試験問題 解答

幾何学AI/幾何学I (担当: 新國)

2013年7月31日 (水) 10:55–12:25 実施

書籍・自筆ノート類の持ち込みを許可する．計時機能のみの時計を除くあらゆる電子機器類の持ち込みは認めない．黒色以外の色の鉛筆もしくはペンは自由に使って構わない．

問題. 次の8問の中から **4問選択して** 解答せよ．解答する際には, 解答用紙にどの4問を選択したのか明記すること．講義中に扱った諸定理 (命題, 補題, 系を含む) は用いて良い.

$\boxed{1}$ 集合 $X=\{1,2,3,4,5\}$ に対し, その位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O}=\{\emptyset,\ X,\ \{1\},\ \{3\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,5\},\ \{1,2,3,5\}\}$$

で定める．いま, 位相空間 $(X,\mathcal{O})$, 及び X の部分集合 $A=\{1,2,4\}$ に対し, A の内部 A^i, 触集合 $\bar{A}$, 境界 ∂A, 外部 A^e をそれぞれ求めよ.

$\boxed{2}$ $(X,\mathcal{O})$, $(X',\mathcal{O}')$ をそれぞれ位相空間とし, $f: X\to X'$ を写像とする．いま, X' の任意の閉集合 U に対し, その f による逆像 $f^{-1}(U)$ が X の閉集合となるなら, f は $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ に関して連続であることを示せ.

$\boxed{3}$ $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ を, 標準的な位相による1次元 Euclid 空間とする．いま, $\mathbb{R}$ の半開区間 $A=(-1,1]$ に対し, A における $\mathcal{O}$ の相対位相 $\mathcal{O}_A$ を考える．このとき以下の設問に応えよ.

(1) 半開区間 $(0,1]$ は, 部分空間 $(A,\mathcal{O}_A)$ において開集合であることを示せ.

(2) 半開区間 $(-1,0]$ は, 部分空間 $(A,\mathcal{O}_A)$ において閉集合であることを示せ.

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合として, $\mathbb{R}$ の開区間 $(0,1)$ の直積 $A=(0,1)\times(0,1)$ を考える．いま, $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)\in A$ に対し

$$\varepsilon=\min\{a_1,\ a_2,\ 1-a_1,\ 1-a_2\}$$

とおくとき, 以下の設問に答えよ.

(1) $\varepsilon=a_1$ となる点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)\in A$ が存在する領域を $\mathbb{R}^2$ 内に図示せよ.

(2) $\varepsilon=a_1$ となる点 $\boldsymbol{a}=(a_1,a_2)\in A$ に対し, $\boldsymbol{a}$ を中心, ε を半径とする $\mathbb{R}^2$ の開球体 $B(\boldsymbol{a};\varepsilon)$ は A に含まれることを示せ.

$\boxed{5}$ 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, 及び $x \in X$ に対し, V は x の近傍で, また W は x を含む X の部分集合とする．このとき, $V \cap W$ が x の近傍であるための必要十分条件は, x が W の内点であることを示せ.

$\boxed{6}$ 位相空間 $(X_i, \mathcal{O}_i)$ $(i = 1, 2)$, $(X'_i, \mathcal{O}'_i)$ $(i = 1, 2)$ に対し, $f_i : X_i \to X'_i$ を $\mathcal{O}_i$, $\mathcal{O}'_i$ に関して連続な写像とする $(i = 1, 2)$. いま, 写像 $f : X_1 \times X_2 \to X'_1 \times X'_2$ を, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ に対し

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

で定義する．このとき, f はそれぞれの直積位相に関して連続であることを示せ.

$\boxed{7}$ 集合 X, X' に対し, $f : X \to X'$ を写像とする．また, $\mathcal{O}$ を X の位相とする．このとき, X' の部分集合族 $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}' = \left\{ O' \subset X' \mid f^{-1}(O') \in \mathcal{O} \right\}$$

で定めると, $\mathcal{O}'$ は X' の位相になることを示せ.

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$M = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = 1 \right\},$$

及び単位円周

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

において, Q は $\mathbb{S}^1$ 上の点とし, P は原点 O を端点とする半直線 OQ と M との交点とする．いま, 点 Q の座標を (x_1, x_2) とおくとき, 点 P の座標を x_1, x_2 で表せ.

以上

解答.

