

関孝和編『開方翻変之法』の諸写本について*

On manuscripts of *Kaihō Honhen no Hō*
edited by Seki Takakazu

長田直樹 (東京女子大学)

Naoki Osada (Tokyo Woman's Christian University)

1 はじめに

関孝和の自筆稿本は一切発見されてないため、関の数学の研究に当っては、関が出版に直接拘ったと考えられる『発微算法』と『発微算法演段諺解』元巻を除き、写本を用いることになる。その際、関の真作^{*1}か否か、真作である場合には後世の加筆、削除、書き換えなどの改変はないかを調べる必要がある。

関孝和の真作か否かの研究は、藤原松三郎の研究 [21][23] 以降半世紀以上にわたりほとんど進展が見られなかった。『関孝和全集』[18](1974)は藤原の「孝和の著書」[23, pp.18-20]に沿って収録している。『括要算法』巻元に対する改変について藤原松三郎は「なほ單獨の稿本に

塚積術解 関孝和編

がある。これには年紀が缺けてゐるが、括要算法巻元の塚積術解に倍塚の1條が附加されたものである。」[23, p.147]と書き、巻亨の「孫子歌訣」について「『拾遺諸約之法・翦管術解』には載せられてゐない。」と脚注 [23, p.167] でコメントしている。これらは、『括要算法』には荒木村英による改変があったことを暗に指摘していると考えられる。『括要算法』に対する改変について『関孝和全集』はいわゆる穴沢本^{*2}の頭書を詳細に紹介している。

* 本研究は、2015年3月ホテル近鉄アクアヴィラ伊勢志摩で開催された国際研究集会 International Symposium on the History of Mathematics in East Asia における講演 “Transcribed editions of Seki Takakazu's manuscripts” (関孝和の稿本の臨写本) および 2016年3月四日市都ホテルで開催された国際研究集会 The Third International Cooperative Studies on the Scientific Documents in East Asia Featuring Pre-modern Japan における講演 “Transmission of manuscripts of three books(開方翻変之法, 病題明致之法, 題術辯議之法) edited by Seki Takakazu”(関孝和編『開方翻変之法』、『病題明致之法』および『題術辯議之法』の写本の伝播) で一部を発表した。

*1 ここでは、関孝和の真作とは関孝和一人により編集された著作を言う。たとえば、関孝和編『求積』は、関孝和編『解見題之法』に「皆載于其術於別記(皆その術別記に載す)」と「別記」したものが『求積』の原著(未発見)で、建部賢弘が『求積』の原著に手を加え、恐らく1690年頃までに『求積』として出来上がり、関孝和編として写本も作られたと考えられる。[4] 参照。『求積』はほぼそのまま『大成算経』巻之十三となった。要するに、『求積』の内容は関孝和の数学であるが、著作としては関と建部賢弘の共著となるので『求積』を関の真作には含めない。

*2 穴沢長秀旧蔵の『括要算法』を穴沢本という。『関孝和全集』[18, p.220, p.270]によると、穴沢が寛政七(1795)年から寛政十一(1799)年に藤田貞資、藤田嘉言に師事していたとき写し取った頭書に松永良弼と

真作か否か、改変の有無についての研究は今世紀になって本格的に始まった。『関孝和全集』に収録されている著作のうち、『規矩要明算法』『闕疑抄一百問答術』『勿憚改答術』『天文数学雑著』については小林龍彦氏 [2, pp.46-81]、『解見題之法』については小松彦三郎氏 [9]、佐藤賢一氏 [2, pp.37-41]、上野健爾氏 [3]、および筆者 [5] の研究や問題提起がある。『求積』『開方算式』『毬鬩変形草』については佐藤賢一氏 [10, p.314] が問題提起している。特に『求積』については筆者 [4] の研究がある。

原書の臨写本^{*3}あるいはそれに近い写本が見つければ、真作か否かの問題は肯定的に解決され、改変は臨写本と照合することにより解明できる。本論文では、貞享二 (1685) 年重訂の関孝和編『開方翻變之法』の諸写本を考察する。まず、早稲田大学小倉文庫所蔵の『開方翻變之法』の写本 (イ 16-228) は臨写本に近い^{*4}ことを明らかにする。

次いで東北大学^{*5}と国文学研究資料館^{*6} のデータベースと日本学士院の蔵書目録 [15] により『開方翻變之法』の諸写本は内題を「開方翻變之法」あるいは「開方翻變法」とするものと「開方翻變五條」とする 2 系統に分かれることを述べる。そして、小倉文庫イ 16-228 を手がかりに 2 系統の相違点、共通点を調べ、内題を「開方翻變五條」とする系統は 18 世紀前半に意図的に改変されたものであることを示す。意図的に改変された箇所については、改変された理由や数学的な意味を検討する。

改変を受けてない『開方翻變之法』の写本は 14 点確認できた。国内にある 13 点を調査する。意図的な改変を受けた『開方翻變之法』諸写本には祖本^{*7}

藤田貞資による訂正が書かれている。なお、『括要算法』巻元 (学士院 319) にも同様の頭書がある。

^{*3} 臨写本 (模写本ともいう) とは、親本を見ながら字形、字配り (半丁の行数、1 行の文字数)、図を忠実に写した写本をいう。和算の場合、訓点、頭書および朱墨と黒墨の別も忠実に写す。臨写本にも字体の変化や誤写はあり得るので、原書復元には数学的内容の点検や他の写本との校合は欠かせない。

転写 (写本を転写すること) のレベルについて落合博志氏の説明が参考になる。「転写には、影写や臨写のように親本の字形まで正確に写したのも、字形は継承しないが字配りや字の大小は親本通りにしたもの、字配り等は変えるが表記 (文字遣い) は親本通りとするもの、言葉は変えないが表記を改めるものなど、親本に対する忠実さにおいてさまざまなレベルがある。一方転写に際して本文の改変や省略・増補が行われることもしばしばあり、また書写態度にかかわらず、多かれ少なかれ誤写は免れない。現存する写本のほとんどは後人の写しであり、遑れば著者の関与したいずれかの写本に発するとしても、伝写過程において誤写や混態・改竄などを蒙っている可能性が考えられる。」『写本の書誌における諸問題』 (<https://www.nijl.ac.jp/pages/event/seminar/images/H26-kotenseki02.pdf>)

^{*4} 2015 年 3 月の講演 “Transcribed editions of Seki Takakazu’s manuscripts” (関孝和の稿本の臨写本) では、小倉文庫イ 16-228 を臨写本として発表した。しかしながら、小倉文庫本は字配り、訓点、朱墨と黒墨の別は原書通りであると考えられるが、字形は異なり、字体 (たとえば、数と数、乗と乗) も一部原書と異なっていると思われる。落合氏の転写レベルで言うと「字形は継承しないが字配りや字の大小は親本通り」というところか。

