閉区間のコンパクト性についての補足

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 12 月 11 日 (水)

以下で, 講義における § **7.3** で時間の都合上述べなかった, $\mathbb{R}$ の閉区間のコンパクト性に関する次の補題の証明を述べる.

> **補題 7.3.2.** 標準的な位相による 1 次元 Euclid 空間 $(\mathbb{R}, \mathcal{O}(\mathbb{R}))$ において, 閉区間 $I = [a, b]$ は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合である.

(証明) $\mathcal{C} = \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を I の $\mathbb{R}$ における開被覆とする. いま, $x \in I$ に対し, $\mathcal{C}$ は $[a, x]$ の開被覆でもある. そこで

$$I' = \{x \in I \mid \mathcal{C} \text{ は } [a, x] \text{ の有限開被覆を含む}\}$$

とおく. 以下, **我々の目標は** $b \in I'$ **を示すことである**. これが示されれば, $\mathcal{C}$ は I の有限開被覆を含むことになるので, I は $\mathbb{R}$ のコンパクト部分集合であることが結論される. また, I' において,

$$x \in I' \implies \text{任意の } x' \in [a, x] \text{ に対し, } x' \in I' \tag{i}$$

が成り立つことに注意しよう. なぜなら, $[a, x]$ の有限開被覆は, $[a, x'] \subset [a, x]$ によって $[a, x']$ の有限開被覆ともなるからである. そこで (i) の対偶を取って,

$$\text{ある } x' \in [a, x] \text{ が存在して, } x' \notin I' \implies x \notin I' \tag{ii}$$

が成り立つ.

まず, $\mathcal{C} = \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が I の $\mathbb{R}$ における開被覆であることから, ある $\lambda' \in \Lambda$ が存在して $a \in O_{\lambda'}$ である. このとき $\{O_{\lambda'}\}$ は $[a, a] = \{a\}$ の有限開被覆となるので, $a \in I'$ である. よって I' は空集合でなく, 更に b は I' の上界の 1 つであるので, I' は上に有界である. 従って I' の上限

$$c = \sup I' = \min\{y \in \mathbb{R} \mid \text{任意の } x \in I' \text{に対し } x \leq y\}$$

が存在して, $c \leq b$ である.[1] よって $c \in I$ となるので, $\mathcal{C} = \{O_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ が I の $\mathbb{R}$ における開被覆であることから, ある $\lambda_0 \in \Lambda$ が存在して, $c \in O_{\lambda_0}$ である. $O_{\lambda_0} \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$

[1] 10 月 30 日 (水) 配布「**Euclid 空間の連結性についての補足**」で述べた通り, $\mathbb{R}$ の空でない上に有界な部分集合 A に対し, 必ず A の最小の上界が存在する. また, $\mathbb{R}$ の空でない下に有界な部分集合 A に対し, 必ず A の最大の下界が存在する (**実数の連続性, Weierstrass の定理**). この最小の上界を A の**上限**といって $\sup A$ で表し, 一方, 最大の下界を A の**下限**といって $\inf A$ で表すのであった.

であるから, 十分小さく $\varepsilon > 0$ を選んで

$$[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset O_{\lambda_0} \tag{iii}$$

となるようにできる.[2] そこでもし $c-\varepsilon \notin I'$ だとすると, (ii) で述べたことより, $c-\varepsilon \leq x' \leq c$ なる任意の x' は I' に属さないので, $c-\varepsilon$ もまた I' の上界となるが, これは c が I' の最小の上界であることに矛盾する. 従って $c-\varepsilon \in I'$ である. 即ち, ある有限個の $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in \Lambda$ が存在して,

$$[a, c-\varepsilon] \subset O_{\lambda_1} \cup O_{\lambda_2} \cup \cdots \cup O_{\lambda_k} \tag{iv}$$

が成り立つ. このとき, (iii), (iv) から

$$[a, c+\varepsilon] = [a, c-\varepsilon] \cup [c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset O_{\lambda_0} \cup O_{\lambda_1} \cup \cdots \cup O_{\lambda_k} \tag{v}$$

となり, 一方,

$$[a, c] \subset [a, c+\varepsilon] \tag{vi}$$

であるから, (v), (vi) より, $\mathcal{C}$ は $[a, c]$ の有限開被覆を含む. 即ち

$$c \in I' \tag{vii}$$

である. そこでもし $c < b$ だとすると, (iii) の ε を $c+\varepsilon < b$ をみたすように, 即ち $c+\varepsilon \in I$ となるように取ると, (v) より $\mathcal{C}$ は $[a, c+\varepsilon]$ の有限開被覆を含むので, $c+\varepsilon \in I'$ である. これは c が I' の上限であることに矛盾する. 従って $c = b$ であり, (vii) と合わせて $b \in I'$ となる. これで示された. $\square$

[2] 正確に述べよう. $c \in O_{\lambda_0}$ かつ $O_{\lambda_0} \in \mathcal{O}(\mathbb{R})$ であるから, ある $\varepsilon' > 0$ が存在して $(c-\varepsilon', c+\varepsilon') \subset O_{\lambda_0}$ となる. そこで例えば $\varepsilon = \varepsilon'/2$ とおけば, $[c-\varepsilon, c+\varepsilon] \subset (c-\varepsilon', c+\varepsilon') \subset O_{\lambda_0}$ とできる. "十分小さく" という表現の裏には, 大抵このような議論が潜んでいる. このように行間を読む習慣を付けておかないと, 4 年のゼミ (「**数学講究**」, 「**情報理学講究**」) で苦労する (と思うよ).