Euclid 空間の直積位相についての補足

幾何学 AI/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 7 月 3 日 (水)

以下で, 講義における § **4.2** の**例** 4 で時間の都合上述べなかった,

> 2 **次元 Euclid 空間** $\mathbb{R}^2$ **において**, $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ **としての直積位相** $\widetilde{\mathcal{O}}$ **と, 標準的な位相** $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ **が一致する**

ことの証明を述べる.

まず, 直積位相 $\widetilde{\mathcal{O}}$ による位相空間 $\left(\mathbb{R}^2, \widetilde{\mathcal{O}}\right)$ において,

$$\mathcal{B} = \{O_1 \times O_2 \mid O_1, O_2 \in \mathcal{O}(\mathbb{R})\}$$

は $\left(\mathbb{R}^2, \widetilde{\mathcal{O}}\right)$ の基底である. そこで $\mathbb{R}$ の開区間全体の集合は $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ の基底であったから (§ **2.4** の**例** 4 で $n = 1$ の場合),

$$O_1 = \bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda), \quad O_2 = \bigcup_{\mu\in M}(a_\mu, b_\mu)$$

と表せる. このとき

$$\begin{aligned} O_1 \times O_2 &= \left(\bigcup_{\lambda\in\Lambda}(a_\lambda, b_\lambda)\right) \times \left(\bigcup_{\mu\in M}(a_\mu, b_\mu)\right) \\ &= \bigcup_{(\lambda,\mu)\in\Lambda\times M}((a_\lambda, b_\lambda) \times (a_\mu, b_\mu)) \end{aligned}$$

であるから, 故に $\mathbb{R}$ の開区間の直積全体の集合

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\} \tag{i}$$

もまた $\left(\mathbb{R}^2, \widetilde{\mathcal{O}}\right)$ の基底である. 即ち, 標準的な位相による位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$ が, 平面 $\mathbb{R}^2$ に対し "**開円板**" 全体の集合を基底とする位相を入れた空間であったのに対し, 直積空間 $\left(\mathbb{R}^2, \widetilde{\mathcal{O}}\right)$ は, 平面 $\mathbb{R}^2$ に対し "**開長方形**" 全体の集合を基底とする位相を入れた空間である.

次に, 改めて標準的な位相 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ による位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$ を考える. まず, 講義の § **2.4** において, 以下の定理を証明したことを思い出す:

定理 2.4.4. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 及び $\mathcal{O}$ の部分集合 $\mathcal{B}$ に対し, $\mathcal{B}$ が $(X, \mathcal{O})$ の基底であることと, 任意の $O \in \mathcal{O}$ に対し,

$$^{\forall}x \in O,\ ^{\exists}W \in \mathcal{B},\ \text{s.t. } x \in W \ \text{ かつ } \ W \subset O$$

が成り立つことは互いに必要十分条件である.

この**定理 2.4.4.** を用いて, (i) の集合族 $\widetilde{\mathcal{B}}$ が, 実は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$ の基底でもあることを以下で示そう. いま, $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$ の任意の開集合 $O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ において,

$$^{\forall}\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in O,\ ^{\exists}\varepsilon > 0,\ \text{s.t. } B(\boldsymbol{a}; \varepsilon) \subset O \tag{ii}$$

が成り立つ. 更にここで $\varepsilon' = \varepsilon/\sqrt{2}$ とし, $\widetilde{\mathcal{B}}$ に属する $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$W = (a_1 - \varepsilon', a_1 + \varepsilon') \times (a_2 - \varepsilon', a_2 + \varepsilon')$$

を考える. これは $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$ の開集合でもあることに注意しよう[1]. このとき,