^{*5} 東北大学和算資料データベース

http://dbr.library.tohoku.ac.jp/infolib/meta_pub/CsvDefault.exe は、東北大学図書館が所蔵する膨大な和算資料のデータベースである。画像が公開されているものは画像にリンクが貼られている。

^{*6} 国文学研究資料館の日本古典籍総合目録データベース

http://base1.nijl.ac.jp/infolib/meta_pub/CsvDefault.exe は「『国書総目録』 (岩波書店刊) の継承・発展を目指して構築した、いわば『新国書総目録』ともいべきもので、古典籍の書誌・所在情報を著作及び著者の典拠情報とともに提供」している。

^{*7} 祖本とは写本系統学の用語で、写本の系統の基になった本をいう。(【】内にはデータ構造の用語もつける。) 写本の転写による伝播は写本系統樹【木】で表すことができる。(校合された写本の場合は複数の親本【親】を持つことになり厳密な意味での系統樹【木】ではないが、底本とした写本を親とすることにより木と看做す。)『開方翻變之法』の場合は単一の共通祖先【根】、すなわち関が重訂した原書、を持つ系統樹【根付き木】と考えられる。本論文では、『開方翻變之法』の写本系統樹の写本【ノード、節点】の中

の存在が推定できる。意図的改変を受けた諸写本 20 点を調査する。

林窓庵(有馬頼^{よりゆき}権)述『開方蘊^{うんおう}奥』(学士院 904、延享四(1747)年)、清原(石井)雅^{がえい}穎解『開方翻^{よしとき}変五^{しげよし}条』(東北大学岡本写 172、安永二(1773)年)、藤田嘉言解『開方翻^{よしとき}変五^{しげよし}条』(東北大学林集書 184、文化八(1811)年)、および梅村重^{しげよし}得考『開方翻^{よしとき}変五^{しげよし}条諺解』(林集書 484、安政二(1855)年)など江戸時代のほとんど*8 の『開方翻^{よしとき}変之法』の解説本は流布本、すなわち意図的に改変された写本、に基づいている。20 世紀以降では加藤平左衛門『関孝和編 開方翻^{よしとき}変ノ研究』[6]、藤原松三郎『明治前日本数学史』第二巻 [23] など先行研究のいくつかは流布本に基づき、林鶴一『和算ニ於ケル方程式論ニ就テ』[16] も流布本に挿入された割注に基づいている箇所がある。20 世紀に出版された『関流算法七部書』[13] (東京数学物理学会、1907)、『開方翻^{よしとき}変』[11] (澤村写本堂、1934) の底本はいずれも流布本である。また、平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編『関孝和全集』[18] は流布本の(後世に挿入された)割注や(後世に書き換えられた)諸級之数が取り入れられている。

小倉文庫イ 16-228 が再発見されるまで、伊勢神宮の神宮文庫(旧林崎文庫)に齋藤信^{のぶよし}芳が奉納した『開方翻^{よしとき}変之法』の写本が最良と考えられていた。この写本には、書写奥書に「元禄十一(1698)戊寅臘月十一日傳寫」と記されている。齋藤へ伝わった経路を考察し、さらに神宮文庫の写本を小倉文庫イ 16-228 と比較することにより、神宮文庫本は元禄十一年伝写本ではなく、後世の重写本である可能性が極めて高いことを明らかにする。

引用、写本の内題と編者名、文献目録の著者名と書名は可能な限り原文に合わせる。漢文につけた読み下し文は旧仮名使いによる。また、本文における固有名詞や書名は現代表記する。引用文の中の()内は筆者による説明である。固有名詞のルビは便宜上つけたもので、同時代の資料で確認できたわけではない。

2 『開方翻^{よしとき}変之法』(小倉文庫イ 16-228)

2010 年 7 月筆者は『開方翻^{よしとき}変之法』の極めて良好な写本を早稲田大学図書館にて再発見した。小倉文庫イ 16-228 である。内題と編者名は

開方翻^{よしとき}變之法凡五條 關孝和編 印

年紀は

貞享乙丑仲冬十三日重訂

である。書写奥書は

貞享乙丑十一月十九日襲写之矣

久留氏平重孫 花押

で小倉文庫本、《開方翻^{よしとき}變五條》の祖本、および神宮文庫本という 3 つの特定の写本【ノード】の子孫写本【真部分本】を考察する。《開方翻^{よしとき}變五條》の祖本の子孫写本【真部分本】、すなわち内題を「開方翻^{よしとき}變五條」とする写本群に《開方翻^{よしとき}變五條》、それ以外を《開方翻^{よしとき}變之法》と命名する。写本系統学については三中信宏氏「文化系統学と系統樹思考」[14, pp.171-199] が参考になる。写本系統学のケーススタディである山田葵治氏「『百鬼夜行絵巻』写本の系統」[14, pp.17-34] は刺激的である。

*8 例外として、入江脩保叔(入江脩敬)編『一源活法』(学士院 6、宝暦十(1760)年)子集「其一驗商有無」では、割注「乃有異名級多則以上級為主」の代わりに「若夫異名級多則以最上級為主」[1, p.375] とし、例題は $-2 + x + x^2 = 0$ を取り上げているので、改変されていない『開方翻^{よしとき}變之法』を参照していることが分かる。

となっている。仲冬十三日は十一月十三日であるので、重訂の六日後に書写されたことになる。さらに旧蔵者小倉金之助*9 の識語がある。

この寫本は関孝和の高弟久留重孫の自筆にかゝる。巻頭関孝和の名のところにある朱印は、関自身の印である。

昭和十五年三月 小倉金之助印

以下、小倉文庫イ 16-228 を小倉文庫本と呼ぶことにする。

先ず小倉金之助識語「巻頭関孝和の名のところにある朱印は、関自身の印である。」の真偽を検討する。関孝和編『角法并演段図』（東北大学平山文庫 MA/387、天和三（1683）年）にも朱印が押されているのでこれとの比較を行なう。図 1 に小倉文庫『開方翻變之法』

と平山文庫『角法并演段図』*10 の朱印を示す。和孝を小篆で書いてあり、同一の印と考えられる。建部賢弘編『研幾算法』（天和三年、刊本）の関孝和による跋文に押された印

