実連続関数についての補足

幾何学 AI/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 6 月 19 日 (水)

以下で, 講義における § **3.2** で時間の都合上述べなかった, 実連続関数の和 · 積及び商に関する一定理を証明する. 特に位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が Euclid 空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ の場合は「**連続と極限**」(2 年後期, DA104) でも述べられることと思う.

位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, $(X, \mathcal{O})$ から 1 次元 Euclid 空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ への連続写像を**実連続関数**といった (**定義 3.2.1**). このとき, 講義において以下の定理を証明した:

定理 3.2.2. 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ 及び写像 $f : X \to \mathbb{R}$ に対し, 次の (1), (2), (3) は全て同値である:

(1) f は実連続関数,

(2) $\mathbb{R}$ の任意の開区間 (a, b) に対し, $f^{-1}((a, b)) \in \mathcal{O}$,

(3) 任意の $x_0 \in X$, 任意の正数 $\varepsilon > 0$ に対し, $f^{-1}\left(B(f(x_0); \varepsilon)\right) \in \mathbb{V}_X(x_0)$.

更に, **定理 3.2.2** の (3) は, 以下の (3)' と同値でもあったことを思い出そう:

(3)' 任意の $x_0 \in X$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $V \in \mathbb{V}_X(x_0)$ が存在して,

$$x \in V \implies |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

さて, $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $f, g : X \to \mathbb{R}$ を実連続関数とする. このとき, $f+g$, fg 及び f/g を, それぞれ $x \in X$ に対し

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(fg)(x) = f(x)g(x),$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$$

で定義される X から $\mathbb{R}$ への写像とする. 但し f/g については, 任意の $x \in X$ に対し $g(x) \neq 0$ が成り立つ場合に限る. このとき, 次の定理が成り立つ.

定理 3.2.3. $f+g$, fg, f/g はいずれも連続である. 即ち, これらもまた実連続関数である.

(証明) まず, $f+g$ が連続であることを示そう. いま, 任意の $x_0 \in X$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\delta = \varepsilon/2 \tag{i}$$

とおく. f, g はいずれも連続であるから, **定理 3.2.2** により, この正数 δ に対し,

$$^{\exists}V_1 \in \mathbb{V}_X(x_0) \ \text{ s.t. 「} x \in V_1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta \text{」} \tag{ii}$$

$$^{\exists}V_2 \in \mathbb{V}_X(x_0) \ \text{ s.t. 「} x \in V_2 \implies |g(x) - g(x_0)| < \delta \text{」} \tag{iii}$$

が成り立つ[1]. そこでいま**定理 2.3.4** (V3) から $V = V_1 \cap V_2 \in \mathbb{V}_X(x_0)$ で, $x \in V$ のとき,

$$\begin{aligned}
|(f+g)(x) - (f+g)(x_0)| &= |f(x) + g(x) - f(x_0) - g(x_0)| \\
&= |f(x) - f(x_0) + g(x) - g(x_0)| \\
&\leq |f(x) - f(x_0)| + |g(x) - g(x_0)| \\
&\overset{\text{(ii),(iii)}}{<} \delta + \delta \\
&\overset{\text{(i)}}{=} \varepsilon.
\end{aligned}$$

よって $f+g$ は連続である.

次に fg が連続であることを示そう. いま, 任意の $x_0 \in X$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\delta = \min\left\{1, \frac{\varepsilon}{|f(x_0)| + |g(x_0)| + 1}\right\} \tag{iv}$$

とおく. f, g はいずれも連続であるから, **定理 3.2.2** により, この正数 δ に対し,

$$^{\exists}V_1 \in \mathbb{V}_X(x_0) \ \text{ s.t. 「} x \in V_1 \implies |f(x) - f(x_0)| < \delta \text{」} \tag{v}$$

$$^{\exists}V_2 \in \mathbb{V}_X(x_0) \ \text{ s.t. 「} x \in V_2 \implies |g(x) - g(x_0)| < \delta \text{」} \tag{vi}$$

が成り立つ. 特に $x \in V_1$ に対し, (iv), (v) から

$$|f(x)| - |f(x_0)| \leq |f(x) - f(x_0)| < \delta \leq 1 \tag{vii}$$

が成り立つことに注意しよう. そこでいま**定理 2.3.4** (V3) から $V = V_1 \cap V_2 \in \mathbb{V}_X(x_0)$ で, $x \in V$ のとき,

[1] 正確には, 先に述べた通り, 条件 (3)' が **定理 3.2.2** (3) の条件と同値であることを用いるのである.

$$
\begin{aligned}
|(fg)(x)-(fg)(x_0)| &= |f(x)g(x)-f(x_0)g(x_0)| \\
&= |f(x)(g(x)-g(x_0))+g(x_0)(f(x)-f(x_0))| \\
&\leq |f(x)||g(x)-g(x_0)|+|g(x_0)||f(x)-f(x_0)| \\
&\overset{\text{(v),(vi),(vii)}}{<} (|f(x_0)|+1)\,\delta+|g(x_0)|\delta \\
&= (|f(x_0)|+|g(x_0)|+1)\,\delta \\
&\overset{\text{(iv)}}{\leq} (|f(x_0)|+|g(x_0)|+1)\cdot\frac{\varepsilon}{|f(x_0)|+|g(x_0)|+1} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

よって fg は連続である.

