第 2 回レポート問題 解答

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 12 月 18 日 (水) 出題

問題. 以下の大問 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の全てに解答せよ.

$\boxed{1}$ 標準的な位相による n 次元 Euclid 空間 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$ において, 単位 $(n-1)$ 次元球面

$$\mathbb{S}^{n-1} = \left\{ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1 \right\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の有界な閉集合であることを示せ.

$\boxed{2}$ $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, A, B は X の部分集合で $A \supset B$ であるとする. いま, B が A のコンパクト部分集合であるならば, B は X のコンパクト部分集合でもあることを示せ.

$\boxed{3}$ $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, X' を集合とする. また, $f : X \to X'$ を写像とし, f により $\mathcal{O}$ から誘導される X' の位相を $\mathcal{O}'$ で表す.[1] このとき, f が全射で, かつ $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトであれば, 位相空間 $(X', \mathcal{O}')$ もコンパクトであることを示せ.

$\boxed{4}$ $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\mathcal{U}$ をその閉集合系とする. このとき, 以下の条件 (T_4), $(\mathrm{T}_4)'$ は互いに必要十分条件であることを示せ.

(T_4) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ なる $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ に対し, ある $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在して, $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ が成り立つ.

$(\mathrm{T}_4)'$ $A \subset O$ なる $A \in \mathcal{U}$, $O \in \mathcal{O}$ に対し, ある $O_1 \in \mathcal{O}$ が存在して, $A \subset O_1$ かつ $\bar{O}_1 \subset O$ が成り立つ.

以上

[1] § **4.3 定義 4.3.2** を参照せよ. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, 及び写像 $f : X \to X'$ に対し, X' の部分集合族 $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}' = \{ O' \subset X' \mid f^{-1}(O') \in \mathcal{O} \}$$

で定義すると, これは X' の位相となる (**定理 4.3.1**). この $\mathcal{O}'$ を, f **により** $\mathcal{O}$ **から誘導される** X' **の位相**と呼ぶのであった.

解答.

$\boxed{1}$ $\mathbb{S}^{n-1}$ は閉球体 $B^*(\mathbf{0};1)$ に含まれるので有界である. 以下, $\mathbb{S}^{n-1}$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示す. そのためには, $\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合であること, 即ち, 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ に対し, ある $\varepsilon>0$ が存在して, $\boldsymbol{x}$ を中心とする半径 ε の開球体 $B(\boldsymbol{x};\varepsilon)$ が $\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ に含まれることを示せば良い. 以下, $\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^n$ に対し, $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{y}$ の**距離**を $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ で表すとき,[2] 任意の $\boldsymbol{x}\in\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ は $d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})\neq 1$ をみたす. 即ち $d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})>1$ または $d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})<1$ が成り立つので, この 2 通りに場合を分ける.

(1) $d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})>1$ の場合: 正数 $\varepsilon>0$ を

$$\varepsilon=d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})-1 \tag{i}$$

で定義しよう. いま, $\boldsymbol{a}\in B(\boldsymbol{x};\varepsilon)$ に対し, **三角不等式** (**命題 1.1.3 (4)**) から

$$d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})\leq d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})+d(\boldsymbol{a},\mathbf{0}) \tag{ii}$$

が成り立つ. そこで (i), (ii) より

$$d(\boldsymbol{a},\mathbf{0})\geq d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})-d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})>(\varepsilon+1)-\varepsilon=1$$

となるので, $d(\boldsymbol{a},\mathbf{0})>1$, 即ち $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ である. 従って $B(\boldsymbol{x};\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ となる.