（図 2）は同じ書体で之孝印和である。

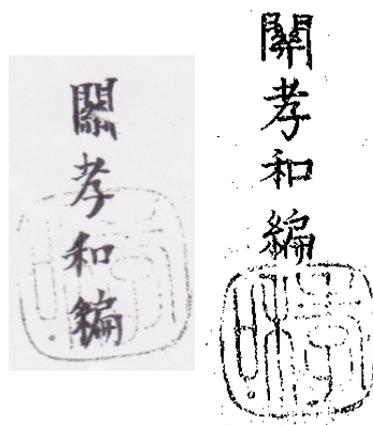


図 1 関孝和の印（左：『開方翻變之法』小倉文庫本、右：『角法并演段図』平山文庫本）

小倉文庫本『開方翻變之法』は関孝和が重訂してから 6 日後に書写されているので、関が押印したか、関に代わり誰かが押印したか、あるいは転写者の久留重孫*11 が関から借

*9 小倉金之助 (1885-1962) は数学者、数学史家、数学教育者である。小倉が 1957 年に早稲田大学図書館に譲渡した和算書、中国算書、天文、暦法、測量など 3159 冊は現在小倉文庫として中央図書館 4 階貴重書庫に配架されている。インターネットでの影印の公開が待たれる。WINE - Waseda University Library Catalog http://wine.wul.waseda.ac.jp/search*jpn/t で検索可能である。

*10 東北大学平山文庫 MA/387 が東北大学で所蔵されている経緯について藤原松三郎は次のように記している。「関孝和二百年祭ノ時、名古屋ノ某氏カラ提出サレタ孝和ノ著書數篇ハ中村清二博士カラ委託サレテ現在東北帝大數學教室ニ保管シテキルガ、其内ノ一ツ、角法并演段圖ニハ関孝和編トアル下ニ孝和ノ朱印ガオサレテキル。」[21, p.203]

*11 久留重孫の経歴は不詳である。弟子に『円理発起』（岡本写 67、享保十三（1728）年）の著者蜂屋定章がいる。蜂谷は『円理発起』の自序において「予遊関子之高弟久留重孫之門下棲心於圓中爰有年焉頃竊推考賢弘之意於是作為此書欲令好算學之士明悟（予関子之高弟久留重孫之門下に遊びて、心を円中に棲ますことここに年有りこの頃ひそかに賢弘の意を推考す。ここに於いて此の書を作為して算学を好むの士を悟らしめんと欲して）」と記している。また、蜂屋は『授時曆月行遲疾一周之弁』（藤原集書 85、元文三（1738）



図2 『研幾算法』に押された関孝和の印 (東北大学狩野文庫 7.20048.1)

りて押印したと考えられる。平山文庫『角法并演段図』も同様のことが言える。

平山文庫『角法并演段図』の朱印について藤原松三郎は「角法并演段圖ニハ關孝和編トアル下ニ孝和ノ朱印ガオサレテキル。(中略)果シテ之ガ孝和ノ眞ノ印デアルカドウカ、ソノ點ニ關シテハ一向判然シナイ」[21, p.203]と書いているが、小倉金之助が小倉文庫本について発表していなかったため「判然シナイ」はやむを得ないだろう。

3 『開方翻變之法』の2系統の写本群

本節以降、開方式(方程式)の算木を用いた表現に対しては、現代数学の記号と用語を適宜用いる。

3.1 《開方翻變之法》と《開方翻變五條》の相違点

『開方翻變之法』の写本の影印は東北大学和算資料データベースで19点公開され、写本の書誌事項は学士院の所蔵目録[15]に16点記載され、国文学研究資料館の日本古典籍総合データベース*12に22点収録されている。それらの写本は、2つの系統に分類できる。字体を区別しなければ、1つは内題を「開方翻變之法」あるいは「開方翻變法」とするもの、もう1つは「開方翻變五條」とするものである。以下では2系統を区別するときは前者の書名を《開方翻變之法》、後者の書名を《開方翻變五條》とし、区別しないときは通例にしたがい『開方翻變之法』を用いる。

2系統の写本で表現の異なっているところを表1に示す。前者の表現は小倉文庫イ16-228、後者の表現は関算前伝第九十(戸板保佑^{やすすけ}自筆)[17]と東北大学林文庫2312(中村主税^{ちから}旧蔵書)を校合*13して用いる。相違点の場所は小倉文庫(インターネットで影印が公開されている岡本写17も場所は同一)を用いる

これらの相違点のうち意図的改変の可能性のあるのは、

年)の著者奥書に於いて「數學關孝和高弟武江久留道龜門人俗名蜂屋小十郎定章淡山尚綱」と記している。これらのことから、久留重孫は関孝和の高弟であり、武江の人で字あるいは号を道龜と称したことが分かる。蜂屋定章について横塚啓之氏[25, 26]が参考になる。

*12 内訳は(1)統一書名「開方翻變之法」が5点、(2)統一書名「開方翻變」(別書名「開方翻變五條」)が11点、(3)統一書名「開方翻變法」が4点、(4)統一書名「開方翻變/并解見題/私註」1点、(5)統一書名「毬鬩変形草解并開方翻變」1点である。

*13 小倉文庫本と関算前伝第九十が異なる箇所を取り上げる。ただし、小倉文庫本と林文庫2312が一致している場合は関算前伝第九十の誤写と見なし取り上げない。数と数のような書体の違いは無視する。

表 1 《開方翻變之法》と《開方翻變五條》の相違点

内題	開方翻變之法	開方翻變五條
編者名	關孝和編	記載無し
1 丁表割注	乃無商式者限于隻級	乃無商式者局于隻級也
1 丁表割注	乃平方式者從方立方式者從廉三乘方式者下廉也餘倣之	乃平方式者從方立方式者從上廉三乘方式者下廉也餘倣之
1 丁裏割注	若至其級而不能開盡者爲无商也	若至其級而不能開盡者無商也
4 丁表割注	乃有異名級多則以上級爲主	如異名二級已上者以上級爲主
4 丁表	$-2 + x + x^2 = 0$ (現代表記)	$-2 + x + x^2 = 0$ (現代表記)
5 丁裏	(図 3 左)	(図 3 右)
6 丁表	一式	記載無し
7 丁表	一式	記載無し
7 丁表	二式	記載無し
9 丁裏割注	無商者不能替数也	無商者不能替数
9 丁裏	以上者原商無之	以上原商無之
11 丁裏	得負八箇七分七釐七毫七絲七八弱	得負商
12 丁表	三乘方式以上倣之	三乘方式以上倣之
13 丁裏割注	割注無し	所謂無商者言無正商也
卷末	開方翻變之法終	開方翻變畢
年紀	貞享乙丑仲冬十三日重訂	記載無し

1. 内題の「開方翻變之法」を「開方翻變五條」に改変
2. 編者名を削除
3. 一丁表割注(分註ともいう)の「廉」を「上廉」に改変
4. 四丁表割注「乃有異名級多則以上級爲主」を「如異名二級已上者以上級爲主」に改変
5. 諸級之数：図 3 左を図 3 右に改変
6. 十三丁裏に割注「所謂無商者言無正商也」を挿入
7. 卷末の「開方翻變之法終」を「開方翻變畢」に改変
8. 年紀「貞享乙丑仲冬十三日重訂」を削除

