

空間グラフの不変量と局所変形

新國 亮* †

東北大学大学院情報科学研究科

2002年7月25日

1. はじめに

本稿では、**グラフ**といえは有限グラフで、自然に位相空間と考えます。グラフ G の 3次元空間 \mathbf{R}^3 (もしくは3次元球面 S^3) への埋め込み $f: G \rightarrow \mathbf{R}^3$ を、**空間グラフ**、もしくは G の**空間埋め込み**といいます。特に G が、 S^1 もしくは幾つかの S^1 の非交和と同相なときは、 f は**結び目**及び**絡み目**に他なりません。

空間グラフ理論とは、空間グラフを、主に結び目理論の観点から調べる研究領域です。筆者は、特に不変量と局所変形の相互の結び付きに着目して、空間グラフの幾何学的な構造を捉えたいと思っています。その基本テーマは、結び目理論と同様に、グラフについてその空間埋め込みがどれくらいあるかを分類することですが、対象を特に S^1 に限定していないので、統一的な取扱いが非常に難しく、また、結び目理論では見られない特有の現象が生じることがあります。研究方法としては、結び目理論の手法は勿論、グラフ理論の組み合わせの手法も用いられますが、こと全ての空間グラフの統一的な取扱いには、位相幾何学的な手法が有効であるように思います。

2節では、現在知られている、位相幾何学的な手法で全ての空間グラフに定義できる不変量と、幾何学的な分類問題との関わりについて述べます。3節では、結び目理論の手法を応用した空間グラフの研究、特に結び目の次数3の Vassiliev 不変量を応用して得られた結果について解説します。

2. Wu 不変量

全ての空間グラフに定義できる不変量は、まだそれほど多くありません。ここでは、空間グラフ、及びグラフの平面はめ込みについて、**Wu 不変量**と呼ばれる代数的な不変量と、分類問題との関わりについて説明します。

2.1. 空間グラフの Wu 不変量と、ホモロジー分類

空間グラフにおいて、緩やかではありますが、最も基本的な分類を与えるのは、**ホモロジー**という同値関係です。グラフ G の空間埋め込み f と g は、それらを繋ぐ局所平坦な埋め込み $\Phi: (G \times I) \# \bigcup_{i=1}^n S_i \rightarrow \mathbf{R}^3 \times I$ が存在するとき、**ホモログス**であるといいます [34]。ここに $I = [0, 1]$,

*nick@ims.is.tohoku.ac.jp

†<http://www.ims.is.tohoku.ac.jp/~nick/index-e.html>

S_i は向き付け可能な閉曲面, $\#$ は S_i と G のある辺 e と I との積 $e \times I$ との連結和を表します. 空間グラフのホモロジー分類に関して, 次が知られています.

定理 2.1.1. (谷山 [36], 本橋-谷山 [12]) グラフ G の空間埋め込み f, g に対し, 次の条件はそれぞれ同値である.

- (1) f と g はホモログス,
- (2) $\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g)$, ここで \mathcal{L} は **Wu 不変量**,
- (3) f と g は, Δ 変形 [11, 13] (図 2.1) で互いに移り合う. \square

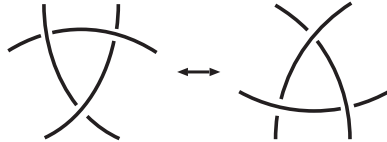


図 2.1.

ここで Wu 不変量とは, W.T. Wu により多面体のユークリッド空間への埋め込みに対して定義されたアイソトピー不変量で [42], 谷山 [36] において空間グラフに応用されました. それは以下のように定義されます. $\tilde{\Delta}(x) = (x, x)$ を位相空間 X の $X \times X$ への対角埋め込みとし, $\tilde{X}^* = X \times X - \tilde{\Delta}(X)$ とおきます. 対合 $\sigma(x, y) = (y, x)$ に対し, 特異複体 $S(\tilde{X}^*, \sigma) = \text{Ker}(1 + \sigma\#)$ の整係数コホモロジーを, \tilde{X}^* の歪対称コホモロジーといいます. いま, f により誘導される準同型写像 $f^* : H^2(\tilde{\mathbf{R}}^3, \sigma) \rightarrow H^2(\tilde{G}^*, \sigma)$ において, $H^2(\tilde{\mathbf{R}}^3, \sigma) \cong \mathbf{Z}$ [42] の生成元の行き先を, f の Wu 不変量と呼び, $\mathcal{L}(f)$ と書きます.

