

# Homotopy on spatial graphs and the Sato-Levine invariant\*

新國 亮 (金沢大学教育学部)

(Thomas Fleming 氏 (University of California San Diego) との共同研究)

## 1. 動機と背景

自然に位相空間とみなした有限グラフ  $G$  の  $S^3$  への埋め込み  $f: G \rightarrow S^3$  を,  $G$  の空間埋め込みまたは単に空間グラフといいます. また, 空間グラフ  $f$  に含まれている結び目 (絡み目) を,  $f$  の結び目 (絡み目) 成分といいます. いま, 2つの空間グラフ  $f$  と  $g$  は,  $S^3$  の向きを保存する同相写像  $\Phi$  が存在して  $\Phi \circ f = g$  が成り立つとき, アンビエント・イソトピックであるといい, 更に自己交差交換 (= 同一辺上の交差交換) も許して移りあうとき, 辺ホモトピックであるといいます. これは, Milnor の絡み目ホモトピー [7] の一般化として, 谷山 [16] により導入された空間グラフの同値関係です. 実際,  $G$  が  $S^1$  の非交和に同相であれば, 辺ホモトピーは絡み目ホモトピーと一致します. 絡み目ホモトピーはとてもよく研究されていて, 例えば Milnor の  $\mu$  不変量 [7] は有名な絡み目ホモトピー不変量です. また, 絡み目ホモトピー分類も, Milnor [7] (2, 3 成分), Levine [6] (4 成分), Habegger-Lin [4] (一般の場合) で成されています. 一方, 空間グラフの辺ホモトピーに関する研究は, [15], [12], [10], [11] に見られますが, まだまだこれからという感じです.

谷山 [15] では, 空間グラフの結び目成分の Casson 不変量 (= Conway 多項式の 2 次の係数) とグラフの 1 次元ホモロジーを用いて,  $\alpha$  不変量と呼ばれる空間グラフの辺ホモトピー不変量が構成されています. この不変量を用いると, 例えば 4 頂点完全グラフ  $K_4$  の空間埋め込み  $f$  で, 辺ホモトピーで自明でないものが存在することがわかります.  $K_4$  の空間埋め込みは絡み目を含まないので, これは一般に空間グラフの辺ホモトピー類は絡み目成分の絡み目ホモトピー類に依らないことを示しています. 即ち, 辺ホモトピーの下で空間グラフ独特の結ばり方がある わけです.

そこで, 図 1.1 の空間グラフを考えてみます. これは自明な空間  $\theta$  曲線と自明な結び目からなる 2 成分の空間グラフで, 絡み目成分は全て絡み数の消えた 2 成分の絡み目です. 絡み数は 2 成分絡み目の絡み目ホモトピー完全不変量ですから [7], この空間グラフは, 絡み目成分が全て絡み目ホモトピーで自明になっています. さて, この空間グラフは, 辺ホモトピーの下で分離しているでしょうか? それとも分離不可能でしょうか? このようなタイプの空間グラフについては,  $\alpha$  不変量のような結び目成分を用いた不変量は全く使え

---

\*研究集会「結び目のトポロジー VIII」, 2005 年 12 月 25 日.

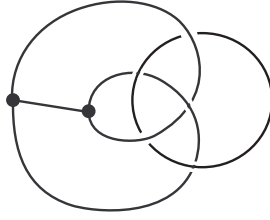


図 1.1.

ないことに注意します. 実際, 結び目成分が全て自明ですから, そのような不変量が定義されていたとしても, 自明な値しか取らないわけです. 改めて問題として定式化すると, 以下のようになります.

