# 位相空間の連結成分についての補足

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 10 月 30 日 (水)

以下で, 講義における § **6.2** で時間の都合上述べなかった, 位相空間の連結成分に関する命題の証明を述べる. いま, 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の 2 点 $x, y \in X$ に対し, 関係 $x \sim y$ を, $X$ のある連結部分集合 $A$ が存在して $x, y \in A$ となるときとして定義すると, これは $X$ における同値関係となり (**命題 6.2.7**), $X$ の $\sim$ による商集合 $X/_\sim$ の各同値類を $(X, \mathcal{O})$ の**連結成分**と呼ぶのであった (**定義 6.2.8**). このとき, 次の命題が成り立つ.

**命題 6.2.9.** 位相空間 $(X, \mathcal{O})$ に対し, $C$ をその連結成分の 1 つとする. このとき, 次が成り立つ.

(1) $C$ は $X$ の連結部分集合である.
(2) $C$ は $(X, \mathcal{O})$ の閉集合である.

**(証明)** (1) $C$ の点 $x$ を任意に 1 つ選んで固定し, $X$ の連結部分集合で $x$ を含むもの全ての和集合を $B_x$ とおく. 即ち,

$$B_x = \bigcup_{\substack{A \text{ は } X \text{ の連結部分集合} \\ x \in A}} A$$

である. $x$ を含むような $X$ の任意の 2 つの連結部分集合の共通部分は, (当然だが) 必ず $x$ を含むので空でない. 従って**補題 6.2.6** 及びその直後の注意で述べたことから, $B_x$ もまた $X$ の連結部分集合であることに注意する. このとき, **我々の目標は $C = B_x$ を示すことである**.

まず, $B_x \subset C$ を示そう. $y \in B_x$ とすると, $x, y \in B_x$ かつ $B_x$ は $X$ の連結部分集合であるから, $y \sim x \in C$ となる. 従って $y \in C$ である. 次に $C \subset B_x$ を示そう. $z \in C$ とすると, $x \in C$ から $z \sim x$ である. 従って, $X$ のある連結部分集合 $A$ で $z, x \in A$ となるものが存在する. このとき特に $A \subset B_x$ であるから, $z \in A \subset B_x$ より $z \in B_x$ となる. 以上によって $C = B_x$ となり, $C$ は $X$ の連結部分集合である.

(2) (1) によって, $C$ は $X$ の連結部分集合である. このとき, **補題 6.2.5** から, $C$ の触集合 $\bar{C}$ も $X$ の連結部分集合であり, $x \in C \subset \bar{C}$ であるから, $\bar{C}$ は $x$ を含む $X$

の連結部分集合の1つである. 従って

$$\bar{C} \subset \bigcup_{\substack{A\ \text{は}\ X\ \text{の連結部分集合} \\ x \in A}} A = B_x = C$$

となって $\bar{C} \subset C$ がわかり, 一方で常に $C \subset \bar{C}$ であったから, 故に $C = \bar{C}$ となる. 従って**命題 2.2.5 (2)** より, $C$ は $(X, \mathcal{O})$ の閉集合である. □

**注意.** 命題 6.2.9 において, もし $(X, \mathcal{O})$ **の連結成分の個数が有限個であれば, 各連結成分は更に** $(X, \mathcal{O})$ **の開集合でもある**ことが以下のように示される. いま, $C_1, C_2, \ldots, C_m$ を $(X, \mathcal{O})$ の $C$ 以外の全ての連結成分とするとき, 命題 6.2.9 (2) によって各 $C_i$ は $(X, \mathcal{O})$ の閉集合であるので, **定理 2.2.3 (2)** から

$$C' = \bigcup_{i=1}^{m} C_i$$

もまた $(X, \mathcal{O})$ の閉集合である (ここで $C'$ が有限個の閉集合の和集合であることに注意せよ). そこで $C$ は閉集合 $C'$ の $X$ における補集合であるので, 従って $(X, \mathcal{O})$ の開集合である. 一方, **連結成分の個数が無限個の場合は, 各連結成分が必ずしも開集合となるとは限らない**ことが知られている (この後の**例 5** を参照せよ).

**例 4.** 講義で述べた § **6.2 例 3** の位相空間 $(X, \mathcal{O})$ の連結成分 $\{1\}$, $\{2, 5\}$, $\{3, 4\}$ が, それぞれ $(X, \mathcal{O})$ の閉集合でも開集合でもあることを確かめよ.

**例 5.** 標準的な位相による1次元 Euclid 空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ において, $\mathbb{R}$ の部分集合として有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ を取り, $\mathbb{Q}$ における $\mathcal{O}(\mathbb{R})$ の相対位相 $\mathcal{O}_{\mathbb{Q}}$ による部分位相空間 $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ を考える. このとき, この位相空間 $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の連結成分は, 1点集合 $\{r\}$ $(r \in \mathbb{Q})$ からなることがわかる (従って連結成分は無限個ある). 更に, 各連結成分 $\{r\}$ は $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ の開集合ではないこともわかる. 以上の詳細は, 後期第1回レポート問題にて問うことにする.

一般に, どの連結成分も1点集合から成るような位相空間は, **完全不連結**であるという. 例えば任意の離散空間は完全不連結である. また, 例5の位相空間 $(\mathbb{Q}, \mathcal{O}_{\mathbb{Q}})$ は, 完全不連結な位相空間で離散空間ではないものの例である.