定する。

補題 2.1 ある定数 $L > 0$ があって、 (t, \mathbf{x}) と (t, \mathbf{y}) が共に R に属するとき

$$|\mathbf{F}(t, \mathbf{y}) - \mathbf{F}(t, \mathbf{x})| \leq L|\mathbf{y} - \mathbf{x}| \tag{15}$$

が成り立つ。

証明: $1 \leq k \leq n$ をみたす k を固定する。新たな変数 s の関数を

$$G_k(s) = F_k(t, \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x})) = F_k(t, x_1 + s(y_1 - x_1), \dots, x_n + s(y_n - x_n))$$

で定義する。このとき、

$$F_k(t, \mathbf{y}) - F_k(t, \mathbf{x}) = G_k(1) - G_k(0) = \int_0^1 G'_k(s) ds$$

である。一方、合成関数の微分の公式 (連鎖律) により

$$G'_k(s) = \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x}))$$

であるから、

$$\int_0^1 G'_k(s) ds = \sum_{j=1}^n (y_j - x_j) \int_0^1 \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x})) ds$$

となる。以上により、 R において

$$\left| \frac{\partial F_k}{\partial x_j}(t, \mathbf{x} + s(\mathbf{y} - \mathbf{x})) \right| \leq K \quad (1 \leq j, k \leq n)$$

が成り立つような定数 K をとれば、

$$|F_k(t, \mathbf{y}) - F_k(t, \mathbf{x})| = \left| \int_0^1 G'_k(s) ds \right| \leq \sum_{j=1}^n |y_j - x_j| K \leq nK|\mathbf{y} - \mathbf{x}|$$

となる。 $L = nK$ とおいて k について最大値をとれば、補題の結論が得られる。□

命題 2.1 $\mathbf{x}(t)$ が初期条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たす (14) の解であるための必要十分条件は

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s)) ds \quad (16)$$

が成り立つことである。（このような方程式を積分方程式という。）

証明: $\mathbf{x}(t)$ を $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ をみたす (14) の解とすると、

$$\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t_0) = \int_{t_0}^t \frac{d\mathbf{x}(s)}{ds} ds = \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s)) ds$$

である。逆に (16) が成り立つとすると、両辺を微分、および $t = t_0$ を代入して、

$$\frac{d\mathbf{x}(t)}{dt} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t)), \quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

を得る。□

この積分方程式の解を逐次近似法と呼ばれる方法で構成しよう。これは簡単な関数から出発して、次々に新たな関数を定め、それらの関数の極限が求める解になるようにしようというものである。次のようにベクトル値関数 $\mathbf{x}_k(t)$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) を順に定める:

$$\mathbf{x}_0(t) = \mathbf{x}_0, \quad \mathbf{x}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s, \mathbf{x}_k(s)) ds \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (17)$$

極限 $\mathbf{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t)$ が存在して、微分方程式 (14) の初期条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ をみたすようなただ一つの解になることを証明することが、この節の目標である。

補題 2.2 R における $|\mathbf{F}(t, \mathbf{x})|$ の最大値を M として、 $\alpha = \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$ とおくと、 $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ のとき、

$$|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_0| \leq M(t - t_0) \quad (k = 0, 1, 2, \dots) \quad (18)$$

が成立する。

証明: k に関する帰納法で示す。 $\mathbf{x}_0(t) - \mathbf{x}_0 = 0$ であるから $k = 0$ のとき (18) は成立する。 k に対して (18) を仮定すると、 $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ のとき、 $|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_0| \leq M\alpha \leq b$ であるから、 $(t, \mathbf{x}_k(t)) \in R$ となる。従って $|\mathbf{F}(t, \mathbf{x}_k(t))| \leq M$ が成り立つ。(17) より

$$|\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_0| \leq \left| \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s, \mathbf{x}_k(s)) ds \right| \leq \int_{t_0}^t |\mathbf{F}(s, \mathbf{x}_k(s))| ds \leq M(t - t_0)$$

となり、 $k + 1$ についても (18) が成り立つことが示された。□

命題 2.2 $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ のとき、すべての $k = 1, 2, 3, \dots$ について

$$|\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k-1}(t)| \leq \frac{ML^{k-1}}{k!} (t - t_0)^k \quad (19)$$

が成立する。

証明: k に関する帰納法で示す. $k = 1$ のときは, 補題 2.2 より

$$|\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)| = |\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0| \leq M(t - t_0)$$

であるから (19) は成立する. k のとき (19) が成立すると仮定すると, (17), (15) および帰納法の仮定を用いて

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}_{k+1}(t) - \mathbf{x}_k(t)| &= \left| \int_{t_0}^t \{\mathbf{F}(s, \mathbf{x}_k(s)) - \mathbf{F}(s, \mathbf{x}_{k-1}(s))\} ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |\mathbf{F}(s, \mathbf{x}_k(s)) - \mathbf{F}(s, \mathbf{x}_{k-1}(s))| ds \\ &\leq \int_{t_0}^t L |\mathbf{x}_k(s) - \mathbf{x}_{k-1}(s)| ds \leq \int_{t_0}^t L \frac{ML^{k-1}}{k!} (s - t_0)^k ds \\ &= \frac{ML^k}{(k+1)!} (t - t_0)^{k+1} \end{aligned}$$

となるから, (19) が $k+1$ についても成り立つことが示された. \square

定理 2.1 $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ において関数列 $\{\mathbf{x}_k(t)\}_k$ は収束し, その極限 $\mathbf{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t)$ は積分方程式 (16) を満たす.