定理 2.1.1 より, 空間グラフのホモロジー類は, Δ 変形という局所変形によって特徴付けられ, かつ, 代数的な不変量によって完全に分類されることがわかります. そこで具体的に同値類のリストを作成する為には, この不変量が計算可能であることが大切ですが, $L(G)$ の生成元と空間グラフのダイアグラムが与えられれば, Wu 不変量は計算可能で, 実際, 筆者により, n 頂点完全グラフ¹ K_n などの空間埋め込みについては, Wu 不変量が全て計算されています [18].

空間グラフのホモロジー分類については, 他にも様々な分類定理があります [13, 43, 33, 31, 29].

2.2. グラフの平面はめ込みの Wu 不変量と, 局所アイソトピー分類

空間グラフの射影図として, グラフの平面はめ込みという対象が自然に現れます. **knotted 射影** [38, 32] の現象などからも, グラフの平面はめ込みの捻れ具合は, もとの空間グラフの絡み具合と関係があると考えられますが, Wu は, はめ込みについても, 局所アイソトピー不変量を定義しています [41]. ここでは, グラフの平面はめ込みについて, Wu の不変量を応用することを考えます.

グラフの平面はめ込みで, 特に辺の内点同士の横断的 2 重点しか多重点に持たないものは, **ジェネリック**であることにします. はめ込み $f_0, f_1 : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ は, f_0 から f_1 へのホモトピー $F : G \times I \rightarrow \mathbf{R}^2$ が存在し, かつ G のある開被覆 $\{U_\lambda\}$ が存在して, $f_t(x) = F(x, t)$ に対し, 任意の t で $f_t|_{U_\lambda}$ が埋め込みであるとき, **局所アイソトピック**であるといいます.

$G \times G$ を σ による作用で割る射影を π とし, $\pi(\tilde{G}^*) = G^*$ と書きます. また, $\pi(\tilde{\Delta}(G)) = \Delta(G)$ とします. $G \times G$ における $\tilde{\Delta}(G)$ の近傍 \tilde{U} に対し, $\tilde{U}^* = \tilde{U} - \tilde{\Delta}(G)$ を \tilde{G}^* における $\tilde{\Delta}(G)$ の約近

¹ 頂点数が n で, どの 2 頂点もそれぞれ 1 本の辺で結ばれているグラフ.

傍といいます. σ 不変な近傍 \tilde{U} に対し, \tilde{U}^* を σ による作用で割ったものを U^* と書いて, G^* における $\Delta(G)$ の約近傍と呼ぶことにします.

いま, G^* における $\Delta(G)$ の約近傍全体 $\{U_\lambda^*\}$ を, $U_\lambda^* \supset U_\mu^*$ のとき $U_\lambda^* \prec U_\mu^*$ であると定義することで有向集合と考え, U_λ^* に対して $H^1(U_\lambda^*; \mathbf{Z})$ を, 更に $U_\lambda^* \prec U_\mu^*$ に対して, 包含写像から定まる準同型写像 $i_\lambda^{\mu*} : H^1(U_\lambda^*; \mathbf{Z}) \rightarrow H^1(U_\mu^*; \mathbf{Z})$ をそれぞれ対応させることによって, 加群の帰納系 $\{H^q(U_\lambda^*; \mathbf{Z}), i_\lambda^{\mu*}\}$ を得ます. その帰納的極限 $\varinjlim H^1(U_\lambda^*)$ を $R(G)$ と書きます.

はめ込み $f : G \rightarrow \mathbf{R}^2$ に対し, G のある開被覆 $\mathcal{U} = \{U_\nu\}$ が存在して, 各 ν に対し $f|_{U_\nu}$ が埋め込みになっていますが, このとき

$$\tilde{W}_\mathcal{U} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \neq x_2, \text{ある } U_\nu \text{ が存在して } x_1, x_2 \in U_\nu\}$$

とおくと, これは \tilde{G}^* における $\tilde{\Delta}(G)$ の σ 不変約近傍で, $W_\mathcal{U} = \pi(\tilde{W}_\mathcal{U})$ と書くとき, 連続写像 $\bar{f} : W_\mathcal{U} \rightarrow (\mathbf{R}^2)^*$ が $\bar{f}[x_1, x_2] = [f(x_1), f(x_2)]$ で定義されます. いま, $(\mathbf{R}^2)_2^*$ から S^1 への σ 同変な変形レトラクションがあることに注意し, $H^1(S^1; \mathbf{Z}) \cong \mathbf{Z}$ の生成元の

$$H^1(S^1; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\cong} H^1((\mathbf{R}^2)_2^*; \mathbf{Z}) \xrightarrow{\bar{f}^*} H^1(W_\mathcal{U}; \mathbf{Z}) \xrightarrow{i_\mathcal{U}^*} R(G)$$

による行き先を, f の **Wu 不変量** と呼び, $\mathcal{R}(f)$ と書きます. ここで \bar{f}^* は \bar{f} から誘導される準同型写像で, $i_\mathcal{U}^*$ は自然な準同型写像を表します. このとき, 次が成り立ちます.

