試験問題 解答

幾何学 AII (担当: 新國)

2014 年 1 月 29 日 (水) 10:55–12:25 実施

書籍・自筆ノート類の持ち込みを許可する. 計時機能のみの時計を除くあらゆる電子機器類の持ち込みは認めない. 黒色以外の色の鉛筆もしくはペンは自由に使って構わない.

問題. 以下の大問 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ の中から, **4 問選択して**解答せよ. 解答する際には, 解答用紙にどの 4 問を選択したのか明記すること.

$\boxed{1}$ 5 点集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対し, その部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \left\{ \begin{matrix} \emptyset,\ X,\ \{3\},\ \{2,3\},\ \{3,4\},\ \{1,2,3\},\ \{2,3,4\}, \\ \{3,4,5\},\ \{1,2,3,4\},\ \{2,3,4,5\} \end{matrix} \right\}$$

で定義すると, これは X の位相になる. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が連結であるかどうか判定せよ.

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が Hausdorff 空間であるかどうか判定せよ.

$\boxed{2}$ $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ をそれぞれ位相空間とし, $\varphi : X \to X'$ を ($\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ に関する) 連続写像とする. いま, φ が全射で, かつ $(X, \mathcal{O})$ が弧状連結ならば, $(X', \mathcal{O}')$ も弧状連結であることを示せ.

$\boxed{3}$ $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ をそれぞれ位相空間とし, $\varphi : X \to X'$ を ($\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ に関する) 連続写像とする. いま, φ が単射で, かつ $(X', \mathcal{O}')$ が Hausdorff 空間ならば, $(X, \mathcal{O})$ も Hausdorff 空間であることを示せ.

$\boxed{4}$ 離散位相空間 $(X, \mathcal{O}^*)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X が有限集合であることである. これを示せ.

$\boxed{5}$ $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とし, $\mathcal{O}_A$ を A における $\mathcal{O}$ の相対位相とする. いま, A の X における任意の開被覆が有限開被覆を含むなら, 部分位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ はコンパクトであることを示せ.

$\boxed{6}$ $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．このとき, $(X, \mathcal{O})$ が正規空間ならば, $(X, \mathcal{O})$ は正則空間でもあることを示せ.

$\boxed{7}$ n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ において, 写像 $d_\infty^{(n)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を,

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

に対し,

$$d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

で定義する．このとき, $d_\infty^{(n)}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であることを示せ.

$\boxed{8}$ (X, d), (X', d') をそれぞれ距離空間とし, $f : X \to X'$ を ($\mathcal{O}_d$, $\mathcal{O}_{d'}$ に関する) 連続写像とする．このとき, $a \in X$ において, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$B(a; \delta) \subset f^{-1}(B'(f(a); \varepsilon))$$

が成り立つことを示せ．ここで $B(a; \delta)$ は a を中心, δ を半径とする (X, d) の開球体を表し, $B'(f(a); \varepsilon)$ は $f(a)$ を中心, ε を半径とする (X', d') の開球体を表す.

以上

解答.

$\boxed{1}$ (1) $(X,\mathcal{O})$ の閉集合系を $\mathcal{U}$ とおくと,

$$\mathcal{U}=\left\{\begin{array}{l} X,\ \emptyset,\ \{1,2,4,5\}\,,\ \{1,4,5\}\,,\ \{1,2,5\}\,, \\ \{4,5\}\,,\{1,5\}\,,\ \{1,2\}\,,\ \{5\}\,,\ \{1\} \end{array}\right\}$$

であるので,

$$\mathcal{O}\cap\mathcal{U}=\{\emptyset\ ,X\} \tag{i}$$

が成り立つ. 従って**定理 6.1.2** から, $(X,\mathcal{O})$ は連結である. $\square$

(2) 例えば $1,5\in X$ に対し, 1 の開近傍は

$$X,\ \{1,2,3\}\,,\ \{1,2,3,4\}$$

がその全てであり, 一方, 5 の開近傍は

$$X,\ \{3,4,5\}\,,\ \{2,3,4,5\}$$

がその全てである. これらはいずれも 3 を含んでいるので, 1 の開近傍 O_1, 5 の開近傍 O_2 で $O_1\cap O_2=\emptyset$ となるものは存在しない. 従って $(X,\mathcal{O})$ は Hausdorff 空間ではない. $\square$

$\boxed{2}$ 任意の $x',y'\in X'$ に対し, φ は全射なので, ある $x,y\in X$ が存在して

$$\varphi(x)=x',\ \varphi(y)=y' \tag{ii}$$

となる. 仮定より $(X,\mathcal{O})$ は弧状連結なので, 閉区間 $I=[0,1]$ に対し, ある連続写像 $f:I\to X$ が存在して,

$$f(0)=x,\ f(1)=y \tag{iii}$$

が成り立つ. そこで写像 $\bar{f}:I\to X'$ を, $\bar{f}=\varphi\circ f$ で定める (下図).

