

On Intrinsically Knotted or Completely 3-Linked Graphs

花木 良^{*} , 新國 亮[†] , 谷山 公規[‡] , 山崎 晶子[§]

1 はじめに

有限グラフを G とし, 自然に位相空間と考えます. G から 3次元球面への埋め込みを, G の空間埋め込み [spatial embedding] といい, その像を空間グラフ [spatial graph] といいます. G が絡み目内在 [intrinsically linked] (IL) であるとは, G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非分離 2 成分絡み目を含むときをいいます. G が結び目内在 [intrinsically knotted] (IK) であるとは, G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非自明な結び目を含むときをいいます. G が 3 成分絡み目内在 [intrinsically 3-linked] (I3L) であるとは, G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非分離 3 成分絡み目を含むときをいいます. どのようなグラフがこのような性質をもつのかということが, 研究の主な目的です. 絡み目内在 (結び目内在, 3 成分絡み目内在) でないグラフのマイナーは, 同様に絡み目内在 (結び目内在, 3 成分絡み目内在) でないことがわかります. ここで, G' が G のマイナー [minor] であるとは, G から部分グラフをとる操作と辺を縮約するという操作で G' が得られるときをいいます. これらの性質をもつグラフとして, 次が知られています.

定理 1 [8, 1] 6 頂点完全グラフ K_6 は絡み目内在である. ここで, 完全グラフとは, どの 2 頂点も 1 本の辺で結ばれているグラフである.

5 頂点完全グラフは絡み目内在でないことがわかるので, 6 頂点完全グラフは絡み目内在である最小の完全グラフです.

定理 2 [1] 7 頂点完全グラフ K_7 は結び目内在である.

^{*}早稲田大学大学院教育学研究科

[†]東京女子大学現代教養学部

[‡]早稲田大学教育学部

[§]東京女子大学大学院理学研究科

図1の空間埋め込みから，6頂点完全グラフは結び目内在でないことがわかるので，7頂点完全グラフは結び目内在である最小の完全グラフです．

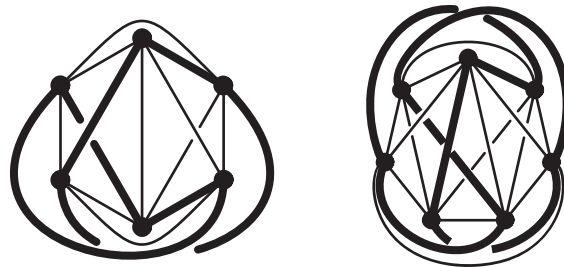


図 1: 絡み目内在と結び目内在

定理 3 [3] 10 頂点完全グラフ K_{10} は 3 成分絡み目内在である．

また，Flapan, Naimi と Pommersheim は，9 頂点完全グラフは 3 成分絡み目内在でないことを示しました．

これらの性質をもつグラフを探るのに，次のグラフの変形が知られています．以下，グラフのサイクルとは円周に同相な部分グラフのことをいい，特に k 本の辺から成るサイクルを k -サイクルといいます． ΔY 変形とは，グラフの 3-サイクルの辺を取り除き，新しい頂点を 1 つ加えその頂点とそのサイクルの各頂点を辺で結ぶ変形です（図 2）．この変形の逆を $Y\Delta$ 変形といいます．次の事実が成り立ちます．

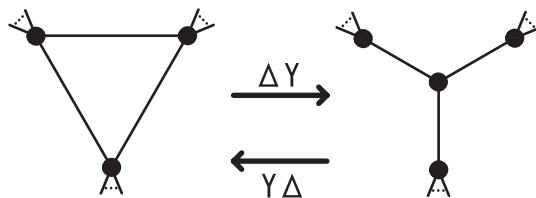


図 2: ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形

命題 4 G' を G から ΔY 変形で得られたグラフとすると，次が成り立つ． G が絡み目内在ならば， G' も絡み目内在である． G が結び目内在ならば， G' も結び目内在である． G が 3 成分絡み目内在ならば， G' も 3 成分絡み目内在である．すなわち， ΔY 変形は，絡み目内在，結び目内在，3 成分絡み目内在という性質を保存する．

絡み目内在のグラフの特徴づけがなされています．

定理 5 [7] G が絡み目内在であるための必要十分条件は， G が K_6 から ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形して得られるグラフをマイナーとして含むことである．

