第1回レポート問題 解答

幾何学AII/幾何学I (担当: 新國)

2013年11月6日 (水) 出題

問題. 以下の大問 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$ の全てに解答せよ.

$\boxed{1}$ 5点集合 $X = \{1,2,3,4,5\}$ に対し, その部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{\emptyset,\ X,\ \{3\},\ \{1,4\},\ \{2,5\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,5\},\ \{1,2,4,5\}\}$$

で定義する. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $\mathcal{O}$ は X の位相であることを示せ.
(2) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ が連結であるかどうか判定せよ.
(3) 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の連結成分を全て求めよ.

$\boxed{2}$ 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ に対し, $(X,\mathcal{O})$ が連結でないことと, $(X,\mathcal{O})$ のある閉集合 U_1, U_2 が存在して

$$U_1 \cup U_2 = X,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset,\ U_1 \neq \emptyset,\ U_2 \neq \emptyset$$

が成り立つことは, 互いに必要十分条件であることを示せ.

$\boxed{3}$ 標準的な位相による1次元Euclid空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ において, $\mathbb{R}$ の部分集合として有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を取り, $\mathbb{Q}$ における $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ の相対位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$ による部分位相空間 $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ を考える. このとき, 以下の設問に答えよ. ここで, **有理数・無理数の稠密性**は用いて良い.[1]

(1) A は $\mathbb{Q}$ の2つ以上の点からなる部分集合とし, $a, b \in A$ は $a < b$ をみたす A の2点とする. いま, c は $a < c < b$ をみたす無理数とし, c より小さい有理数全体の集合を O_1 とおき, c より大きい有理数全体の集合を O_2 とおく. このとき, O_1 と O_2 はいずれも $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合であることを示せ.

(2) $\mathbb{Q}$ の2つ以上の点からなる部分集合 A は, $\mathbb{Q}$ の連結部分集合ではないことを示せ. (**ヒント**: 設問(1)を用いる.)

[1] 即ち, 任意の実数 x, x' $(x < x')$ に対し, $x < r < x'$ なる有理数 r が無限個存在し, 一方, $x < s < x'$ なる無理数 s も無限個存在することは既知として良い. これも「**連続と極限**」(2年後期, DA104) で述べられたであろうし, 解析学の適当な教科書には必ず書いてある (と思うよ).

(3) 有理数 $r \in \mathbb{Q}$ に対し, 1 点集合 $\{r\}$ は $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合ではないことを示せ.
(**ヒント**: $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の任意の開集合は, $\mathbb{R}$ のある開区間の和集合と $\mathbb{Q}$ との共通部分として表されることを用いよ.)

$\boxed{4}$ $(X_i, \mathcal{O}_i)$ を位相空間とし $(i = 1, 2)$, $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ をそれらの直積位相空間とする. いま, $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ が弧状連結ならば, 各 $(X_i, \mathcal{O}_i)$ $(i = 1, 2)$ も弧状連結であることを示せ. ここで X_1, X_2 はいずれも空集合でないとする.

以上

解答.

$\boxed{1}$ (1) $\mathcal{O}$ の $\emptyset$, X 以外の元をそれぞれ

$$
\begin{aligned}
&O_1 = \{3\}\,,\ O_2 = \{1,4\}\,,\ O_3 = \{2,5\}\,,\ O_4 = \{1,3,4\}\,,\\
&O_5 = \{2,3,5\}\,,\ O_6 = \{1,2,4,5\}
\end{aligned}
$$

とおく. このとき, **定義 2.1.1** の 3 条件を確かめよう.
(i) $\emptyset, X \in \mathcal{O}$ は $\mathcal{O}$ の定義から明らか.
(ii) $\mathcal{O}$ の任意の 2 つの元の共通部分がまた $\mathcal{O}$ に属することを確かめる. 実際, 次の表の通りである.

$\cap$	$\emptyset$	X	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$	$\emptyset$
X	$\emptyset$	X	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
O_1	$\emptyset$	O_1	O_1	$\emptyset$	$\emptyset$	O_1	O_1	$\emptyset$
O_2	$\emptyset$	O_2	$\emptyset$	O_2	$\emptyset$	O_2	$\emptyset$	O_2
O_3	$\emptyset$	O_3	$\emptyset$	$\emptyset$	O_3	$\emptyset$	O_3	O_3
O_4	$\emptyset$	O_4	O_1	O_2	$\emptyset$	O_4	O_1	O_2
O_5	$\emptyset$	O_5	O_1	$\emptyset$	O_3	O_1	O_5	O_3
O_6	$\emptyset$	O_6	$\emptyset$	O_2	O_3	O_2	O_3	O_6

(iii) $\mathcal{O}$ の任意の 2 つの元の和集合がまた $\mathcal{O}$ に属することを確かめる (台集合 X が有限集合なので, それで十分である). 実際, 次の表の通りである.