定理 2.2.1. ([23]) グラフ G のジェネリックな平面はめ込み f, g に対し, 次の条件は互いに同値である.

- (1) f と g は局所アイソトピック,
- (2) $\mathcal{R}(f) = \mathcal{R}(g)$,
- (3) f と g は図 2.2 の変形で互いに移り合う. \square

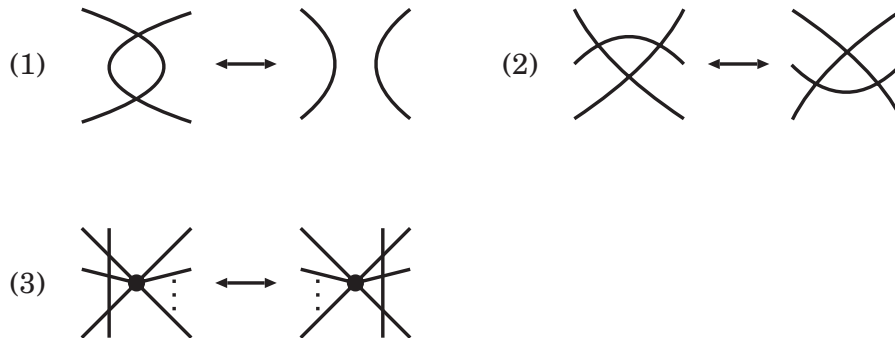


図 2.2.

従って, グラフのジェネリックな平面はめ込みの局所アイソトピー類は, 図 2.2 の局所変形によって特徴付けられ, かつ Wu 不変量によって完全に分類されます (特に $G \approx S^1$ の場合は, 平面曲線の正則ホモトピー分類に対応しています [40, 8]). 更にこの場合は, 全ての有限グラフのジェネリックな平面はめ込みについて, Wu 不変量は具体的に計算することができます [23].

実は, 空間グラフの Wu 不変量, 及びグラフの平面はめ込みの Wu 不変量は, それぞれ 2 成分絡み目の絡み数, 及び平面曲線の回転数の一般化で, 一種の特性類とも見做すことができます. 更により深い情報を抽出するような, 位相幾何学的に自然な不変量を見出すことが今後の課題です.

3. 結び目の次数3の Vassiliev 不変量の, 空間グラフ理論への応用

結び目の次数2の **Vassiliev 不変量** (= 結び目 K の **Conway 多項式**の2次の係数 $a_2(K)$) は, 空間グラフ理論において効果的に応用されて来ました. 例えば空間グラフの**結び目内蔵性** [3, 4, 30], 結び目に関する**実現問題** [39, 26], 空間グラフのホモトピー不変量 [35] などが挙げられます.

ここでは, 結び目の次数3の Vassiliev 不変量 (= 結び目 K の **Jones 多項式**の1における3階微分係数 $V_K^{(3)}(1)$) を応用した空間グラフの研究について紹介します.

3.1. 空間グラフの Δ 型ホモトピー

空間グラフ $f, g: G \rightarrow \mathbf{R}^3$ は, 同一辺上の Δ 変形で移り合うとき, Δ 辺ホモトピックであるといい, 隣接2辺上の Δ 変形で移り合うとき, Δ 頂点ホモトピックであるといいます. これらは, Δ 絡み目ホモトピー [14, 15, 16, 17, 27, 28] の, 空間グラフへの自然な一般化です.

これらが, どのくらい細かい分類を与えるのかを見ておきます. いま, G の空間埋め込み f, g は, それらを繋ぐレベルを保存する埋め込み $\Phi: G \times I \rightarrow \mathbf{R}^3 \times I$ が存在するとき, **アイソトピック**であるといい², 同一辺上の交差交換で移り合うとき, **ホモトピック**であるといいます [34]. これらは前節で述べたホモロジーよりも強い同値関係です. このとき, 次が成り立ちます.

命題 3.1.1. ([20]) グラフ G の空間埋め込み f, g に対し,

- (1) f と g が Δ 辺ホモトピック $\Rightarrow f$ と g は Δ 頂点ホモトピック,
- (2) f と g がアイソトピック $\Rightarrow f$ と g は Δ 頂点ホモトピック $\Rightarrow f$ と g はホモトピック. \square

従って, 特に Δ 頂点ホモトピー分類は, アイソトピーとホモトピーの間の分類を与え, また, Δ 頂点ホモトピー不変量は自動的に Δ 辺ホモトピー不変量及びアイソトピー不変量になります.

