

同値関係についての復習

幾何学 AI/幾何学 I (担当: 新國)

2013年7月10日(水)

以下で、集合における同値関係及び商集合について**超簡単に**復習する。これらについては、例えば「情報数学」(1年後期, DA502, DB502)でも解説されている。同値関係及び商集合の概念は現代の数学のあらゆる分野で登場するので、必ず理解しておくこと。自習するなら、例えば松坂 和夫著「集合・位相入門」(岩波書店, 1968年)の第1章 §6の内容を理解すれば十分である。

1 同値関係

定義 1.1 (1) 集合 X に対し、直積集合 $X \times X$ の部分集合 $R \subset X \times X$ を、 X における関係という。 $(x, y) \in R$ のとき、これを $x \sim_R y$ で表すことにする。
(2) 集合 X における関係 R が同値関係であるとは、 R が次の条件 (i), (ii), (iii) を全て満たすことである:
(i) $x \in X$ に対し、 $x \sim_R x$.
(ii) $x, y \in X$ に対し、 $x \sim_R y$ ならば $y \sim_R x$.
(iii) $x, y, z \in X$ に対し、 $x \sim_R y$ かつ $y \sim_R z$ ならば $x \sim_R z$.
同値関係 R において、 $x \sim_R y$ なる $x, y \in X$ は (R に関して) 同値であるという。

例 1.2 X を整数全体の集合 \mathbb{Z} とし、 \mathbb{Z} における関係 R を

$$R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m - n \text{ は } 3 \text{ の倍数}\}$$

と定義する。このとき、 R は \mathbb{Z} における同値関係である。

(証明) R が定義 1.1 (2) の条件 (i), (ii), (iii) をみたすことをそれぞれ確かめよう。

(i) $m \in \mathbb{Z}$ に対し $m - m = 0$ で、 0 は 3 の倍数であるから $m \sim_R m$ である。即ち R は (i) をみたす。

(ii) $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{aligned} m \sim_R n &\stackrel{\text{定義}}{\iff} m - n \text{ は } 3 \text{ の倍数} \\ &\iff n - m \text{ は } 3 \text{ の倍数} \\ &\stackrel{\text{定義}}{\iff} n \sim_R m \end{aligned}$$

であるから, R は (ii) をみたく.

(iii) $l, m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$l \sim_R m \text{ かつ } m \sim_R n \stackrel{\text{定義}}{\iff} l - m \text{ は } 3 \text{ の倍数 かつ } n - m \text{ は } 3 \text{ の倍数}$$

である. 即ち, ある $k_1, k_2 \in \mathbb{Z}$ が存在して

$$l - m = 3k_1 \tag{1.1}$$

$$m - n = 3k_2 \tag{1.2}$$

となる. このとき (1.1), (1.2) を辺々足し合わせれば

$$l - n = 3(k_1 + k_2)$$

となり, $l - n$ は 3 の倍数なので $l \sim_R n$ となる. 即ち R は (iii) をみたく.

以上により R は (i), (ii), (iii) を全てみたすので, \mathbb{Z} における同値関係である. \square

例 1.3 X を日本在住者全体の集合とし, X における関係 R を

$$R = \{(x, y) \in X \times X \mid x \text{ と } y \text{ は同じ都道府県内の自治体に住民票がある}\}$$

と定義する. このとき, R は X における同値関係である (考えてみよ).

2 同値類と商集合

定義 2.1 R を集合 X における同値関係とすると, $x \in X$ に対し, R に関して x と同値な元全体の集合

$$[x] \stackrel{\text{定義}}{=} \{y \in X \mid y \sim_R x\}$$

を, x の R に関する同値類と呼ぶ. また, これら同値類がなす集合

$$X/\sim_R \stackrel{\text{定義}}{=} \{[x] \mid x \in X\}$$

を, X の R による商集合と呼ぶ.

例 2.2 整数全体の集合 \mathbb{Z} に対し, 例 1.2 の同値関係 R を考えよう. いま, $m, n \in \mathbb{Z}$ に対し

$$\begin{aligned} m \sim_R n &\stackrel{\text{定義}}{\iff} m - n \text{ は } 3 \text{ の倍数} \\ &\iff m \text{ と } n \text{ は } 3 \text{ で割った余りが同じ} \end{aligned}$$

であることに注意する. 整数 $m \in \mathbb{Z}$ を 3 で割った余りは 0, 1, 2 のいずれかで,

$$\begin{aligned} m \text{ を } 3 \text{ で割った余りは } 0 &\iff \text{ある整数 } k \text{ が存在して } m = 3k, \\ m \text{ を } 3 \text{ で割った余りは } 1 &\iff \text{ある整数 } k \text{ が存在して } m = 3k + 1, \\ m \text{ を } 3 \text{ で割った余りは } 2 &\iff \text{ある整数 } k \text{ が存在して } m = 3k + 2 \end{aligned}$$

である. 従って

$$\begin{aligned} [0] &= \{3 \text{ で割り切れる整数}\} \\ [1] &= \{3 \text{ で割った余りが } 1 \text{ である整数}\} \\ [2] &= \{3 \text{ で割った余りが } 2 \text{ である整数}\} \end{aligned}$$

と書けて,

$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0], [1], [2]\}$$

である.

注意 2.3 一般に自然数 k に対し, \mathbb{Z} における関係 R を

$$R = \{(m, n) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid m - n \text{ は } k \text{ の倍数}\}.$$

と定義すると, これは \mathbb{Z} における同値関係であり, その商集合は

$$\mathbb{Z}/\sim_R = \{[0], [1], \dots, [k-1]\}$$

となる. 細部の確認は演習問題とする.

例 2.4 日本在住者全体の集合 X に対し, 例 1.3 の同値関係 R を考えよう. このとき, X の R による商集合 X/\sim_R は, ちょうど 47 個の同値類からなる (それぞれの同値類がどのような集合を表しているかをよく考えよ).