**問題 1.1.** 非連結なグラフ  $G$  において, 辺ホモトピーの下で分離不可能な  $G$  の空間埋め込み  $f$  で, その絡み目成分が全て絡み目ホモトピーで自明なものは存在するか?

問題 1.1 は, 辺ホモトピーの下で空間グラフ独特の絡み方があるか? と問うており, 空間グラフの辺ホモトピーにおいてとても基本的かつ重要な問題です. しかし意外にも, この問題に対する解答は公には知られていなかったように思います. 今回の研究では, 問題 1.1 に肯定的に解答を与えたいという動機から, 2 成分絡み目の **Sato-Levine 不変量** [13] を用いて, 2 成分空間グラフの辺ホモトピー不変量を定義しました. 実際にその不変量を応用することで, 図 1.1 の空間グラフが辺ホモトピーの下で分離不可能であることが示されます (例 3.2). また, そのような空間グラフの無限族を構成することもできます (例 2.3). 以下でその概要について紹介しますが, 簡単な為に多少一般性を落として解説します. また, 証明等の細部には一切触れません. プレプリントが arXiv:math.GT/0509003 からダウンロードできますので, 詳細はそちらを参照して頂ければ幸いです.

## 2. 不変量

グラフ  $G$  において,  $S^1$  に同相な部分グラフを  $G$  の**サイクル**といい,  $G$  の部分グラフ  $H$  に対し,  $\Gamma(H)$  で  $H$  のサイクル全体の集合を表します. また  $G$  の辺  $e$  に対し,  $\Gamma_e(H)$  で  $H$  のサイクルで  $e$  を含むもの全体の集合を表します. いま,  $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$  に対し,  $\mathbb{Z}_m = \{0, 1, \dots, m-1\}$  ( $m \neq 0$ ),  $\mathbb{Z}_0 = \mathbb{Z}$  とおくと, 写像  $\omega : \Gamma(H) \rightarrow \mathbb{Z}_m$  を  $\Gamma(H)$  における  $\mathbb{Z}_m$  上の**ウェイト**と呼びます. 更に  $G$  の辺  $e$  に対し, この  $\omega$  が  $e$  上で**弱くバランスが取れている**<sup>1</sup> とは,  $\sum_{\gamma \in \Gamma_e(H)} \omega(\gamma) \equiv 0 \pmod{m}$  が成り立つときをいいます.

さて, グラフ  $G$  は連結なグラフ  $G_1, G_2$  の非交和とし,  $\omega_i : \Gamma(G_i) \rightarrow \mathbb{Z}_m$  は  $\Gamma(G_i)$  における  $\mathbb{Z}_m$  上のウェイトとします ( $i = 1, 2$ ). また,  $f$  は  $G$  の空間埋め込みで, 任意の  $\gamma_1 \in \Gamma(G_1)$ ,

<sup>1</sup>  $\omega$  が  $e$  上で**バランスが取れている**とは, 各  $\gamma \in \Gamma_e(H)$  に  $e$  から誘導される向きを与えるとき,  $\sum_{\gamma \in \Gamma_e(H)} \omega(\gamma)[\gamma] = 0 \in H_1(H; \mathbb{Z}_m)$  が成り立つときをいいます [15]. ですので, 成り行き上, こう呼んでいます.

$\gamma_2 \in \Gamma(G_2)$  に対し,

$$\text{lk}(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = 0$$

が成り立っているものとします. そこでいま,  $\beta_{\omega_1, \omega_2}(f) \in \mathbb{Z}_m$  を

$$\beta_{\omega_1, \omega_2}(f) \equiv \sum_{\substack{\gamma_1 \in \Gamma(G_1) \\ \gamma_2 \in \Gamma(G_2)}} \omega_1(\gamma_1) \omega_2(\gamma_2) a_3(f(\gamma_1 \cup \gamma_2)) \pmod{m}$$

で定義します. ここで  $a_k$  は Conway 多項式の  $k$  次の係数を表します.

**注意 2.1.** 絡み数の消えた 2 成分有向絡み目  $L$  に対し, 以下のことが知られています.

- (1)  $a_3(L)$  は,  $L$  の Sato-Levine 不変量<sup>2</sup>  $\beta(L)$  と一致します [3], [14].
- (2)  $a_3(L)$  は, 各成分の向きには依りません. これは Sato-Levine 不変量の方で考えれば, 定義から直ちにわかります. 従って, いま考えている空間グラフ  $f$  の絡み目成分  $f(\gamma_1 \cup \gamma_2)$  において,  $a_3(f(\gamma_1 \cup \gamma_2))$  の値はうまく定義されています.
- (3)  $a_3(L)$  は,  $L$  の絡み目ホモトピー不変量ではありません. 実際に Whitehead 絡み目を考えてみればわかります.