$\boxed{1}$ 位相空間 $(X,\mathcal{O})$ の閉集合系 $\mathcal{U}$ は

$$\mathcal{U}=\{X,\ \emptyset,\ \{2,3,4,5\},\ \{1,2,4,5\},\ \{2,4,5\},\ \{2,3,5\},\ \{2,5\},\ \{1,4\},\{4\}\}$$

である．そこで $A=\{1,2,4\}$ の内部 A^i, 触集合 $\bar{A}$, 境界 ∂A, 外部 A^e は, それぞれ

$$\begin{aligned}
A^i &= \bigcup_{\substack{O\in\mathcal{O}\\ O\subset\{1,2,4\}}} O = \emptyset\cup\{1\}\cup\{1,4\}=\{1,4\},\\
\bar{A} &= \bigcap_{\substack{U\in\mathcal{U}\\ \{1,2,4\}\subset U}} U = X\cap\{1,2,4,5\}=\{1,2,4,5\},\\
\partial A &= \bar{A}-A^i=\{2,5\},\\
A^e &= (A^c)^i=\{3,5\}^i=\bigcup_{\substack{O\in\mathcal{O}\\ O\subset\{3,5\}}} O=\emptyset\cup\{3\}=\{3\}
\end{aligned}$$

となる． □

$\boxed{2}$ X' の任意の開集合 $O'\in\mathcal{O}'$ に対し, その f による逆像 $f^{-1}(O')$ が X の開集合であることを示せば良い．いま, O' の X' における補集合 O'^c は X' の閉集合なので, 仮定から $f^{-1}(O'^c)$ は X の閉集合である．そこで

$$f^{-1}\left(O'^c\right)=f^{-1}(X'-O')=X-f^{-1}(O')=\left(f^{-1}(O')\right)^c$$

であるから, $f^{-1}(O')$ の X における補集合 $(f^{-1}(O'))^c$ は X の閉集合である．従って $f^{-1}(O')$ は X の開集合である． □

$\boxed{3}$ (1) まず, $\mathbb{R}$ の開区間 $(0,\infty)$ は $(\mathbb{R},\mathcal{O})$ の開集合である．実際, 任意の $x\in(0,\infty)$ に対し $\varepsilon=x$ とおくと,

$$B(x;\varepsilon)=(0,2x)\subset(0,\infty)$$

となる．そこでこのとき

$$(0,1]=(0,\infty)\cap(-1,1]=(0,\infty)\cap A$$

であるから, 相対位相の定義より $(0,1]$ は $(A,\mathcal{O}_A)$ の開集合である．
(2) $(-1,0]$ は $A=(-1,1]$ における $(0,1]$ の補集合であり, 設問 (1) より $(0,1]$ は $(A,\mathcal{O}_A)$ の開集合であるので, $(-1,0]$ は $(A,\mathcal{O}_A)$ の閉集合である． □

$\boxed{4}$ (1) 連立不等式

$$a_1 \leq a_2,\ a_1 \leq 1 - a_1,\ a_1 \leq 1 - a_2$$

から

$$a_1 \leq a_2 \leq -a_1 + 1$$

となり (特に $a_1 \leq 1/2$ に注意), 求める領域は図 1 の左図の斜線部分である. ここで破線部分の境界は含まず, 実線部分の境界は含む.

(2) $\varepsilon = a_1$ となる点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in A$ に対し, $(x_1, x_2) \in B(\boldsymbol{a}; \varepsilon)$ とすると,

$$(x_1 - a_1)^2 < \varepsilon^2 - (x_2 - a_2)^2 \leq \varepsilon^2 = a_1^2,$$
$$(x_2 - a_2)^2 < \varepsilon^2 - (x_1 - a_1)^2 \leq \varepsilon^2 = a_1^2$$

から $|x_1 - a_1| < a_1$, $|x_2 - a_2| < a_1$ となり, これより

$$0 < x_1 < 2a_1 \leq 1,\quad 0 \leq -a_1 + a_2 < x_2 < a_1 + a_2 \leq 1 \qquad \text{(i)}$$

となる. 従って $(x_1, x_2) \in A$ であるので, $B(\boldsymbol{a}; \varepsilon) \subset A$ となる (図 1 の右図参照). □

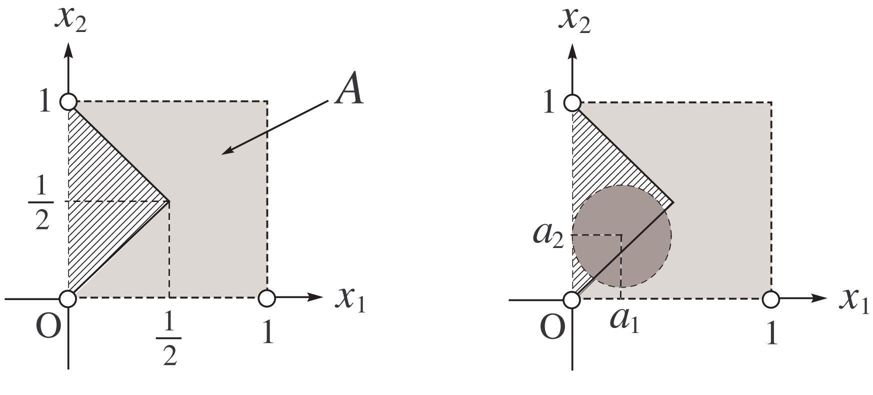

図 1: $\varepsilon = a_1$ となる点 $(a_1, a_2) \in A$ が存在する領域

$\boxed{5}$ $V \cap W$ は x の近傍であるとすると,

$$x \in (V \cap W)^i = V^i \cap W^i$$

から, 特に $x \in W^i$ である. 従って x は W の内点である. 一方, x を W の内点とすると, $x \in W^i$ かつ, 仮定から $x \in V^i$ でもあるので,