$\cup$	$\emptyset$	X	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
$\emptyset$	$\emptyset$	X	O_1	O_2	O_3	O_4	O_5	O_6
X	X	X	X	X	X	X	X	X
O_1	O_1	X	O_1	O_4	O_5	O_4	O_5	X
O_2	O_2	X	O_4	O_2	O_6	O_4	X	O_6
O_3	O_3	X	O_5	O_6	O_3	X	O_5	O_6
O_4	O_4	X	O_4	O_4	X	O_4	X	X
O_5	O_5	X	O_5	X	O_5	X	O_5	X
O_6	O_6	X	X	O_6	O_6	X	X	O_6

(i), (ii), (iii) により, $\mathcal{O}$ は X の位相である. □

注意. 上の各表の見方は以下の通りである.

$$
\begin{array}{c||cc}
\cap & & B \\
\hline\hline
 & & \vdots \\
A & \cdots & A \cap B \\
 & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c||cc}
\cup & & B \\
\hline\hline
 & & \vdots \\
A & \cdots & A \cup B \\
 & &
\end{array}
$$

(2) $O_2 \cup O_5 = X$, $O_2 \cap O_5 = \emptyset$, $O_2 \neq \emptyset$, $O_5 \neq \emptyset$ から, $(X, \mathcal{O})$ は連結でない. $\square$

(3) まず, X の空でない連結部分集合を全てリストアップしよう. 以下, X の部分集合 A における $\mathcal{O}$ の相対位相を $\mathcal{O}_A$ とし, それによる部分位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ の閉集合系を $\mathcal{U}_A$ とおく. このとき**定理 6.1.2** から, $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{U}_A = \{\emptyset, A\}$ であることが, $(A, \mathcal{O}_A)$ が連結, 即ち A が X の連結部分集合であるための必要十分条件である. この判定法を用いて X の空でない 31 個の部分集合**全てを**確かめることで, X の空でない連結部分集合は

$$\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{1,4\}, \{2,5\} \tag{i}$$

の 8 つであることがわかる. 例えば $A = \{1,4\}$ のときを実際に確かめると,

$$\begin{gathered} \emptyset \cap A = \emptyset,\ X \cap A = A,\ O_1 \cap A = \emptyset,\ O_2 \cap A = A, \\ O_3 \cap A = \emptyset,\ O_4 \cap A = A,\ O_5 \cap A = \emptyset,\ O_6 \cap A = A \end{gathered}$$

から

$$\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\} = \{\emptyset,\ A\} \tag{ii}$$

となり, また, $\mathcal{O}_A$ の各元の A における補集合を取って

$$\mathcal{U}_A = \{A - \emptyset,\ A - A\} = \{A,\ \emptyset\} \tag{iii}$$

となる. (ii), (iii) より $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{U}_A = \{\emptyset, A\}$ であるので, A は X の連結部分集合である. 一方, 例えば $A = \{2,4,5\}$ のときを実際に確かめると,

$$\begin{aligned} &\emptyset \cap A = \emptyset,\ X \cap A = A,\ O_1 \cap A = \emptyset,\ O_2 \cap A = \{4\}, \\ &O_3 \cap A = O_3 = \{2,5\},\ O_4 \cap A = \{4\},\ O_5 \cap A = O_3 = \{2,5\},\ O_6 \cap A = A \end{aligned}$$

から

$$\mathcal{O}_A = \{O \cap A \mid O \in \mathcal{O}\} = \{\emptyset,\ A,\ \{4\},\ \{2,5\}\} \tag{iv}$$

となり, また, $\mathcal{O}_A$ の各元の A における補集合を取って

$$\mathcal{U}_A = \{A - \emptyset,\ A - A,\ A - \{4\},\ A - \{2,5\}\} = \{A,\ \emptyset,\ \{2,5\},\ \{4\}\} \tag{v}$$

となる. (iv), (v) より $\mathcal{O}_A \cap \mathcal{U}_A \neq \{\emptyset, A\}$ であるので, A は X の連結部分集合ではない.[2] さて, すると (i) により, $(X, \mathcal{O})$ の連結成分は

$$\{3\}, \{1,4\}, \{2,5\}$$

の 3 つであることが直ちにわかる. $\square$

[2] あるいは, 以下のように確かめても良い. (iv) の段階で $O'_1 = \{4\}$, $O'_2 = \{2,5\}$ とおけば, $O'_1 \cup O'_2 = A$, $O'_1 \cap O'_2 = \emptyset$, $O'_1 \neq \emptyset$, $O'_2 \neq \emptyset$ であるから, 部分位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ は連結でなく, 従って A は X の連結部分集合でない.

