第2回レポート問題 解答

幾何学AI/幾何学I (担当: 新國)

2013年6月19日 (水)

問題. 6点集合 $X = \{1,2,3,4,5,6\}$ に対し, その部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \left\{ \begin{matrix} \emptyset,\ X,\ \{2\},\ \{5\},\ \{2,5\},\ \{1,3,5\},\ \{4,5,6\}, \\ \{1,2,3,5\},\ \{2,4,5,6\},\ \{1,3,4,5,6\} \end{matrix} \right\}$$

で定義する. また, X の部分集合 A を $A = \{4,5\}$ とする. 一方, 4点集合 $X' = \{a,b,c,d\}$ に対し, その部分集合族 $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}' = \{\emptyset,\ X',\ \{b,c\},\ \{a,b,c\},\ \{b,c,d\}\}$$

で定義する. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $\mathcal{O}$ は X の位相であり, また, $\mathcal{O}'$ は X' の位相であることをそれぞれ示せ.

(2) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の閉集合系 $\mathcal{U}$, 及び位相空間 $(X',\mathcal{O}')$ の閉集合系 $\mathcal{U}'$ をそれぞれ求めよ.

(3) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において, A の内部 A^i, 触集合 $\bar{A}$, 境界 ∂A, 外部 A^e をそれぞれ求めよ.

(4) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において, A の集積点及び孤立点を全て求めよ.

(5) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において, X の空でない真部分集合 B でその境界 ∂B が空集合であるものを全て求めよ.

(6) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ において, 3の近傍系 $\mathbb{V}_X(3)$ を求めよ.

(7) 位相 $\mathcal{O}$ の基底でなるべく少ない個数の開集合からなるものを1つ与えよ. また, 位相 $\mathcal{O}'$ の基底でなるべく少ない個数の開集合からなるものを1つ与えよ.

(8) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ から位相空間 $(X',\mathcal{O}')$ への連続写像で, 定値写像以外のものを1つ与えよ.

(9) 位相空間 $(X',\mathcal{O}')$ から位相空間 $(X,\mathcal{O})$ への連続写像で, 定値写像以外のものを1つ与えよ.

以上

解答.

(1) まず, $\mathcal{O}$ が X の位相であることを示す. 以下, $\mathcal{O}$ の $\emptyset$, X 以外の元をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&O_1 = \{2\}\,,\ O_2 = \{5\}\,,\ O_3 = \{2,5\}\,,\ O_4 = \{1,3,5\}\,,\ O_5 = \{4,5,6\}\,,\\
&O_6 = \{1,2,3,5\}\,,\ O_7 = \{2,4,5,6\}\,,\ O_8 = \{1,3,4,5,6\}
\end{aligned}
$$

とおく. このとき, **定義 2.1.1** の 3 条件を確かめよう.
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ の定義から明らか.
(ii) $\mathcal{O}$ の任意の 2 つの元の共通部分がまた $\mathcal{O}$ に属することを確かめる. 実際, 次の表の通りである.

$\cap$	$\emptyset$	X	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8
O_1	$\emptyset$	O_1	O_1	$\emptyset$	O_1	$\emptyset$	$\emptyset$	O_1	O_1	$\emptyset$
O_2	$\emptyset$	O_2	$\emptyset$	O_2	O_2	O_2	O_2	O_2	O_2	O_2
O_3	$\emptyset$	O_3	O_1	O_2	O_3	O_2	O_2	O_3	O_3	O_2
O_4	$\emptyset$	O_4	$\emptyset$	O_2	O_2	O_4	O_2	O_4	O_2	O_4
O_5	$\emptyset$	O_5	$\emptyset$	O_2	O_2	O_2	O_5	O_2	O_5	O_5
O_6	$\emptyset$	O_6	O_1	O_2	O_3	O_4	O_2	O_6	O_3	O_4
O_7	$\emptyset$	O_7	O_1	O_2	O_3	O_2	O_5	O_3	O_7	O_5
O_8	$\emptyset$	O_8	$\emptyset$	O_2	O_2	O_4	O_5	O_4	O_5	O_8

(iii) $\mathcal{O}$ の任意の 2 つの元の和集合がまた $\mathcal{O}$ に属することを確かめる (台集合 X が有限集合なので, それで十分である). 実際, 次の表の通りである.

$\cup$	$\emptyset$	X	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8
$\emptyset$	$\emptyset$	X	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8
X	X	X	X	X	X	X	X	X	X	X
O_1	O_1	X	O_1	O_3	O_3	O_6	O_7	O_6	O_7	X
O_2	O_2	X	O_3	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6	O_7	O_8
O_3	O_3	X	O_3	O_3	O_3	O_6	O_7	O_6	O_7	X
O_4	O_4	X	O_6	O_4	O_6	O_4	O_8	O_6	X	O_8
O_5	O_5	X	O_7	O_5	O_7	O_8	O_5	X	O_7	O_8
O_6	O_6	X	O_6	O_6	O_6	O_6	X	O_6	X	X
O_7	O_7	X	O_7	O_7	O_7	X	O_7	X	O_7	X
O_8	O_8	X	X	O_8	X	O_8	O_8	X	X	O_8

(i), (ii), (iii) により, $\mathcal{O}$ は X の位相である.