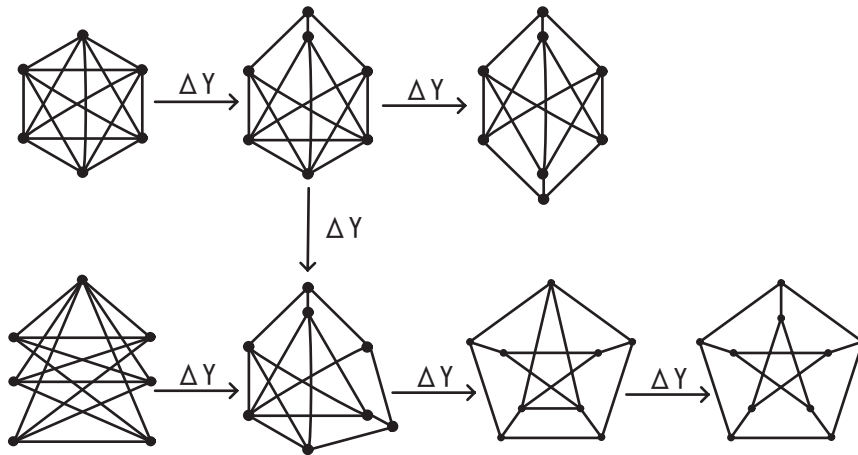


図 3: ペテルセンファミリー

ここで、 K_6 から ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形して得られるグラフの集合をペテルセンファミリー〔Petersen family〕といいます。さらに次の系が成り立ちます。

系 6 [7] G を絡み目内在なグラフ、 G' を G から $Y\Delta$ 変形で得られたグラフとすると、 G' も絡み目内在である。すなわち、 $Y\Delta$ 変形は、絡み目内在という性質を保存する

一方、結び目内在については、次の事実が知られています。

定理 7 [2] $Y\Delta$ 変形はグラフの結び目内在という性質を保存するとは限らない。

実際、Flapan と Naimi は、 K_7 から適当な 6 回の ΔY 変形で得られる結び目内在なグラフ C_{12} から、適当な 2 回の $Y\Delta$ 変形を 2 回行なって得られるグラフ FN が結び目内在でないことを示しました。

定理 5 より絡み目内在である K_6 から ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形をして得られるグラフは全部で 6 個です。結び目内在である K_7 から ΔY 変形をして得られるグラフについて、次のことが知られています。

定理 8 [6] 13 個のグラフが K_7 から ΔY 変形して得られる。さらに、これらのグラフは結び目内在に関してマイナーミニマルである。つまり、これらのグラフのプロパーマイナーは結び目内在ではない。ここで、 G' が G のプロパーマイナーであるとは、 G' は G のマイナーで G とは一致しないときをいう。

そして、今回、次の問題を考えます。

問題 1 K_7 から 6 回の ΔY 変形と 2 回の $Y\Delta$ 変形で FN を得る際の FN の一つ前のグラフ N'_{11} (すなわち、 K_7 から 6 回の ΔY 変形と 1 回の $Y\Delta$ 変形で得られるもの) は、結び目内在であるか？

問題 2 K_7 から ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形をして得られるグラフは、何個あるか？さらに、これらの各グラフは結び目内在であるか？

質疑応答時に寺垣内政一先生から頂いたコメントによれば、Flapan と Naimi は N'_{11} が結び目内在でないこともわかっていたようですが、そのことは [2] では全く触れられていません。今回、我々はより一般に問題 2 に対して完全な解答を与えます。

2 得られた結果

得られた結果を紹介するために、新たに次を定義します。 G が結び目または完全 3 成分絡み目内在 (intrinsically knotted or completely 3-linked) ($I(K$ or $C3L)$) であるとは、 G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非自明な結び目を含むか各 2 成分部分絡み目が非分離である 3 成分絡み目を含むときをいいます。定義から、 G が結び目内在ならば G は結び目または完全 3 成分絡み目内在であることがわかります。問題 1 と 2 の答えとして、次の主定理と系を得ました。

定理 9 19 個のグラフが K_7 から ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形で得られ、それらのグラフは結び目または完全 3 成分絡み目内在である。さらに、これらのグラフは結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルである。

これらのグラフの分布は図 4 のようになっています。破線で囲まれた領域にあるグラフは、 K_7 と K_7 から ΔY 変形のみで得られるグラフで、結び目内在です。 FN は、Flapan と Naimi が結び目内在ではないことを示したグラフです。

N_9 は図 5 のような空間埋め込みをもつ (左の空間埋め込みは非分離な 3 成分絡み目を含まない、右の空間埋め込みは非自明な結び目を含まない) ので、 N_9 は結び目内在でも完全 3 成分絡み目内在でもないことがわかります。一般に、次が成り立ちます。

