

代数方程式の判別式

東京女子大学現代教養学部
数理科学科情報理学専攻
長田直樹

Abstract

本セミナーでは 2 次方程式と 3 次方程式の解の公式および判別式を導いたあと、一般の n 次多項式の判別式を定義し、基本的性質を述べる。次に多項式以外の判別式の例として、二次形式および包絡線の判別式を取り上げる。

最後に判別式に関わる数学史の最新的话题を紹介する。

1 2 次方程式の解と判別式

1.1 解の公式と判別式の導出

実数係数の 2 次方程式

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad (a \neq 0) \quad (1)$$

を a で割り、平方完成すると

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$

となる。したがって、

$$D = b^2 - 4ac > 0$$

のとき

$$x + \frac{b}{2a} = \pm \frac{\sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

より (1) は異なる 2 つの実数解

$$\frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \quad (2)$$

を持つ。 $D = 0$ のときは実数の重解、

$$-\frac{b}{2a}$$

$D < 0$ のときは共役複素数解

$$\frac{-b \pm \sqrt{4ac - b^2}i}{2a}$$

を持つ。 D は 2 次方程式 (1) あるいは 2 次式 $ax^2 + bx + c$ の判別式と呼ばれる。 $D \leq 0$ の場合も含め、(2) は 2 次方程式の解の公式という。

1.2 解と係数の関係の利用

2 次方程式の判別式 $D = b^2 - 4ac$ は次の 4 つの性質を持っている。

性質 1 重解を持つときかつそのときに限り 0 になる。

性質 2 係数 (を不定元と考えてそれら) の斉次多項式†で表される。

性質 3 方程式の解がすべて実数でたがいに異なるとき、判別式の値は正である。

性質 4 斉次多項式の各項は共通因数を持たず、係数はすべて整数で互いに素である。

† 不定元 $x_1, \dots, x_n$ の d 次斉次多項式とは

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_n = d \\ i_1, \dots, i_n \in \mathbb{N}_0}} c_{i_1 \dots i_n} x_1^{i_1} \dots x_n^{i_n}$$

と表せる式をいう。 $b^2 - 4ac$ は不定元 a, b, c の 2 次斉次多項式である。

今度は、上記の性質を持つ斉次多項式を、解の公式を使わないで導出する。

(1) の 2 解を α, β とすると

$$ax^2 + bx + c = a(x - \alpha)(x - \beta) = a(x^2 - (\alpha + \beta)x + \alpha\beta)$$

となるので、解と係数の関係

$$\alpha + \beta = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta = \frac{c}{a}$$

が得られる。

$$\Delta = \alpha - \beta$$

は性質 1 を満たすが性質 2 と性質 3 を満たさない。そこで Δ^2 を考える。

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta = (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(-\frac{b}{a}\right)^2 - 4\frac{c}{a} = \frac{b^2 - 4ac}{a^2} \end{aligned}$$

多項式にするため a^2 を掛ると

$$D = a^2 \Delta^2 = a^2 (\alpha - \beta)^2 = b^2 - 4ac \quad (3)$$

は 4 つのすべての性質を満たすので、 D を判別式に取る。定義 (3) より

(i) $D > 0 \iff$ 異なる 2 実解

(ii) $D = 0 \iff$ 重解

(iii) $D < 0 \iff$ 異なる 2 つの虚数解を持ち、それらはたがいに共役複素数

がいえる。(i)(iii) の $\Leftarrow$ と (ii) は明らかであるが、(i)(iii) の $\Rightarrow$ の証明には、「実数係数の代数方程式は虚数解 α を解に持てば、共役複素数 $\bar{\alpha}$ も解」を使い転換法で証明する。)