$\beta_{\omega_1, \omega_2}(f)$  は, 以下のように, ウェイト  $\omega_1, \omega_2$  がある条件を満たせば, 空間グラフ  $f$  の辺ホモトピー不変量になります.

**定理 2.2.**  $\omega_i$  が  $G_i$  の任意の辺上で弱くバランスが取れているならば ( $i = 1, 2$ ),  $\beta_{\omega_1, \omega_2}(f)$  は  $f$  の辺ホモトピー不変量である.

**例 2.3.** 2つの頂点を  $n$  辺  $e_1, e_2, \dots, e_n$  で繋いでできるグラフ  $\theta_n$  を考え,  $\theta_n$  のサイクル  $e_i \cup e_j$  ( $i < j$ ) を  $\gamma_{ij}$  と書くことにします. いま, 2つの  $\theta_4$  の非交和を  $G$  とし,  $\Gamma(\theta_4)$  における  $\mathbb{Z}$  上のウェイト  $\omega$  を  $\gamma_{12}, \gamma_{34} \mapsto 1, \gamma_{23}, \gamma_{14} \mapsto -1, \gamma_{13}, \gamma_{24} \mapsto 0$  で定義すると, これは  $\theta_4$  の任意の辺上で弱くバランスが取れています. そこで, 図 2.1 に示した  $G$  の空間埋め込み  $g_1$  を考えると,  $g_1$  の絡み目成分は全て 2 成分の絡み目で, それらの絡み数は全て消えています (実際には非自明な絡み目成分は  $g_1(\gamma_{14} \cup \gamma'_{14})$  のみ). 従って定理 2.2 より,  $\beta_{\omega, \omega}(g_1)$  は  $g_1$  の辺ホモトピー不変量であり,  $a_3(g_1(\gamma_{14} \cup \gamma'_{14})) = 2$  なので,  $\beta_{\omega, \omega}(g_1) = 2$  となります.  $G$  の分離した空間埋め込み  $h$  については  $\beta_{\omega, \omega}(h) = 0$  となるので, 従って  $g_1$  は辺ホモトピーの下で分離不可能であることがわかります.

$g_1$  の絡み目成分は全て絡み目ホモトピーで自明ですから, この例は問題 1.1 に対する肯定的な解答です. また, 同じ要領で, このような空間グラフの無限族を構成することができます. 図 2.2 に示した  $G$  の空間埋め込み  $g_m$  ( $m \in \mathbb{Z}$ ) がそうで, 実際に  $\beta_{\omega, \omega}(g_1) = 2m$  となります.

例 2.3 で考えた  $\Gamma(\theta_4)$  における  $\mathbb{Z}$  上のウェイト  $\omega$  は, 実は  $\theta_4$  の平面埋め込みのチェッカーボード彩色を利用して構成したものです (我々はチェッカーボードウェイトと呼んでいます)

<sup>2</sup> 絡み数の消えた 2 成分有向絡み目  $L = J_1 \cup J_2$  に対し,  $\mathbb{S}^3 - J_j$  内で  $J_i$  に Seifert 曲面  $S_i$  を張ることができ ( $i \neq j$ ), 更に  $S_1 \cap S_2$  が単純閉曲線  $c$  となるようにできます. このとき  $c$  を  $S_1$  (もしくは  $S_2$ ) の正方向にちょっとだけ押し上げて得られる単純閉曲線を  $c^+$  としたときの絡み数  $\text{lk}(c^+, c)$  を  $\beta(L)$  と書いて,  $L$  の Sato-Levine 不変量といいます [13].

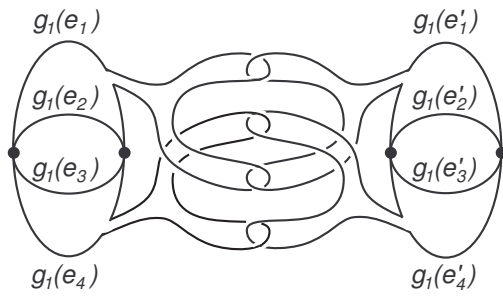


图 2.1.