$\boxed{2}$ ($\Longrightarrow$) 10 月 30 日 (水) 配布の「**Euclid 空間の連結性についての補足**」の中で述べた通りである. いま $(X, \mathcal{O})$ は連結でないとすると, ある $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在して,

$$O_1 \cup O_2 = X, \tag{vi}$$

$$O_1 \cap O_2 = \emptyset, \tag{vii}$$

$$O_1 \neq \emptyset,\ O_2 \neq \emptyset \tag{viii}$$

となる. そこで $U_1 = O_1^c$, $U_2 = O_2^c$ とおくと, いずれも開集合の補集合であるから, U_1, U_2 は $(X, \mathcal{O})$ の閉集合であり,

$$U_1 \cup U_2 = O_1^c \cup O_2^c = (O_1 \cap O_2)^c \overset{\text{(vii)}}{=} \emptyset^c = X,$$

$$U_1 \cap U_2 = O_1^c \cap O_2^c = (O_1 \cup O_2)^c \overset{\text{(vi)}}{=} X^c = \emptyset,$$

$$U_1 \overset{\text{(vi),(vii)}}{=} O_2 \overset{\text{(viii)}}{\neq} \emptyset,\ U_2 \overset{\text{(vi),(vii)}}{=} O_1 \overset{\text{(viii)}}{\neq} \emptyset$$

が成り立つ.

($\Longleftarrow$) $(X, \mathcal{O})$ のある閉集合 U_1, U_2 が存在して

$$U_1 \cup U_2 = X, \tag{ix}$$

$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \tag{x}$$

$$U_1 \neq \emptyset,\ U_2 \neq \emptyset \tag{xi}$$

が成り立つとしよう. いま, $O_1 = U_1^c$, $O_2 = U_2^c$ とおくと, いずれも閉集合の補集合であるから, O_1, O_2 は $(X, \mathcal{O})$ の開集合であり,

$$O_1 \cup O_2 = U_1^c \cup U_2^c = (U_1 \cap U_2)^c \overset{\text{(x)}}{=} \emptyset^c = X,$$

$$O_1 \cap O_2 = U_1^c \cap U_2^c = (U_1 \cup U_2)^c \overset{\text{(ix)}}{=} X^c = \emptyset,$$

$$O_1 \overset{\text{(ix),(x)}}{=} U_2 \overset{\text{(xi)}}{\neq} \emptyset,\ O_2 \overset{\text{(ix),(x)}}{=} U_1 \overset{\text{(xi)}}{\neq} \emptyset$$

が成り立つ. 従って $(X, \mathcal{O})$ は連結でない. □

$\boxed{3}$ (1) O_1, O_2 の定義より

$$O_1 = \{r \in \mathbb{Q} \mid r < c\} = (-\infty, c) \cap \mathbb{Q},$$

$$O_2 = \{r \in \mathbb{Q} \mid c < r\} = (c, \infty) \cap \mathbb{Q}$$

と表される. $(-\infty, c)$, (c, ∞) は共に $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ の開集合であるので, 相対位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$ の定義より, O_1, O_2 は $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合である. □

(2) $a, b \in A$ を $a < b$ をみたす A の 2 点とし, c は $a < c < b$ をみたす無理数とする. このとき O_1, O_2 を設問 (1) の如く定めれば, これらは $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合であり,

$$O_1 \cup O_2 = \mathbb{Q} \supset A, \tag{xii}$$

$$O_1 \cap O_2 \cap A = (-\infty, c) \cap (c, \infty) \cap A = \emptyset \tag{xiii}$$

となる．更に $a \in O_1 \cap A$, $b \in O_2 \cap A$ から

$$O_1 \cap A \neq \emptyset,\ O_2 \cap A \neq \emptyset \tag{xiv}$$

である．(xii), (xiii), (xiv) から, A は $\mathbb{Q}$ の連結部分集合でない． □

(3) 背理法で示そう．有理数 $r \in \mathbb{Q}$ に対し, 1 点集合 $\{r\}$ は $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合であると仮定する．このとき相対位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$ の定義から, ある $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ が存在して

$$\{r\} = O \cap \mathbb{Q} \tag{xv}$$

であるが, $\mathbb{R}$ の開区間全体の集合が $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ の基底をなすことから (§ **2.4 例 4** で $n = 1$ の場合),

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda) \quad (a_\lambda, b_\lambda \in \mathbb{R},\ a_\lambda < b_\lambda) \tag{xvi}$$