1.3 共通解の利用

命題 1 多項式 $f(x)$ に対し、 $f(x) = 0$ が重解を持つための条件は、連立方程式

$$\begin{cases} f(x) = 0 \\ f'(x) = 0 \end{cases}$$

が共通解を持つことである。

証明 $f(x) = 0$ が重解 α を持つとき、整式 $g(x)$ により

$$f(x) = (x - \alpha)^2 g(x)$$

と表せる。

$$f'(x) = 2(x - \alpha)g(x) + (x - \alpha)^2 g'(x)$$

よって、 $f'(\alpha) = 0$ である。

逆に $f(\alpha) = 0, f'(\alpha) = 0$ とする。整式 $h(x)$ により

$$f(x) = (x - \alpha)h(x)$$

と表せる。

$$f'(x) = h(x) + (x - \alpha)h'(x)$$

と $f'(\alpha) = 0$ より

$$h(\alpha) = 0$$

となる。因数定理により整式 $k(x)$ が存在して

$$h(x) = (x - \alpha)k(x)$$

したがって

$$f(x) = (x - \alpha)^2 k(x)$$

と書けるので α は $f(x)$ の重解である。 □

2 次方程式 (1) に対しては

$$ax^2 + bx + c = 0 \tag{4}$$

$$2ax + b = 0 \tag{5}$$

$2 \times (4) - x \times (5)$ より

$$bx + 2c = 0 \tag{6}$$

$b \times (5) - 2a \times (6)$ より

$$b^2 - 4ac = 0 \tag{7}$$

(7) の左辺は判別式である。

注意 1 $2a \times (6) - b \times (5)$ により消去すると (7) の符号は反対になる。消去法では符号が一定にならない。

2 3 次方程式の解と判別式

2.1 解の公式と判別式の導出

3 次方程式

$$ax^3 + bx^2 + cx + d = 0 \quad (a \neq 0) \quad (8)$$

に対して、変数変換

$$y = x + \frac{b}{3a} \quad (\text{カルダーノ変換})$$

を行ない、 $x = y - b/(3a)$ を (8) に代入すると

$$ay^3 + \left(-\frac{b^2}{3a} + c\right)y + \left(\frac{2b^3}{27a^2} - \frac{bc}{3a} + d\right) = 0$$

となる。 a で割り、

$$p = -\frac{b^2}{3a^2} + \frac{c}{a} = \frac{-b^2 + 3ac}{3a^2}$$

$$q = \frac{2b^3}{27a^3} - \frac{bc}{3a^2} + \frac{d}{a} = \frac{2b^3 - 9abc + 27a^2d}{27a^3}$$

とおくと、2 次の項が消え

$$y^3 + py + q = 0 \quad (9)$$

となる。

$y = u + v$ とおき、(9) に代入すると

$$u^3 + v^3 + (3uv + p)(u + v) + q = 0$$

となるので、

$$\begin{cases} u^3 + v^3 + q = 0 \\ 3uv + p = 0 \end{cases}$$

なる u, v を見つければ、 $y = u + v$ は (9) の解である。 u^3, v^3 は

$$u^3 + v^3 = -q, \quad u^3 v^3 = -\left(\frac{p}{3}\right)^3$$

を満たすので、2 次方程式

$$t^2 + qt - \left(\frac{p}{3}\right)^3 = 0 \quad (\text{分解方程式})$$

の解、すなわち、

$$t = -\frac{q}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}$$

である。 u, v は t の 3 乗根であるのでそれぞれ 3 つずつあるが、 u が決まれば $uv = -\frac{p}{3}$ より v も決まる。いま、

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3$$

とおくと

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} = \sqrt[3]{\left(\frac{q}{2}\right)^2 - R} = \sqrt[3]{-\left(\frac{p}{3}\right)^3} = -\frac{p}{3}$$

より $\omega = (-1 + \sqrt{3}i)/2$ としたとき、(9) の解は

$$\begin{aligned} y_1 &= \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} \\ y_2 &= \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} \\ y_3 &= \omega^2 \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} + \omega \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{R}} \end{aligned}$$

と表せる。(カルダーノの公式 [2])

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \frac{-b^2c^2 + 27a^2d^2 - 18abcd + 4b^3d + 4ac^3}{108a^4}$$