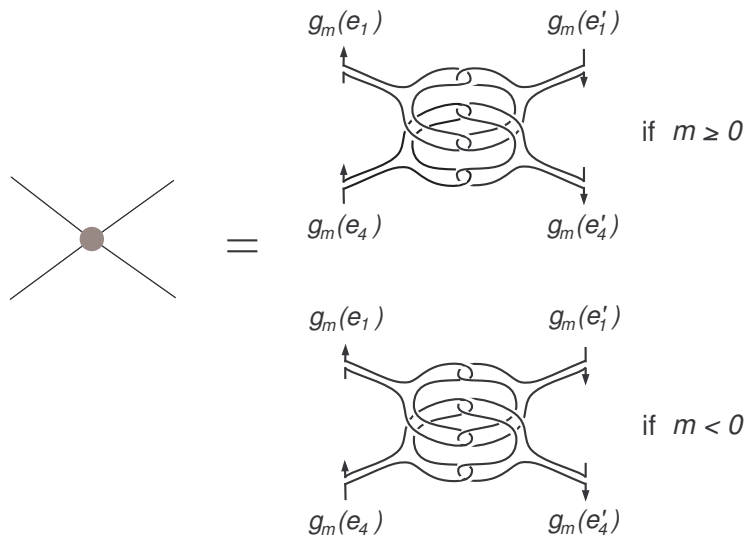
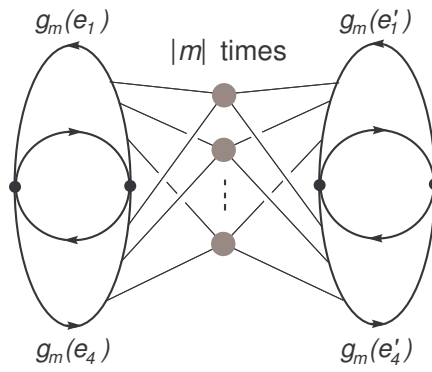


图 2.2.

す). この方法で, 例 2.3 のような整数値の辺ホモトピー不変量を組織的に構成することが可能です. しかし残念なことに, グラフ  $G$  の連結成分のいずれか一方が  $S^1$  に同相なら, 定理 2.2 の不変量  $\beta_{\omega_1, \omega_2}$  は自明なものしか得られません. 従って, もともとの動機だった図 1.1 の空間グラフについて応用することができません. ですので, もう一工夫加わった, 図 1.1 の空間グラフにも応用できる形の不変量の構成を, 次節で説明します.

### 3. 2 を法とした不変量

グラフ  $G$  の部分グラフ  $H$  において,  $\Gamma(H)$  における  $\mathbb{Z}_2$  上のウェイト  $\omega$  が**全体的にバランスが取れている**とは,  $\sum_{\gamma \in \Gamma(H)} \omega(\gamma)[\gamma] = 0 \in H_1(H; \mathbb{Z}_2)$  が成り立っているときをいい, これは,  $\omega$  が  $H$  の任意の辺上で弱くバランスが取れていることと同値になります. すると,  $\mathbb{Z}_2$  上ではこのような言い換えができることが 1 つの鍵となって, 次が示されます.

**定理 3.1.** グラフ  $G$  は連結なグラフ  $G_1, G_2$  の非交和とし,  $\omega_i : \Gamma(G_i) \rightarrow \mathbb{Z}_2$  は  $\Gamma(G_i)$  における  $\mathbb{Z}_2$  上のウェイトとする ( $i = 1, 2$ ). また,  $f$  は  $G$  の空間埋め込みで, 任意の  $\gamma_1 \in \Gamma(G_1), \gamma_2 \in \Gamma(G_2)$  に対し,  $\text{lk}(f(\gamma_1), f(\gamma_2))$  が消えているものとする. このとき,  $\omega_1$  か  $\omega_2$  の**どちらかが**全体的にバランスが取れているならば,  $\beta_{\omega_1, \omega_2}(f)$  は  $f$  の辺ホモトピー不変量である.