系 10 $N_9, N_{10}, N_{11}, N'_{11}, N_{12}$ と FN の各グラフは結び目内在でも完全 3 成分絡み目内在でもない。すなわち、 G を K_7 から ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形して得られるが ΔY 変形のみでは得られないグラフとすると、 G は結び目内在ではない。

定理 9 の前半の証明は、次が成り立つので、 N_9 と FN が結び目または完全 3 成分絡み目内在であることを示せば十分です。

命題 11 G' を G から ΔY 変形して得られるグラフとする。 G が結び目または完全 3 成分絡み目内在であるなら、 G' も結び目または完全 3 成分絡み目内在である。

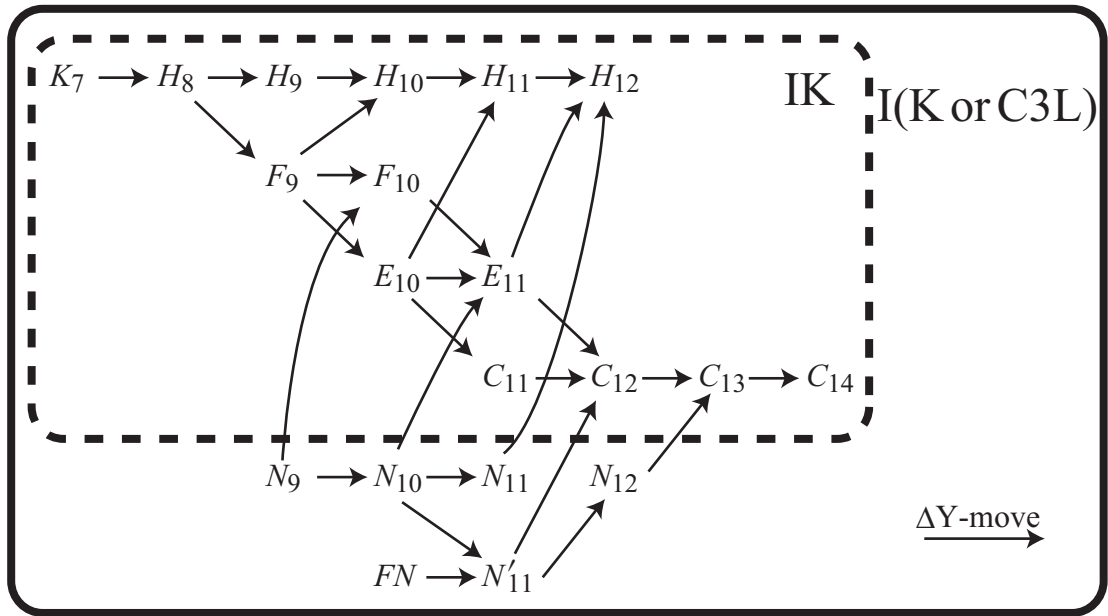


図 4: K_7 から ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形して得られるグラフ

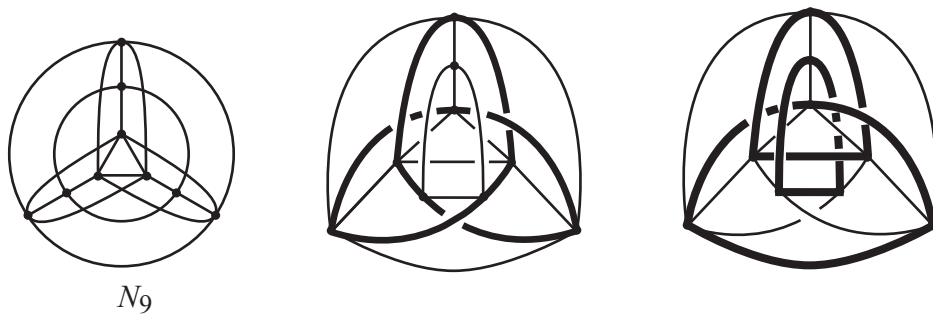


図 5: N_9 とその空間埋め込み

N_9 と FN が結び目または完全 3 成分絡み目内在であることを示すのに、次の補題を使います。

補題 12 [9, 4] D_4 を図 6 のグラフとし、 D_4 の 2-サイクル $e_i \cup e_j$ を γ_{ij} で表す ($i < j$)。また、 D_4 の全ての 4-サイクルの集合を Γ で表す。このとき、

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_2(f(\gamma)) \equiv 1 \pmod{2} \iff \text{lk}_2(f(\gamma_{12} \cup \gamma_{56})) \text{lk}_2(f(\gamma_{34} \cup \gamma_{78})) = 1$$