である。重要な相違点を以下で解説する。

3.2 内題と卷末

翻と翻は同字であるが、関孝和が参照した中国の算書には翻が使われている。関が訂写した『楊輝算法』田畝比類乗除捷法には「翻積術」「翻法」が用いられ、『算学啓蒙』開方釋鎖門に「平方翻法開之」がある。建部賢弘は『算学啓蒙諺解大成』(元禄三(1690)年、刊本)において「翻法ハヒルカヘルヲ云フナリ商ヲ開キ出ス内ニ實カ方カ衆ノ廉ノ中ニ正変

シテ負トナルカ負ヘンジテ正トナルカヲ翻法ト云フ」下十七丁表と解している。したがって関は翻を用いたのである。内題「開方翻變之法」を「開方翻變五條」に書き換えた和算家、恐らくは《開方翻變五條》の祖本の編者、は「亦復又」の使い方(表2参照)などでは親本に忠実であるので、翻を翻に置き換えたのは、翻が許慎記『説文解字』で異体字とされている^{*14}ことによるのかもしれない。

内題を替えたことに合わせ巻末の「開方翻變之法終」を「開方翻變畢」に改変したと考えられるが、終を畢に変えた理由は不明である。

3.3 限と局

一丁表割注の限と局の送り仮名はそれぞれ「限ル」と「局ル」となっている。「限ル」はかぎるであるが、「局ル」は「せぐくまる」としか読めず意味が通じない。誤用と考えられる。

限と局は音が異なり字形も似てないので誤写などで入れ替わることは先ずなく、しかも一丁表にあるので、内題が「開方翻變之法」などのとき《開方翻變之法》か《開方翻變五條》かの指標に利用できる。

3.4 廉と上廉

《開方翻變之法》の「立方方式從廉」が《開方翻變五條》では「立方方式從上廉」となっている。関孝和は『開方翻變之法』適尽諸級第三において立方適尽方級法を導くところで前式を

實
方
廉
隅

と書いている。現代的に表すと

$$(実) + (方)x + (廉)x^2 + (隅)x^3 = 0$$

となるので、隅上級(n 次式の $n-1$ 次の項)の係数は廉であり、上廉ではない。三乗方式(4次方程式)は

$$(実) + (方)x + (上廉)x^2 + (下廉)x^3 + (隅)x^4 = 0$$

であるので、隅上級は下廉である。

《開方翻變五條》祖本の編者は、「立方方式從廉三乗方式者下廉」に引きずられたのかもしれない。

^{*14} 『説文解字』(AD100頃)は中国最初の字書である。『説文解字』[8] 第四上の見出し字「翻」に「飛也从羽番聲或从飛孚袁切」とあり、佐藤進・濱口富士雄編『全訳漢辞海』第三版(三省堂)は「飛ぶ。「羽」から構成され、「番」が音。異体字は「飛」から構成される。」(p.1134)と現代語訳を与えている。

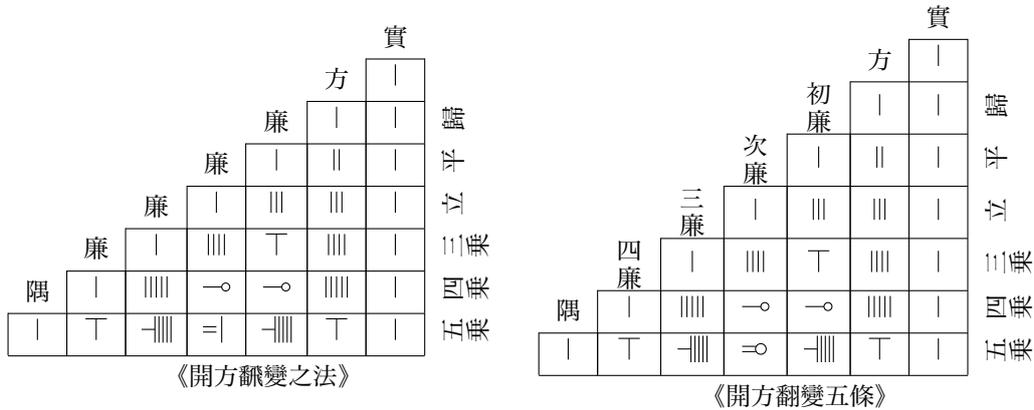


図3 諸級之数 (両者とも算木は正を表す朱が用いられている。)

3.5 諸級之数

《開方翻變之法》と《開方翻變五條》の違いが一目で分かるのが適尽諸級第三の諸級之数である。両者を図3に示す。

与えられた開方式 (方程式)

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n = 0$$

じつぎょう
を実行、

$$xf'(x) = a_1x + 2a_2x^2 + \dots + na_nx^n = 0$$

を方行、

$$\frac{1}{2!}x^2f''(x) = a_2x^2 + 3a_3x^3 + \dots + \frac{n(n-1)}{2}a_nx^n = 0$$

を初廉行、

$$\frac{1}{3!}x^3f'''(x) = a_3x^3 + 4a_4x^4 + \dots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a_nx^n = 0$$

を次廉行という。各行は原方程式の係数に二項係数が掛かっており、二項係数が諸級之数である。「諸級之数者如衰塚術求之 (諸級之数は衰塚の術の如く之を求む)」と書き、パスカルの三角形を右寄せした図が載せてある。

《開方翻變之法》の $\binom{6}{3} = 21$ となっている誤りを《開方翻變五條》では $\binom{6}{3} = 20$ と訂正している。また、《開方翻變之法》の4つある廉を《開方翻變五條》では初廉、次廉、三廉、四廉と変更している。誤りを訂正し説明を詳しくしているのであるが、関の原書とは異なったものになっている。

3.6 無正商

《開方翻變五條》の末尾 (視商極数第五の2つ目の例題) に挿入された割注「所謂無商者言無正商也 (いわゆる商無しは正商無しをいうなり)」について検討する。《開方翻變之法》

である。関は $\tilde{D} = 0$ の商正四を原式の実級と置き換えた式 $4 - 7x + 2x^2 + x^3 = 0$ [替実数得式] の商を求めるのに方級 $-7 + 4x + 3x^2 = 0$ を開いて*17 正商一を求めている。正一が商の極数である。