と表される．故に (xv), (xvi) から

$$\{r\} = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda) \right) \cap \mathbb{Q} = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} ((a_\lambda, b_\lambda) \cap \mathbb{Q}) \tag{xvii}$$

となる．(xvii) より, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $r \in (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \cap \mathbb{Q}$ であるから,

$$\{r\} \subset (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \cap \mathbb{Q} \tag{xviii}$$

となり, 一方, (xvii) の右辺は $(a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \cap \mathbb{Q}$ を含むから,

$$\{r\} \supset (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \cap \mathbb{Q} \tag{xix}$$

である．従って (xviii), (xix) から

$$\{r\} = (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \cap \mathbb{Q} \tag{xx}$$

となるが, 有理数の稠密性から, $a_{\lambda_0} < r < b_{\lambda_0}$ なる有理数 r は無限個存在するので, (xx) の右辺の集合は無限個の点を含む．これは (xx) の左辺が 1 点集合であることに矛盾する． □

注意. 10 月 30 日 (水) 配付「**位相空間の連結成分についての補足**」において, **命題 6.2.9 (2)**, 及びその証明の直後の注意で述べた通り, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の各連結成分は一般に $(X, \mathcal{O})$ の閉集合で, 更に連結成分の個数が有限個であれば, 各連結成分は $(X, \mathcal{O})$ の開集合でもあるのであった．大問 $\boxed{3}$ は, **連結成分の個数が無限個である場合は, 各連結成分は必ずしも開集合であるとは限らない**ことの具体例を与えてくれる: まず, 設問 (2) により, 位相空間 $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の連結部分集合は 1 点集合 $\{r\}$ $(r \in \mathbb{Q})$ に限る．このことから, 各 $\{r\}$ の全体は, $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の連結成分の全てで

あることがわかる．即ち，$(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の連結成分は無限個ある．そして設問 (3) より，各 $\{r\}$ は $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合ではない．

$\boxed{4}$ 直積空間 $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ は弧状連結であるとする．以下，$(X_1, \mathcal{O}_1)$ が弧状連結であることを示そう．$X_2 \neq \emptyset$ から，ある $y \in X_2$ を 1 つ固定しておく．いま，任意の $x_1, x_2 \in X_1$ に対し，(x_1, y)，$(x_2, y) \in X_1 \times X_2$ であり，$(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ が弧状連結であることから，ある連続写像 $f : I \to X_1 \times X_2$ が存在して

$$f(0) = (x_1, y)\,,\ f(1) = (x_2, y) \tag{xxi}$$

が成り立つ．そこで写像 $\bar{f} : I \to X_1$ を，射影 $\mathrm{pr}_1 : X_1 \times X_2 \to X_1$ と f との合成写像 $\mathrm{pr}_1 \circ f$ で定める．即ち，図式

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & X_1 \times X_2 \arrow[d, "\mathrm{pr}_1"] \\ & X_1 \end{tikzcd}$$

は可換である．pr_1 と f はともに連続写像であるので，その合成である $\bar{f}$ も連続写像であり，更に

$$\begin{aligned} \bar{f}(0) &= (\mathrm{pr}_1 \circ f)\,(0) = \mathrm{pr}_1\,(f\,(0)) \overset{\text{(xxi)}}{=} \mathrm{pr}_1\,(x_1, y) = x_1, \\ \bar{f}(1) &= (\mathrm{pr}_1 \circ f)\,(1) = \mathrm{pr}_1\,(f\,(1)) \overset{\text{(xxi)}}{=} \mathrm{pr}_1\,(x_2, y) = x_2 \end{aligned}$$

が成り立つ．従って任意の $x_1, x_2 \in X_1$ を結ぶ孤を X_1 内に描けるので，$(X_1, \mathcal{O}_1)$ は弧状連結であることがこれで示された．

$(X_2, \mathcal{O}_2)$ が弧状連結であることも，全く同様に示される．即ち，$X_1 \neq \emptyset$ から，ある $x \in X_1$ を 1 つ固定すると，任意の $y_1, y_2 \in X_2$ に対し，(x, y_1)，$(x, y_2) \in X_1 \times X_2$ 及び $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ が弧状連結であることから，ある連続写像 $g : I \to X_1 \times X_2$ が存在して

$$g(0) = (x, y_1)\,,\ g(1) = (x, y_2) \tag{xxii}$$

が成り立つ．そこで写像 $\bar{g} : I \to X_2$ を，射影 $\mathrm{pr}_2 : X_1 \times X_2 \to X_2$ と g との合成写像 $\mathrm{pr}_2 \circ g$ で定めるとこれは連続で，pr_2 の定義と (xxii) から，$\bar{g}(0) = y_1$, $\bar{g}(1) = y_2$ となることが確かめられる． $\square$