**例 3.2.**  $\theta_3$  とサイクル  $\gamma$  との非交和を  $G$  とします.  $\Gamma(\theta_3)$  における  $\mathbb{Z}_2$  上のウェイト  $\omega_1$  を  $\gamma_{ij} \mapsto 1$  ( $1 \leq i < j \leq 3$ ) で定義すると, これは全体的にバランスが取れています. また,  $\Gamma(\gamma)$  における  $\mathbb{Z}_2$  上のウェイト  $\omega_2$  を  $\gamma \mapsto 1$  で定義します. そこで図 1.1 に示した  $G$  の空間埋め込み  $f$  を考えると, 前述の通り,  $f$  の絡み目成分は全て 2 成分の絡み数の消えた絡み目ですから (実際には 2 つの自明な 2 成分絡み目と Whitehead 絡み目), 定理 3.1 より,  $\beta_{\omega_1, \omega_2}(f)$  は  $f$  の辺ホモトピー不変量となります.  $\beta_{\omega_1, \omega_2}(f) = 1$  であるので,  $f$  は辺ホモトピーの下で分離不可能であることがわかります. これで, もともと確かめたかったことを示すことができました.

例 3.2 で考えた不変量  $\beta_{\omega_1, \omega_2}$  においては, 2 を法としているのは本質的です. 例えば図 3.1 の空間埋め込み  $g, h$  を考えると,  $h$  は自明な空間埋め込みであり,  $g$  は  $h$  に辺ホモトピックなので, 辺ホモトピーの下で自明な空間埋め込みです. このとき,  $\sum_{1 \leq i < j \leq 3} a_3(g(\gamma_{ij}), g(\gamma)) = -2$  になりますが, 2 を法としているので, 確かに  $\beta_{\omega_1, \omega_2}(g) = 0$  となります.

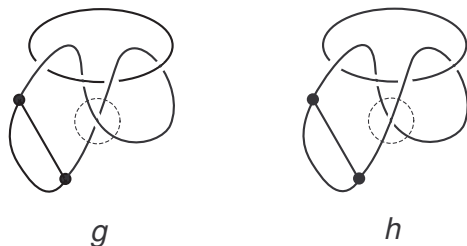


図 3.1.

例 3.2 で考えた  $\Gamma(\theta_3)$  における  $\mathbb{Z}_2$  上のウェイト  $\omega_1$  は, 実は  $\theta_3$  の平面への胞体的埋め込みを利用して構成したものです. この方法で, 例 3.2 のような 2 を法とする辺ホモトピー不変量を組織的に構成することが可能です.

前節で述べた定理 2.2 の不変量, 及び本節の 3.1 の不変量は, 図 3.2 に示したような空間グラフでは自明な値しか取らないので, 例えばこの 2 つの空間グラフが辺ホモトピーの下で分離不可能かどうかを判定することができません. そこで, これらのような空間グラフに適用できるように, やはりちょっと工夫を加えたいと思います. それを次節で説明します.

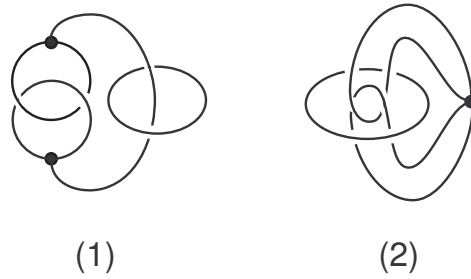


図 3.2.

#### 4. 平面的曲面の境界の応用

グラフ  $H$  と平面的曲面  $F$  との非交和を  $X$  とし,  $\omega$  を  $\Gamma(H)$  における  $\mathbb{Z}_2$  上のウェイトとします. また,  $\varphi$  は  $X$  の  $\mathbb{S}^3$  への埋め込みで, 任意の  $\gamma \in \Gamma(H)$ ,  $\gamma' \in \Gamma(\partial F)$  に対し,

$$\text{lk}(\varphi(\gamma), \varphi(\gamma')) = 0$$

が成り立っているものとします. そこでいま,  $\beta_\omega(\varphi) \in \mathbb{Z}_2$  を

$$\beta_\omega(\varphi) \equiv \sum_{\substack{\gamma \in \Gamma(H) \\ \gamma' \in \Gamma(\partial F)}} \omega(\gamma) a_3(\varphi(\gamma), \varphi(\gamma')) \pmod{2}.$$

で定義します.