証明:

$$\mathbf{x}_k(t) = \mathbf{x}_0(t) + (\mathbf{x}_1(t) - \mathbf{x}_0(t)) + \cdots + (\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k-1}(t)) = \mathbf{x}_0 + \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)) \quad (20)$$

であるが, 命題 2.2 と指数関数のテイラー展開を用いて, $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)) \right| &\leq \sum_{j=1}^k |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)| \leq \sum_{j=1}^k \frac{ML^{j-1}}{j!} (t - t_0)^j \\ &= \frac{M}{L} \sum_{j=1}^k \frac{\{L(t - t_0)\}^j}{j!} < \frac{M}{L} (e^{L(t-t_0)} - 1) \\ &\leq \frac{M}{L} (e^{L\alpha} - 1) \end{aligned}$$

が任意の自然数 k について成立することがわかる. これから, 無限級数

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\mathbf{x}_k(t) - \mathbf{x}_{k-1}(t))$$

が収束することが導かれる. (「絶対収束する無限級数は収束する」という定理による.) このとき, (20) より,

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{j=1}^k (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_k(t)$$

となる。さらに、

$$\begin{aligned} |\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)| &\leq \left| \sum_{j=k+1}^{\infty} (\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)) \right| \leq \sum_{j=k+1}^{\infty} |\mathbf{x}_j(t) - \mathbf{x}_{j-1}(t)| \\ &\leq \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{ML^{j-1}}{j!} (t - t_0)^j \leq \frac{M}{L} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(L\alpha)^j}{j!} \end{aligned}$$

自然数 j と ℓ に対して $(j + \ell)! \geq j!\ell!$ であるから、 $\ell = j - k - 1$ とおいて

$$\begin{aligned} \frac{M}{L} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(L\alpha)^j}{j!} &\leq \frac{M}{L} \sum_{j=k+1}^{\infty} \frac{(L\alpha)^{j-k-1} (L\alpha)^{k+1}}{(j - k - 1)! (k + 1)!} \\ &= \frac{M (L\alpha)^{k+1}}{L (k + 1)!} \sum_{\ell=0}^{\infty} \frac{(L\alpha)^\ell}{\ell!} = \frac{M (L\alpha)^{k+1}}{L (k + 1)!} e^{L\alpha} \end{aligned}$$

従って

$$|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_k(t)| \leq \frac{M (L\alpha)^{k+1}}{L (k + 1)!} e^{L\alpha} \quad (21)$$

が成立する。さて、 $\mathbf{x}(t)$ が積分方程式 (16) を満たすことを示そう。

$$\mathbf{x}(t) = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathbf{x}_{k+1}(t) = \mathbf{x}_0 + \lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t F(s, \mathbf{x}_k(s)) ds$$

であるから、

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{t_0}^t F(s, \mathbf{x}_k(s)) ds = \int_{t_0}^t F(s, \mathbf{x}(s)) ds$$

を示せばよい。補題 2.1 と (21) より、 $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ のとき

$$\begin{aligned} \left| \int_{t_0}^t F(s, \mathbf{x}(s)) ds - \int_{t_0}^t F(s, \mathbf{x}_k(s)) ds \right| &\leq \int_{t_0}^t |F(s, \mathbf{x}(s)) - F(s, \mathbf{x}_k(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_k(s)| ds \\ &\leq \frac{M(L\alpha)^{k+1}}{(k + 1)!} e^{L\alpha} (t - t_0) \longrightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

が成立するから、 $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ が積分方程式 (16) を満たすこと、すなわち初期条件 $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たすような微分方程式 (14) の解であることが示された。□

次に解の一意性を示すために、次の補題を証明しよう。

補題 2.3 連続関数 $u(t)$ に対してある正の定数 C があって、 $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ において

$$0 \leq u(t) \leq C \int_{t_0}^t u(s) ds$$

が成り立てば、 $u(t) = 0$ である。

証明: $U(t) = e^{-Ct} \int_{t_0}^t u(s) ds$ とおくと,

$$U'(t) = e^{-Ct} \left\{ u(t) - C \int_{t_0}^t u(s) ds \right\} \leq 0$$

すなわち, $U(t)$ は $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ で単調減少であるから, $U(t) \leq U(t_0) = 0$ である. これと $U(t) \geq 0$ から $U(t) = 0$ でなければならない. $\int_{t_0}^t u(s) ds = e^{Ct} U(t) = 0$ を t で微分して $u(t) = 0$ を得る. \square

定理 2.2 $\mathbf{x}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}(t))$ かつ $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たす関数 \mathbf{x} が, $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ の範囲でただ一つ存在する.