方数 $24 + bx + 2x^2 + x^3 = 0$ ($b < 0$) が 3 実根を持つための必要十分条件は $b < 0$ かつ $\tilde{D} = 4b^3 - 4b^2 - 864b + 16320 = 4(b+20)(b^2 - 21b + 204) \leq 0$ より $b \leq -20$ である。 $24 - 20x + 2x^2 + x^3 = 0$ の商は方級 $-20 + 4x + 3x^2 = (3x + 10)(x - 2) = 0$ の商正二である。正二が商の極数である。

廉数 $24 - 7x + cx^2 + x^3 = 0$ ($c > 0$) が 3 実根を持つための必要十分条件は $c > 0$ かつ $\tilde{D} = 96c^3 - 49c^2 + 3024c + 14180 = (3c + 10)(32c^2 - 123c + 1418) \leq 0$ のときである。 $(\tilde{D} \leq 0$ は正の範囲に解を持たない。) 原式の廉数を $\tilde{D} = 0$ の商 $c = -10/3$ に替えると符号が原式と異なるのでこれは用いないため、商の極数はない。

偶数 $24 - 7x + 2x^2 + dx^3 = 0$ ($d > 0$) が 3 実根を持つための必要十分条件は $\tilde{D} = 15552d^2 + 4676d + 572 \leq 0$ である。 $\tilde{D} = 0$ は $4676^2 - 4 \times 15552 \times 572 = -13718000 < 0$ より無商式となり、偶数をかえることはできない。

《開方翻變五條》では、「又替偶数則得無商式故不能替偶数也 (又偶数を替へるときはすなわち無商式を得る故に、偶数を替へること能はずなり。)」に割注「所謂無商者言無正商也」が挿入されている。「替偶数則得無商式」は原式が無商式であるようにも取れるが、廉数についての文と偶数についての文は同じ構文であることに着目すると、「替廉数則異名故不用之 (廉数を替へるときはすなわち異名なる故これを用ゐず)」は適尽方級法の商が異名であることを述べていることより、「替偶数則得無商式」は適尽方級法が無商式であることを述べていると解釈するのが関の主張に沿っていると考えられる。さらに、諸級替数第四の冒頭に「依驗商有無法視有異名級而立天元一爲所替各級數隨適盡其級法得式開除之得商 [割注の前半略] ○無商者不能替數也

(驗商有無法に依りて異名有る級を視る。而して天元の一を立て替へる所の各級数となす。適盡其級法に隨い式を得てこれを開除し商を得る。[割注の前半略] 無商なる者は数を替へること能はず也」とあることから適尽方級法が無商式ということになる。

《開方翻變五條》祖本の編者は「原式が無商式」と解釈し割注を挿入したのであろう。

に対し判別式を $D = -27a_0^2a_3^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 + 18a_0a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2$ とすると、

1. $D > 0$ のとき、3 つの異なる実根を持つ。
2. $D < 0$ のとき、1 つ実根と 2 つの互いに共役な複素数根を持つ。
3. $D = 0$ のとき 3 実根を持ち、少なくとも 2 つは等しい。

が成り立つ。証明は [20, p.439] などを見よ。

*17 原式の係数を適尽方級法の商 (判別式の零点) で置き換えると原式は重根を持つ。重根は原式の方級 (導関数) との共通根であるので原式を開く代わりに方級を開いている。エレガントな方法である。

表 2 『開方翻變之法』「諸級替数」の文頭の「また」の文字

先頭の文字の列	《開方翻變之法》	《開方翻變五條》
亦復又復亦又 (左から右へ)	小倉文庫本、神宮文庫本、岡本写 18、越国文庫、林集書 654	関算前伝 90、桑木 678、林文庫 836、林文庫 840、林文庫 841、林 文庫 842、林文庫 843、林文庫 2313、下平文庫 663、学士院 140、 学士院 142、学士院 144、学士院 467
亦復又復亦亦		林文庫 839
亦復又又又又	林文庫 838	
又又又又亦又	岡本写 17(亦の頭書に「亦當作又」 とある)	
又又又又又又	林文庫 835、学士院 147	林文庫 834、学士院 141
復復又復復復		林集書 183
又復又復亦又		学士院 143
又復又復又又		林集書 1336
亦亦又又又又		学士院 511

4 《開方翻變之法》と《開方翻變五條》の共通点

4.1 亦復又

小倉文庫本の『開方翻變之法』諸級替数において「立天元一」が繰り返される場所で復、又、亦が使い分けられている。同じ文字が続かないように3種の文字を用いていると考えられる。

又立天元一爲偶數 ○ 	亦立天元一爲廉數 ○ 	復立天元一爲方數 ○ 	立天元一爲實數 ○ 	又原式立方 	復立天元一爲廉數 ○ 	亦立天元一爲方數 ○ 	立天元一爲實數 ○ 	假如原式平方
-------------------	-------------------	-------------------	------------------	------------------	-------------------	-------------------	------------------	-------------------

表 2 に《開方翻變之法》と《開方翻變五條》に分け、写本別の復、又、亦の使い分けを示す。小倉文庫本や岡本写 18 では復は図 4 を用いているが、この字体が使えないので復を用いる。

表 2 より、《開方翻變五條》の祖本は意図的に改変した箇所を除いては親本の文字を

復

図 4 復の異体字 (岡本写 18)

忠実に写していることが分かる。また、関流の和算家が書写する場合、通常は親本の文字を忠実に転写している。

《開方翻變之法》で文字が変化した林文庫 838 は中島尚翼^{なおすけ}(1752-1813) 自筆であるので 18 世紀後半から 19 世紀初めにかけての写本である。岡本写 17 は書写奥書から文化二(1805) 年の [あるいは文化二年写本を祖本とする] 写本である。文字が変化している写本は 19 世紀に書写されたものが多いと言えるだろう。

4.2 訓点

冒頭の文の比較から始める。比較のため神宮文庫本、岡本写 18 も取り上げる。なお 5.2 節で比較に取り上げる岡本写 17 には送り仮名が省かれているので取り上げない。

小倉文庫本	神宮文庫本	岡本写 18	関算前伝第九十
凡 _レ 開 _レ 方 _レ 式 _レ 有 _二 全 _レ 變 _レ 交 _レ 無 _レ 之 _一 四 _レ 商 _レ 也	凡 _レ 開 _レ 方 _レ 式 _レ 有 _二 全 _レ 變 _レ 交 _レ 無 _レ 之 _一 四 _レ 商 _レ 也	凡 _レ 開 _レ 方 _レ 式 _レ 有 _二 全 _レ 變 _レ 交 _レ 無 _レ 之 _一 四 _レ 商 _レ 也	凡 _レ 開 _レ 方 _レ 式 _レ 有 _二 全 _レ 變 _レ 交 _レ 無 _レ 之 _一 四 _レ 商 _レ 也

