Euclid 空間の部分集合の有界性についての補足

幾何学 AII/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 12 月 12 日 (木)

以下で, 講義における § **7.3** の**定義 7.3.1** で述べた, Euclid 空間の部分集合の有界性の定義に関する補足を述べる.

定義 7.3.1. n 次元 Euclid 空間 $\mathbb{R}^n$ の部分集合を A とおく.

$$A\text{ が}\textbf{有界}\text{である} \overset{\text{def.}}{\iff} {}^{\exists}\varepsilon > 0 \ \text{ s.t. } \ A \subset B^*(\mathbf{0};\varepsilon)$$
$$\overset{(*)}{\iff} {}^{\exists}\varepsilon' > 0 \ \text{ s.t. } \ A \subset [-\varepsilon',\varepsilon'] \times [-\varepsilon',\varepsilon'] \times \cdots \times [-\varepsilon',\varepsilon'].$$

講義では, 上の $(*)$ の必要十分性の説明において, 特に $n = 2$ の場合を図示しながら, 「$(\Longrightarrow)$ はそのまま $\varepsilon' = \varepsilon$ とおけば良い. $(\Longrightarrow)$ は $\varepsilon = \sqrt{2}\varepsilon'$ とおけば良い.」と述べて軽やかに通過したが, 後半は $n = 2$ の場合はこれで良いが, **一般の n ではこのままでは誤りである**. そこで, 講義の訂正を兼ねて, 以下で $(*)$ の必要十分性を正確に述べておくことにする.

($(*)$ の証明) $(\Longrightarrow)$ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ としよう. 仮定より, ある $\varepsilon > 0$ に対し, $A \subset B^*(\mathbf{0};\varepsilon)$ であるから,

$$x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq \varepsilon^2 \tag{i}$$

である. このとき, 各 x_i について

$$|x_i| = \sqrt{x_i^2} \leq \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \overset{\text{(i)}}{\leq} \varepsilon$$

となるので $(i = 1, 2, \ldots, n)$, 従って

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in [-\varepsilon,\varepsilon] \times [-\varepsilon,\varepsilon] \times \cdots \times [-\varepsilon,\varepsilon]$$

である. 即ち

$$A \subset [-\varepsilon,\varepsilon] \times [-\varepsilon,\varepsilon] \times \cdots \times [-\varepsilon,\varepsilon]$$

となるから, $\varepsilon' = \varepsilon$ とおけば良い.

$(\Longleftarrow)$ $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in A$ としよう. 仮定より, ある $\varepsilon' > 0$ に対し

$$A \subset [-\varepsilon',\varepsilon'] \times [-\varepsilon',\varepsilon'] \times \cdots \times [-\varepsilon',\varepsilon']$$

であるから, 各 x_i について

$$|x_i| \leq \varepsilon' \tag{ii}$$

となる $(i = 1, 2, \ldots, n)$. このとき,

$$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2 \\ &\overset{\text{(ii)}}{\leq} {\varepsilon'}^2 + {\varepsilon'}^2 + \cdots + {\varepsilon'}^2 \\ &= n{\varepsilon'}^2 \end{aligned}$$

となるので, 従って

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2} \leq \sqrt{n}\varepsilon' \tag{iii}$$

である. そこで $\varepsilon = \sqrt{n}\varepsilon'$ とおけば, (iii) より

$$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in B^*(\mathbf{0}; \varepsilon)$$

となる. 即ち, $A \subset B^*(\mathbf{0}; \varepsilon)$ である. □

注意. 要するに, 上記証明の前半では, n 次元 (閉) 球体を内接球体として持つ n 次元立方体を考え, 後半では, n 次元立方体に外接する n 次元 (閉) 球体を考えたのである. $n = 1$ の場合は閉球体と閉区間は同じものである. $n = 2$ の場合は講義において図示した通りであり, $n = 3$ の場合も自分で絵を描いてみると良い. $n \geq 4$ の場合は, n 次元球体や n 次元立方体を我々の目で実際に見ることはできないが, 上記のように正しく証明することができる.