$$x \in V^i \cap W^i = (V \cap W)^i$$

である. 従って $V \cap W$ は x の近傍である. □

$\boxed{6}$ $\mathrm{pr}_i : X_1 \times X_2 \to X_i$ を $X_1 \times X_2$ から X_i への射影とし $(i = 1, 2)$, $\mathrm{pr}'_i : X'_1 \times X'_2 \to X'_i$ を $X'_1 \times X'_2$ から X'_i への射影とする $(i = 1, 2)$. このとき, 任意の $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ に対し

$$\begin{aligned}(\mathrm{pr}'_i \circ f)(x_1, x_2) &= \mathrm{pr}'_i (f_1(x_1), f_2(x_2)) = f_i(x_i),\\ (f_i \circ \mathrm{pr}_i)(x_1, x_2) &= f_i(x_i)\end{aligned}$$

となるので,

$$\mathrm{pr}'_i \circ f = f_i \circ \mathrm{pr}_i \tag{ii}$$

が成り立つ $(i = 1, 2)$. ここで各 pr_i は連続で, 更に仮定から各 f_i も連続なので, それらの合成である $f_i \circ \mathrm{pr}_i$ は連続である. 従って (ii) により, $i = 1, 2$ に対し $\mathrm{pr}'_i \circ f$ は連続なので, 講義における定理 4.2.5 から f は連続である. □

$\boxed{7}$ $\mathcal{O}'$ が定義 2.1.1 の 3 条件を全てみたすことを確かめれば良い.
(1) $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset \in \mathcal{O}$, $f^{-1}(X') = X \in \mathcal{O}$ より, $\emptyset$, $X' \in \mathcal{O}'$ である.
(2) $O'_1, O'_2, \ldots, O'_k \in \mathcal{O}'$ とすると, $\mathcal{O}'$ の定義から

$$f^{-1}(O'_1), f^{-1}(O'_2), \ldots, f^{-1}(O'_k) \in \mathcal{O}$$

であり, このとき, $\mathcal{O}$ が X の位相であることから

$$f^{-1}\left(\bigcap_{i=1}^{k} O'_i\right) = \bigcap_{i=1}^{k} f^{-1}(O'_i) \in \mathcal{O}$$

となる. 従って

$$\bigcap_{i=1}^{k} O'_i \in \mathcal{O}'$$

が成り立つ.
(3) $\mathcal{O}'$ の任意の集合族 $\{O'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ に対し, $\mathcal{O}'$ の定義から $f^{-1}(O'_\lambda) \in \mathcal{O}$ $(\lambda \in \Lambda)$ であり, このとき, $\mathcal{O}$ が X の位相であることから

$$f^{-1}\left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O'_\lambda\right) = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} f^{-1}(O'_\lambda) \in \mathcal{O}$$

となる. 従って

$$\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O'_\lambda \in \mathcal{O}'$$

が成り立つ. □

$\boxed{8}$ 点 $\mathrm{Q}(x_1, x_2)$ に対し, 点 P の座標を (X_1, X_2) とおく (図 2). このとき, ある正の実数 t が存在して $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ であるから,

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} tx_1 \\ tx_2 \end{pmatrix} \tag{iii}$$

となる. ここで $\mathrm{P}\,(X_1, X_2) \in M$ から $|X_1| + |X_2| = 1$ であるので, (iii) から

$$t\,(|x_1| + |x_2|) = 1$$

となる ($t > 0$ であることに注意しよう). これより

$$t = \frac{1}{|x_1| + |x_2|} \tag{iv}$$

が得られる. 従って (iii), (iv) より

$$X_1 = \frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}\ ,\ X_2 = \frac{x_2}{|x_1| + |x_2|}$$

となるので, 点 P の座標は

$$\mathrm{P}\left(\frac{x_1}{|x_1| + |x_2|}\ ,\ \frac{x_2}{|x_1| + |x_2|}\right)$$

である. □

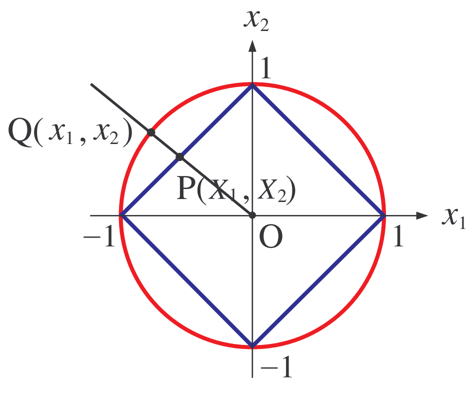

図 2: P は半直線 OQ と M との交点