証明: 存在することは定理 2.1 により示されたから, 一意性を示せばよい. $\mathbf{y}(t)$ も $\mathbf{y}'(t) = \mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$ かつ $\mathbf{y}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たすと仮定して, $u(t) = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)|$ とおくと, $\mathbf{x}(t)$ も $\mathbf{y}(t)$ も積分方程式 (16) の解であるから, 補題 2.1 より,

$$\begin{aligned} u(t) = |\mathbf{x}(t) - \mathbf{y}(t)| &= \left| \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s)) ds - \int_{t_0}^t \mathbf{F}(s, \mathbf{y}(s)) ds \right| \\ &\leq \int_{t_0}^t |\mathbf{F}(s, \mathbf{x}(s)) - \mathbf{F}(s, \mathbf{y}(s))| ds \\ &\leq L \int_{t_0}^t |\mathbf{x}(s) - \mathbf{y}(s)| ds = L \int_{t_0}^t u(s) ds \end{aligned} \tag{22}$$

が成り立つ. これと補題 2.3 より $u(t) = 0$ すなわち $\mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(t)$ であることがわかる. \square

以上では, $t_0 \leq t \leq t_0 + \alpha$ の範囲で解を考察したが, $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(-t)$ とおけば,

$$\mathbf{y}'(t) = -\mathbf{x}'(-t) = -\mathbf{F}(t, \mathbf{x}(-t)) = -\mathbf{F}(t, \mathbf{y}(t))$$

であるから, $-\mathbf{F}$ について今までの議論を適用すれば, 初期値問題の解が区間 $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ においてただ一つ存在することがわかる.

例 2.3 微分方程式 $\frac{dx}{dt} = x$ に対する初期値問題 $x(0) = 1$ を考える. $F(t, x) = x$ であるから, $a > 1, b$ を任意の正の実数として, $R = \{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq t \leq a, |x - 1| \leq b\}$ とおくと, R における $|F(t, x)| = |x|$ の最大値は $M = b + 1$ であるから, $\alpha = \min\{a, \frac{b}{M}\} = \frac{b}{b+1} < 1$ である. b を大きくとれば α は 1 に近づくが, 1 以上にはならない. 定理 2.1 により, 解は少なくとも $0 \leq t < 1$ の範囲で存在することになる.

この初期値問題に逐次近似法を適用すると,

$$x_0(t) = 1, \quad x_{k+1}(t) = 1 + \int_0^t x_k(s) ds \quad (k = 0, 1, 2, \dots)$$

となる． $x_1(t), x_2(t), \dots$ を順に計算すると，

$$x_k(t) = 1 + t + \frac{t^2}{2!} + \dots + \frac{t^k}{k!}$$

となることがわかる．よって初期値問題の解は，任意の t に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t) = e^t$ で与えられる．すなわち，この場合は解は，実は無限区間 $[0, \infty)$ で存在する．

例 2.4 $A = (a_{ij})$ を実数を成分とする n 次正方行列， $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ を n 個の未知関数を成分とする縦ベクトルとして，連立微分方程式

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$$

を考えよう．

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x} = \begin{pmatrix} F_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ F_n(x_1, \dots, x_n) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n \end{pmatrix}$$

は t によらず

$$\frac{\partial \mathbf{F}(\mathbf{x})}{\partial x_j} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix}$$

は定数であるから， $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ は，任意の $a, b > 0$ について定理 2.1 と定理 2.2 の仮定 (a, b で定まる領域 R で C^1 級であること) を満たす．よって，任意の $t_0 \in \mathbb{R}$ と任意の $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ について， $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = A\mathbf{x}(t)$ かつ $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$ を満たす $\mathbf{x}(t)$ が区間 $[t_0 - \alpha, t_0 + \alpha]$ ($\exists \alpha > 0$) においてただ 1 つ存在することがわかる．実は，解は \mathbb{R} 全体で定義されることを示すことができる．(これは 1 章で示した解法からもわかる．)

問題 2.1 初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = x + t, \quad x(0) = 0$$

に対して逐次近似法を適用したときの関数列を $\{x_k(t)\}$ とする．

- (1) $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ を t の具体的な式で表せ．
- (2) $x_k(t)$ の具体的な式を予想し，それを数学的帰納法で証明せよ．
- (3) 極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n(t)$ を求めよ．またこの極限は t のどのような範囲で収束するか？
- (4) 定理 2.1 によると，この初期値問題の解は t のどのような範囲で存在することが言えるか？

2.3 不動点と線形化方程式

一般に連立微分方程式 $\frac{d}{dt}\mathbf{x} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x})$ において \mathbf{F} が t によらず $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ と表されるとき、この連立微分方程式のことを自励系 (autonomous system) という。以下では $\mathbf{x} = \mathbf{x}(t)$ を n 個の未知関数 $x_1(t), \dots, x_n(t)$ を成分とする縦ベクトルとして、自励系

$$\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) \tag{23}$$

を考察する。 $\mathbf{F}(\mathbf{x})$ の成分を $F_1(x_1, \dots, x_n), \dots, F_n(x_1, \dots, x_n)$ とする。

