コンパクト Hausdorff 空間の正規性についての補足

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 12 月 18 日 (水)

以下で, 講義において時間の都合上述べなかった**定理 8.2.5** の証明を述べる.

> **定理 8.2.5.** コンパクトな Hausdorff 空間は正規空間である.

(証明) $(X, \mathcal{O})$ をコンパクトな Hausdorff 位相空間とし, $\mathcal{U}$ をその閉集合系とする. Hausdorff 空間は T_1-空間であったから (**命題 8.1.2**), あとは $(X, \mathcal{O})$ が条件 (T_4) をみたすことを示せば良い. ここで (T_4) とは $(X, \mathcal{O})$ に関する以下の条件であった:

(T_4) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ なる $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ に対し, ある $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在して, $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$, $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ が成り立つ.

$(X, \mathcal{O})$ が条件 (T_4) をみたすことを示そう. $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ とすると, $(X, \mathcal{O})$ はコンパクトなので, **定理 7.1.6** より, A_1, A_2 はともに X のコンパクト部分集合である. 一方, $x \in A_1$, $y \in A_2$ とすると, $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ から $x \neq y$ で, $(X, \mathcal{O})$ が Hausdorff 空間であることから, x のある開近傍 $U_y(x)$, 及び y のある開近傍 $V_x(y)$ が存在して, $U_y(x) \cap V_x(y) = \emptyset$ が成り立つ. そこでいま, $x \in X$ を 1 つ固定して, それに対する $V_x(y)$ を全て集めた X の部分集合族 $\mathcal{C}_{A_2}$ を考える. 即ち

$$\mathcal{C}_{A_2} = \{V_x(y) \mid y \in A_2\}$$

である. これは A_2 の X における開被覆であり, A_2 が X のコンパクト部分集合であることから, ある有限個の $y_1, y_2, \ldots, y_s \in A_2$ が存在して

$$A_2 \subset \bigcup_{j=1}^{s} V_x(y_j)$$

が成り立つ. そこで

$$U_x = \bigcap_{j=1}^{s} U_{y_j}(x), \quad V_x = \bigcup_{j=1}^{s} V_x(y_j)$$

とおくと, $U_x, V_x \in \mathcal{O}$ で,

$$x \in U_x,\ A_2 \subset V_x,\ U_x \cap V_x = \emptyset$$

が成り立つことがわかる (講義において, **補題 7.2.3** の証明で用いた議論と全く同様である. 図 1 の左上図も参照せよ).

さて, 今度は U_x を任意の $x \in A_1$ について全て集めた X の部分集合族 $\mathcal{C}_{A_1}$, 即ち

$$\mathcal{C}_{A_1} = \{U_x \mid x \in A_1\}$$

を考えよう. これは A_1 の X における開被覆であり, A_1 が X のコンパクト部分集合であることから, ある有限個の $x_1, x_2, \ldots, x_r \in A_1$ が存在して

$$A_1 \subset \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i}$$

が成り立つ. そこで

$$O_1 = \bigcup_{i=1}^{r} U_{x_i}, \quad O_2 = \bigcap_{i=1}^{r} V_{x_i}$$

とおくと (図 1 の右上図も参照せよ), $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ で,

$$A_1 \subset O_1,\ A_2 \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

が成り立つ. これで条件 (T_4) が示された. □

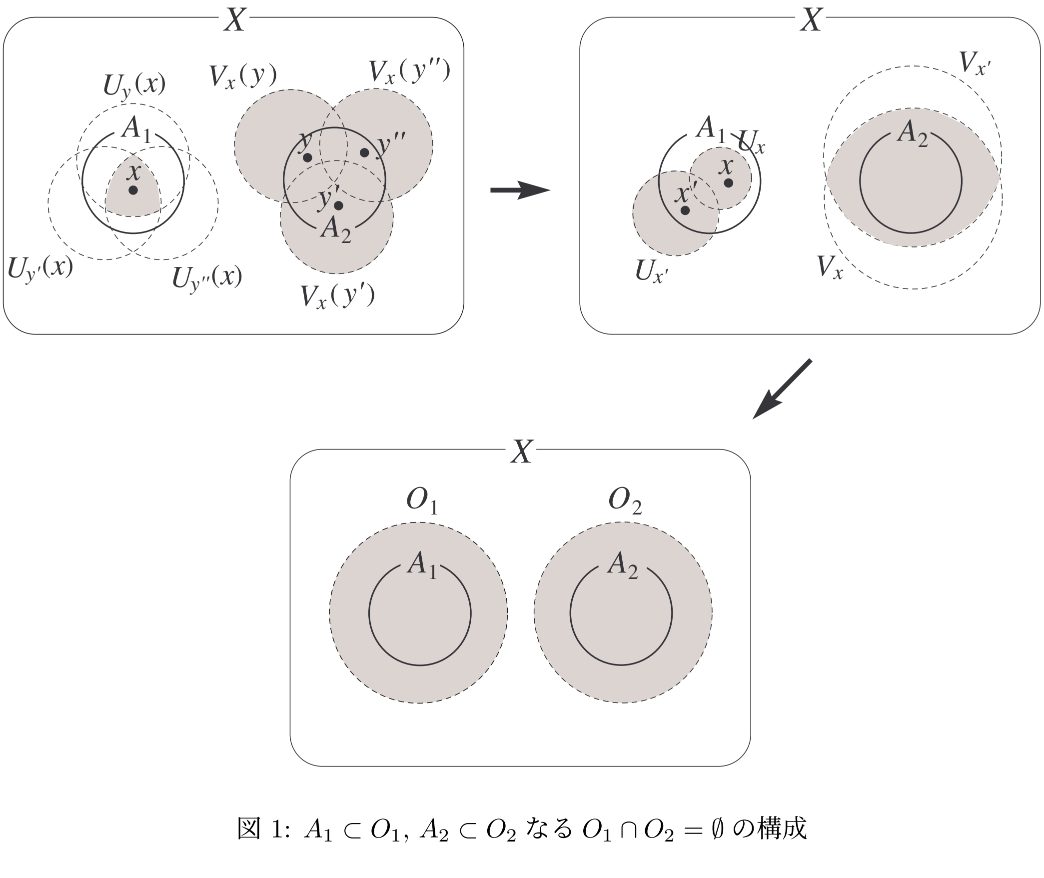

図 1: $A_1 \subset O_1$, $A_2 \subset O_2$ なる $O_1 \cap O_2 = \emptyset$ の構成