冒頭の文は小倉文庫本と関算前伝第九十が完全に一致しており、関算前伝第九十は小倉文庫本を祖本としてないので、両書の冒頭の文は原書の冒頭の文に一致していると考えられる。したがって、原書には訓点が施されており、小倉文庫本の書写者久留重孫および関算前伝第九十の書写者戸板保佑は文字の使い方や、訓点について親本を忠実に書写していることが分かる。神宮文庫本と岡本写 18 が一致し両者が小倉文庫本にある「凡_レ」の送り仮名がない理由は 5.2 節で明らかになる。

小倉文庫本と関算前伝第九十の訓点が異なるため読み下し方も異なる箇所例として、交商式の定義を取り上げる。

小倉文庫本	神宮文庫本	岡本写 18	関算前伝第九十
開 出 ノ 商 正 負 相 ヒ 交 ハ ル 者 謂 之 交 商 式 也	開 出 ス ル ニ 商 正 負 相 交 ル 者 謂 之 交 商 式 也	開 出 ル ニ 商 正 負 相 交 ル 者 謂 之 交 商 式 也	開 出 商 正 負 相 交 ル 者 謂 之 交 商 式 也

小倉文庫本は「開出ノ商正負相ヒ交ハルハ之ヲ交商式ト謂フ也」であるのに対し、神宮文庫本と岡本写 18 は「商ヲ開出(ス)ルニ正負相ヒ交ルハ之ヲ交商式ト謂フ也」であり、関算前伝第九十は「商正負相ヒ交ハルヲ開出スル者ハ之ヲ交商式ト謂フ也」となる。数学上の意味は四者とも同じである。

5 《開方翻變之法》諸写本

5.1 《開方翻變之法》の所在目録

《開方翻變之法》の所在目録を表 3 に示す。《開方翻變之法》は《開方翻變五條》に比べると数は少なく*18、《開方翻變五條》が流布本である。

變の左の糸を二水、右の糸を二水の鏡像で置き換えた異体字(図 5)が 3 つの写本で用いられている。この異体字の字体がないので $\text{\textcircled{變}}$ で表す。



図 5 變の異体字(林文庫 841)

變の 2 カ所の糸が糸頭になっている異体字(図 6)が 2 つの写本で用いられている。この異体字の字体がないので $\text{\textcircled{變}}$ で表す。異体字を区別することにより写本の伝播経路が明らかになることがある。

5.2 《開方翻變之法》の比較

朱墨を用い、本奥書に貞享乙丑の年紀が書かれている《開方翻變之法》の 4 つの写本、小倉文庫本、神宮文庫本、岡本写 17、岡本写 18 の比較を表 4 に示す。神宮文庫本は撮影

*18 東北大学図書館の和算資料データベースでは《開方翻變之法》が 5 点、《開方翻變五條》が 15 点ある。



図 6 變の異体字 (岡本写 18)

表 3 《開方翻變之法》所在目録

所蔵館	請求番号	備考(「開方翻變之法」と異なる内題、奥書、寄贈者など)
早稲田大	小倉文庫イ 16-228	貞享乙丑仲冬十三日重訂/ 貞享乙丑十一月十九日龔写之矣久留氏平重孫
神宮文庫		貞享乙丑仲冬十三日重訂/元禄十一戊寅臘月十一日傳寫
東北大	岡本写 17	貞享乙丑仲冬日重訂/ 文化二乙丑年仲夏日華峰仲徳採集於出羽國村山郡柴橋宦廳
東北大	岡本写 18	内題「開方翻(變)之法」、貞享乙丑仲冬十三日重訂
東北大	林集書 654	内題「開方翻變之法」、貞享乙丑仲冬十三日重訂
東北大	林文庫 835	内題「開方翻變之法」
東北大	林文庫 838	内題「開方翻變法」、「凡五條」なし、中島尚翼自筆
九州大	桑木 682	細井印、年紀無し
学士院	146	「開方翻(變)之法」、大正元年十二月遠藤利貞蔵書ヨリ写記
学士院	147	「開方翻(變)之法」、遠藤利貞旧蔵
学士院	148	「開方翻變法」、湯川孫兵衛寄贈、適尽諸級第三まで
学士院	507	「開方翻(變)之法」、「關子七部書開方翻變一」、貞享乙丑仲冬十三日重訂、伊藤安吉寄贈
福井市図	理 20	内題「開方翻(變)之法」、貞享乙丑仲冬十三日重訂、越国文庫コレクション
米国議会図書館 [24]	IN:1257.6 /LCCN:432830	高井計之助旧蔵 [12]、未調査

および複写が認められなかったこと、一丁表以外は影印を見ることができないことにより半丁の行数を確認できなかった。

4つの写本で異なるのが一丁表の最初の割注である。小倉文庫本と岡本写 17 は「乃無商式者限于隻級」に続く本文が「也○」であるのに対し、神宮文庫本と岡本写 18 は「也」がなく「○」だけである。

小倉文庫本と岡本写 17 の配字がほぼ同一で、印の傾き加減は非常に似ており、一丁表の割注は同一であるので、岡本写 17 の祖本は小倉文庫本と考えられる。神宮文庫本と岡本写 18 は内題に○がついており、一丁表に関する限り訓点の付け方と配字がほぼ同一で、最初の割注の後に「也」が抜けている。これらのことより岡本写 18 の祖本は元禄十一年

表 4 小倉文庫本、神宮文庫本、岡本写 17、岡本写 18 の比較

	小倉文庫本	神宮文庫本	岡本写 17	岡本写 18
内題	開方翻變之法	○開方翻變之法	開方翻變之法	○開方翻變之法
凡五條	有り	有り	有り	有り
編者名	關孝和編	關孝和編	關孝和編	關孝和編
朱印	有り	なし	模写	なし
年紀	有り	有り	有り	有り
書写奥書	有り	有り	有り	なし
訓点	有り	有り	なし	有り
朱墨	使用	使用	使用	使用
半丁の行数	10 行	—	10 行	10 行
1 行文字数	18 字	18 字	18 字	18 字

伝写本と考えられる。神宮文庫本は小倉文庫本と相当異なるので、神宮文庫本が元禄十一年伝写本と異なる可能性は高い。その場合神宮文庫本と岡本写 18 の共通の祖本は元禄十一年伝写本である。

6 『開方翻變之法』(神宮文庫)

小倉文庫本に次いで古い年紀の書写奥書のある写本は、伊勢神宮の神宮文庫(旧林崎文庫)の『開方翻變之法』である。書写奥書に「元禄十一(1698)戊寅臘月十一日傳寫」と記されており、さらに「寛政元(1787)年己酉春三河国吉田城府 齋藤九郎左衛門信芳」とある。一丁表の影印は『関孝和全集』[18]の口絵 p.9 に掲載されている。