だから

$$D = -108a^4R = b^2c^2 - 27a^2d^2 + 18abcd - 4b^3d - 4ac^3 \quad (10)$$

$$D_2 = -27a^3q = -2b^3 + 9abc - 27a^2d \quad (11)$$

とおく。

$$\sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{R}} = \sqrt[3]{\frac{D_2}{2 \cdot 27a^3} + \sqrt{\frac{-D}{2^2 3^3 a^4}}} = \frac{1}{3a} \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} + \frac{a}{2} \sqrt{-27D}}$$

より (8) の解は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{3a} \left(-b + \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} + \frac{a}{2} \sqrt{-27D}} + \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} - \frac{a}{2} \sqrt{-27D}} \right) \\ \alpha_2 &= \frac{1}{3a} \left(-b + \omega \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} + \frac{a}{2} \sqrt{-27D}} + \omega^2 \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} - \frac{a}{2} \sqrt{-27D}} \right) \\ \alpha_3 &= \frac{1}{3a} \left(-b + \omega^2 \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} + \frac{a}{2} \sqrt{-27D}} + \omega \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} - \frac{a}{2} \sqrt{-27D}} \right) \end{aligned}$$

と表せる。

命題 2 3 次方程式 (8) に対し D, D_2 を (10)(11) で定義する。

- (i) $D > 0$ のとき、異なる 3 つの実数解
- (ii) $D = 0, D_2 \neq 0$ のとき、3 つの実数解。単解 1 つと重解
- (iii) $D = D_2 = 0$ のときは三重解
- (iv) $D < 0$ のとき、実数解 1 つと共役複素数解

証明 (i) $D > 0$ のとき

$$\frac{D_2}{2} + \frac{a}{2} \sqrt{-27D}, \quad \frac{D_2}{2} - \frac{a}{2} \sqrt{-27D}$$

は共役複素数であるので、 α_1 は実数である。また、

$$\overline{\omega \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} + \frac{a}{2}\sqrt{-27D}}} = \omega^2 \sqrt[3]{\frac{D_2}{2} - \frac{a}{2}\sqrt{-27D}}$$

より α_2, α_3 も実数である。

(ii) $D = 0, D_2 \neq 0$ のときは α_1 は単解、 $\alpha_2 = \alpha_3$ は 2 重解である。

(iii) $D = D_2 = 0$ のときは 3 重解

(iv) $D < 0$ のとき α_1 は実数、 α_2, α_3 は共役複素数である。 □

3 次方程式 (8) に対し、

$$D = b^2c^2 - 27a^2d^2 + 18abcd - 4b^3d - 4ac^3$$

を判別式という。

例 1 3 次方程式 $x^3 - 7x - 6 = (x - 3)(x + 1)(x + 2) = 0$ を $p = -7, q = -6$ としてカルダーノの公式で解く。

$$R = \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = \left(\frac{-6}{2}\right)^2 + \left(\frac{-7}{3}\right)^3 = 9 - \frac{343}{27} = -\frac{100}{27} = -\frac{10^2}{9^2} \times 3 < 0$$

いま、

$$\sqrt[3]{-\frac{-6}{2} + \frac{10}{9}\sqrt{3}i} = \frac{1}{3}\sqrt[3]{81 + 30\sqrt{3}i}$$

より

$$81 + 30\sqrt{3}i = (a + b\sqrt{3}i)^3$$

を満たす整数 a, b を求める (ラファエル・ボンベツリの方法)。すなわち、

$$\begin{cases} a^3 - 9ab^2 = 81 \\ a^2b - b^3 = 10 \end{cases}$$

より $b = \pm 2, \pm 5$ の場合を調べると、 $a = -3, b = 2$ が取れる。よって、

$$\frac{1}{3}\sqrt[3]{81 \pm 30\sqrt{3}i} = -1 \pm \frac{2}{3}\sqrt{3}i$$

$x^3 - 7x - 6 = 0$ の解は

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}i\right) + \left(-1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}i\right) = -2 \\ \alpha_2 &= \omega \left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}i\right) + \omega^2 \left(-1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}i\right) = -1 \\ \alpha_3 &= \omega^2 \left(-1 + \frac{2}{3}\sqrt{3}i\right) + \omega \left(-1 - \frac{2}{3}\sqrt{3}i\right) = 3 \end{aligned}$$