(2) $d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})<1$ の場合: 正数 $\varepsilon>0$ を

$$\varepsilon=1-d(\boldsymbol{x},\mathbf{0}) \tag{iii}$$

で定義しよう. いま, $\boldsymbol{a}\in B(\boldsymbol{x};\varepsilon)$ に対し, 三角不等式及び (iii) から

$$d(\boldsymbol{a},\mathbf{0})\leq d(\boldsymbol{a},\boldsymbol{x})+d(\boldsymbol{x},\mathbf{0})<\varepsilon+(1-\varepsilon)=1$$

が成り立つ. 故に $d(\boldsymbol{a},\mathbf{0})<1$, 即ち $\boldsymbol{a}\in\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ である. 従って $B(\boldsymbol{x};\varepsilon)\subset\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ となる.

以上により, $\mathbb{R}^n-\mathbb{S}^{n-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることが示された (図 1 は, 特に $n=2$ の場合に, 上記議論を図示したものである). 従って $\mathbb{S}^{n-1}$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である. □

注意. $\boxed{1}$ の結果と**定理 7.3.4** を合わせて, 単位 $(n-1)$ 次元球面 $\mathbb{S}^{n-1}$ はコンパクトな位相空間であることがわかる (§ **7.3 例 1 (3)**).

---

[2] **定義 1.1.1** を参照. $\boldsymbol{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, $\boldsymbol{y}=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$ に対し,

$$d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}$$

である.

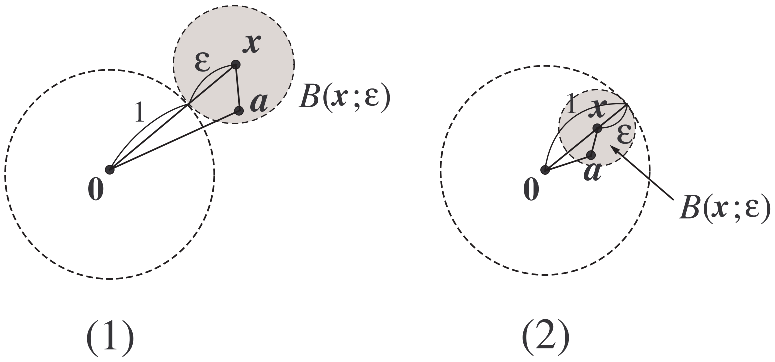

図 1: $B\,(\boldsymbol{x};\varepsilon) \subset \mathbb{R}^n - \mathbb{S}^{n-1}$ なる $\boldsymbol{x}$ の開近傍 $B\,(\boldsymbol{x};\varepsilon)$ の存在 $(n=2)$

$\boxed{2}$ $\mathcal{C} = \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を B の X における開被覆としよう. 即ち,

$$B \subset \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda, \quad O_\lambda \in \mathcal{O} \tag{iv}$$

である (図 2 の左図参照. 各 O_λ は A に含まれているとは限らないことに注意). そこで各 $\lambda\in\Lambda$ に対し, A の部分集合 O'_λ を

$$O'_\lambda = O_\lambda \cap A \tag{v}$$

で定義すると, A における $\mathcal{O}$ の相対位相 $\mathcal{O}_A$ の定義から, O'_λ は部分位相空間 $(A,\mathcal{O}_A)$ の開集合であり, (iv), (v) 及び $B\subset A$ から,

$$B \subset \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O_\lambda\right) \cap A = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} (O_\lambda \cap A) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O'_\lambda, \quad O'_\lambda \in \mathcal{O}_A$$

となる. 即ち, $\mathcal{C}' = \{O'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ は B の A における開被覆である (図 2 の右図参照). そこで仮定より B は A のコンパクト部分集合であるから, ある有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$ が存在して,

$$B \subset O'_{\lambda_1} \cup O'_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O'_{\lambda_k} \tag{vi}$$

が成り立つ. このとき (vi), (v) から

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{k} O'_{\lambda_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (O_\lambda \cap A) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} O_{\lambda_i}\right) \cap A$$

となり, 故に

$$B \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{\lambda_i} = O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O_{\lambda_k}$$

