第1回レポート問題 解答

幾何学AI/幾何学I (担当: 新國)

2013年5月8日 (水) 出題

問題. 以下の大問 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ の全てに解答せよ.

$\boxed{1}$ n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合

$$\mathbb{R}^n_+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n \geq 0\}$$

は $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示せ.

$\boxed{2}$ n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の閉集合系 $\mathcal{U} = \mathcal{U}(\mathbb{R}^n)$ に対し, 以下の (1), (2), (3) が成り立つことをそれぞれ示せ.

(1) $\mathbb{R}^n,\ \emptyset \in \mathcal{U}$,

(2) $U_1, U_2, \dots, U_k \in \mathcal{U}$ ならば $U_1 \cup U_2 \cup \dots \cup U_k \in \mathcal{U}$,

(3) $\mathcal{U}$ の任意の閉集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し,

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}.$$

$\boxed{3}$ 実数 $\mathbb{R}$ の区間 $(1, \infty)$ から $\mathbb{R}$ への写像 $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}$ を, $x \in (1, \infty)$ に対し $f(x) = 1/x$ で定義する. このとき, f は連続であることを示せ.

以上

解答.

$\boxed{1}$ 示すべきことを確認しよう．まず, **補題 1.3.2** (2) より, $\mathbb{R}^n_+$ が $\mathbb{R}^n$ の閉集合であることを示すには, その $\mathbb{R}^n$ における補集合

$$\left(\mathbb{R}^n_+\right)^c = \{(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in \mathbb{R}^n \mid x_n < 0\}$$

が $\mathbb{R}^n$ の開集合であることを示せば良い．そのためには, **定義 1.3.1** (1) 及び**定義 1.2.1** (1) から, 任意の $\boldsymbol{a} \in \left(\mathbb{R}^n_+\right)^c$ に対し, ある $\varepsilon > 0$ が存在して, 中心 $\boldsymbol{a}$, 半径 ε の $\mathbb{R}^n$ の開球体 $B(\boldsymbol{a};\varepsilon) = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \mid d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < \varepsilon\}$ が $\left(\mathbb{R}^n_+\right)^c$ に含まれることを示せば良い．ここで $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a})$ は $\mathbb{R}^n$ における $\boldsymbol{x}$ と $\boldsymbol{a}$ の距離を表す.

そこでいま, 任意の $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2, \ldots, a_n) \in \left(\mathbb{R}^n_+\right)^c$ に対し (即ち, $a_n < 0$ であることに注意しよう), $\varepsilon = |a_n|$ とおく．このとき, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B(\boldsymbol{a};\varepsilon)$ に対し, $d(\boldsymbol{x},\boldsymbol{a}) < \varepsilon$ から,

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} (x_i - a_i)^2 &< \varepsilon^2 = a_n^2 \\
(x_n - a_n)^2 + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - a_i)^2 &< a_n^2 \\
x_n^2 - 2a_n x_n + \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - a_i)^2 &< 0 \qquad \text{(i)}
\end{aligned}$$

となる．ここで $-2a_n$ は正であるので, もし $x_n \geq 0$ なら (i) の左辺 ≥ 0 となって矛盾が生じる．従って $x_n < 0$ であるから, $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \left(\mathbb{R}^n_+\right)^c$ となる．即ち $B(\boldsymbol{a};\varepsilon) \subset \left(\mathbb{R}^n_+\right)^c$ となり, $\left(\mathbb{R}^n_+\right)^c$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合であることがこれで示された (図 1 は, 以上の議論の特に $n = 2$ の場合の略図である).

以上により, $\mathbb{R}^n_+$ は $\mathbb{R}^n$ の閉集合である. □

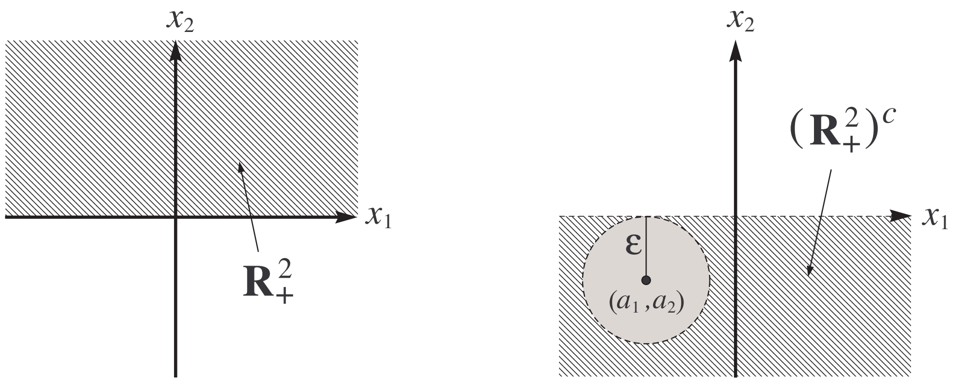

図 1: $\mathbb{R}^n_+$, $\left(\mathbb{R}^n_+\right)^c$ ($n = 2$ の場合)

$\boxed{2}$ n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の開集合系 $\mathcal{O} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ は以下の (O1), (O2), (O3) をみたすことを, **定理 1.3.4** で示した.

(O1) $\mathbb{R}^n,\ \emptyset \in \mathcal{O}$,
(O2) $O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathcal{O}$ ならば $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathcal{O}$,
(O3) $\mathcal{O}$ の任意の開集合族 $\{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し,

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathcal{O}.$$

この事実は勿論用いて良い. 更に閉集合の補集合は開集合であること (**補題 1.3.2** (2)), 及び, 補集合に関する **de Morgan の法則**を用いれば, 以下のように (1), (2), (3) を示すことができる.