定義 2.1 $\mathbf{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ を満たすような点 $\mathbf{c} \in \mathbb{R}^n$ のことを (23) の不動点 (fixed point) という。

不動点 $\mathbf{c} = {}^t(c_1, \dots, c_n)$ を初期値とする (23) の解は $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$ ，すなわち \mathbf{c} に留まる。実際、 $\mathbf{x}(t) = \mathbf{c}$ とすれば、 $\frac{d}{dt}\mathbf{x}(t) = \mathbf{0}$ かつ $\mathbf{F}(\mathbf{x}(t)) = \mathbf{F}(\mathbf{c}) = \mathbf{0}$ だから (23) は、両辺が恒等的に零ベクトルとなり成立する。

多変数関数に対する Taylor の定理（解析学概論 I を参照）により、 \mathbf{F} の各成分について

$$\begin{aligned} F_k(\mathbf{x}) &= F_k((\mathbf{x} - \mathbf{c}) + \mathbf{c}) \\ &= F_k(\mathbf{c}) + (x_1 - c_1) \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(\mathbf{c}) + \dots + (x_n - c_n) \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(\mathbf{c}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2) \\ &= (x_1 - c_1) \frac{\partial F_k}{\partial x_1}(\mathbf{c}) + \dots + (x_n - c_n) \frac{\partial F_k}{\partial x_n}(\mathbf{c}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2) \quad (1 \leq k \leq n), \end{aligned}$$

すなわち

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = (x_1 - c_1) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1}(\mathbf{c}) + \dots + (x_n - c_n) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_n}(\mathbf{c}) + O(|\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2)$$

が成立する。ここで $O(|\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2)$ は \mathbf{x} が \mathbf{c} に近づくときに絶対値が $|\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2$ のある定数倍以下となるような量を表す (Landau の記号)。そこで未知関数 $\mathbf{x}(t)$ を新たな未知関数 $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{c}$ に置き換えて $O(|\mathbf{x} - \mathbf{c}|^2)$ の項を無視すれば、

$$\frac{d}{dt}\mathbf{y}(t) = y_1(t) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_1}(\mathbf{c}) + \dots + y_n(t) \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x_n}(\mathbf{c}) = \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{c})\mathbf{y}(t) \tag{24}$$

を得る。ここで $y_1(t), \dots, y_n(t)$ は $\mathbf{y}(t)$ の成分であり、 $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}}$ は $\frac{\partial F_i}{\partial x_j}$ を第 (i, j) 成分とする n 次正方形行列である (\mathbf{F} の \mathbf{c} における Jacobi 行列と呼ばれる)。これは 1.4 節で考察した定数係数線形連立微分方程式であり、不動点 \mathbf{c} の近くではもとの微分方程式 (23) を近似していると考えられる。線形微分方程式 (24) を自励系 (23) の不動点 \mathbf{c} における線形化方程式という。線形化方程式は具体的に解くことができるので、これによって不動点 \mathbf{c} に十分近い点を初期値とする解の \mathbf{c} の近傍での様子がわかる。

例 2.5 a, b, c, d を正の定数として Lotka-Volterra 方程式

$$\frac{d}{dt}x_1(t) = ax_1(t) - bx_1(t)x_2(t), \quad \frac{d}{dt}x_2(t) = cx_1(t)x_2(t) - dx_2(t)$$

を考察しよう. $F_1(x_1, x_2) = ax_1 - bx_1x_2 = x_1(a - bx_2)$, $F_2(x_1, x_2) = cx_1x_2 - dx_2 = x_2(cx_1 - d)$ だから, 不動点は $(0, 0)$ と $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ の2点である.

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial x_1} & \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \\ \frac{\partial F_2}{\partial x_1} & \frac{\partial F_2}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a - bx_2 & -bx_1 \\ cx_2 & cx_1 - d \end{pmatrix}$$

より, 不動点 $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ における線形化方程式は, $y_1(t) = x_1(t) - \frac{d}{c}$, $y_2(t) = x_2(t) - \frac{a}{b}$ とおくと

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{bd}{c} \\ \frac{ac}{b} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} \quad (25)$$

である. この右辺の行列 A の特性多項式は $\Phi_A(\lambda) = \lambda^2 + ad$ だから, A の固有値は $\pm\sqrt{ad}i$ である.

$$\sqrt{ad}I_2 - A = \begin{pmatrix} \sqrt{ad}i & \frac{bd}{c} \\ -\frac{ac}{b} & \sqrt{ad}i \end{pmatrix}$$

より, 固有値 $\sqrt{ad}i$ に対する固有ベクトルとして $t\left(\frac{i}{\sqrt{ad}}, \frac{c}{bd}\right)$ がとれる. 線形化方程式の一般解は,

$$\begin{aligned} e^{i\sqrt{ad}t} \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{ad}} \\ \frac{c}{bd} \end{pmatrix} &= (\cos \sqrt{ad}t + i \sin \sqrt{ad}t) \begin{pmatrix} \frac{i}{\sqrt{ad}} \\ \frac{c}{bd} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{ad}} \sin \sqrt{ad}t \\ \frac{c}{bd} \cos \sqrt{ad}t \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{ad}} \cos \sqrt{ad}t \\ \frac{c}{bd} \sin \sqrt{ad}t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