さて, 連結なグラフ  $G_1$  と連結な平面的グラフ  $G_2$  との非交和を  $G$  とし,  $p$  は  $G_2$  の  $\mathbb{S}^2$  への埋め込みとします. また,  $f$  は  $G$  の空間埋め込みで, 任意の  $\gamma_1 \in \Gamma(G_1)$ ,  $\gamma_2 \in \Gamma(G_2)$  に対し,

$$(4.1) \quad \text{lk}(f(\gamma_1), f(\gamma_2)) = 0$$

が成り立っているものとします. いま,  $p(G_2)$  の  $\mathbb{S}^2$  における正則近傍として得られる平面的曲面を  $F(G_2; p)$  と書くとき, 空間埋め込み  $f$  は, 非交和  $G_1 \cup F(G_2; p)$  の  $\mathbb{S}^3$  への埋め込み  $\tilde{f}_p$  で,  $\tilde{f}_p(G_1) = f(G_1)$  かつ  $\tilde{f}_p(F(G_2; p))$  が  $f(G_2)$  をスパインとして持つものを自然

に誘導します. そのような  $\tilde{f}_p$  は  $\mathbb{S}^3$  のアンビエント・イソトピーで一意ではなく, また, 条件 (4.1) より, 任意の  $\gamma \in \Gamma(G_1)$ ,  $\gamma' \in \Gamma(\partial F(G_2; p))$  に対し,

$$\text{lk}(\tilde{f}_p(\gamma), \tilde{f}_p(\gamma')) = 0$$

が成り立っていることに注意します. そこで,  $\omega$  は  $\Gamma(G_1)$  における  $\mathbb{Z}_2$  上のウェイトとするとき, 以下のことが示されます.

**定理 4.1.**  $G$  の空間埋め込み  $f$  が辺ホモトピーの下で分離しているならば,  $f$  により誘導された  $G_1 \cup F(G_2; p)$  の任意の埋め込み  $\tilde{f}_p$  において,  $\beta_\omega(\tilde{f}_p) = 0$  である.

**例 4.2.** サイクル  $\gamma$  と手錠グラフ (もしくはブーケ)  $G_2$  の非交和を  $G$  とし,  $\Gamma(\gamma)$  における  $\mathbb{Z}_2$  上のウェイト  $\omega$  を  $\omega(\gamma) = 1$  で定義します. また, 埋め込み  $p: G_2 \rightarrow \mathbb{S}^2$  及び平面的曲面  $F(G_2; p)$  を図 4.1 (1)(もしくは (2)) のように取ります.



図 4.1.

さて,  $f$  は図 3.2 (1)(もしくは (2)) に示した  $G$  の空間埋め込みとし,  $f$  が誘導する埋め込み  $\tilde{f}_p: \gamma \cup F(G_2; p) \rightarrow \mathbb{S}^3$  を図 4.2 (1) (もしくは (2)) のように取ります. いま, 任意の  $\gamma_2 \in \Gamma(G_2)$  に対し  $\text{lk}(f(\gamma), f(\gamma_2)) = 0$  であることに注意します. このとき  $\beta_\omega(\tilde{f}_p) = 1$  となるので, 定理 4.1 により,  $f$  は辺ホモトピーの下で分離不可能であることがわかります.

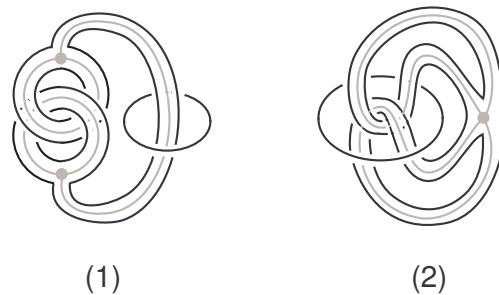


図 4.2.

## 5. 補足

(1) 2つの空間グラフ  $f, g$  は, **隣接辺上の交差交換**とアンビエント・イソトピーで移りあうとき, **頂点ホモトピック**であるといい [16], これも絡み目ホモトピーの一般化で, 辺ホモトピーよりも緩い空間グラフの同値関係です. [15], [8], [12]に関連する研究が見られます. 今回の研究では, この頂点ホモトピーに関しても, 同様の構成で不変量  $\beta_{\omega_1, \omega_2}$  を定義し, それを用いて, 頂点ホモトピーの下で分離不可能な非連結空間グラフで, その絡み目成分が全て絡み目ホモトピーで自明なものが存在することを示しています.