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "\bar{f}"'] & X \arrow[d, "\varphi"] \\ & X' \end{tikzcd}$$

このとき φ, f が連続であるから**補題 5.2.1** より $\bar{f}$ も連続で, (ii), (iii) から

$$\bar{f}(0)=\varphi\circ f(0)=\varphi\left(f(0)\right)=\varphi(x)=x',$$
$$\bar{f}(1)=\varphi\circ f(1)=\varphi\left(f(1)\right)=\varphi(y)=y'$$

となる. 従って $(X',\mathcal{O}')$ は弧状連結である. $\square$

$\boxed{3}$ X の任意の異なる 2 点 $x, y \in X$, $x \neq y$ に対し, φ は単射なので, $\varphi(x) \neq \varphi(y)$ である. 仮定より $(X', \mathcal{O}')$ は Hausdorff 空間なので, ある $O'_1, O'_2 \in \mathcal{O}'$ が存在して,

$$\varphi(x) \in O'_1,\ \varphi(y) \in O'_1, \tag{iv}$$

$$O'_1 \cap O'_2 = \emptyset \tag{v}$$

が成り立つ. そこで φ は連続であるから, $\varphi^{-1}(O'_1),\ \varphi^{-1}(O'_2) \in \mathcal{O}$ で, (iv) より

$$x \in \varphi^{-1}(O'_1),\ y \in \varphi^{-1}(O'_2) \tag{vi}$$

である. 更に (v) より

$$\varphi^{-1}(O'_1) \cap \varphi^{-1}(O'_2) = \varphi^{-1}(O'_1 \cap O'_2) = \varphi^{-1}(\emptyset) = \emptyset \tag{vii}$$

となる. 従って (vi), (vii) から, $(X, \mathcal{O})$ は Hausdorff 空間である. $\square$

$\boxed{4}$ $(\Longleftarrow)$ X を有限集合としよう. このとき, X の部分集合は有限個しかないので, X の離散位相 $\mathcal{O}^*$ は有限個の開集合から成る. 従って, $\mathcal{O}^*$ に関する X の任意の開被覆は有限被覆となるので, $(X, \mathcal{O}^*)$ はコンパクトである.
$(\Longrightarrow)$ いま, 任意の $x \in X$ に対し, 1 点集合 $\{x\}$ は $(X, \mathcal{O}^*)$ の開集合で, 明らかに

$$\bigcup_{x \in X} \{x\} = X$$

であるから, $\mathcal{C} = \{\{x\}\}_{x \in X}$ は $\mathcal{O}^*$ に関する X の開被覆である. 仮定よりいま $(X, \mathcal{O}^*)$ はコンパクトなので, $\mathcal{C}$ は有限開被覆を含む. 即ち, ある $x_1, x_2, \ldots, x_k \in X$ が存在して,

$$X = \bigcup_{i=1}^{k} \{x_i\} \tag{viii}$$

となる. そこで明らかに

$$\bigcup_{i=1}^{k} \{x_i\} = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\} \tag{ix}$$

であるから, (viii), (ix) より $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_k\}$, 即ち X は有限集合である. $\square$

$\boxed{5}$ $\mathcal{C}'_A = \{O'_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を A の開被覆とする. 即ち,

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O'_\lambda,\ O'_\lambda \in \mathcal{O}_A \tag{x}$$

である. そこで相対位相 $\mathcal{O}_A$ の定義より, 各 $O'_\lambda \in \mathcal{C}'_A$ に対し, ある $O_\lambda \in \mathcal{O}$ が存在して, $O'_\lambda = O_\lambda \cap A$ となるので, (x) から

$$A = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O'_\lambda = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (O_\lambda \cap A) = \left(\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \right) \cap A$$