の実部と虚部の1次結合であるから, C_1, C_2 を任意定数として

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} &= C_1 \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{ad}} \sin \sqrt{ad}t \\ \frac{c}{bd} \cos \sqrt{ad}t \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{ad}} \cos \sqrt{ad}t \\ \frac{c}{bd} \sin \sqrt{ad}t \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{\sqrt{ad}} \\ \frac{c}{bd} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \sqrt{ad}t & \sin \sqrt{ad}t \\ -\sin \sqrt{ad}t & \cos \sqrt{ad}t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

と表される。(11 ページの公式からもわかる。) この最後の行の左側の行列は行列式が負であるから、線形化方程式の解の軌道は原点（もとの方程式の不動点に対応）のまわりを楕円に沿って正の向き（反時計回り）に回転する。

このことから、Lotka-Volterra 方程式の解は、不動点 $\left(\frac{d}{c}, \frac{a}{b}\right)$ の近傍では、この不動点のまわりを回転すると予想される。すなわち、被食者と捕食者の量は周期的に変動することが推測される。(線形化方程式はもとの方程式の近似ではあるが全く同じではないので、厳密な証明にはなっていない。)

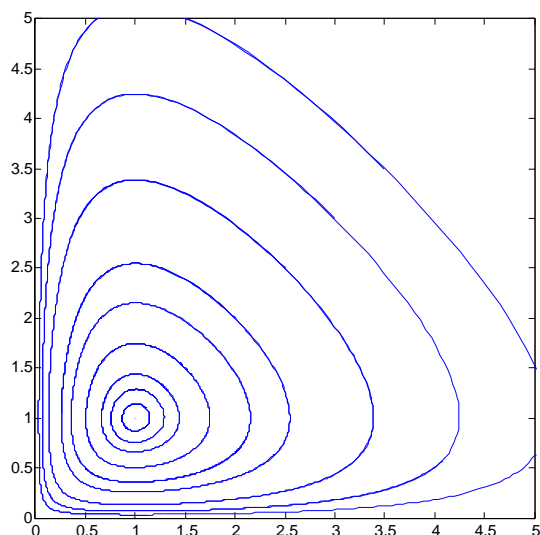
次に不動点 $(0, 0)$ における線形化方程式は $y_1(t) = x_1(t), y_2(x) = x_2(t)$ として、

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & -d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix}$$

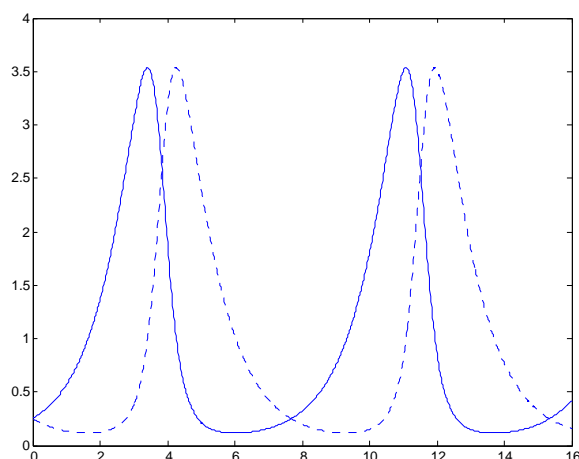
である。この一般解は、 C_1, C_2 を任意定数として

$$\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_1 e^{at} \\ C_2 e^{-dt} \end{pmatrix}$$

と表される。よって $C_1, C_2 > 0$ とすると、 $y_1(t)$ は単調増加、 $y_2(t)$ は単調減少である。このことから、 $x_1(t)$ (被食者) と $x_2(t)$ (捕食者) が共に少ないときは、被食者は(捕食者が少ないので)増加し、捕食者は(被食者が少ないので)減少することがわかる。



下の図は被食者（実線）と捕食者（点線）の数を時間 t （横軸）の関数として表示したグラフである。



問題 2.2 次の連立微分方程式の不動点と線形化方程式を求め、各々の不動点の近傍における解の軌道の様子を調べよ。

$$\frac{dx_1}{dt} = x_1(1 - x_1 - 2x_2), \quad \frac{dx_2}{dt} = x_2(1 - x_2 - 2x_1)$$

- Lotka-Volterra 方程式の解が周期的であることの証明

$x_1 > 0, x_2 > 0$ としてよいので、 $X_1 = \log x_1, X_2 = \log x_2$ を新たな未知関数とすると、

$$\frac{d}{dt}X_1 = \frac{1}{x_1} \frac{dx_1}{dt} = a - bx_2 = a - be^{X_2}, \quad \frac{d}{dt}X_2 = \frac{1}{x_2} \frac{dx_2}{dt} = cx_1 - d = ce^{X_1} - d \quad (26)$$

