

# On spatial graph diagrams with at most three crossings

新國 亮 (金沢大学教育学部)

(Youngsik Huh 氏 (Hanyang University) との共同研究)

研究集会「結び目のトポロジー」の記念すべき第10回の御開催を祝し、心よりお慶び申し上げます。

## 0. はじめに

まずは演習問題から始めます。

**問題 0.1.** 交差点数が3以下の正則図を持つ  $n$  成分絡み目は、どのようなものか?

答えは、「 $n$  成分自明絡み目か、Hopf 絡み目と  $(n-2)$  成分自明絡み目の非交和か、もしくは三葉結び目と  $(n-1)$  成分自明絡み目の非交和である」です。実際、結び目理論にある程度慣れていれば、既知の基本的な事実を積み重ねることで示すことができます。では、次の問題はどうかでしょうか。

**問題 0.2.** 交差点数が3以下の正則図を持つ空間グラフは、どのようなものか?

この問題は、もともとは平面的グラフの非自明射影(本稿の第3節で扱います)を研究している際に生じたのですが、いざ考えてみると、積み重ねるべき空間グラフ理論における基本的な事実が不足していて、問題0.1のようにはいきません。本稿では、この問題0.2への1つの解答、及び関連する話題について扱います。

## 1. 空間グラフの正則射影

空間グラフについて簡単に復習します。 $\mathbb{R}^4$ 内の原点を中心とする単位3次元球面を $S^3$ と表すとき、自然に位相空間とみなした有限グラフ $G$ の $S^3$ への埋め込み $f: G \rightarrow S^3$ を、 $G$ の空間埋め込みといい、その像を単に空間グラフといいます。 $G$ の2つの空間埋め込み $f$ と $g$ は、 $S^3$ の向きを保存する同相写像 $\Phi$ が存在して $\Phi \circ f = g$ が成り立つとき、アンビエント・イソトピックであるといいます。また、グラフ $G$ は、2次元球面に埋め込み可能であるとき平面的であるといいます。いま $S^3$ 内の原点を中心とする単位2次元球面を $S^2$ と表すとき、平面的グラフ $G$ の空間埋め込み $f$ が自明であるとは、 $G$ の $S^2$ への埋め込み $h$ が存在して、 $f$ と $h$ がアンビエント・イソトピックであるときをいいます。

グラフ  $G$  の  $\mathbb{S}^2$  へのはめ込み  $\varphi$  が  $G$  の**正則射影**であるとは、その多重点が有限個かつ辺の内点同士の横断的な2重点に限るときをいいます。更に  $G$  の空間埋め込み  $f$  に対して、 $\varphi$  が  $f$  の**正則射影**であるとは、 $\pi : \mathbb{S}^3 - \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\} \rightarrow \mathbb{S}^2$  を自然な射影とすると、 $f$  にアンビエント・イソトピックな埋め込み  $f' : G \rightarrow \mathbb{S}^3 - \{(0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, -1)\}$  が存在して、 $\varphi = \pi \circ f'$  となることをいい、また、これを  $f$  は  $\varphi(G)$  の**上に写る**ともいいます。このとき  $\varphi(G)$  は  $f$  の**正則射影図**と呼ばれ、その各2重点において  $\pi$  による上下の情報を付加したものが、 $f$  の**正則図**にほかならず、その**交差点数**とは、もとの正則射影の2重点の個数です。

## 2. 交差点が3個以下の正則図を持つ空間グラフ

グラフ  $G$  の空間埋め込み  $f$  が**自由**であるとは、 $f(G)$  の  $\mathbb{S}^3$  における補空間の基本群  $\pi_1(\mathbb{S}^3 - f(G))$  が自由群であるときをいいます。ここでいま、 $G$  の任意の部分グラフ  $H$  に対し  $f$  の  $H$  への制限  $f|_H$  が自由であるとき、 $f$  を**全自由**であると呼ぶことにします。特に  $G$  が平面的であれば、Scharlemann-Thompson [5] による有名な定理から、 $f$  が全自由であることと  $f$  が自明であることは互いに必要十分条件です。

**例 2.1.** (1) 図 2.1 の左の空間手錠グラフは自由です。このことは、実際に補空間の基本群の Wirtinger 表示を計算するか、またはこの空間グラフの  $\mathbb{S}^3$  における外部空間が種数2のハンドル体であることからわかります。しかしこの空間グラフは Hopf 絡み目を含んでいて、Hopf 絡み目は自由ではありません。従ってこの空間グラフは全自由ではありません。

(2) 図 2.1 の右の空間5頂点完全グラフもやはり自由であることがわかります。しかしこの空間グラフは三葉結び目を含んでいて、三葉結び目は自由ではありません。従ってこの空間グラフも全自由ではありません。