途中に複素数の三乗根が出てくるが、整数解 (実数解) が得られた。

慶應大商 (2002) 方程式 $x^3 + px + q = 0$ (ただし p, q は実数) が、3 つの互いの異なる実数解を持つための必要十分条件は

$$p < \boxed{} \text{ かつ } q^2 < -\frac{\boxed{}}{\boxed{}} p^3$$

である。(『全国大学入試問題正解数学 (私立大編)』2003 年受験用、旺文社)

入試問題としての標準的解法は、極大値と極小値を持ちかつ 極大値 $\times$ 極小値 < 0 を用いる。

2.2 解と係数の関係の利用

(8) の 3 解を α, β, γ とすると

$$\begin{aligned} ax^3 + bx^2 + cx + d &= a(x - \alpha)(x - \beta)(x - \gamma) \\ &= a(x^3 - (\alpha + \beta + \gamma)x^2 + (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)x - \alpha\beta\gamma) \end{aligned}$$

となるので、解と係数の関係

$$\alpha + \beta + \gamma = -\frac{b}{a}, \quad \alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha = \frac{c}{a}, \quad \alpha\beta\gamma = -\frac{d}{a}$$

が得られる。

$$\begin{aligned} \Delta^2 &= (\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\beta - \gamma)^2 \\ &= (\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^2(\alpha + \beta + \gamma)^2 - 27\alpha^2\beta^2\gamma^2 + 18\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha) \\ &\quad - 4(\alpha\beta + \beta\gamma + \gamma\alpha)^3 - 4\alpha\beta\gamma(\alpha + \beta + \gamma)^3 \end{aligned}$$

が成り立つことを数式処理システム Maple で確認する。 α, β, γ を a, b, c とおく。

```
A := a*b*c;
                                     a b c
B := a*b+a*c+b*c;
                               a b + a c + b c
C := a+b+c;
                               a + b + c
DD := B^2*C^2-27*A^2+18*A*B*C-4*B^3-4*A*C^3;
      2           2           2 2 2
      (a b + a c + b c) (a + b + c) - 27 a b c
      + 18 a b c (a b + a c + b c) (a + b + c)
      - 4 (a b + a c + b c)^3 - 4 (a + b + c)^3 a b c
```

(続き)

DD := expand(DD);

$$\begin{aligned}
& a^4 b^2 - 2 a^4 b c + a^4 c^2 - 2 a^3 b^3 + 2 a^3 b^2 c + 2 a^3 b c^2 + 2 a^2 b^3 c \\
& - 2 a^2 b^2 c^2 + 2 a^2 b c^3 + a^2 c^4 \\
& - 2 a b^4 c + 2 a b^3 c^2 + 2 a b^2 c^3 - 2 a b^4 c + b^4 c^2 \\
& - 2 b^3 c^3 + b^2 c^4
\end{aligned}$$

DD := factor(DD);

$$(b - c)^2 (a - c)^2 (a - b)^2$$

解と係数の関係より

$$\Delta^2 = \frac{1}{a^4} (b^2 c^2 - 27 a^2 d^2 + 18 a b c d - 4 b^3 d - 4 a c^3)$$

と表せる。係数の整式にするため a^4 を掛け、三次式の判別式は

$$D = a^4 \Delta^2 = b^2 c^2 - 27 a^2 d^2 + 18 a b c d - 4 b^3 d - 4 a c^3 \quad (12)$$

となる。1.2 節の判別式の性質のうち、性質 1 と性質 3 は定義からいえる。性質 2 と性質 4 は式の形を見れば確認できる。

3 一般の多項式に対する判別式

3.1 対称式

 $x_1, \dots, x_n$ を不定元とする。関数

$$f(x_1, \dots, x_n)$$

を $x_1, \dots, x_n$ に関する整式とする。任意の x_i, x_j を入れ替えても f の形が変化しないとき f を対称式という。

$$s_1 = \sum_{i=1}^n x_i, \quad s_2 = \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j, \quad s_3 = \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} x_i x_j x_k, \dots, s_n = \prod_{i=1}^n x_i$$

