# Euclid 空間の連結部分集合についての補足

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 11 月 6 日 (水)

講義における § **6.3** で, 以下の補題を述べた.

**補題 6.3.4.** 標準的な位相による 1 次元 Euclid 空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ において, $A$ を $\mathbb{R}$ の連結部分集合とする. このとき, $\alpha, \beta \in A$, $\alpha < \beta$ なら, $[\alpha, \beta] \subset A$ である.

講義では, この補題を用いて**中間値の定理** (**定理 6.3.5**) を示した. 更に, 補題 6.3.4 を用いて, $\mathbb{R}$ の連結部分集合を全てリストアップすることができる.

**定理 6.3.6.** 標準的な位相による 1 次元 Euclid 空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ において, $\mathbb{R}$ の空でない連結部分集合は, $\mathbb{R}$ 自身であるか, または $(a, b)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$, $(a, \infty)$, $[a, \infty)$, $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ の形の区間に限る.

(**証明**) $A$ を $\mathbb{R}$ の連結部分集合とする. $A$ がただ 1 点 $a$ からなるときは, $A$ は $\mathbb{R}$ の連結部分集合で $A = [a, a]$ である. 以下, $A$ は 2 点以上を含むとする.
(i) $A$ **が有界のとき**: 10 月 30 日 (水) 配布の「**Euclid 空間の連結性についての補足**」で述べた通り, $A$ は下限 $a$ 及び上限 $b$ を持ち, このとき $A \subset [a, b]$ である. 一方, $a < a'$, $b' < b$ なる $a', b'$ は $A$ に属すので, 補題 6.3.4 から $[a', b'] \subset A$ となる. 従って $(a, b) \subset A$ である. 以上により $(a, b) \subset A \subset [a, b]$ であるから, $A$ は $(a, b)$, $(a, b]$, $[a, b)$, $[a, b]$ のいずれかである.
(ii) $A$ **が下に有界で, かつ上に有界でないとき**: $A$ は下限 $a$ を持ち, このとき $A \subset [a, \infty)$ である. 一方, $a < a' < b'$ なる $a', b'$ は $A$ に属すので, 補題 6.3.4 から $[a', b'] \subset A$ となる. 従って $(a, \infty) \subset A$ である. 以上により $(a, \infty) \subset A \subset [a, \infty)$ であるから, $A$ は $(a, \infty)$, $[a, \infty)$ のいずれかである.
(iii) $A$ **が上に有界で, かつ下に有界でないとき**: $A$ は上限 $b$ を持ち, このとき $A \subset (-\infty, b]$ である. 一方, $a' < b' < b$ なる $a', b'$ は $A$ に属すので, 補題 6.3.4 から $[a', b'] \subset A$ となる. 従って $(-\infty, b) \subset A$ である. 以上により $(-\infty, b) \subset A \subset (-\infty, b]$ であるから, $A$ は $(-\infty, b)$, $(-\infty, b]$ のいずれかである.
(iv) $A$ **が上にも下にも有界でないとき**: $a' < b'$ なる $a', b' \in A$ に対し, 補題 6.3.4 から $[a', b'] \subset A$ となる. 従って $\mathbb{R} \subset A$ であるから, $A = \mathbb{R}$ である. □