である. これは B が X のコンパクト部分集合であることを意味する. □

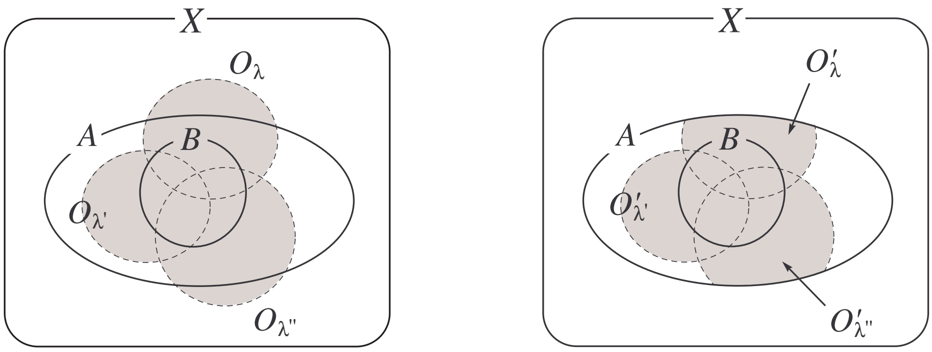

図 2: 左図: B の X における開被覆 $\mathcal{C} = \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$, 右図: B の A における開被覆 $\mathcal{C}' = \{O'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$

$\boxed{3}$ $\mathcal{C}' = \{O'_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X' の開被覆としよう. 即ち,

$$X' = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} O'_\lambda, \quad O'_\lambda \in \mathcal{O}' \tag{vii}$$

である. このとき, (vii) 及び写像の演算から,

$$X = f^{-1}(X') = f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda} O'_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} f^{-1}(O'_\lambda) \tag{viii}$$

となり, 更に位相 $\mathcal{O}'$ の定義から, 各 $\lambda \in \Lambda$ に対し, $f^{-1}(O'_\lambda)$ は $(X, \mathcal{O})$ の開集合である. 従って (viii) より, $\mathcal{C} = \{f^{-1}(O'_\lambda)\}_{\lambda\in\Lambda}$ は X の開被覆である. そこで仮定より $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトであるから, ある有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$ が存在して,

$$X = f^{-1}\left(O'_{\lambda_1}\right) \cup f^{-1}\left(O'_{\lambda_2}\right) \cup \cdots \cup f^{-1}\left(O'_{\lambda_k}\right) \tag{ix}$$

が成り立つ. 更にまた仮定より f は全射であるから,

$$X' = f(X) \tag{x}$$

である. このとき (x), (ix) 及び写像の演算 (f は全射であることに注意) から,

$$\begin{aligned} X' &= f\left(f^{-1}\left(O'_{\lambda_1}\right) \cup f^{-1}\left(O'_{\lambda_2}\right) \cup \cdots \cup f^{-1}\left(O'_{\lambda_k}\right)\right) \\ &= f\left(f^{-1}\left(O'_{\lambda_1}\right)\right) \cup f\left(f^{-1}\left(O'_{\lambda_2}\right)\right) \cup \cdots \cup f\left(f^{-1}\left(O'_{\lambda_k}\right)\right) \\ &= O'_{\lambda_1} \cup O'_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O'_{\lambda_k} \end{aligned}$$

となる. これは $(X', \mathcal{O}')$ がコンパクトであることを意味する. □

注意. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 及び X における同値関係 $\sim$ において, $X/_\sim$ を X の $\sim$ による商集合とし, $\pi : X \to X/_\sim$ を自然な全射とする. このとき, π により $\mathcal{O}$ から誘導される $X/_\sim$ の位相 $\mathcal{O}'$ を**商位相**といい, 位相空間 $(X/_\sim, \mathcal{O}')$ を, $(X, \mathcal{O})$ の ($\sim$ による) **商空間**というのであった (**定義 4.3.3**). このとき, $\boxed{3}$ の結果から, もし $(X, \mathcal{O})$ がコンパクトならば, 商空間 $(X/_\sim, \mathcal{O}')$ もコンパクトである. 例えば, **Möbius の帯** (§ **4.3 例 1 (2)**) がコンパクトであることは, このことからわかる.