を $x_1, \dots, x_n$ に関する基本対称式という。 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0$ に対する解と係数の関係は

$$\frac{a_i}{a_n} = (-1)^{n-i} s_{n-i}, \quad i = 0, \dots, n-1$$

で表される。

命題 3 すべての対称式は基本対称式の整式として表すことができる。

証明 略 (高木貞治『代数学講義』p.140, あるいは藤原松三郎『代数学』p.339 を見よ。)□

3.2 判別式

一般の多項式に対する判別式は (12) を拡張する。

実数係数の多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ の零点を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とする。零点の差積を

$$\Delta = \Delta(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)$$

とおき、 $f(x)$ の判別式 (discriminant) を

$$D = D(f) = a_n^{2n-2} \Delta^2 = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 \quad (13)$$

により定義する。

1.2 節の判別式の性質のうち、性質 1 と性質 3 は定義 (13) から直ちに導ける。差積の 2 乗 Δ^2 は、 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ の置換で符号が変わらないので対称式である。命題 3 より、基本対称式の多項式として表せる。すなわち係数の有理式で表せる。 $(2n-2)$ 次斉次多項式となる性質 2 は、この後に述べる命題 5 と命題 6 を使うのが分かりやすい。性質 4 の証明は容易ではない。

注意 2 判別式を多項式の係数の整式で表すため、 a_n^{2n-2} を掛けているのであるが、 a_n^{2n-2} を掛けなくて、判別式を係数の有理式で表す分野 (たとえば、体論) もある。モニック (最高次の係数が 1) のときは一致する。

定義	$ax^2 + bx + c$	文献
$a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$	$a^2(\alpha_1 - \alpha_2)^2 = b^2 - 4ac$	高木貞治『代数学講義』、藤原松三郎『代数学』、佐武一郎『線型代数学』、『数学辞典』第 4 版
$\prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$	$\frac{b^2 - 4ac}{a^2}$	齋藤正彦『線型代数入門』、永田雅宜『可換体論』、『数学辞典』第 2 版、第 3 版

3.3 終結式

実数係数の 2 つの多項式

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

$$g(x) = b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \cdots + b_1 x + b_0 = b_m \prod_{j=1}^m (x - \beta_j)$$

の終結式 (resultant) を

$$R(f, g) = a_n^m b_m^n \prod_{i=1}^n \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j)$$

により定義する。

命題 4 多項式 $f(x), g(x)$ が共通零点 (定数でない共通因数) を持つための必要十分条件は

$$R(f, g) = 0$$

である。

証明 定義から明らか。 $\square$

補題 1

$$R(f, g) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j)$$

証明

$$\begin{aligned} R(f, g) &= a_n^m \prod_{i=1}^n \left(b_m \prod_{j=1}^m (\alpha_i - \beta_j) \right) = a_n^m \prod_{i=1}^n g(\alpha_i) \\ R(f, g) &= b_m^n \prod_{j=1}^m \left(a_n (-1)^n \prod_{i=1}^n (\beta_j - \alpha_i) \right) = (-1)^{mn} b_m^n \prod_{j=1}^m f(\beta_j) \quad \square \end{aligned}$$

命題 5 実数係数多項式 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ に対し

$$D(f) = (-1)^{n(n-1)/2} \frac{1}{a_n} R(f, f')$$

証明 $f(x)$ の零点を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とすると

$$f(x) = a_n \prod_{i=1}^n (x - \alpha_i)$$

と書ける。補題 1 と

$$f'(x) = a_n \sum_{i=1}^n (x - \alpha_1) \cdots (x - \alpha_{i-1})(x - \alpha_{i+1}) \cdots (x - \alpha_n)$$