(1) $(\mathbb{R}^n)^c = \emptyset$, $\emptyset^c = \mathbb{R}^n$ であり, (O1) より $\emptyset,\ \mathbb{R}^n \in \mathcal{O}$ であるから, $\mathbb{R}^n,\ \emptyset \in \mathcal{U}$ となる.

(2) $U_1, U_2, \ldots, U_k \in \mathcal{U}$ に対し, de Morgan の法則から

$$(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k)^c = U_1^c \cap U_2^c \cap \cdots \cap U_k^c \tag{ii}$$

である. ここで $U_1^c, U_2^c, \ldots, U_k^c \in \mathcal{O}$ であるから, (O2) により

$$U_1^c \cap U_2^c \cap \cdots \cap U_k^c \in \mathcal{O} \tag{iii}$$

となる. (ii), (iii) により

$$(U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k)^c \in \mathcal{O}$$

であり, 従って $U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_k \in \mathcal{U}$ となる.

(3) $\mathcal{U}$ の任意の閉集合族 $\{U_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, de Morgan の法則から

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c \tag{iv}$$

である. ここで任意の $\lambda \in \Lambda$ に対し $U_\lambda^c \in \mathcal{O}$ であるから, (O3) により

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda^c \in \mathcal{O} \tag{v}$$

となる. (iv), (v) により

$$\left(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda\right)^c \in \mathcal{O}$$

であり, 従って

$$\bigcap_{\lambda \in \Lambda} U_\lambda \in \mathcal{U}$$

となる. $\square$

$\boxed{3}$ 示すべきことを確認しよう. 与えられた写像 $f:(1,\infty) \to \mathbb{R}$ が連続であることを示すには, **定義 1.4.1** (2) から, 任意の $a \in (1,\infty)$ で f が連続であることを示せば良い. そのためには, **定義 1.4.1** (1) から, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$|x-a| < \delta \implies |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成り立つことを示せば良い.

そこでいま, 任意の $a \in (1,\infty)$ 及び任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$0 < \delta < a - \frac{1}{\frac{1}{a} + \varepsilon}$$

なる $\delta > 0$ を取ろう (その意味については図 2 を見よ. 閉区間 $\left[\frac{1}{\frac{1}{a}+\varepsilon}, a\right]$ の長さより小さい正の δ を取るのである. ここで ε は十分小さく取っているとして構わない). ここで

$$a - \frac{1}{\frac{1}{a} + \varepsilon} = a - \frac{a}{1 + a\varepsilon} = \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon}$$

に注意すれば, δ は

$$0 < \delta < \frac{a^2\varepsilon}{1 + a\varepsilon} \tag{vi}$$

をみたす正数である. この δ に対し,

$$|x - a| < \delta \tag{vii}$$

と仮定しよう. このとき,

$$\begin{aligned}
-\delta < &\; x - a < \delta \\
a - \delta < &\quad x \quad < a + \delta \\
a^2 - a\delta < &\; ax \; < a^2 + a\delta \\
\frac{1}{a^2 + a\delta} < &\; \frac{1}{ax} < \frac{1}{a^2 - a\delta}
\end{aligned} \tag{viii}$$

であることに注意すれば, (vii), (viii) から

$$|f(x) - f(a)| = \left|\frac{1}{x} - \frac{1}{a}\right| = \frac{|x-a|}{ax} < \frac{\delta}{a^2 - a\delta} \tag{ix}$$

となる．そこで (vi) より

$$\begin{aligned} -a\delta &> \frac{-a^3\varepsilon}{1+a\varepsilon} \\ a^2 - a\delta &> a^2 + \frac{-a^3\varepsilon}{1+a\varepsilon} = \frac{a^2}{1+a\varepsilon} \\ \frac{1}{a^2 - a\delta} &< \frac{1+a\varepsilon}{a^2} \end{aligned} \tag{x}$$

であるから, (vi), (x) によって

$$\frac{\delta}{a^2 - a\delta} < \frac{a^2\varepsilon}{1+a\varepsilon} \cdot \frac{1+a\varepsilon}{a^2} = \varepsilon \tag{xi}$$

となる．従って (ix), (xi) より

$$|f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

であるので, f は任意の $a \in (1, \infty)$ で連続である．即ち f は連続である． □

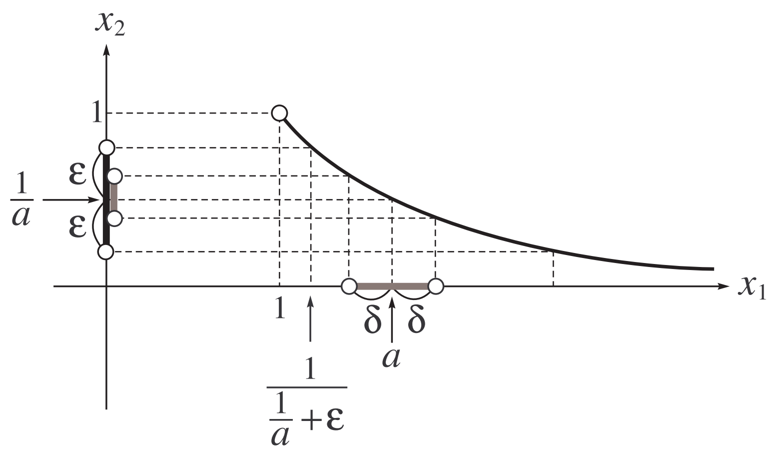

図 2: $f(x) = 1/x$ の連続性