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in W &\iff a_1 - \varepsilon' < x_1 < a_1 + \varepsilon' \ \text{ かつ } \ a_2 - \varepsilon' < x_2 < a_2 + \varepsilon' \\
&\iff |x_1 - a_1| < \varepsilon' \ \text{ かつ } \ |x_2 - a_2| < \varepsilon' \\
&\implies (x_1 - a_1)^2 + (x_2 - a_2)^2 < 2\varepsilon'^2 = \varepsilon^2 \\
&\iff \boldsymbol{x} = (x_1, x_2) \in B(\boldsymbol{a}; \varepsilon)
\end{aligned}$$

より, $W \subset B(\boldsymbol{a}; \varepsilon)$ である (幾何的な意味は図 1 を見よ). 故に (ii) と合わせて

$$\boldsymbol{a} \in W \ \text{ かつ } \ W \subset O$$

が成り立つ. 従って**定理 2.4.4** により, $\widetilde{\mathcal{B}}$ は $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$ の基底である.

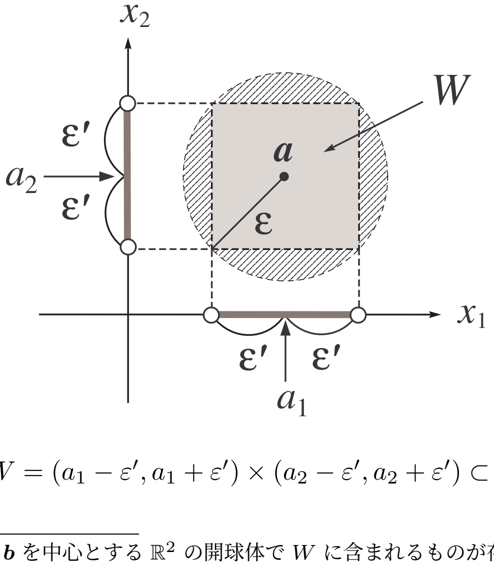

図 1: $W = (a_1 - \varepsilon', a_1 + \varepsilon') \times (a_2 - \varepsilon', a_2 + \varepsilon') \subset B(\boldsymbol{a}; \varepsilon)$

[1] 実際, 任意の $\boldsymbol{b} \in W$ に対し, $\boldsymbol{b}$ を中心とする $\mathbb{R}^2$ の開球体で W に含まれるものが存在する. 詳細は各自確かめよ.

以上により,

$$O \in \widetilde{\mathcal{O}} \iff O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} W_\lambda \quad \left(W_\lambda \in \widetilde{\mathcal{B}}\right) \iff O \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$$

となるので,

$$\widetilde{\mathcal{O}} = \mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$$

が得られる. 即ち, 直積位相 $\widetilde{\mathcal{O}}$ による位相空間 $\left(\mathbb{R}^2, \widetilde{\mathcal{O}}\right)$ と, 標準的な位相 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^2)$ による位相空間 $(\mathbb{R}^2, \mathcal{O}(\mathbb{R}^2))$ は全く同じものである. □

より一般に n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ については, 次の定理が成り立つ.

定理. n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ において, $\mathbb{R}$ の n 個の直積 $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}$ としての直積位相 $\widetilde{\mathcal{O}}$ と, 標準的な位相 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ は一致する. 即ち, 直積位相 $\widetilde{\mathcal{O}}$ による位相空間 $\left(\mathbb{R}^n, \widetilde{\mathcal{O}}\right)$ と, 標準的な位相 $\mathcal{O}(\mathbb{R}^n)$ による位相空間 $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$ は全く同じものである. □

実際, $\mathbb{R}$ の開区間の n 個の直積全体の集合

$$\widetilde{\mathcal{B}} = \{(a_1, b_1) \times (a_2, b_2) \times \cdots \times (a_n, b_n) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R},\ a_i < b_i\}$$

が, $\left(\mathbb{R}^n, \widetilde{\mathcal{O}}\right)$ 及び $(\mathbb{R}^n, \mathcal{O}(\mathbb{R}^n))$ の基底であることを示せば良い. 詳細は演習問題とする.