試験問題

幾何学 AII (担当: 新國)

2014 年 1 月 29 日 (水) 10:55–12:25 実施

書籍・自筆ノート類の持ち込みを許可する．計時機能のみの時計を除くあらゆる電子機器類の持ち込みは認めない．黒色以外の色の鉛筆もしくはペンは自由に使って構わない．

問題. 以下の大問 $\boxed{1}$, $\boxed{2}$, $\boxed{3}$, $\boxed{4}$, $\boxed{5}$, $\boxed{6}$, $\boxed{7}$, $\boxed{8}$ の中から, **4 問選択して**解答せよ. 解答する際には, 解答用紙にどの 4 問を選択したのか明記すること.

$\boxed{1}$ 5 点集合 $X = \{1,2,3,4,5\}$ に対し, その部分集合族 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \left\{\begin{matrix} \emptyset,\ X,\ \{3\},\ \{2,3\},\ \{3,4\},\ \{1,2,3\},\ \{2,3,4\}, \\ \{3,4,5\},\ \{1,2,3,4\},\ \{2,3,4,5\} \end{matrix}\right\}$$

で定義すると, これは X の位相になる. このとき, 以下の設問に答えよ.

(1) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が連結であるかどうか判定せよ.

(2) 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が Hausdorff 空間であるかどうか判定せよ.

$\boxed{2}$ $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ をそれぞれ位相空間とし, $\varphi : X \to X'$ を ($\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ に関する) 連続写像とする. いま, φ が全射で, かつ $(X, \mathcal{O})$ が弧状連結ならば, $(X', \mathcal{O}')$ も弧状連結であることを示せ.

$\boxed{3}$ $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ をそれぞれ位相空間とし, $\varphi : X \to X'$ を ($\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ に関する) 連続写像とする. いま, φ が単射で, かつ $(X', \mathcal{O}')$ が Hausdorff 空間ならば, $(X, \mathcal{O})$ も Hausdorff 空間であることを示せ.

$\boxed{4}$ 離散位相空間 $(X, \mathcal{O}^*)$ がコンパクトであるための必要十分条件は, X が有限集合であることである. これを示せ.

$\boxed{5}$ $(X, \mathcal{O})$ を位相空間, A を X の部分集合とし, $\mathcal{O}_A$ を A における $\mathcal{O}$ の相対位相とする. いま, A の X における任意の開被覆が有限開被覆を含むなら, 部分位相空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ はコンパクトであることを示せ.

$\boxed{6}$ $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とする．このとき, $(X, \mathcal{O})$ が正規空間ならば, $(X, \mathcal{O})$ は正則空間でもあることを示せ.

$\boxed{7}$ n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ において, 写像 $d_\infty^{(n)} : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ を,

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n), \boldsymbol{y} = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$$

に対し,

$$d_\infty^{(n)}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \max\{|x_i - y_i| \mid i = 1, 2, \ldots, n\}$$

で定義する．このとき, $d_\infty^{(n)}$ は $\mathbb{R}^n$ 上の距離関数であることを示せ.

$\boxed{8}$ (X, d), (X', d') をそれぞれ距離空間とし, $f : X \to X'$ を ($\mathcal{O}_d$, $\mathcal{O}_{d'}$ に関する) 連続写像とする．このとき, $a \in X$ において, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $\delta > 0$ が存在して,

$$B(a; \delta) \subset f^{-1}(B'(f(a); \varepsilon))$$

が成り立つことを示せ．ここで $B(a; \delta)$ は a を中心, δ を半径とする (X, d) の開球体を表し, $B'(f(a); \varepsilon)$ は $f(a)$ を中心, ε を半径とする (X', d') の開球体を表す.

以上