注意. 上の各表の見方は以下の通りである.

$\cap$		B
		$\vdots$
A	$\cdots$	$A \cap B$

$\cup$		B
		$\vdots$
A	$\cdots$	$A \cup B$

次に $\mathcal{O}'$ が X' の位相であることを示す. 以下, $\mathcal{O}'$ の $\emptyset$, X' 以外の元をそれぞれ

$$O'_1 = \{b, c\}\,,\ O'_2 = \{a, b, c\}\,,\ O'_3 = \{b, c, d\}$$

とおく. このとき, やはり**定義 2.1.1** の 3 条件が確かめられる. $\emptyset, X' \in \mathcal{O}'$ は定義から明らかで, また, $\mathcal{O}'$ の任意の 2 つの元の共通部分及び和集合が $\mathcal{O}'$ に属することは, 以下のように確認でき, よって $\mathcal{O}'$ は X' の位相である. $\square$

$\cap$	$\emptyset$	X'	O'_1	O'_2	O'_3
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X'	$\emptyset$	X'	O'_1	O'_2	O'_3
O'_1	$\emptyset$	O'_1	O'_1	O'_1	O'_1
O'_2	$\emptyset$	O'_2	O'_1	O'_2	O'_1
O'_3	$\emptyset$	O'_3	O'_1	O'_1	O'_3

$\cup$	$\emptyset$	X'	O'_1	O'_2	O'_3
$\emptyset$	$\emptyset$	X'	O'_1	O'_2	O'_3
X'	X'	X'	X'	X'	X'
O'_1	O'_1	X'	O'_1	O'_2	O'_3
O'_2	O'_2	X'	O'_2	O'_2	X'
O'_3	O'_3	X'	O'_3	X'	O'_3

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の閉集合系 $\mathcal{U}$ は

$$\mathcal{U} = \begin{Bmatrix} X,\ \emptyset,\ \{1,3,4,5,6\}\,,\ \{1,2,3,4,6\}\,,\ \{1,3,4,6\}\,, \\ \{2,4,6\}\,,\ \{1,2,3\}\,, \{4,6\}\,,\ \{1,3\}\,,\ \{2\} \end{Bmatrix}$$

であり, 一方, 位相空間 $(X', \mathcal{O}')$ の閉集合系 $\mathcal{U}'$ は

$$\mathcal{U}' = \{X',\ \emptyset,\ \{a, d\}\,,\ \{d\}\,,\ \{a\}\}$$

である. $\square$

(3) $A = \{4, 5\}$ の内部 A^i, 触集合 $\bar{A}$, 境界 ∂A, 外部 A^e は, それぞれ

$$\begin{aligned}
A^i &= \bigcup_{\substack{O \in \mathcal{O} \\ O \subset \{4,5\}}} O = \emptyset \cup \{5\} = \{5\}\,, \\
\bar{A} &= \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ \{4,5\} \subset U}} U = X \cap \{1,3,4,5,6\} = \{1,3,4,5,6\}\,, \\
\partial A &= \bar{A} - A^i = \{1,3,4,6\}\,, \\
A^e &= (A^c)^i = \{1,2,3,6\}^i = \bigcup_{\substack{O \in \mathcal{O} \\ O \subset \{1,2,3,6\}}} O = \emptyset \cup \{2\} = \{2\}
\end{aligned}$$

となる. $\square$

(4) 各 $k=1,2,\dots,6$ について, $A-\{k\}$ の触集合 $\overline{A-\{k\}}$ に k が属するかどうかを調べると,

$$
\begin{aligned}
\overline{A-\{1\}} &= \overline{\{4,5\}} = \{1,3,4,5,6\} \ni 1, \\
\overline{A-\{2\}} &= \overline{\{4,5\}} = \{1,3,4,5,6\} \not\ni 2, \\
\overline{A-\{3\}} &= \overline{\{4,5\}} = \{1,3,4,5,6\} \ni 3, \\
\overline{A-\{4\}} &= \overline{\{5\}} = \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{U} \\ \{5\}\subset U}} U = X \cap \{1,3,4,5,6\} = \{1,3,4,5,6\} \ni 4 \\
\overline{A-\{5\}} &= \overline{\{4\}} = \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{U} \\ \{4\}\subset U}} U \\
&= X \cap \{1,3,4,5,6\} \cap \{1,2,3,4,6\} \cap \{1,3,4,6\} \cap \{2,4,6\} \cap \{4,6\} \\
&= \{4,6\} \not\ni 5, \\
\overline{A-\{6\}} &= \overline{\{4,5\}} = \{1,3,4,5,6\} \ni 6
\end{aligned}
$$