神宮文庫には関孝和の写本 6 部『解伏題之法』、『開方翻變之法』、『題術辯議之法』、『八法略訣』、『授時曆經立成』、『授時曆經立成之法』が寛政元年に齋藤九郎左衛門信芳により奉納されている。齋藤信芳は『授時曆經立成之法』の識語に

授時曆經立成四策者関孝和子之所手書師傅藏于茅廬焉今他関家手書之算書五部共合納上林崎文庫以期不朽矣(授時曆經立成の四策は関孝和子の手書の所、師伝蔵茅の庵、今他の関家の手書の算書五部と共に合わせ林崎文庫に納上、以って不朽を期す)寛政元年三月 三河国吉田城府齋藤九郎左衛門信芳

[18, 口絵 p.15]

と書いている。6 部はすべて同筆(藤原松三郎「余の和算史研究」[22])であるので、関孝和の「手書」ではない。

「師伝」の師は齋藤信芳が天明四(1784)年岩瀬久米吉に発行した免許状(平山諦・内藤淳編集『松永良弼』[19]口絵)で迎れる。免許は

寺内良弼 ⇒ 西塚重勝 ⇒ 葛谷實順 ⇒ 眞木明雅 ⇒ 齋藤信芳

と伝えられた。松永良弼^{*19}ではなく寺内良弼であるので、西塚への免許発行は享保元(1716)年以前である。数学者として出発したばかりの松永が西塚に原本を渡すことはほとんどあり得ない。5.2 節の最後の段落で述べたことと合わせると、神宮文庫本は元禄十一年伝写本の転写本^{*20}の可能性が極めて高い。したがって、神宮文庫と同時に奉納された諸写本も西塚重勝あるいは葛谷實順^{くずやじつじゆん}による転写本の可能性が極めて高い。

7 《開方翻變五條》の成立時期

《開方翻變五條》の諸写本には内題、一丁表の割注の「乃無商式者限于隻級」が「乃無商式者局于隻級也」になるなどの共通の特徴がある。したがって、親本を辿っていくと共通の祖本に行きつくと考えられる。

現時点で祖本にたどり着くことは出来ないが林窓庵(有馬頼鐘)述『開方蘊奥』^{うんおう}(延享四(1747)年)第十二視商極数之法に「所謂無商者言無正商也」と《開方翻變五條》からの引用がある。したがって、《開方翻變五條》は1747年以前に作られたことが分かる。

8 《開方翻變五條》に基づく誤読

表1から見て取れるように、《開方翻變五條》は改変されているので、関の数学を研究するには《開方翻變之法》のみに基づくべきである。《開方翻變五條》に基づいたため誤読した例を取り上げる。

8.1 驗商有無の第一例

《開方翻變之法》	《開方翻變五條》
假如原式平方 卅 假立正商一筭從廉命之至實級而布之 原廉 與原式實異名故正商有之 假立負商一筭從廉命之至實級而布之 原廉 與原式實異名故負商有之	假如原式平方 卅 假立正商一筭從廉命之至實級而布之 原廉 與原式實異名故正商有之 假立負商一筭從廉命之至實級而布之 原廉 與原式實異名故負商有之

^{*19} 松永良弼は享保元(1716)年陰曆十月までは寺内良弼を名乗っていた。享保二(1717)年陰曆三月には松永良弼を名乗っている。松永良弼の生年は不詳であるが、松永が寛保三(1743)年に久留島義太に送った[23, pp.452-454]『古人書簡』(岡本写 1019)により推定できる。『古人書簡』に「今歳己に五十」とあるので、元禄七(1694)年生まれとなる。1716年は数え年23歳(満22歳)である。

^{*20} 底本が写本である写本を転写本と呼ぶ。注*3を参照。

「假立正商一算從廉命之至實級而布之 (仮に正商一算を立て廉よりこれを命じ實級に至りてこれを布く)」とある。《開方翻變之法》では原式の廉は 1 なので一算を掛けて^原廉と置いていると判断できる。一方、《開方翻變五條》では原式の廉は 2 にも拘らず^原廉と置いているので、「假立正商一算從廉命之 (仮に正商一算を立て廉よりこれを命じ)」と合致しない。《開方翻變五條》の系統の写本を参照した和算家や数学史家は、原式の隅が正であれば隅から実まですべて +1 と置くと解釈している。

加藤平左エ門は、

例へバ

$$2x^2 + x - 2 = 0$$

ニ正根ガアルカナイカラ驗スルニハ此ノ方程式ノ廉級ハ正デアルカラ +1 ヲ廉トシ
正根 1 ヲ立テ (以下略) [6, p.3]

としている。原書の例は $x^2 + x - 2 = 0$ であるのに対し、流布本が $2x^2 + x - 2 = 0$ となっているため、^原廉と整合性を持たせるために「此ノ方程式ノ廉級ハ正デアルカラ +1 ヲ廉トシ」としている。

また、藤原松三郎は、

方程式 $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$ が與へられた場合に、 $a_n > 0$ と假定し、その係数のみを書いて

$$a_n \quad a_{n-1} \quad a_{n-2} \quad \cdots \quad a_0$$

とし、これと +1 +1 +1 \cdots +1

と比較して、實 a_0 が +1 と同符號ならば正根無く、異符號ならば正根ありとする。

また +1 -1 \cdots $(-1)^{n-2}$ $(-1)^{n-1}$ $(-1)^n$

と比較して、實 a_0 が $(-1)^n$ と同符號ならば負根無く、異符號ならば負根ありとする。(中略)「隅より之を命じ、實級に至つて之を布く」といふ意味が、前條の文章に比すれば

$$a_n \quad a_n + a_{n-1} \quad a_n + a_{n-1} + a_{n-2}, \quad \cdots, a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$$

とするやうにも取れ、この實 $a_n + a_{n-1} + \cdots + a_0$ と、もとの實 a_0 と同名ならば正根無し、異名ならば正根ありといふのではないかと思はれるが、ここの例の示すところによれば、さきに述べたやうに解釈せねばならぬ。 [23, p.211]

と書いているが、解釈に無理を感じていることが窺える。

8.2 視商極数第二例の割注

林鶴一が「無商ニ正無商ト負無商トノ區別ヲ立テタリ」 [16, p.147] と書いているのは、《開方翻變五條》の割注「所謂無商者言無正商也」に基づたものと思われる。関孝和は正商を持たず負商をただ一つ持つ式は全商式と呼んでおり、例として

$$5 + 2x - 2x^2 + x^3 = (x + 1)(x^2 - 3x + 5) = 0$$

を挙げている。無商式は「正負各不得開出商者謂之無商式 (正負各商を開出することを得ざるは之を無商式と謂う)」と定義している。関が無商式として与えた 2 次方程式は

$$2 - 2x + x^2 = 1 + (1 - x)^2 = 0$$

4 次方程式は

$$2 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = 1 + (1 - x)^4 = 0$$

である。すべて虚根のみを持つ。

関は負商を持ち正商を持たない式に対し、『開方翻變之法』と同時期に重訂された『病題明致之法』(林集書 379、貞享二 (1685) 年) 虚題増損第二の第四例*21 で「乃此數以下者有正商以上者無正商也 (すなわちこの数以下は正商有り、以上は正商無しなり)」という割注を付けている。