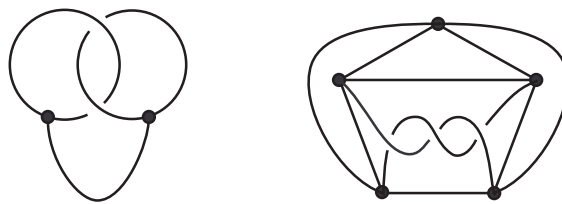


図 2.1: 自由だが全自由でない空間グラフの例

今回、特に2重点が3個以下の正則射影図の上に写るような空間グラフについて、次のことがわかりました。

**定理 2.2.** (平面的とは限らない) グラフ  $G$  に対し、 $\varphi$  を  $G$  の正則射影で2重点が3個以下であるようなものとする。このとき、 $\varphi(G)$  の上に写る  $G$  の空間埋め込みは、その像が Hopf 絡み目も三葉結び目も含まないならば全自由である。

定理 2.2 により, いろいろなことがわかります. 例えば, 特に平面的グラフを考えることで, 直ちに次の系が得られます.

**系 2.3.** 平面的グラフ  $G$  において, 以下がそれぞれ成り立つ.

- (1)  $G$  の交差点数 1 の正則図を持つ空間埋め込みは自明である.
- (2)  $G$  の交差点数 2 の正則図を持つ空間埋め込みは, その像が Hopf 絡み目を含まないならば自明である.
- (3)  $G$  の交差点数 3 の正則図を持つ空間埋め込みは, その像が Hopf 絡み目も三葉結び目も含まないならば自明である.

従って, 特に  $G$  が閉路の非交和を持たない平面的グラフ ( $\theta_n$  曲線, ブーケ, 車輪グラフなど) であれば,  $G$  の交差点数 2 以下の正則図を持つ空間埋め込みは自明ですし, また  $G$  の交差点数 3 の正則図を持つ非自明な空間埋め込みの像は, 必ず三葉結び目を含むことになります.

更にいま, 平面的グラフ  $G$  の空間埋め込み  $f$  が**極小非自明**であるとは,  $f$  は非自明で, かつ  $G$  の任意の真部分グラフ  $H$  に対し  $f|_H$  が自明であるときをいいます. いわゆる**樹下の  $\theta$  曲線** (図 2.2) が代表的な例で, また絡み目の場合は特に **Brunnian** というのでした. 任意の平面的グラフは極小非自明な空間埋め込みを持つことが知られています (河内 [1], Wu [10]).



図 2.2: 樹下の  $\theta_3$  曲線

系 2.3 により, 平面的グラフの交差点数 3 以下の正則図を持つ非自明な空間埋め込みの像は, 必ず Hopf 絡み目もしくは三葉結び目のいずれかを含みますので, 従って極小非自明な空間グラフについては次のことがわかります.

**系 2.4.** 平面的グラフの極小非自明な空間埋め込みの正則図の交差点数は, その埋め込みの像が Hopf 絡み目でも三葉結び目でもなければ, 必ず 4 以上である.

交差点数が 4 の正則図を持つ極小非自明な空間グラフは存在します. 例えば 8 の字結び目や (2, 2) トーラス絡み目がそうですし, 更に図 2.3 の空間手錠グラフもそうです<sup>1</sup>.

<sup>1</sup>故にこの空間手錠グラフの**最小交差点数**は 4 であることがわかります. この事実が知られていなかったとは思えませんが, 初めて示された文献をまだ確認できていません.

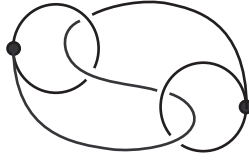


図 2.3: 交差点数 4 の正則図を持つ極小非自明な空間手錠グラフ

定理 2.2 の証明は以下のようにして行なわれます. まず, 全自由な空間グラフについて次の定理が知られています.<sup>2</sup>

**定理 2.5.** (Wu [9] ( $G$  は平面的グラフ), Robertson-Seymour-Thomas [4] (一般))  
 グラフ  $G$  の空間埋め込み  $f$  が全自由であるための必要十分条件は,  $G$  の任意の閉路  $\gamma$  に対し,  $S^3$  内のある 2 次元円板  $D_\gamma$  が存在して

$$f(G) \cap D_\gamma = f(G) \cap \partial D_\gamma = f(\gamma)$$

が成り立つことである.

つまり, 空間グラフが含む任意の結び目について, その Seifert 曲面として 2 次元円板を他の辺とは交わらないようにうまく張れるなら, この空間グラフは全自由だということです. そこで, 2 重点が 3 個以下の正則射影図の上に写る空間グラフがもし Hopf 絡み目も三葉結び目も含まないならば, この空間グラフが含む任意の結び目に上のようにうまく 2 次元円板を張れることを直接幾何学的に示します.