が成立する．ここで $F_1(X_2) = a - be^{X_2}, F_2(X_1) = ce^{X_1} - d$ とおく． F_1 は X_2 のみの関数、 F_2 は X_1 のみの関数であることに注意して、 F_1 と F_2 の原始関数の差

$$H(X_1, X_2) = aX_2 - be^{X_2} - ce^{X_1} + dX_1$$

を考えると、

$$\frac{\partial H}{\partial X_1}(X_1, X_2) = -ce^{X_1} + d = -F_2(X_1), \quad \frac{\partial H}{\partial X_2}(X_1, X_2) = a - be^{X_2} = F_1(X_2)$$

となる． $X_k = X_k(t) (k = 1, 2)$ を (26) の解とすると、上の式と合成関数の微分の公式より

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}H(X_1(t), X_2(t)) &= \frac{\partial H}{\partial X_1}(X_1(t), X_2(t))X_1'(t) + \frac{\partial H}{\partial X_2}(X_1(t), X_2(t))X_2'(t) \\ &= -F_2(X_1(t))X_1'(t) + F_1(X_2(t))X_2'(t) \\ &= -F_2(X_1(t))F_1(X_2(t)) + F_1(X_2(t))F_2(X_1(t)) = 0 \end{aligned}$$

を得る．これは $H(X_1, X_2)$ の値が微分方程式 (26) の解曲線上では不変であること、すなわち (26) の解曲線は、 $H(X_1, X_2)$ の値が一定であるような集合（曲線）を動くことを意味している．以上により Lotka-Volterra 方程式の解 $(x_1, x_2) = (x_1(t), x_2(t))$ は、

$$a \log x_2 - bx_2 - cx_1 + d \log x_1 = C$$

(C は定数) で定義される閉曲線上を動くことが示された。

2.4 微分方程式の保存量と天体の運動

大きな質量の天体（たとえば太陽）の周りを運動する天体（地球や火星などの惑星）の運動を考察しよう。このとき惑星は太陽を含むある平面内で運動することを示すことができるので、簡単のため、太陽を xy 平面の原点として質量 m の天体の位置を (x, y) とする。実際の運動では $x = x(t)$, $y = y(t)$ は時刻 t の関数である。この天体が太陽から受ける引力のベクトルを $(F_1(x, y), F_2(x, y))$ とすると、Newton の運動方程式は

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_1(x, y), \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_2(x, y)$$

となる。これは2階の連立常微分方程式である。そこで、 $u(t) = mx'(t)$, $v(t) = my'(t)$ とおくと $((u(t), v(t)))$ は運動量ベクトルと呼ばれる

$$\frac{dx}{dt} = \frac{1}{m}u, \quad \frac{du}{dt} = F_1(x, y), \quad \frac{dy}{dt} = \frac{1}{m}v, \quad \frac{dv}{dt} = F_2(x, y) \quad (27)$$

という連立常微分方程式に書き換えられる。ここで $F_1(x, y)$ と $F_2(x, y)$ は Newton の万有引力の法則により

$$F_1(x, y) = -\frac{Kmx}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}, \quad F_2(x, y) = -\frac{Kmy}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}$$

で与えられる。ここで K は原点にある天体の質量のみに依存する正の定数であり、惑星の質量には無関係である。ここで

$$U(x, y) = \frac{Km}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

という関数を導入すると、

$$\frac{\partial}{\partial x}U(x, y) = F_1(x, y), \quad \frac{\partial}{\partial y}U(x, y) = F_2(x, y)$$

が成立することがわかる。（ $-U$ は位置エネルギーを表している。）

命題 2.3 (エネルギーの保存法則) x, y, u, v の関数（エネルギー関数） $E = E(x, y, u, v)$ を

$$E(x, y, u, v) = \frac{1}{2m}(u^2 + v^2) - U(x, y)$$

により定義する。このとき、 $x(t), y(t), u(t), v(t)$ を運動方程式 (27) の解とすると、 $E(x(t), y(t), u(t), v(t))$ は t によらない定数である。

証明: E の t についての導関数が 0 となることを示せばよい. 合成関数の微分の公式と (27) により

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} E(x(t), y(t), u(t), v(t)) &= \frac{\partial E}{\partial x} x'(t) + \frac{\partial E}{\partial y} y'(t) + \frac{\partial E}{\partial u} u'(t) + \frac{\partial E}{\partial v} v'(t) \\ &= -F_1((x(t), y(t))x'(t) - F_2((x(t), y(t))y'(t) + \frac{1}{m}u(t)u'(t) + \frac{1}{m}v(t)v'(t) \\ &= -\frac{1}{m}F_1((x(t), y(t))u(t) - \frac{1}{m}F_2((x(t), y(t))v(t) \\ &\quad + \frac{1}{m}u(t)F_1(x(t), y(t)) + \frac{1}{m}v(t)F_2(x(t), y(t)) = 0 \end{aligned}$$

となるから示された. \square

極座標を用いて $x = x(t) = r \cos \theta$, $y = y(t) = r \sin \theta$ と表そう. ここで $r = r(t)$ と $\theta = \theta(t)$ は t の関数である.