である。ここで、 a_2 は Conway 多項式の 2 次の係数、 lk_2 は 2 を法とした絡み数である。

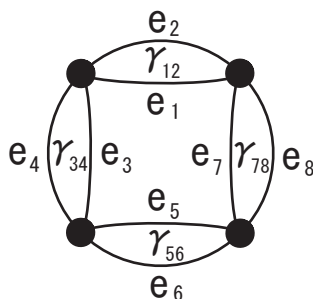


図 6: D_4

そして、詳細は省きますが、 N_9 と FN のマイナーである絡み目内在グラフに着目をし、補題 12 を用いて、まず非自明な結び目を探していきます。そこで、非自明な結び目が含まれないような状況下では、必ずどの 2 成分部分絡み目も非分離であるような 3 成分絡み目が見つかることを示します。これらのグラフが結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルであることは、次の補題を用います。

補題 13 G を結び目または完全 3 成分絡み目内在なグラフとする。 G' を G から ΔY 変形で得られるグラフとする。 G' が結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルであるならば、 G も結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルである。

この補題と図 4 の H_{12} と C_{13} が定理 8 より結び目または完全 3 成分絡み目内在に関するマイナーミニマルであることから、 $N_9, N_{10}, N_{11}, N'_{11}, N_{12}$ と FN も結び目または完全 3 成分絡み目内在に関してマイナーミニマルであることがわかります。

3 関連する話題

結び目または完全 3 成分絡み目内在と同じような定義として、次が知られています。 G が結び目または 3 成分絡み目内在 (intrinsically knotted or 3-linked) ($I(K$ or $3L)$) である [5] とは、 G の任意の空間埋め込み f に対して $f(G)$ が非自明な結び目を含むか非分離である 3 成分絡み目を含むときをいいます。 [5, 10, 11] で、結び目または 3 成分絡み目内在であるが結び目内在でも 3 成分絡み目でもないグラフの存在が知られています。 ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形については、以下が知られています。

命題 14 G' を G からして得られるグラフとする。 G が結び目または 3 成分絡み目内在であるなら、 G' も結び目または 3 成分絡み目内在である。

命題 15 [10] $Y\Delta$ 変形はグラフの結び目または 3 成分絡み目内在という性質を保存するとは限らない

そして、内在性質と ΔY 変形と $Y\Delta$ 変形について、表にまとめると、以下のようになります。

内在性質	ΔY 変形	$Y\Delta$ 変形
絡み目	保存する	保存する [7]
結び目	保存する	保存しない [2]
3 成分絡み目	保存する	わかっていない
結び目または 3 成分絡み目	保存する	保存しない [10]
結び目または完全 3 成分絡み目	保存する	わかっていない

参考文献

- [1] J.H. Conway and C.McA. Gordon: Knots and links in spatial graphs, *J. Graph Theory* **7** (1983), 445–453.
- [2] E. Flapan and R. Naimi: The Y-triangle move does not preserve intrinsic knottedness, *Osaka J. Math.*, **45** (2008), 107–111.
- [3] E. Flapan, R. Naimi and J. Pommersheim: Intrinsically triple linked complete graphs, *Topology Appl.*, **115** (2001), 239–246.
- [4] J. Foisy: Intrinsically knotted graphs, *J. Graph Theory* **39** (2002), 178–187.
- [5] J. Foisy: Graphs with a knot or 3-component link in every spatial embedding, *J. Knot Theory Ramifications* **9** (2006), 1113–1118.
- [6] T. Kohara and S. Suzuki: Some remarks on knots and links in spatial graphs, in *Knots 90* (Osaka, 1990) (de Gruyter, Berlin, 1992), 435–445.

- [7] N. Robertson, P. Seymour and R. Thomas: Sachs' linkless embedding conjecture, *J. Combin. Theory Ser. B* **64** (1995), 185–227.
- [8] H. Sachs: On spatial representations of finite graphs, in *Finite and Infinite sets, Vol. I, II (Eger, 1981)*, *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai* 37, North-Holland, Amsterdam, 1984, 649-662.
- [9] K. Taniyama and A. Yasuhara: Realization of knots and links in a spatial graph, *Topology Appl.* **112** (2001), 87–109.
- [10] A. Yamazaki: Some intrinsic properties for various graphs, Master thesis, Tokyo Woman's Christian University, 2009.
- [11] A. Yamazaki: Producing new intrinsically knotted or 3-linked graphs, in preparation.

〒 169-8050 東京都 新宿区 西早稲田 1-6-1 早稲田大学 教育学部 数学科
r.t@fuji.waseda.jp