(2) 今回の研究では, 異成分にまたがる2成分の絡み目成分の絡み数が全て消えた空間グラフを考えました. 我々の当初の目的においてはそれで十分だったわけですが, 辺ホモトピー分類問題の観点からは, 一般の空間グラフについても, 辺ホモトピー不変量を構成できないかと考えるのは自然なことです. これについては, 2成分有向絡み目  $L = J_1 \cup J_2$  の一般化された **Sato-Levine 不変量** [5], [1], [2], [9]

$$\tilde{\beta}(L) = a_3(L) - \text{lk}(L) \{a_2(J_1) + a_2(J_2)\}$$

の応用によって, 空間グラフの辺ホモトピー不変量を構成することが可能です (現在進行中の研究). 但し今度は  $\tilde{\beta}(L)$  は一般に各成分の向きに依りますので, これを空間グラフに応用する場合には, もう少し細かい設定が必要です.

**謝辞.** この研究は, 主に Fleming 氏の日本滞在中, 金沢大学及び東京工業大学で行なわれました. 特に東京工業大学での共同研究に際して, 厚くサポートして頂いた村上 斉氏に深く感謝致します.

## 参考文献

- [1] P. M. Akhmet'iev, On a higher analog of the linking number of two curves, *Topics in quantum groups and finite-type invariants*, 113–127, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **185**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1998.
- [2] P. M. Akhmet'iev and D. Repovš, A generalization of the Sato-Levine invariant (Russian), *Tr. Mat. Inst. Steklova* **221** (1998), 69–80; *translation in Proc. Steklov Inst. Math.* 1998, **221**, 60–70
- [3] T. D. Cochran, Concordance invariance of coefficients of Conway's link polynomial, *Invent. Math.* **82** (1985), 527–541.
- [4] N. Habegger and X. -S. Lin, The classification of links up to link-homotopy, *J. Amer. Math. Soc.* **3** (1990), 389–419.
- [5] P. Kirk and C. Livingston, Vassiliev invariants of two-component links and the Casson-Walker invariant, *Topology* **36** (1997), 1333–1353.
- [6] J. P. Levine, An approach to homotopy classification of links, *Trans. Amer. Math. Soc.* **306** (1988), 361–387.



- [7] J. Milnor, Link groups, *Ann. of Math. (2)* **59** (1954), 177–195.
- [8] T. Motohashi and K. Taniyama, Delta unknotting operation and vertex homotopy of graphs in  $R^3$ , *KNOTS '96 (Tokyo)*, 185–200, *World Sci. Publishing, River Edge, NJ*, 1997.
- [9] Y. Nakanishi, Delta link homotopy for two component links, *Topology Appl.* **121** (2002), 169–182.
- [10] R. Nikkuni, Edge-homotopy classification of spatial complete graphs on four vertices, *J. Knot Theory Ramifications* **13** (2004), 763–777.
- [11] R. Nikkuni and R. Shinjo, On boundary spatial embeddings of a graph, *Q. J. Math.* **56** (2005), 239–249.
- [12] Y. Ohya and K. Taniyama, Vassiliev invariants of knots in a spatial graph, *Pacific J. Math.* **200** (2001), 191–205.
- [13] N. Sato, Cobordisms of semiboundary links, *Topology Appl.* **18** (1984), 225–234.
- [14] R. Sturm Beiss, The Arf and Sato link concordance invariants, *Trans. Amer. Math. Soc.* **322** (1990), 479–491.
- [15] K. Taniyama, Link homotopy invariants of graphs in  $R^3$ , *Rev. Mat. Univ. Complut. Madrid* **7** (1994), 129–144.
- [16] K. Taniyama, Cobordism, homotopy and homology of graphs in  $R^3$ , *Topology* **33** (1994), 509–523.

920-1192 金沢市角間町 金沢大学教育学部数学教室  
 nick@ed.kanazawa-u.ac.jp