試験問題

幾何学 AI/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 7 月 31 日 (水) 10:55–12:25 実施

書籍・自筆ノート類の持ち込みを許可する．計時機能のみの時計を除くあらゆる電子機器類の持ち込みは認めない．黒色以外の色の鉛筆もしくはペンは自由に使って構わない．

問題. 次の 8 問の中から **4 問選択して**解答せよ．解答する際には, 解答用紙にどの 4 問を選択したのか明記すること．講義中に扱った諸定理 (命題, 補題, 系を含む) は用いて良い．

$\boxed{1}$ 集合 $X = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ に対し, その位相 $\mathcal{O}$ を

$$\mathcal{O} = \{\emptyset,\ X,\ \{1\},\ \{3\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,3,4\},\ \{2,3,5\},\ \{1,2,3,5\}\}$$

で定める．いま, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, 及び X の部分集合 $A = \{1, 2, 4\}$ に対し, A の内部 A^i, 触集合 $\bar{A}$, 境界 ∂A, 外部 A^e をそれぞれ求めよ．

$\boxed{2}$ $(X, \mathcal{O})$, $(X', \mathcal{O}')$ をそれぞれ位相空間とし, $f : X \to X'$ を写像とする．いま, X' の任意の閉集合 U に対し, その f による逆像 $f^{-1}(U)$ が X の閉集合となるなら, f は $\mathcal{O}$, $\mathcal{O}'$ に関して連続であることを示せ．

$\boxed{3}$ $(\mathbb{R}, \mathcal{O})$ を, 標準的な位相による 1 次元 Euclid 空間とする．いま, $\mathbb{R}$ の半開区間 $A = (-1, 1]$ に対し, A における $\mathcal{O}$ の相対位相 $\mathcal{O}_A$ を考える．このとき以下の設問に応えよ．

(1) 半開区間 $(0, 1]$ は, 部分空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ において開集合であることを示せ．

(2) 半開区間 $(-1, 0]$ は, 部分空間 $(A, \mathcal{O}_A)$ において閉集合であることを示せ．

$\boxed{4}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合として, $\mathbb{R}$ の開区間 $(0, 1)$ の直積 $A = (0, 1) \times (0, 1)$ を考える．いま, $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in A$ に対し

$$\varepsilon = \min\{a_1,\ a_2,\ 1 - a_1,\ 1 - a_2\}$$

とおくとき, 以下の設問に答えよ．

(1) $\varepsilon = a_1$ となる点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in A$ が存在する領域を $\mathbb{R}^2$ 内に図示せよ．

(2) $\varepsilon = a_1$ となる点 $\boldsymbol{a} = (a_1, a_2) \in A$ に対し, $\boldsymbol{a}$ を中心, ε を半径とする $\mathbb{R}^2$ の開球体 $B(\boldsymbol{a}; \varepsilon)$ は A に含まれることを示せ．

$\boxed{5}$ 位相空間 $(X, \mathcal{O})$, 及び $x \in X$ に対し, V は x の近傍で, また W は x を含む X の部分集合とする．このとき, $V \cap W$ が x の近傍であるための必要十分条件は, x が W の内点であることを示せ.

$\boxed{6}$ 位相空間 $(X_i, \mathcal{O}_i)$ $(i = 1, 2)$, $(X'_i, \mathcal{O}'_i)$ $(i = 1, 2)$ に対し, $f_i : X_i \to X'_i$ を $\mathcal{O}_i$, $\mathcal{O}'_i$ に関して連続な写像とする $(i = 1, 2)$. いま, 写像 $f : X_1 \times X_2 \to X'_1 \times X'_2$ を, $(x_1, x_2) \in X_1 \times X_2$ に対し

$$f(x_1, x_2) = (f_1(x_1), f_2(x_2))$$

で定義する．このとき, f はそれぞれの直積位相に関して連続であることを示せ.

$\boxed{7}$ 集合 X, X' に対し, $f : X \to X'$ を写像とする．また, $\mathcal{O}$ を X の位相とする．このとき, X' の部分集合族 $\mathcal{O}'$ を

$$\mathcal{O}' = \left\{ O' \subset X' \mid f^{-1}(O') \in \mathcal{O} \right\}$$

で定めると, $\mathcal{O}'$ は X' の位相になることを示せ.

$\boxed{8}$ $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$M = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid |x_1| + |x_2| = 1 \right\},$$

及び単位円周

$$\mathbb{S}^1 = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1 \right\}$$

において, Q は $\mathbb{S}^1$ 上の点とし, P は原点 O を端点とする半直線 OQ と M との交点とする．いま, 点 Q の座標を (x_1, x_2) とおくとき, 点 P の座標を x_1, x_2 で表せ.

以上

もし時間が余るようなら, この講義の感想等を自由に書いてくれると嬉しく思います (採点には無関係の任意記載).