命題 2.4 (角運動量の保存法則) $x(t), y(t), u(t), v(t)$ を運動方程式 (27) の解とすると, $r(t)^2\theta'(t)$ は定数である. (この量は角運動量と呼ばれる.)

証明: $x(t) = r(t) \cos \theta(t)$ と $y(t) = r(t) \sin \theta(t)$ を t について 2 回微分して

$$\begin{aligned} x'(t) &= r'(t) \cos \theta(t) - r(t)\theta'(t) \sin \theta(t), \\ y'(t) &= r'(t) \sin \theta(t) + r(t)\theta'(t) \cos \theta(t), \\ x''(t) &= r''(t) \cos \theta(t) - 2r'(t)\theta'(t) \sin \theta(t) - r(t)\theta''(t) \sin \theta(t) - r(t)\theta'(t)^2 \cos \theta(t), \\ y''(t) &= r''(t) \sin \theta(t) + 2r'(t)\theta'(t) \cos \theta(t) + r(t)\theta''(t) \cos \theta(t) - r(t)\theta'(t)^2 \sin \theta(t) \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} -y(t)x''(t) + x(t)y''(t) &= -x''(t)r(t) \sin \theta(t) + y''(t)r(t) \cos \theta(t) \\ &= \{2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t)\}r(t) \end{aligned}$$

となるが, 一方 (27) より

$$\begin{aligned} -y(t)x''(t) + x(t)y''(t) &= -\frac{1}{m}y(t)F_1(x(t), y(t)) + \frac{1}{m}x(t)F_2(x(t), y(t)) \\ &= -y(t)\frac{Kx(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{\frac{3}{2}}} + x(t)\frac{Ky(t)}{(x(t)^2 + y(t)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるから, $r(t) > 0$ に注意して

$$2r'(t)\theta'(t) + r(t)\theta''(t) = 0$$

を得る. 従って

$$\frac{d}{dt} \{r(t)^2\theta'(t)\} = 2r(t)r'(t)\theta'(t) + r(t)^2\theta''(t) = 0$$

となるから $r(t)^2\theta'(t)$ は定数である。□

以上の2つの命題により

$$E = \frac{1}{2m} \{u(t)^2 + v(t)^2\} - \frac{Km}{\sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}}, \quad k = r(t)^2\theta'(t)$$

は定数である。 $k = 0$ のときは $\theta'(t) = 0$ より θ は一定だから、惑星は太陽に向かって、または太陽と反対方向に直線上を動く。以下 $k \neq 0$ とする。

$$u(t)^2 + v(t)^2 = m^2 \{x'(t)^2 + y'(t)^2\} = m^2 r'(t)^2 + m^2 r(t)^2 \theta'(t)^2$$

を用いて E の式を極座標で表すと

$$E = \frac{m}{2} \{r'(t)^2 + r(t)^2 \theta'(t)^2\} - \frac{Km}{r(t)} \tag{28}$$

となる。 $r(t)^2\theta'(t) = k$ に注意してこの式を $r'(t)$ について解くと

$$r'(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{2K}{r(t)} - \frac{k^2}{r(t)^2}} = \pm \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{K^2}{k^2} - \left(\frac{k}{r(t)} - \frac{K}{k}\right)^2}$$

となる。 r と θ の関係を求めるために $\theta'(t) = kr(t)^{-2}$ を用いると、

$$\frac{dr}{d\theta} = \frac{r'(t)}{\theta'(t)} = \pm \frac{r^2}{k} \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{K^2}{k^2} - \left(\frac{k}{r} - \frac{K}{k}\right)^2}$$

を得る（ここでは r を θ の関数とみなしているのので $r(t)$ ではなく単に r とした）。これは変数分離形の微分方程式であり、

$$\int \frac{k dr}{r^2 \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{K^2}{k^2} - \left(\frac{k}{r} - \frac{K}{k}\right)^2}} = \pm \int d\theta = \pm(\theta + c)$$

を解けばよい。 $a = \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{K^2}{k^2}}$ として $s = \frac{1}{a} \left(\frac{k}{r} - \frac{K}{k}\right)$ とおいて左辺を置換積分すると

$$\begin{aligned} \int \frac{k dr}{r^2 \sqrt{\frac{2E}{m} + \frac{K^2}{k^2} - \left(\frac{k}{r} - \frac{K}{k}\right)^2}} &= \int \frac{k dr}{ar^2 \sqrt{1 - \frac{1}{a^2} \left(\frac{k}{r} - \frac{K}{k}\right)^2}} \\ &= - \int \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = \cos^{-1} s \end{aligned}$$

となる（積分定数は省略した）。これから

$$s = \cos(\pm(\theta + c)) = \cos(\theta + c)$$

を得る。座標軸を原点のまわりに c ラジアン回転すれば $\theta + c$ は θ となるので、 $s = \cos \theta$ としてよい。これから

$$\frac{1}{a} \left(\frac{k}{r} - \frac{K}{k}\right) = \cos \theta \quad \text{すなわち} \quad ar \cos \theta + \frac{K}{k} r = k$$

