

第1回レポート問題

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013年11月6日(水)

問題. 以下の大問 ①, ②, ③, ④ の全てに解答せよ.

① 5点集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対し, その部分集合族 \mathcal{O} を

$$\mathcal{O} = \{\emptyset, X, \{3\}, \{1, 4\}, \{2, 5\}, \{1, 3, 4\}, \{2, 3, 5\}, \{1, 2, 4, 5\}\}$$

で定義する. このとき, 以下の設問に答えよ.

- (1) \mathcal{O} は X の位相であることを示せ.
- (2) 位相空間 (X, \mathcal{O}) が連結であるかどうか判定せよ.
- (3) 位相空間 (X, \mathcal{O}) の連結成分を全て求めよ.

② 位相空間 (X, \mathcal{O}) に対し, (X, \mathcal{O}) が連結でないことと, (X, \mathcal{O}) のある閉集合 U_1, U_2 が存在して

$$U_1 \cup U_2 = X, U_1 \cap U_2 = \emptyset, U_1 \neq \emptyset, U_2 \neq \emptyset$$

が成り立つことは, 互いに必要十分条件であることを示せ.

③ 標準的な位相による1次元 Euclid 空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ において, \mathbb{R} の部分集合として有理数全体の集合 \mathbb{Q} を取り, \mathbb{Q} における $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ の相対位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$ による部分位相空間 $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ を考える. このとき, 以下の設問に答えよ. ここで, 有理数・無理数の稠密性は用いて良い.¹

- (1) A は \mathbb{Q} の2つ以上の点からなる部分集合とし, $a, b \in A$ は $a < b$ をみたす A の2点とする. いま, c は $a < c < b$ をみたす無理数とし, c より小さい有理数全体の集合を O_1 とおき, c より大きい有理数全体の集合を O_2 とおく. このとき, O_1 と O_2 はいずれも $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合であることを示せ.
- (2) \mathbb{Q} の2つ以上の点からなる部分集合 A は, \mathbb{Q} の連結部分集合ではないことを示せ. (ヒント: 設問(1)を用いる.)

¹即ち, 任意の実数 x, x' ($x < x'$) に対し, $x < r < x'$ なる有理数 r が無限個存在し, 一方, $x < s < x'$ なる無理数 s も無限個存在することは既知として良い. これも「連続と極限」(2年後期, DA104) で述べられたであろうし, 解析学の適当な教科書には必ず書いてある(と思うよ).

(3) 有理数 $r \in \mathbb{Q}$ に対し, 1 点集合 $\{r\}$ は $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合ではないことを示せ.
(ヒント: $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の任意の開集合は, \mathbb{R} のある开区間の和集合と \mathbb{Q} との共通部分として表されることを用いよ.)

4 (X_i, \mathcal{O}_i) を位相空間とし ($i = 1, 2$), $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ をそれらの直積位相空間とする. いま, $(X_1 \times X_2, \mathcal{O})$ が弧状連結ならば, 各 (X_i, \mathcal{O}_i) ($i = 1, 2$) も弧状連結であることを示せ. ここで X_1, X_2 はいずれも空集合でないとする.

以上

提出期限: 2013年11月29日(金) 16:35

原則, 新國まで直接手渡しで提出すること. 講義時間の前後でも良いし, あるいは研究室まで直接来て貰っても構わない(在室時間は新國のウェブサイト等で確認すること). 郵送や代理人による提出を原則認めないが, やむを得ない事情がある場合(締切前後が介護等体験実習の日程と重なっている等)には認めることがあるので, 早目に申し出ること. また, レポート作成にあたっては, 別紙「レポートの書き方についての注意」を熟読すること. 体裁の整っていないレポートについては, それだけで減点することがある.

レポートの書き方についての注意

1. (数学に限らず) 一般にレポートを提出する際の注意

- ・ 氏名, 所属学科及び専攻, 学生番号を書く
- ・ 講義のタイトル, 担当教員の名前も書く

これら最低限のことすら成されていないレポートを見ることがある。レポートには必ず表紙を付けて, そこに上記事項を記載すること。使用する用紙のサイズは, 特に指定がなければ A4 もしくは B5 が良いだろう。全ての用紙は, ホッチキス (ステイプラー) などを用いて必ずしっかりと綴じること。ゼムクリップ留めはダメ。

- ・ 課題 (問題) をきちんと記載する

課題や問題が明記されているものは, それらもレポートに記載し, 解答と合わせて自己完結的に書くこと。ただ答えだけ書けば良いというものではない。

- ・ きれいに, かつ他者が読みやすいように書く努力をする

無造作に書き殴っただけのレポートは, 読んで貰えないと思って良い。読み手を説得する, あるいは納得させる努力を惜しまないことが大切である。

- ・ 締切厳守

これは常識中の常識だが, 残念ながら締切を守れない学生もいる。締切日時までに提出できないというやむを得ない理由がある場合は, 締切前に必ず担当教員にその旨を連絡し, 指示を仰ぐこと。

2. 数学のレポートを提出する際の注意

- ・ 解答に至る経過を, 筋道を立てて論理的にきちんと記述する

数学の問題に取り組み, それに解答する際には, どのように考え, どのような経過を辿って解答に行き着いたのかを, 他者が読んでわかるように書く努力をするべきで, 計算用紙をそのまま提出したようなレポートは論外である。このことは君たちが中高生のときに既に学んだはずのことであり, 大学で学び直すことではない。また, 解答がわからなかったからといって, 途中でいきなり解答するのをやめたまま提出するのもダメである。レポートは試験ではない。どこまで自分で考えて, どこがわからなかったのかまで具体的に書くべきである。

レポートは試験とは違うので, 勿論, 人に聞いたり, 関連する情報を専門書等を利用して調べたりして構わない。また, 何人かの学生で議論を重ねたうえで, 1つの解答が生まれるという場合だってあるだろう (むしろそのような相乗効果は歓迎する)。とにかく考えられる手を尽くして最良のレポートを作成することを心掛けること。一方, 自分で全く考えようともせず, 他人のものを丸写ししただけのレポートは, すぐにバレる。多少, 文章や表現などを変えてあったとしても。