全単射と合成写像についての復習

幾何学 AI/幾何学 I (担当: 新國)

2013 年 7 月 17 日 (水)

以下で, 写像の**全射性**, **単射性**及び**合成写像**について**超簡単に**復習する. これらについても, 例えば「**情報数学**」(1 年後期, DA502, DB502) でも解説されている. 尚, 本稿で述べる内容は講義において §5.1 に組み込むこととする.

§5.1 全単射と合成写像

定義 5.1.1 X, X' を集合とし, $f : X \to X'$ を写像とする.

(1) f が**全射**である $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ ${}^\forall x' \in X',\ {}^\exists x \in X,$ s.t. $f(x) = x'$.

(2) f が**単射**である $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ $x_1, x_2 \in X$ に対し,『 $f(x_1) = f(x_2) \implies x_1 = x_2$ 』.

(3) f が**全単射**である $\overset{\text{定義}}{\Longleftrightarrow}$ f は全射かつ単射.

また, 全単射 $f : X \to X'$ において, 任意の $x' \in X'$ に対し, f は全射なので $f^{-1}(\{x'\}) \neq \emptyset$ で, f は単射だから $f^{-1}(\{x'\}) = \{x\}$ なる $x \in X$ が唯一つ存在する. このとき, $x' \in X'$ に $x \in X$ を対応させて得られる X' から X への写像を f の**逆写像**といい, f^{-1} で表す.

注意. 写像 $f : X \to X'$ 及び $A' \subset X'$ に対し, f による A' の**逆像**

$$f^{-1}(A') = \{x \in X \mid f(x) \in A'\}$$

は常に存在するが, **f の逆写像 f^{-1} は, f が全単射の場合に限り存在する.** 逆像と逆写像の違いを理解していない学生が大変多いので, 気を付けること.

例 1. 集合 $X = \{1, 2, 3, 4\}$, $X' = \{a, b, c\}$, $X'' = \{x, y, z, w\}$ において, 写像 $f_1 : X \to X'$, $f_2 : X' \to X''$, $f_3 : X' \to X$, $f_4 : X \to X''$ を, それぞれ

$$f_1(1) = f_1(3) = b,\ f_1(2) = c,\ f_1(4) = a,$$
$$f_2(a) = w,\ f_2(b) = x,\ f_2(c) = y,$$
$$f_3(a) = f_3(c) = 2,\ f_3(b) = 3,$$
$$f_4(1) = y,\ f_4(2) = w,\ f_4(3) = x,\ f_4(4) = z$$

で定義する．このとき, f_1 **は全射だが単射でない．** f_2 **は単射だが全射でない．** f_3 **は全射でも単射でもない．** f_4 **は全単射である．** また, f_4 の逆写像 $f_4^{-1} : X'' \to X$ は,

$$f_4^{-1}(x) = 3,\ f_4^{-1}(y) = 1,\ f_4^{-1}(z) = 4,\ f_4^{-1}(w) = 2$$

で定義される写像である．

例 2. 写像 $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$ を, 実数値関数

$$f_1(x) = x^3 - x,\ f_2(x) = 2^x,\ f_3(x) = -3x^2,\ f_4(x) = 2x - 1$$

で定義する．このとき, f_1 **は全射だが単射でない．** f_2 **は単射だが全射でない．** f_3 **は全射でも単射でもない．** f_4 **は全単射である．** また, f_4 の逆写像 $f_4^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ は,

$$f_4^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}$$

で定義される写像である (いわゆる**逆関数**).

定義 5.1.2 X, X', X'' を集合とし, $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ を写像とする．このとき, $x \in X$ に $g(f(x)) \in X''$ を対応させる X から X'' への写像を f と g の**合成写像**といい, $g \circ f$ で表す．

$$\begin{tikzcd} X \arrow[r, "f"] \arrow[dr, "g\circ f"'] & X' \arrow[d, "g"] \\ & X'' \end{tikzcd}$$

即ち, $g \circ f : X \to X''$ で, $x \in X$ に対し

$$g \circ f(x) \overset{\text{定義}}{=} g(f(x))$$

である．

例 3. 例 1 の写像 $f_1 : X \to X'$, $f_2 : X' \to X''$ の合成写像 $f_2 \circ f_1 : X \to X''$ がどのような写像となるかを見てみよう．元の対応を追うと

$$\begin{aligned} 1 &\overset{f_1}{\longmapsto} b \overset{f_2}{\longmapsto} x \\ 2 &\overset{f_1}{\longmapsto} c \overset{f_2}{\longmapsto} y \\ 3 &\overset{f_1}{\longmapsto} b \overset{f_2}{\longmapsto} x \\ 4 &\overset{f_1}{\longmapsto} a \overset{f_2}{\longmapsto} w \end{aligned}$$