絡み目の場合は, Conway 多項式を用いて Δ 絡み目ホモトピー不変量が構成され, 特に2成分の場合は分類も完了しています (中西 [14] 及び中西-大山 [15, 16]). ここでは, 空間グラフが含む結び目 K の $V_K^{(3)}(1)$ を用いて, 空間グラフの Δ 型ホモトピー不変量を構成することを考えます.

空間グラフのホモトピー不変量は, 結び目理論では良く知られた次の関係式:

$$a_2(J_+) - a_2(J_-) = \text{lk}(J_0)$$

を応用することにより見出されました [35]. ここで J_+ , J_- 及び J_0 は図 3.1 で示されたような結び目及び2成分絡み目で, lk は絡み数です.

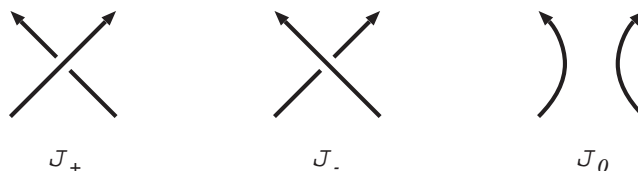


図 3.1.

一方, $V^{(3)}(1)$ と Δ 変形について, 次の関係が成り立ちます (より一般に, Δ 変形と **HOMFLY 多項式**との間の関係に拡張されます. 金信泰造氏と筆者による共同研究 [23] も参照して下さい).

² 局所平坦性は仮定しないので, アンビエント・アイソトピックとは限りません.

定理 3.1.2. ([22, 20, 7])

$$V_{K_+}^{(3)}(1) - V_{K_-}^{(3)}(1) = 36\text{Lk}(K_0) - 18.$$

ここで K_+ , K_- 及び K_0 は図 3.2 で示されたような結び目及び 3 成分絡み目で, Lk は全絡み数. \square

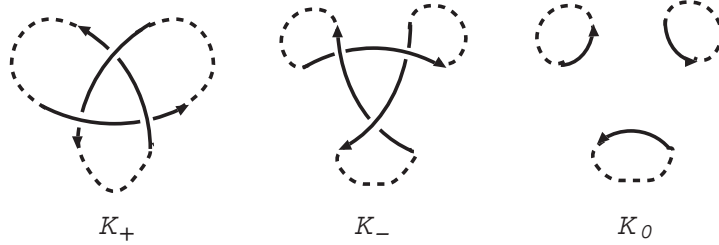


図 3.2.

これにより, a_2 を用いた空間グラフのホモトピー不変量の構成と全く平行に, $V^{(3)}(1)$ を用いた空間グラフの Δ 型ホモトピー不変量を構成することができます. 以下, それを説明します.

グラフ G に対し, $\Gamma(G)$ で G の全てのサイクル, G の辺 e に対して, $\Gamma_e(G)$ で e を含む G の全てのサイクル, G の 2 辺 e_1, e_2 に対して, $\Gamma_{e_1, e_2}(G)$ で e_1, e_2 を含む G の全てのサイクルの集合をそれぞれ表すことにします.

e を G の辺として, 勝手な向きを 1 つ与えておき, 更に $\Gamma_e(G)$ の各元に対しても, e から誘導される向きを与えておきます. $\mathbf{Z}_0 = \mathbf{Z}$, $\mathbf{Z}_n = \mathbf{Z}/n\mathbf{Z}$ ($n \in \mathbf{N}$) として, 写像 $\omega : \Gamma(G) \rightarrow \mathbf{Z}_n$ を $\Gamma(G)$ 上の重みと呼びます. 重み ω は, $H_1(G; \mathbf{Z}_n)$ において $\sum_{\gamma \in \Gamma_e(G)} \omega(\gamma)\gamma = 0$ を満たすとき, e 上でバランスが取れているといいます.

次に, e_1, e_2 を G の隣接辺の組として, e_1 に勝手な向きを 1 つ与えておき, 更に $\Gamma_{e_1, e_2}(G)$ の各元に対しても, e_1 から誘導される向きを与えておきます. いま, 重み ω は, $H_1(G; \mathbf{Z}_n)$ において $\sum_{\gamma \in \Gamma_{e_1, e_2}(G)} \omega(\gamma)\gamma = 0$ を満たすとき, e_1, e_2 上でバランスが取れているといいます.

そこで, G の空間埋め込み $f : G \rightarrow \mathbf{R}^3$ と, 重み ω に対し,

$$n_\omega(f) \equiv \frac{1}{18} \sum_{\gamma \in \Gamma(G)} \omega(\gamma) V_{f(\gamma)}^{(3)}(1) \pmod{n}$$

とおくとき³, 次が成り立ちます.