関は虚根をもつときのみ無商と呼んでいるので林鶴一の解釈は関に忠実とはいえない。

加藤平左エ門が視商極数の第二例で「次ニ隅ヲ替ヘントシテモ無商式ヲ得ルガ故ニ隅ハ替ヘルコトガ出来ナイ。(コ、デ云フ無商式ハ正商ノ得ラレヌモノヲ云フ)」[6, p.19] と《開方翻變五條》の割注にしたがっているのも適切でない。3.6 を見よ。

9 おわりに

『開方翻變之法』の写本について以下の 3 点が明らかになった。

1. 『開方翻變之法』の小倉文庫本は、関孝和編の上に押された朱印が平山文庫『角法并演段図』の朱印と同一であることから、貞享二年十一月十三日に重訂された 6 日後に書写された原書の臨写本に近いものと考えられる。
2. 『開方翻變之法』の諸写本を比較すると、内題の正字、略字、同字を区別しないと「開方翻變之法」あるいは「開方翻變法」とするものと「開方翻變五條」とする 2 系統に分けられる。後者が流布本であるがいくつかの意図的に改変が入っているの

*21 「假如有直壁墻積一百二十寸只云縱與高和一十寸又云縱橫差三寸問橫」という問題に「得負八十四寸七分五釐三毫一三八弱爲積極數 乃此數以下者有正商以上者無正商也」という答をつけている。問題は

$$\begin{cases} \text{縦} \cdot \text{横} \cdot \text{高} = 120 & (\text{積}) \\ \text{縦} + \text{高} = 10 & (\text{和}) \\ \text{縦} - \text{横} = 3 & (\text{差}) \end{cases}$$

から横を求めよというものである。横を x とすると、開方式 (方程式) は

$$-120 + 21x + 4x^2 - x^3 = (x + 5)(x^2 - 9x + 24) = 0$$

となるので負商 -5 (と共役複素数根 1 組) を持つ。正商を持つように正一算を立てると方級と廉級が異名なので適平方級法を用いる。実を未知数 a とした適平方級法

$$\bar{D} = 27a^2 + 1768a - 44100 = 0$$

の負商は

$$a = -\frac{884 + \sqrt{1972156}}{27} \approx -84.753138 \text{ 弱}$$

である。積 $\leq (884 + \sqrt{1972156})/27$ なら横は正になる。[7, p.99] も参照のこと。

で、関の数学を研究する、あるいは関の著作を活版印刷などで出版するためには意図的に改変を受けてない『開方翻變之法』に基づくべきである。

3. 『開方翻變之法』神宮文庫本は小倉文庫本との照合、伝写経路の推定により、元禄十一年の伝写本ではなく後世の転写本の可能性が極めて高い。したがって、神宮文庫所蔵の関の他の写本も後世の転写本の可能性が極めて高い。

関孝和の『開方翻變之法』以外の写本についても『開方翻變之法』の写本と同様の傾向、すなわち写本に2系統有り流布本には意図的改変があること、が予測できる。これについては稿を改めて述べる。

謝辞

査読者の指摘により、誤った記述や分かりにくい箇所が改善された。特に3.6節では《開方翻變五條》の祖本の編者が何故視商極数の第二例に割注を挿入したかに関するコメントが役立った。和算研究所佐藤健一理事長からは下平文庫『開方翻變』のコピーを提供して頂いた。早稲田大学図書館および東北大学附属図書館は所蔵資料の画像の使用を許可して頂いた。以上の方々に感謝申し上げます。

参考文献

一次資料は本文の中に記す。

- [1] 浅見恵・安田健、近世歴史資料集成第IV期、第3巻、科学書院、2001
- [2] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一、関孝和論序説、岩波書店、2008
- [3] 上野健爾、関孝和の数学と大成算経、数理解析研究所講究録、1831 (2013)、115-119
- [4] 長田直樹、関孝和と『大成算経』、数理解析研究所講究録、1831 (2013)、85-103
- [5] 長田直樹、『解見題之法』について、RIMS Kôkyûroku Bettatsu, B50 (2014)、9-34.
- [6] 加藤平左衛門、關孝和編 開方翻變ノ研究、東北數學雑誌 48(1941)、1-24
- [7] 加藤平左エ門、算聖関孝和の業績、槇書店、1972
- [8] 許慎、説文解字真本(冊一)、臺灣中華書局、1965
- [9] 小松彦三郎、關孝和著『三部抄』山路主住本の復元、京都大学数理解析研究所講究録、1444(2005)、169-202
- [10] 佐藤賢一、近世日本数学史、東京大学出版会、2005
- [11] 澤村寛、開方翻變、澤村寫本堂、1934
- [12] 下浦康邦、米議会図書館の和算書群について、和算第90号(2000)、9-14
- [13] 東京數學物理學會、関流算法七部書、1907
- [14] 中尾央・三中信宏編、文化系統学への招待、勁草書房、2012
- [15] 日本学士院編、日本学士院所蔵和算資料目録、岩波書店、2002
- [16] 林鶴一、和算ニ於ケル方程式論ニ就テ、東北數學雑誌 34 (1931)、145-185.
- [17] 東アジア数学史研究会、関流和算書大成、第一巻、勉誠出版、2008
- [18] 平山諦・下平和夫・広瀬秀雄編、關孝和全集、大阪教育図書、1974

- [19] 平山諦・内藤淳、松永良弼、松永良弼刊行会、1987
- [20] 藤原松三郎、代數學第一卷、内田老鶴圃、1982 (初版 1928)
- [21] 藤原松三郎、和算史ノ研究, VII、東北數學雑誌 48(1941), 201-214
- [22] 藤原松三郎、余の和算史研究、科学史研究、11 (1949)、79-86
- [23] 藤原松三郎 (日本學士院編)、明治前日本數學史第二卷、岩波書店、2008 (初版 1956)
- [24] 米国議会図書館蔵日本古典籍目録刊行会編、米国議会図書館蔵日本古典籍目録、八木書店、2003
- [25] 横塚啓之、『円理発起』の研究 (1), 数学史研究 217(2014), 1-28
- [26] 横塚啓之、『円理発起』の研究 (2), 数学史研究 218(2014), 34-51