Euclid 空間の連結性についての補足

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 10 月 30 日 (水)

以下で, 講義における § **6.3** で時間の都合上述べなかった, Euclid 空間の連結性に関する次の定理の証明を述べる.

> **定理 6.3.1.** 標準的な位相による 1 次元 Euclid 空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ は連結である.

定理 6.3.1 を示すためには, **実数の連続性**についての知識を必要とするが, 本稿ではそれを既知として話を進める. 実数の連続性については, 例えば「**連続と極限**」(2 年後期, DA104) でも述べられたことと思う.

実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合 A において, 任意の $a \in A$ に対し $a \leq a'$ が成り立つような $a' \in \mathbb{R}$ を A の**上界**といい, 一方, 任意の $a \in A$ に対し $a'' \leq a$ が成り立つような $a'' \in \mathbb{R}$ を A の**下界**という. A の上界が少なくとも 1 つ存在するとき, A は**上に有界**であるといい, 一方, A の下界が少なくとも 1 つ存在するとき, A は**下に有界**であるという. 上にも下にも有界であるような $\mathbb{R}$ の部分集合 A は単に**有界**であるといわれる. これは A がある閉区間に含まれることと同じである. このとき, 次の定理が成り立つ.[1]

> **定理. (実数の連続性, Weierstrass の定理)** $\mathbb{R}$ の空でない上に有界な部分集合 A に対し, 必ず A の最小の上界が存在する. また, $\mathbb{R}$ の空でない下に有界な部分集合 A に対し, 必ず A の最大の下界が存在する.

上の定理における "最小の上界" を A の**上限**といって $\mathrm{sup}A$ で表し, 一方, "最大の下界" を A の**下限**といって $\mathrm{inf}A$ で表す. 即ち,

$$\mathrm{sup}A = \min\{a' \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ に対し } a \leq a'\},$$
$$\mathrm{inf}A = \max\{a'' \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } a \in A \text{ に対し } a'' \leq a\}$$

である. 例えば $\mathbb{R}$ の開区間 $(-1, 1)$ を A とおけば, A 内における最大及び最小の元は定まらないが, A は有界で, $\mathrm{sup}A = 1$, $\mathrm{inf}A = -1$ である.

[1] 解析学の適当な教科書には必ず書いてある (と思うよ).

更にいま, 次のことに注意しておく. 一般に位相空間 $(X, \mathcal{O})$ が連結でないとすると, $(X, \mathcal{O})$ のある閉集合 U_1, U_2 が存在して,

$$U_1 \cup U_2 = X,\ U_1 \cap U_2 = \emptyset,\ U_1 \neq \emptyset,\ U_2 \neq \emptyset \tag{i}$$

となる. 即ち, **連結でない位相空間は, 互いに交わらない 2 つの空でない閉集合にも分割される**. 実際, $(X, \mathcal{O})$ が連結でなければ, ある開集合 $O_1, O_2 \in \mathcal{O}$ が存在して,

$$O_1 \cup O_2 = X,\ O_1 \cap O_2 = \emptyset,\ O_1 \neq \emptyset,\ O_2 \neq \emptyset \tag{ii}$$

が成り立つ. このとき

$$U_1 = O_1^c,\ U_2 = O_2^c$$

とおけば, (ii) により, これらは $(X, \mathcal{O})$ の空でない閉集合で,

$$\begin{aligned} U_1 \cup U_2 &= O_1^c \cup O_2^c = (O_1 \cap O_2)^c = \emptyset^c = X, \\ U_1 \cap U_2 &= O_1^c \cap O_2^c = (O_1 \cup O_2)^c = X^c = \emptyset \end{aligned}$$

となる.[2] 以上の準備のもとで, 定理 6.3.1 の証明に入ろう.