定理 3.1.3. ([20]) $\omega : \Gamma(G) \rightarrow \mathbf{Z}_n$ を重みとするとき,

- (1) 重み ω が, G の全ての辺上でバランスが取れているなら, n_ω は Δ 辺ホモトピー不変量である.
- (2) 重み ω が, G の全ての隣接辺上でバランスが取れているなら, n_ω は Δ 頂点ホモトピー不変量である. \square

例 3.1.4. 図 3.3 の空間グラフ f_m は, K_4 の空間埋め込みで, 任意の整数 m について, 自明な埋め込みと Δ 頂点ホモトピックです.

いま, 4 サイクルに対しては 1 を, 3 サイクルに対しては -1 を対応させる重み $\omega : K_4 \rightarrow \mathbf{Z}$ によって, Δ 辺ホモトピー不変量 n_ω が得られます. $n_\omega(f_m) = 2m$ となるので, 異なる i, j に対して

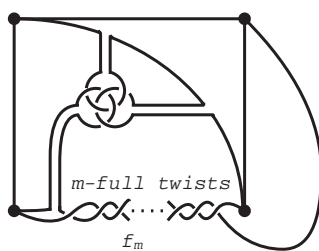


図 3.3.

f_i と f_j は Δ 辺ホモトピックでないことがわかります. これは命題 3.1.1 (1) の逆が成り立たない例にもなっています.

例 3.1.5. 図 3.4 の空間グラフ f_m は, K_5 の空間埋め込みで, f_i と f_j は互いにホモトピックです.

いま, 5 サイクルに対しては 1 を, 4 サイクルに対しては -1 を, そして 3 サイクルに対しては 0 を対応させる重み $\omega: K_5 \rightarrow \mathbf{Z}$ によって, Δ 頂点ホモトピー不変量 n_ω が得られます. $n_\omega(f_m) = -2m$ となるので, 異なる i, j に対して f_i と f_j が Δ 頂点ホモトピックでないことがわかります. 従って命題 3.1.1 (2) より, f_i と f_j はアイソトピックでもなく, 図 3.4 は, 互いにホモトピックですがアイソトピックでない空間グラフの無限族の例となっています.

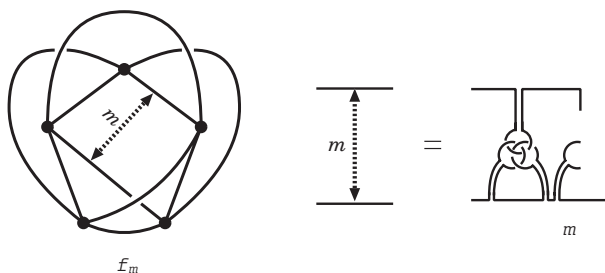


図 3.4.

3.2. 空間グラフにおける結び目の実現問題

空間グラフが含む結び目の集合は, 一般には独立ではありません. 即ち, 次の定義が意味を持ちます: 任意の $\gamma \in \Gamma(G)$ に対して, 結び目 $\phi_\gamma: \gamma \rightarrow \mathbf{R}^3$ を与えた集合 $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G)\}$ は, ある空間埋め込み $f: G \rightarrow \mathbf{R}^3$ が存在して, 任意の $\gamma \in \Gamma(G)$ に対して $f|_\gamma$ と ϕ_γ がアンビエント・アイソトピックとなるとき, **実現可能**であるといいます. 任意の $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G)\}$ が実現可能なグラフ G は (**結び目に関して**) **順応性**を持つといいます.

このような現象を捉える為には, その現象を持つ”極小な”グラフを見出すことが大切です. グラフ全体の集合に, 辺の縮約及び部分グラフを取るという操作で張られる順序 \leq を入れるとき, 順応性を持たないグラフ G で, $H < G$ なる任意のグラフ H は順応性を持つようなもの全体の集合

³ 結び目 K に対し, $\frac{1}{18}V_K^{(3)}(1)$ は常に整数値をとります.

Ω を, (順応性に関する) 障害集合と呼び, Ω の元を禁止グラフと呼びます. 非平面的な禁止グラフは $K_5, K_{3,3}$ のみで [44], 平面的な禁止グラフは現在のところ 8 個が発見されています⁴ [39] (図 3.5).