となるから, $f_2 \circ f_1$ は

$$f_2 \circ f_1(1) = f_2 \circ f_1(3) = x,\ f_2 \circ f_1(2) = y,\ f_2 \circ f_1(4) = w$$

で定義される写像である．

例 4. 例えば例 1 の写像 $f_3, f_4 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ からは, 2 通りの合成写像 $f_3 \circ f_4$ と $f_4 \circ f_3$

が考えられる. これらはそれぞれ,

$$f_3 \circ f_4(x) = f_3(2x-1) = -3(2x-1)^2,$$
$$f_4 \circ f_3(x) = f_4(-3x^2) = -6x^2 - 1$$

となる (微分積分学でお馴染みの**合成関数**).

例 5. 全単射 $f : X \to X'$ を考えよう. いま, $x \in X$ に対し

$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = x$$

であるから, $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_X$ である. 一方, $x' \in X'$ に対し

$$f \circ f^{-1}(x') = f(f^{-1}(x')) = x'$$

であるから, $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{X'}$ である.

全射, 単射と合成写像に関して, 次が成り立つ.

命題 5.1.3. X, X', X'' を集合とし, $f : X \to X'$, $g : X' \to X''$ を写像とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) f と g がともに全射ならば, $g \circ f$ も全射.

(2) f と g がともに単射ならば, $g \circ f$ も単射.

(3) f と g がともに全単射ならば, $g \circ f$ も全単射.

(証明) (1) 任意の $x'' \in X''$ に対し, g は全射なので, ある $x' \in X'$ が存在して $g(x') = x''$ である. この $x' \in X'$ に対し, f は全射なので, ある $x \in X$ が存在して $f(x) = x'$ である. このとき

$$g \circ f(x) \overset{\text{定義}}{=} g(f(x)) = g(x') = x''.$$

即ち $g \circ f$ は全射である.

(2) $x_1, x_2 \in X$ に対し,

$$\begin{aligned} g \circ f(x_1) = g \circ f(x_1) \quad &\iff \quad g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \\ &\overset{g\,\text{は単射}}{\Longrightarrow} \quad f(x_1) = f(x_2) \\ &\overset{f\,\text{は単射}}{\Longrightarrow} \quad x_1 = x_2. \end{aligned}$$

即ち $g \circ f$ は単射である.

(3) (1), (2) より明らか. □

例 5 と関連して, 次の命題は, 写像の全射性, 単射性及び全単射性の判定に極めて有効である.

命題 5.1.4. X, X' を集合とし, $f : X \to X'$ を写像とする. このとき, 次が成り立つ.

(1) ある写像 $g : X' \to X$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_X$ が成り立つならば, f は単射.

(2) ある写像 $g : X' \to X$ が存在して $f \circ g = \mathrm{id}_{X'}$ が成り立つならば, f は全射.

(3) ある写像 $g : X' \to X$ が存在して $g \circ f = \mathrm{id}_X,\ f \circ g = \mathrm{id}_{X'}$ が同時に成り立つならば, f は全単射で, 特に $g = f^{-1}$.

(証明) (1) $x_1,\ x_2 \in X$ に対し,

$$\begin{aligned} f(x_1) = f(x_2) \quad &\Longrightarrow \quad g \circ f(x_1) = g \circ f(x_2) \\ &\overset{g \circ f = \mathrm{id}_X}{\Longrightarrow} \quad \mathrm{id}_X(x_1) = \mathrm{id}_X(x_2) \\ &\Longrightarrow \quad x_1 = x_2. \end{aligned}$$

即ち f は単射である.

(2) 任意の $x' \in X'$ に対し, $x = g(x') \in X$ とおくと

$$f(x) = f(g(x')) = f \circ g(x') \overset{f \circ g = \mathrm{id}_{X'}}{=} \mathrm{id}_{X'}(x') = x'.$$

即ち f は全射である.

(3) 仮定より, ある写像 $g : X' \to X$ が存在して,

$$g \circ f = \mathrm{id}_X,\ f \circ g = \mathrm{id}_{X'}$$

が同時に成り立つ. このとき (1), (2) より, f は単射かつ全射となるから, 故に全単射である. 従って f の逆写像 f^{-1} が存在するが, いま, 任意の $x' \in X'$ に対し

$$f(g(x')) = f \circ g(x') = \mathrm{id}_{x'}(x') = x' = f(f^{-1}(x'))$$

となり, f は単射であるから $g(x') = f^{-1}(x')$ である. 即ち $g = f^{-1}$ である. □