位相空間の部分集合の触点についての補足

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 10 月 9 日 (水)

以下で, 位相空間の部分集合の触点について, 前期の「幾何学 AI」で解説し残した幾つかの内容について述べる. 尚, 本稿で述べる内容は講義における §2.2 の最後に組み込むこととする.

$(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $\mathcal{U}$ を $(X, \mathcal{O})$ の**閉集合系**とする. このとき,

$$A^i = \bigcup_{\substack{O \in \mathcal{O} \\ O \subset A}} O$$

を A の**内部** (または**開核**) といい, A^i に属する点を, A の**内点**と呼ぶのであった (**定義 2.2.4 (1)**). 一方,

$$\bar{A} = \bigcap_{\substack{U \in \mathcal{U} \\ A \subset U}} U$$

を A の**触集合** (または**閉包**) といい, $\bar{A}$ に属する点を, A の**触点**と呼んだ (**定義 2.2.4 (2)**). 更に A の補集合 A^c の内部 $(A^c)^i$ を A の**外部**といって A^e で表し, A^e に属する点を, A の**外点**と呼ぶのであった (**定義 2.2.7 (1)**).

補題 2.2.9 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, A を X の部分集合とする. このとき, x が A の触点, 即ち $x \in \bar{A}$ であるための必要十分条件は, x の任意の開近傍 O(即ち $O \in \mathcal{O}$ かつ $x \in O$) に対し, $O \cap A \neq \emptyset$ となることである.

補題 2.2.9 は, x の任意の開近傍が "A に触れている" ことと, $x \in \bar{A}$ であることが同じ意味だと言っている. それで $\bar{A}$ の点を A の触点と呼ぶのである.

(証明) $(\Longleftarrow)$ 対偶を示す. 即ち, 示すべきことは

$$x \notin \bar{A} \implies x \text{ のある開近傍 } O \text{ が存在して, } O \cap A = \emptyset$$

である. 実際, $x \notin \bar{A}$ と仮定しよう. いま, $X = \bar{A} \cup A^e$ かつ $\bar{A} \cap A^e = \emptyset$ であったから, $x \in A^e$ である. ここで $A^e = (A^c)^i$ から $A^e \in \mathcal{O}$ であることに注意する. そこで $O = A^e$ とおけば, $x \in O$ なので O は x の開近傍で, $O \cap A = A^e \cap A = \emptyset$ である.

($\Longrightarrow$) 対偶を示す. 即ち, 示すべきことは

$$x\text{ のある開近傍 } O \text{ が存在して, } O \cap A = \emptyset \implies x \notin \bar{A}$$

である. 実際, x のある開近傍 O が存在して $O \cap A = \emptyset$ となると仮定しよう. このとき $O \subset A^c$ かつ $O \in \mathcal{O}$ であるから, $x \in O \subset (A^c)^i = A^e$ となる. 従って $x \notin \bar{A}$ である. $\square$

補題 2.2.9 の応用の 1 つとして, 次を示そう.

命題 2.2.10 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $O \in \mathcal{O}$ とする. また, A を X の部分集合とする. このとき, $O \cap \bar{A} \subset \overline{O \cap A}$ が成り立つ.

(証明) $x \in O \cap \bar{A}$ ならば $x \in \overline{O \cap A}$ であることを示す. 実際, $x \in O \cap \bar{A}$ と仮定しよう. いま, x の任意の開近傍 O' に対し, $O' \cap O$ もやはり x の開近傍で, $x \in \bar{A}$ であるから, 補題 2.2.9 より $(O' \cap O) \cap A \neq \emptyset$ となる. 即ち $O' \cap (O \cap A) \neq \emptyset$ であるから, 再び補題 2.2.9 により, $x \in \overline{O \cap A}$ となる. $\square$

補題 2.2.10 の直接の系として, 次が得られる.

系 2.2.11 $(X, \mathcal{O})$ を位相空間とし, $O \in \mathcal{O}$ とする. また, A を X の部分集合とする. このとき, $O \cap A = \emptyset$ ならば, $O \cap \bar{A} = \emptyset$ である.

(証明) 命題 2.2.10 より $O \cap \bar{A} \subset \overline{O \cap A} = \bar{\emptyset} = \emptyset$. $\square$