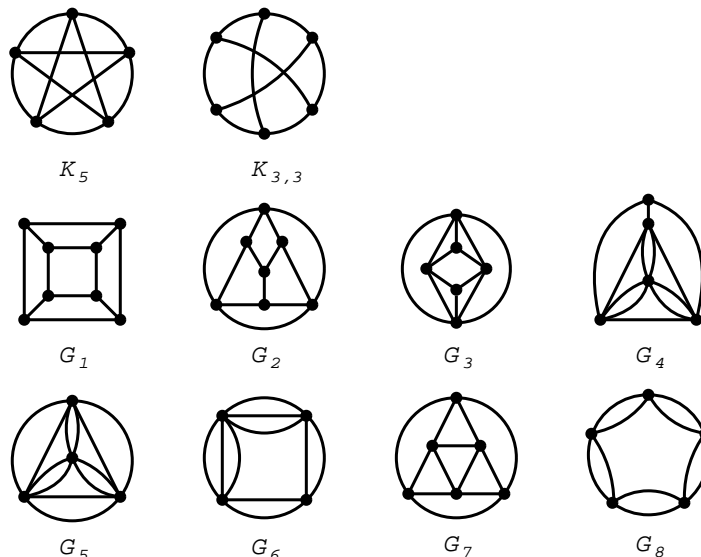


図 3.5.

さて, Ω の元 G については, 実現不可能な結び目集合 $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G)\}$ が存在するわけですから, では, どのような結び目集合なら実現できるかという問題に興味を沸きます. 次の定理は, K_5 についての 1 つの解答です.

定理 3.2.1. (本橋-谷山 [12], 谷山-安原 [39]) K_5 の全ての 4 サイクル, 及び全ての 5 サイクルの集合を, それぞれ C_1, C_2 とかくとき, $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(K_5)\}$ が実現可能である為の必要十分条件は, ある整数 m が存在して,

$$\sum_{\gamma \in C_2} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_1} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) = \frac{m(m-1)}{2}$$

が成り立つことである. \square

$K_{3,3}$ 及び G_i ($i = 1, 2, \dots, 7$) についても, 同様に a_2 を用いて, 実現可能な結び目集合の特徴付けが得られています [12, 39, 26]. ところが, G_8 については, a_2 のみでは特徴付けることができません. 次は, 筆者と遠田かず子氏による, G_8 における 1 つの解答です.

定理 3.2.2. ([24]) $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G_8)\}$ が実現可能である為の必要十分条件は, 次の (1), (2) が成り立つことである.

$$(1) \quad \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) = 0,$$

⁴ 順応性を持たない平面的グラフで初めて発見されたのは, G_8 でした [25].

(2) ある整数 m_i ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) が存在して,

$$\begin{aligned} & \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}^{(i)}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}^{(i)}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) = m_i m_{i+1} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ & \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}} V_{\phi_\gamma(\gamma)}^{(3)}(1) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}} V_{\phi_\gamma(\gamma)}^{(3)}(1) \\ &= -36 \sum_{i=1}^5 \left(\sum_{\gamma \in C_{0,\tau}^{(i,i+2)}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}^{(i,i+2)}} a_2(\phi_\gamma(\gamma)) + m_{i+2} m_{i+3} \right) m_{i+4}. \end{aligned}$$

ここで $i+5 = i$ と考え, また $C_{k,\tau}$ 及び $C_{k,\tau}^{(i)}$ ($k = 0, 1, i = 1, 2, 3, 4, 5$) はある方法で定義される $\Gamma(G_8)$ の部分集合. \square

従って, G_8 の場合は, 結び目の次数 2 と 3 の Vassiliev 不変量にまたがる複雑な障害が潜んでいたわけです. 実際に, a_2 に関する条件は満たしますが, 実現可能でない集合 $\{\phi_\gamma \mid \gamma \in \Gamma(G_8)\}$ が存在します [24].

証明には, C_k 変形 [6] を駆使します. ここで C_k 変形とは, 交差交換を C_1 変形として, $k \geq 2$ のときは図 3.6 で定義される局所変形です. 実は C_2 変形は Δ 変形のこと, C_3 変形は **clasp-pass 変形** とも呼ばれます. Δ 変形が結び目解消操作であること [13, 11] や, 結び目の低次の Vassiliev 不変量に関する結果 [2, 10, 1], 及び C_k 変形と Vassiliev 不変量に関する M.N. Goussarov-葉広和夫の定理 [5, 6] より, 次がわかります.

定理 3.2.3.