となる．よって

$$A \subset \bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda,$$

即ち $\mathcal{C}_A = \{O_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ は X における A の開被覆である．従って仮定より, ある有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$ が存在して,

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{k} O_{\lambda_i} \tag{xi}$$

が成り立つ．このとき,

$$\bigcup_{i=1}^{k} O'_{\lambda_i} = \bigcup_{i=1}^{k} (O_{\lambda_i} \cap A) = \left(\bigcup_{i=1}^{k} O_{\lambda_i} \right) \cap A \overset{\text{(xi)}}{=} A$$

となるので, $\mathcal{C}'_A$ は有限開被覆 $\left\{O'_{\lambda_i}\right\}_{i=1,2,\ldots,k}$ を含む．故に $(A, \mathcal{O}_A)$ はコンパクトである． □

$\boxed{6}$ $(X, \mathcal{O})$ を正規空間としよう．即ち, $(X, \mathcal{O})$ は T_1-空間で, かつ, 条件

(T_4) $A_1 \cap A_2 = \emptyset$ なる $A_1, A_2 \in \mathcal{U}$ に対し, ある $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在して,

$$A_1 \subset O_1,\ A_2 \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

をみたす．ここで $\mathcal{U}$ は $(X, \mathcal{O})$ の閉集合系を表す．いま, $x \notin A$ なる $x \in X,\ A \in \mathcal{U}$ に対し, $(X, \mathcal{O})$ が T_1-空間であることから, **定理 8.1.3** より $\{x\} \in \mathcal{U}$ である．従って (T_4) より, この $\{x\}, A \in \mathcal{U}$ に対し, ある $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在して,

$$\{x\} \subset O_1,\ A \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

が成り立つ．即ち, 条件

(T_3) $x \notin A$ なる $x \in X,\ A \in \mathcal{U}$ に対し, ある $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在して,

$$x \in O_1,\ A \subset O_2,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset$$

が成り立つので, $(X, \mathcal{O})$ は正則空間である． □

$\boxed{7}$ $d_\infty^{(n)}$ が, 以下の条件:

(Di) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) \geq 0$,
(Dii) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 \iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}$,
(Diii) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{x})$,
(Div) $\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^n$ に対し, $d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) \leq d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$

を全てみたすことを示せば良い．(Di), (Diii) は明らかである (と思うよ)．また,

$$
\begin{aligned}
d_{\infty}^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = 0 &\iff \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\} = 0 \\
&\iff |x_i - y_i| = 0 \ (i = 1, 2, \ldots, n) \\
&\iff x_i = y_i \ (i = 1, 2, \ldots, n) \\
&\iff \boldsymbol{x} = \boldsymbol{y}
\end{aligned}
$$

であるので, (Dii) が成り立つ. 更に,

$$
\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n), \boldsymbol{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \in \mathbb{R}^n
$$

に対し,

$$
\max\{|x_i - z_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\} = |x_{i_0} - z_{i_0}|
$$

なる i_0 を取るとき,

$$
\begin{aligned}
d_{\infty}^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{z}) &= |x_{i_0} - z_{i_0}| \\
&= |x_{i_0} - y_{i_0} + y_{i_0} - z_{i_0}| \\
&\leq |x_{i_0} - y_{i_0}| + |y_{i_0} - z_{i_0}| \\
&\leq \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\} + \max\{|y_i - z_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\} \\
&= d_{\infty}^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) + d_{\infty}^{(n)}(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})
\end{aligned}
$$

であるので, (Div) が成り立つ. □

$\boxed{8}$ 点 $a \in X$ において, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, (X', d') の開球体 $B'(f(a); \varepsilon)$ を考えよう. このとき, 当然

$$
f(a) \in B'(f(a); \varepsilon)
$$

であるから,

$$
a \in f^{-1}(B'(f(a); \varepsilon))
$$

となる. $B'(f(a); \varepsilon)$ は距離空間 (X', d') の位相の定義から (X', d') の開集合で, 仮定より f は連続であるから, $f^{-1}(B'(f(a); \varepsilon))$ は (X, d) の開集合である. よってこの a に対し, 距離空間 (X, d) の位相の定義より, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$
B(a; \delta) \subset f^{-1}(B'(f(a); \varepsilon))
$$

が成り立つ. □