### 3. 平面的グラフの非自明射影

絡み目の任意の正則図が各交差点の上下の情報を適当に入れ替えることによって自明な絡み目の正則図となることは, 結び目理論における周知の事実としてよく知られています. 言い換えれば, 自明な絡み目は, 1 次元球面の非交和の任意の正則射影図の上に必ず写るわけですが, 一般の平面的グラフについては, 同様の事実は必ずしも成り立たないことが知られています.

**命題 3.1.** (谷山 [8]) 図 3.1 の正則射影  $\varphi$  において,  $G$  の自明な空間埋め込みは  $\varphi(G)$  の上には決して写らない.

実際,  $\varphi(G)$  上に写る  $G$  の空間埋め込みの像は必ず Hopf 絡み目を含むことがわかります. そこで, 平面的グラフ  $G$  の正則射影  $\varphi$  で,  $\varphi(G)$  の上に  $G$  の自明な空間埋め込みが決して写らないものを**非自明**であるといい, 非自明な正則射影を単に**非自**

<sup>2</sup>Robertson-Seymour-Thomas [4] は, 絡み目に関して内在的に非自明なグラフを特徴付けた有名な論文ですが, その証明の過程で Scharlemann-Thompson [5], 及び Wu [9] の平面的グラフに関する結果が一般のグラフに拡張されたことはあまり知られていないように思います.

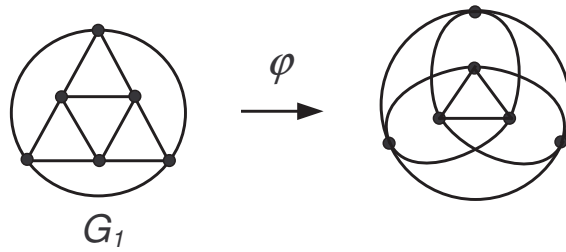


図 3.1: 非自明射影

明射影と呼びます. また, いかなる非自明射影も持たない平面的グラフは**自明化可能**であるといわれます. 例えば 1 次元球面の非交和は自明化可能であり, 一方, 図 3.1 のグラフ  $G$  は自明化可能ではありません.<sup>3</sup>

今回, 非自明射影の 2 重点の個数について, やはり定理 2.5 の応用により, 次のことを示しました.

**定理 3.2.** 非自明射影は少なくとも 3 個の 2 重点を持つ.

平面的グラフのただ 1 つの 2 重点を持つ正則射影図の上に写る空間グラフは, 系 2.3 (1) から必ず自明です. 従って定理 3.2 を示すには, 2 重点がちょうど 2 個の正則射影  $\varphi$  は非自明でないことをいえば良いのですが, これはそれほど明らかなことではありません. 実際, もし  $\varphi$  が非自明であれば, 系 2.3 (2) により,  $\varphi(G)$  の上に写る空間グラフは必ず Hopf 絡み目を含みますが, 実は非平面的グラフのちょうど 2 個の 2 重点を持つ正則射影で, そのようなものが存在します (図 3.2).

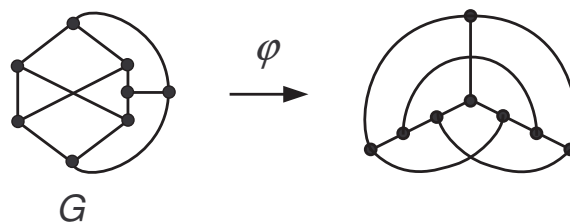


図 3.2:  $\varphi(G)$  に写る空間グラフは必ず Hopf 絡み目を含む

2 重点をちょうど 3 個持つ非自明射影の代表的な例としては, 図 3.1 の正則射影の他に, 図 3.3 に挙げた正則射影があります. これら  $G_1, G_2, G_3$  は, いずれも自明化可能性に関する**禁止グラフ**と呼ばれているもので, それ自身は自明化不可能ですが, その任意のプロパーマイナーは自明化可能であるという性質を持っています.<sup>4</sup>

<sup>3</sup>自明化可能な平面的グラフについては, [8], 杉浦-鈴木 [6], 田村 [7] を, また, 非自明射影を持つ平面的グラフについては, [6], 筆者-小沢-谷山-堤 [2], 筆者 [3] を参照して下さい.