- (1) 任意の 2 つの結び目 J, K は, Δ 変形で移り合う.
- (2) 2 つの結び目 J, K が clasp-pass 変形で移り合う $\iff a_2(J) = a_2(K)$,
- (3) 2 つの結び目 J, K が C_4 変形で移り合う $\iff a_2(J) = a_2(K), V_J^{(3)}(1) = V_K^{(3)}(1)$. \square

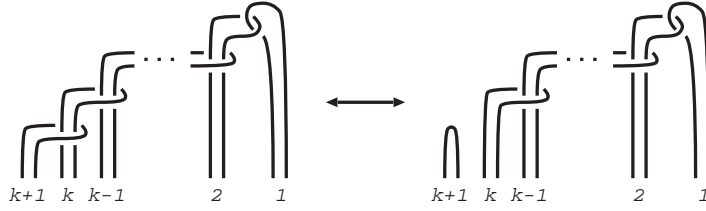


図 3.6.

定理 3.2.2 の証明は, 十分性の方が大変で, その方針は, 安原 [44] のアイデア及び [39] における方法に基づく構成的なものです. まず, 空間埋め込み $f : G_8 \rightarrow \mathbf{R}^3$ に対し,

$$\begin{aligned} \lambda_\tau(f) &= \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}} a_2(f(\gamma)), \\ \lambda_\tau^{(i)}(f) &= \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}^{(i)}} a_2(f(\gamma)) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}^{(i)}} a_2(f(\gamma)) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5), \\ \nu_\tau(f) &= \sum_{\gamma \in C_{0,\tau}} V_{f(\gamma)}^{(3)}(1) - \sum_{\gamma \in C_{1,\tau}} V_{f(\gamma)}^{(3)}(1). \end{aligned}$$

とおきます. このとき, いかなる f においても $\lambda_\tau(f) = 0$ であり, また, $\lambda_\tau^{(i)}(f)$ ($i = 1, 2, 3, 4, 5$) はホモロジー不変量で, 更に $\nu_\tau(f)$ は clasp-pass 変形で不変であることがわかります. このとき, それら不変量の具体的な値がわかることがポイントです.

そこで, 最初に Δ 変形を用いて, 大方の結び目を実現させてしまいます. このとき, $\lambda_\tau^{(i)}$ の値が変わらないことを利用して, $a_2(J) = a_2(\phi_\gamma(\gamma))$ なる結び目 J を見出すことができ, clasp-pass 変形を用いて実現を行います. 更にこのとき, λ_τ 及び ν_τ が変わっていないことを利用して, $a_2(K) = a_2(\phi_\gamma(\gamma))$, $V_K^{(3)}(1) = V_{\phi_\gamma(\gamma)}^{(3)}(1)$ なる結び目 K を見出すことができるので, C_4 変形で実現を完了します.

空間グラフ内の結び目の実現問題は, 自然に空間グラフ内の絡み目や部分空間グラフの実現問題に一般化されます [9, 39, 37].

参考文献

- [1] D. Bar-Natan, On the Vassiliev knot invariant, *Topology*, **34** (1995), 423–472.
- [2] J.S. Birman and X.-S. Lin, Knot polynomials and Vassiliev’s invariants. *Invent. Math.*, **111** (1993) 225–270.
- [3] J.H. Conway and McA. Gordon, Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory*, **7** (1983) 445–453.
- [4] Intrinsic knotting and linking of complete graphs, *Algebr. Geom. Topol.* **2** (2002) 371–380.
(<http://www.maths.warwick.ac.uk/agt/AGTVol12/agt-2-17.abs.html>)
- [5] M.N. Goussarov, Knotted graphs and a geometrical technique of n -equivalences, POMI Sankt Petersburg preprint, circa 1995 (in Russian)
- [6] K. Habiro, Claspers and finite type invariants of links, *Geom. Topol.*, **4** (2000) 1–83.
(<http://www.maths.warwick.ac.uk/gt/GTVol4/paper1.abs.html>)
- [7] T. Kanenobu and R. Nikkuni, Delta move and polynomial invariants of links, preprint.
- [8] L. Kauffman, Formal Knot Theory (Mathematical Notes **30**, Princeton Univ. Press, 1983).
- [9] S. Kinoshita, On spatial bipartite $K_{m,n}$ ’s and their constituent $K_{2,n}$ ’s, *Kobe J. Math.*, **8** (1991) 41–46.
- [10] J. Lannes, Sur les invariants de Vassiliev de degre inferieur ou egal a 3, *Enseign. Math. (2)*, **39** (1993), 295–316.
- [11] S. Matveev, Generalized surgeries of three-dimensional manifolds and representations of homology sphere (in Russian), *Mat. Zametki*, **42** (1987) 268–278, 345 (English translation: *Math. Notes* **42** (1987) 651–656.)
- [12] T. Motohashi and K. Taniyama, Delta unknotting operation and vertex homotopy of spatial graphs, In: S. Suzuki (ed.) *Proceedings of Knots '96 Tokyo* (World Scientific Publ. Co., 1997) 185–200.
- [13] H. Murakami and Y. Nakanishi, On a certain move generating link-homology, *Math. Ann.*, **284** (1989) 75–89.
- [14] Y. Nakanishi, Delta link homotopy for two component links, to appear in *Topology and its Applications*. (Proceedings of Mexico-Japan first joint meeting for Topology and its Applications.)
- [15] Y. Nakanishi and Y. Ohyama, Delta link homotopy for two component links, II, to appear in *Journal of Knot Theory and Its Ramifications*
- [16] Y. Nakanishi and Y. Ohyama, Delta link homotopy for two component links, III, preprint
- [17] Y. Nakanishi and T. Shibuya, Link homotopy and quasi self delta-equivalence for links, *J. Knot Theory Ramifications.*, **9** (2000), 683–691.
- [18] R. Nikkuni, The second skew-symmetric cohomology group and spatial embeddings of graphs, *J. Knot Theory Ramifications*, **9** (2000) 387–411.
- [19] R. Nikkuni, Clasp-pass moves on spatial graphs, *Interdiscip. Inform. Sci.*, **7**, No. 1 (2001) 113–121.
- [20] R. Nikkuni, Delta link-homotopy on spatial graphs, to appear in *Revista Matemática Complutense*.
- [21] R. Nikkuni, Triple linking module and clasp-pass moves on spatial graphs, preprint