となる. 従って A の集積点は $1,3,4,6$ で, 一方, 孤立点は 5 である. $\square$

(5) B は X の部分集合で $\partial B=\emptyset$ なるものとすると,

$$\bar{B}-B^i=\partial B=\emptyset,$$

及び $\bar{B}\supset B^i$ から, $\bar{B}=B^i$ である. これより $\bar{B}=B^i\subset B\subset\bar{B}$ となるので, 従って

$$B^i=B=\bar{B}$$

となる. 即ち, B **は開集合でも閉集合でもあるような** X **の部分集合である**. そのような集合で空でない X の真部分集合は, $\{2\}$, $\{1,3,4,5,6\}$ の 2 つである. $\square$

(6) 近傍の定義から,

$$V\in\mathbb{V}_X(3) \overset{\text{定義}}{\iff} 3\in V^i \iff {}^{\exists}O\in\mathcal{O} \text{ s.t. } 3\in O \text{ かつ } O\subset V$$

である. 即ち, $(X,\mathcal{O})$ **における** 3 **の近傍は,** 3 **が属する開集合を含む** X **の部分集合である**. 3 が属する $(X,\mathcal{O})$ の開集合は

$$\{1,3,5\},\ \{1,2,3,5\},\ \{1,3,4,5,6\},\ X$$

であるから, これらのいずれかを含む X の部分集合を全て挙げれば良い. 実際,

$$\mathbb{V}_X(3)=\left\{\begin{matrix}\{1,3,5\},\ \{1,2,3,5\},\ \{1,3,4,5\},\ \{1,3,5,6\}, \\ \{1,2,3,4,5\},\ \{1,2,3,5,6\},\ \{1,3,4,5,6\},\ X\end{matrix}\right\}$$

である. $\square$

(7) まず, $\mathcal{O}$ の部分集合として, 例えば

$$\mathcal{B} = \{\emptyset,\ \{2\}\,,\ \{5\}\,,\ \{1,3,5\}\,,\ \{4,5,6\}\}$$

を考えると, $\mathcal{B}$ に属さない $\mathcal{O}$ の元は, それぞれ

$$\begin{aligned} X &= \{2\} \cup \{1,3,5\} \cup \{4,5,6\}\,, \\ \{2,5\} &= \{2\} \cup \{5\}\,, \\ \{1,2,3,5\} &= \{2\} \cup \{1,3,5\}\,, \\ \{2,4,5,6\} &= \{2\} \cup \{4,5,6\}\,, \\ \{1,3,4,5,6\} &= \{1,3,5\} \cup \{4,5,6\} \end{aligned}$$

と, $\mathcal{B}$ の元の和集合で表される. 従って $\mathcal{B}$ は位相 $\mathcal{O}$ の基底である. 次に, $\mathcal{O}'$ の部分集合として, 例えば

$$\mathcal{B}' = \{\emptyset,\ \{b,c\}\,,\ \{a,b,c\}\,,\ \{b,c,d\}\}$$

を考えると, $\mathcal{B}'$ に属さない $\mathcal{O}'$ の元は X' のみで,

$$X' = \{a,b,c\} \cup \{b,c,d\}$$

と, $\mathcal{B}'$ の元の和集合で表される. 従って $\mathcal{B}'$ は位相 $\mathcal{O}'$ の基底である. □

(8) 写像 $f : X \to X'$ を, 例えば

$$f(1) = f(3) = a,\ f(2) = b,\ f(4) = f(6) = d,\ f(5) = c$$

で定義する. このとき

$$\begin{aligned} f^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{O}, \\ f^{-1}(X') &= X \in \mathcal{O}, \\ f^{-1}(\{b,c\}) &= \{2,5\} \in \mathcal{O}, \\ f^{-1}(\{a,b,c\}) &= \{1,2,3,5\} \in \mathcal{O}, \\ f^{-1}(\{b,c,d\}) &= \{2,4,5,6\} \in \mathcal{O} \end{aligned}$$

であるから, f は位相空間 $(X,\mathcal{O})$ から位相空間 $(X',\mathcal{O}')$ への連続写像である. □

(9) 写像 $g : X' \to X$ を, 例えば

$$g(a) = 3,\ g(b) = g(c) = 5,\ g(d) = 6$$

で定義する．このとき

$$
\begin{aligned}
g^{-1}(\emptyset) &= \emptyset \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(X) &= X' \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(\{2\}) &= \emptyset \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(\{5\}) &= \{b, c\} \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(\{2, 5\}) &= \{b, c\} \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(\{1, 3, 5\}) &= \{a, b, c\} \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(\{4, 5, 6\}) &= \{b, c, d\} \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(\{1, 2, 3, 5\}) &= \{a, b, c\} \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(\{2, 4, 5, 6\}) &= \{b, c, d\} \in \mathcal{O}', \\
g^{-1}(\{1, 3, 4, 5, 6\}) &= X' \in \mathcal{O}'
\end{aligned}
$$

であるから, g は位相空間 $(X', \mathcal{O}')$ から位相空間 $(X, \mathcal{O})$ への連続写像である． $\square$