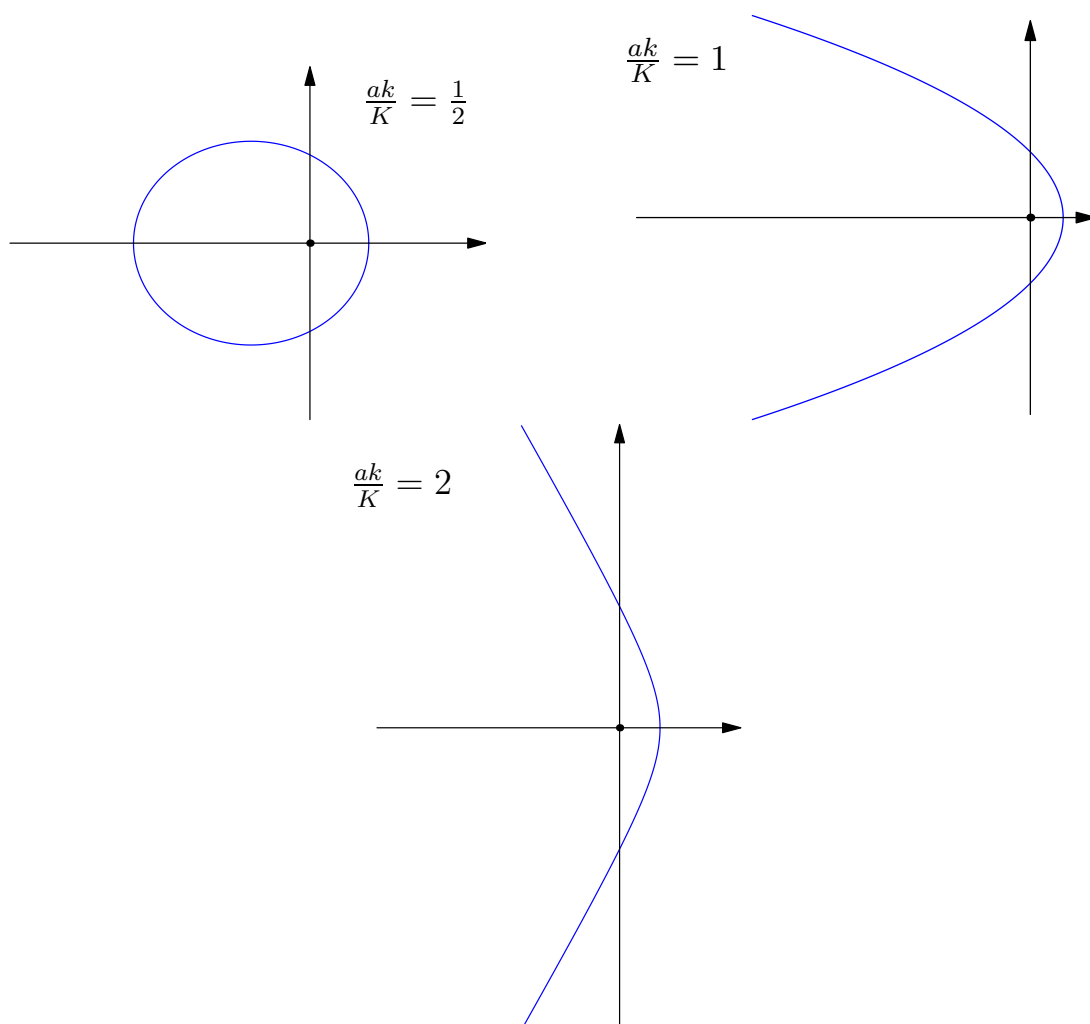
が導かれる。これは惑星の軌道を極座標で表した式である。この最後の式と $r \cos \theta = x$ より

$$r = \frac{k}{K}(k - ax) \quad \text{よって} \quad x^2 + y^2 = r^2 = \frac{k^2}{K^2}(k - ax)^2 = \frac{a^2 k^2}{K^2} x^2 - \frac{2ak^3}{K^2} x + \frac{k^4}{K^2}$$

となり、移項して整理すると

$$\left(1 - \frac{a^2 k^2}{K^2}\right) x^2 + \frac{2ak^3}{K^2} x + y^2 = \frac{k^4}{K^2}$$

となる。これは2次曲線の方程式であり、 $0 \leq \frac{a|k|}{K} < 1$ のときは楕円、 $\frac{a|k|}{K} = 1$ のときは放物線、 $\frac{a|k|}{K} > 1$ のときは双曲線を表す。（ただし $k \neq 0$ としている。 $k = 0$ のときは半直線になる。）



目次

1	定数係数連立線形微分方程式	3
1.1	2個の未知関数についての連立微分方程式	3
1.2	解の軌道	12
1.3	行列の Jordan 標準形	17
1.4	一般の定数係数連立線形微分方程式	24
2	非線形常微分方程式	31
2.1	連立常微分方程式	31
2.2	常微分方程式の解の存在と一意性	33
2.3	不動点と線形化方程式	40
2.4	微分方程式の保存量と天体の運動	44