(定理 6.3.1 の証明) 背理法で示す. 即ち, $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ が連結でないと仮定する. すると, 先程述べたように, $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ のある閉集合 U_1, U_2 が存在して,

$$U_1 \cup U_2 = \mathbb{R}, \tag{iii}$$
$$U_1 \cap U_2 = \emptyset, \tag{iv}$$
$$U_1 \neq \emptyset,\ U_2 \neq \emptyset \tag{v}$$

となる. (v) より, ある $x_1 \in U_1,\ x_2 \in U_2$ が存在して, (iv) から $x_1 \neq x_2$ である. そこで特に $x_1 < x_2$ と仮定しても一般性を失わない. いま,

$$V = U_1 \cap (-\infty, x_2)$$

とおくと, $x_1 \in U_1$ かつ $x_1 \in (-\infty, x_2)$ であるから, $x_1 \in V$, 即ち $V \neq \emptyset$ である. 更に x_2 は B の上界であるから, V は上に有界である. 従って Weierstrass の定理により, V の上限 c が存在する. c は V の最小の上界であるから,

$$c \leq x_2 \tag{vi}$$

である. ここで上限 c に関して, 任意の $\varepsilon > 0$ に対し, ある $x_1' \in V$ が存在して,

$$c - \varepsilon < x_1' \leq c \tag{vii}$$

[2] 逆に, $(X, \mathcal{O})$ のある閉集合 U_1, U_2 が存在して (i) が成り立つならば, $(X, \mathcal{O})$ は連結でないことも同様に示される. 詳細は演習問題とする.

が成り立つ (実際, もしそのような $x_1' \in V$ が存在しないなら, $c-\varepsilon$ は V の上界となり, c が V の最小の上界であることに反する). $x_1' \in U_1$ でもあるから, (vii) より

$$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap U_1 \neq \emptyset \tag{viii}$$

となる. このとき, c の $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ における任意の開近傍 O に対し, $O \cap U_1 \neq \emptyset$ であることが以下のようにしてわかる: O が $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ の開集合であることと, $\mathbb{R}$ の開区間全体の集合が $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ の基底であること (§2.4 **例 4** で $n=1$ の場合) から,

$$O = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} (a_\lambda, b_\lambda) \tag{ix}$$

とかけて, $c \in O$ より, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して $c \in (a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0})$ となる. このとき

$$\varepsilon_0 = \min\{b_{\lambda_0} - c, c - a_{\lambda_0}\}$$

とおけば,

$$(a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \supset (c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0) \tag{x}$$

となり, この ε_0 について (viii) から,

$$(c-\varepsilon_0, c+\varepsilon_0) \cap U_1 \neq \emptyset \tag{xi}$$

となる. 即ち (x) と (xi) を合わせて

$$(a_{\lambda_0}, b_{\lambda_0}) \cap U_1 \neq \emptyset$$

が得られるので, (ix) より $O \cap U_1 \neq \emptyset$ である. 従って 10 月 9 日 (水) 配付の「**位相空間の部分集合の触点についての補足**」における**補題 2.2.9** から, $c \in \bar{U}_1$ となる. ここで U_1 は $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ の閉集合であったから, $\bar{U}_1 = U_1$ である. 故に

$$c \in U_1 \tag{xii}$$

となり, (iv), (xii) 及び $x_2 \in U_2$ から, $c \neq x_2$ である. 従って (vi) と合わせて $c < x_2$ となる. 一方, $c < x \leq x_2$ なる x は必ず U_2 に属する (実際, もしそのような x が U_2 に属さないとすると, (iii), (iv) から $x \in U_1$ となり, 故に $x \in B$ かつ $c < x$ となって, c が B の上界であることに反する). 従って任意の $\varepsilon > 0$ に対し

$$(c-\varepsilon, c+\varepsilon) \cap U_2 \neq \emptyset$$

となり, これより U_1 の場合と全く同様に $c \in \bar{U}_2$ であることが示される. U_2 も $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ の閉集合であったから, $\bar{U}_2 = U_2$ である. 故に

$$c \in U_2 \tag{xiii}$$

となる. 従って (xii), (xiii) から $c \in U_1 \cap U_2$, 即ち $U_1 \cap U_2 \neq \emptyset$ となるが, これは (iv) と矛盾する. $\square$