最後に f/g が連続であることを示そう. そのためには, $x \in X$ に対し

$$\left(\frac{1}{g}\right)(x)=\frac{1}{g(x)}$$

で定義される X から $\mathbb{R}$ への写像 $1/g$ が連続であることを示せば良い. 何故ならば, これより写像 $fg = f\cdot(1/g)$ が (2) より連続となるからである. いま, 任意の $x_0 \in X$, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し,

$$\delta=\min\left\{\frac{|g(x_0)|}{2},\frac{\varepsilon|g(x_0)|^2}{2}\right\} \tag{viii}$$

とおく. g は連続であるから, **定理 3.2.2** により, この正数 δ に対し,

$$^{\exists}V\in\mathbb{V}_X(x_0)\ \text{ s.t.「}x\in V \implies |g(x)-g(x_0)|<\delta\text{」} \tag{ix}$$

が成り立つ. そこでいま, $x \in V$ に対し, (viii) より

$$\delta<\frac{|g(x_0)|}{2} \tag{x}$$

であることと, (ix) より

$$|g(x_0)|-|g(x)|\leq|g(x_0)-g(x)|=|g(x)-g(x_0)|<\delta \tag{xi}$$

であることから,

$$|g(x)|\overset{\text{(xi)}}{>}|g(x_0)|-\delta\overset{\text{(x)}}{>}\frac{|g(x_0)|}{2} \tag{xii}$$

が成り立つことに注意しよう. そこで $x \in V$ のとき,

$$
\begin{aligned}
\left|\left(\frac{1}{g}\right)(x)-\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)\right| &= \left|\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}\right| \\
&= \frac{|g(x)-g(x_0)|}{|g(x)||g(x_0)|} \\
&= \frac{1}{|g(x)|}\cdot\frac{1}{|g(x_0)|}\cdot|g(x)-g(x_0)| \\
&\overset{\text{(ix),(xii)}}{<} \frac{2}{|g(x_0)|}\cdot\frac{1}{|g(x_0)|}\cdot\delta \\
&\overset{\text{(viii)}}{\leq} \frac{2}{|g(x_0)|}\cdot\frac{1}{|g(x_0)|}\cdot\frac{\varepsilon|g(x_0)|^2}{2} \\
&= \varepsilon.
\end{aligned}
$$

よって $1/g$ は連続である. □

これで**定理 3.2.3** が示された. 以下, 幾つかの具体例を述べる.

例 1. $f, g : X \to \mathbb{R}$ を実連続関数とするとき, $f-g$ を $x \in X$ に対し

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x)$$

で定義される X から $\mathbb{R}$ への写像とする. このとき $f-g$ もまた実連続関数である. なぜならば, $h : X \to \mathbb{R}$ を -1 への**定値写像** (即ち任意の $x \in \mathbb{X}$ に対し $h(x) = -1$) とすると, §3.1 **例 4** よりこれは連続で, このとき $f-g$ は $f+hg$ と等しい. そこでいま f, g, h が全て連続であることより, **定理 3.2.3** から $f+hg$ は連続である. 従って $f-g$ は連続である.

例 2. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

で定義しよう. ここで m は非負整数で, また各 a_i は実数である ($i = 0, 1, \ldots, m$). いま, **恒等写像** $\mathrm{id} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ (即ち任意の $x \in \mathbb{X}$ に対し $\mathrm{id}(x) = x$) は明らかに連続で (何故か?), 写像 f は恒等写像と適当な定置写像の和と積によって構成される. 従って**定理 3.2.3** から f は連続である.

例 2 は, 一般に $x \in \mathbb{R}$ に対し x **の多項式で表されるような実数値関数は必ず連続であることを示している**. 即ち, 高等学校までに学ぶ「○次関数」は全て連続である.

例 3. 写像 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ を, $x \in \mathbb{R}$ に対し

$$f(x) = \frac{a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0}{b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0}$$

で定義する (一般にこのような写像を**有理関数**という). ここで m, n は非負整数で, また各 a_i, b_j は実数である. また, 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対し $b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \neq 0$ であるとする. いま,

$$\begin{aligned} g(x) &= a_m x^m + a_{m-1} x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0, \\ h(x) &= b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0 \end{aligned}$$

とおくと, $g(x)$, $h(x)$ は**例 2** よりともに実連続関数を与えるから, **定理 3.2.3** によって $f = g/h$ は連続である.