- [22] R. Nikkuni, Delta move and Vassiliev knot invariants of order 3, preprint
- [23] R. Nikkuni, Local isotopy on plane immersions of graphs, preprint
- [24] R. Nikkuni and K. Onda, A characterization of knots in a spatial graph II, to appear in Journal of Knot theory and its Ramifications.
- [25] Y. Ohyama and K. Taniyama, Vassiliev invariants of knots in a spatial graph, *Pacific J. Math.*, **200** (2001) 191–205.
- [26] K. Onda, A characterization of knots in a spatial graph, *J. Knot Theory Ramifications.*, **9** (2000) 1069–1084.
- [27] T. Shibuya, Self Δ -equivalence of ribbon links, *Osaka J. Math.*, **33** (1996) 751–760.
- [28] T. Shibuya, On self Δ -equivalence of boundary links, *Osaka J. Math.*, **37** (2000) 37–55.
- [29] R. Shinjo and K. Taniyama, Homology classification of spatial graphs by linking numbers and Simon invariants, preprint.
- [30] M. Shirai and K. Taniyama, A large complete graph in a space contains a link with large link invariant, preprint.
- [31] T. Soma, H. Sugai and A. Yasuhara, Disk/band surfaces of spatial graphs, *Tokyo J. Math.*, **20** (1997) 1–11.
- [32] I. Sugiura and S. Suzuki, On a class of trivializable graphs, *Sci. Math.*, **3** (2000) 193–200.
- [33] M. Suzuki, Classification of the spatial-graph homology classes of a complete graph (in Japanese), Master Thesis, Department of Mathematical Sciences, Tokyo Denki Univ (1996)
- [34] K. Taniyama, Cobordism, homotopy and homology of graphs in \mathbf{R}^3 , *Topology*, **33** (1994) 509–523.
- [35] K. Taniyama, Link homotopy invariants of graphs in \mathbf{R}^3 , *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid.*, **7** (1994) 129–144.
- [36] K. Taniyama, Homology classification of spatial embeddings of a graph, *Topology Appl.*, **65** (1995) 205–228.
- [37] K. Taniyama, Knotted subgraphs in a spatial graph, *Kobe J. Math.*, **14** (1997) 207–212.
- [38] K. Taniyama, Knotted projections of planar graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **123** (1995) 3575–3579.
- [39] K. Taniyama and A. Yasuhara, Realization of knots and links in a spatial graph, *Topology Appl.*, **112** (2001) 87–109.
- [40] H. Whitney, On regular closed curves on the plane, *Compositio Math.*, **4** (1937) 276–284.
- [41] W.T. Wu, A theory of Imbedding, Immersion, and Isotopy of Polytopes in a Euclidean Space (Science Press, Peking, 1965)
- [42] W.T. Wu, On the isotopy of complexes in a Euclidean space I, *Science Sinica*, **9** (1960) 21–46.
- [43] A. Yasuhara, Disk/band surface and spatial-graph homology, *Topology Appl.*, **69** (1996) 173–191.
- [44] A. Yasuhara, Delta-unknotted operation and adaptability of certain graphs, In: S. Suzuki (ed.) *Proceedings of Knots '96 Tokyo* (World Scientific Publ. Co., 1997) 115–121.

〒 980-8579

仙台市青葉区荒巻字青葉 09

東北大学大学院情報科学研究科 数学群

022-217-4636