<sup>4</sup>グラフ  $H$  がグラフ  $G$  から辺の縮約及び除去の有限列で得られるとき,  $H$  は  $G$  のマイナーであるといって  $H < G$  と表し, 特に  $H \not\leq G$  のとき**プロパーマイナー**といいます. 自明化可能性におけるグラフ・マイナー理論を援用した研究につ

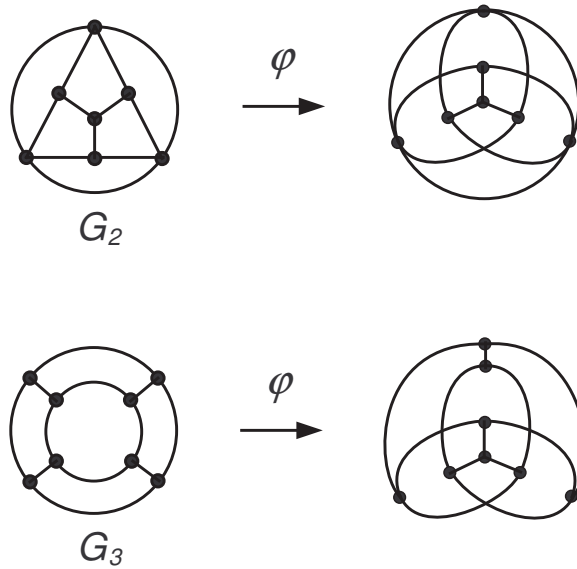


図 3.3: ちょうど 3 個の 2 重点を持つ非自明射影の例

定理 3.2 によって, 2 重点をちょうど 3 個持つ非自明射影は, ある意味最も基本的な非自明射影ですから, それらを何らかの形で特徴付けることは, 非自明射影全体の構造の研究において意味を持つものと思われます. 現時点では, 次のことがわかりました.

**命題 3.3.** 平面的グラフ  $G$  のちょうど 3 個の 2 重点を持つ非自明射影  $\varphi$  において, 以下がそれぞれ成り立つ.

- (1)  $\varphi$  の各 2 重点は, それぞれ互いに交わらない 2 辺の間の 2 重点である.
- (2)  $\varphi(G)$  の上に写る  $G$  の空間埋め込みの像は, 必ず Hopf 絡み目もしくは三葉結び目のいずれかを含む.

(1) は, 言い換えれば, 平面的グラフのちょうど 3 個の 2 重点を持つ正則射影は, 隣接辺あるいは同一辺上に 2 重点を持つなら非自明ではないということを主張しています. また, (2) は系 2.3 の直接の帰結であり, 小沢 誠氏による問題「極小非自明な空間グラフは非自明射影の像の上に写るか?」[2] の部分的解答にもなっています (即ち, 非自明射影の 2 重点がちょうど 3 個の場合は否定的です).

更に我々は, 既知のちょうど 3 個の 2 重点を持つ非自明射影を観察することで, 次の予想を立てています.

**予想 3.4.** ちょうど 3 個の 2 重点を持つ非自明射影の像は, 必ず三葉結び目の正則射影図を含む.

---

いては, [6], [2], [3] を参照して下さい.

即ち, ちょうど3個の2重点を持つ非自明射影の像の中には, 必ず図3.4の絵を見出すことができるであろうと考えており, 現時点では部分的解答として次のことを示すことができます.

**命題 3.5.** 図3.1, 3.3のグラフ  $G_1, G_2, G_3$  については, 予想3.4は正しい.

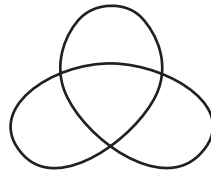


図 3.4: 三葉結び目のちょうど3つの2重点を持つ正則射影図

## 参考文献

- [1] A. Kawauchi, Almost identical imitations of  $(3, 1)$ -dimensional manifold pairs, *Osaka J. Math.* **26** (1989), 743-758.
- [2] R. Nikkuni, M. Ozawa, K. Taniyama and Y. Tsutsumi, Newly found forbidden graphs for trivializability, *J. Knot Theory Ramifications* **14** (2005), 523-538.
- [3] R. Nikkuni, Regular projections of spatial graphs, *Knot Theory for Scientific Objects, Osaka City University Advanced Mathematical Institute Studies* **1** 111-128, *Osaka Municipal Universities Press*, 2007.
- [4] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas, Sachs' linkless embedding conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 185-227.
- [5] M. Scharlemann and A. Thompson, Detecting unknotted graphs in 3-space, *J. Diff. Geom.* **34** (1991), 539-560.
- [6] I. Sugiura and S. Suzuki, On a class of trivializable graphs, *Sci. Math.* **3** (2000), 193-200.
- [7] N. Tamura, On an extension of trivializable graphs, *J. Knot Theory Ramifications* **13** (2004), 211-218.
- [8] K. Taniyama, Knotted projections of planar graphs, *Proc. Amer. Math. Soc.* **123** (1995), 3575-3579.
- [9] Y. Q. Wu, On planarity of graphs in 3-manifolds, *Comment. Math. Helv.* **67** (1992), 635-647.
- [10] Y. Q. Wu, On minimally knotted embedding of graphs, *Math. Z.* **214** (1993), 653-658.

920-1192 金沢市角間町 金沢大学教育学部数学教室  
nick@ed.kanazawa-u.ac.jp