$\boxed{4}$ $(\mathrm{T}_4) \Rightarrow (\mathrm{T}_4)'$: $A \subset O$ なる $A \in \mathcal{U}$, $O \in \mathcal{O}$ に対し, $A' = O^c$ とおくと, $A' \in \mathcal{U}$ かつ $A \cap A' = \emptyset$ である. 故に (T_4) から, ある $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在して,

$$A \subset O_1,\ A' \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

が成り立つ (図 3 参照). このとき, $O_1 \subset O_2^c$ かつ $O_2^c \in \mathcal{U}$ から, **補題 2.2.6 (2)** より

$$\bar{O}_1 \subset \bar{O}_2^c = O_2^c \tag{xi}$$

となり, 一方, $A' \subset O_2$ より,

$$O_2^c \subset A'^c = O \tag{xii}$$

となる. (xi), (xii) から $\bar{O}_1 \subset O$ である. 即ち, $(\mathrm{T}_4)'$ が成り立つことが示された.

$(\mathrm{T}_4)' \Rightarrow (\mathrm{T}_4)$: $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ なる $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ に対し, $O = A_2^c$ とおくと, $O \in \mathcal{O}$ かつ $A_1 \subset O$ である. 故に $(\mathrm{T}_4)'$ から, ある $O_1 \in \mathcal{O}$ が存在して,

$$A_1 \subset O_1,\ \bar{O}_1 \subset O$$

が成り立つ. そこで $O_2 = \left(\bar{O}_1\right)^c$ とおくと, $O_2 \in \mathcal{O}$ かつ $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ で,

$$A_2 = O^c \subset \left(\bar{O}_1\right)^c = O_2$$

となる (図 4 参照). 即ち, (T_4) が成り立つことが示された. □

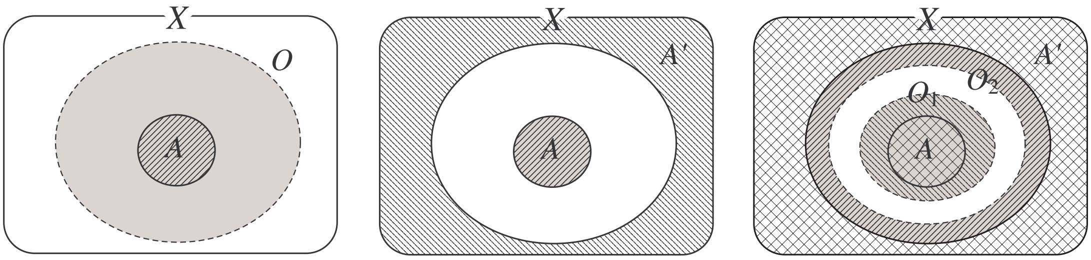

図 3: $A \subset O_1$ かつ $\bar{O}_1 \subset O$ なる $O_1 \in \mathcal{O}$ の存在

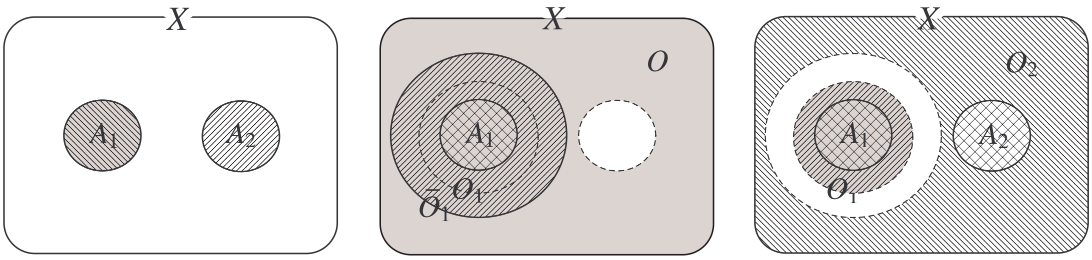

図 4: $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ なる $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ の存在