を用いると、

$$\begin{aligned} R(f, f') &= a_n^{n-1} \prod_{i=1}^n f'(\alpha_i) = a_n^{n-1} a_n^n \prod_{i=1}^n \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n (\alpha_i - \alpha_j) \\ &= (-1)^{n(n-1)/2} a_n a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2 = (-1)^{n(n-1)/2} a_n D(f) \quad \square \end{aligned}$$

命題 6 (シルヴェスター [6]) 終結式は $(n + m)$ 次行列式を用いて次のように表せる。

$$R(f, g) = \begin{vmatrix} a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & a_1 & a_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_n & a_{n-1} & \cdots & \cdots & \cdots & a_0 \\ b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & b_1 & b_0 & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_m & b_{m-1} & \cdots & \cdots & b_0 \end{vmatrix}$$

右辺の行列式は Sylvester 行列式といい $R_{\text{Sylvester}}(f, g)$ と表す。

証明 略 (佐武一郎『線型代数学』pp.70-73、高木貞治『代数学講義』第 10 章にある。) □

命題 7 終結式は昇幂で書くと以下のような符号になる。

$$R_{\text{Seki}}(f, g) = \begin{vmatrix} a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & a_{n-1} & a_n & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & a_0 & a_1 & \cdots & \cdots & \cdots & a_n \\ b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ 0 & b_0 & b_1 & \cdots & b_{m-1} & b_m & \cdots & \cdots & 0 \\ & & & \cdots & & & & & \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & b_0 & b_1 & \cdots & \cdots & b_m \end{vmatrix} \\ = (-1)^{mn} R_{\text{Sylvester}}(f, g)$$

特に、 $m = n - 1$ のときは $nm \equiv 0 \pmod{2}$ なので、 $R_{\text{Seki}}(f, g) = R_{\text{Sylvester}}(f, g)$ となる。

4 様々な判別式

多項式以外にも判別式は様々な分野で用いられている。

- 不変式 (二次形式、三次形式、...)
- 代数体
- 媒介変数表示された平面曲線の族 (包絡線)
- 代数曲線 (楕円曲線、...)

二次形式と包絡線における判別式を取り上げる。

4.1 二次形式の判別式

二元二次形式の判別式は 1801 年フリードリッヒ・ガウスが数論研究 [3] で与えた。

二次形式

$$ax^2 + 2bxy + cy^2, \quad a, b, c \in \mathbb{Z}$$

を (a, b, c) と表し、 (a, b, c) に置換 (*substitutiones*)

$$x = \alpha x' + \beta y', \quad y = \gamma x' + \delta y'$$

を施して得られる形式を (a', b', c') とすると

$$\begin{aligned} & a'x'^2 + 2b'x'y' + c'y'^2 \\ &= a(\alpha x' + \beta y')^2 + 2b(\alpha x' + \beta y')(\gamma x' + \delta y') + c(\gamma x' + \delta y')^2 \\ &= (a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)x'^2 + 2(a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta)x'y' + (a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2)y'^2 \end{aligned}$$

より

$$\begin{aligned} a' &= a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2 \\ b' &= a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta \\ c' &= a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2 \end{aligned}$$

となるので、

$$\begin{aligned} & b'^2 - a'c' \\ &= (a\alpha\beta + b(\alpha\delta + \beta\gamma) + c\gamma\delta)^2 - (a\alpha^2 + 2b\alpha\gamma + c\gamma^2)(a\beta^2 + 2b\beta\delta + c\delta^2) \\ &= (b^2 - ac)\alpha^2\delta^2 - 2(b^2 - ac)\alpha\beta\gamma\delta + (b^2 - ac)\beta^2\gamma^2 \\ &= (b^2 - ac)(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 \end{aligned}$$

$b^2 - ac$ は $(\alpha\delta - \beta\gamma)^2 = 1$ のとき値は変わらない。ガウスは

形式 (a, b, c) の諸性質は主として、数 $bb - ac$ に本来備わっている性質に依存しているであろう。我々はこの数を形式 (a, b, c) の判別式 (*determinantem*) という名で呼びたいと思う。

高瀬正仁訳 [4, p.127]

と書いている。

(2, 2) 行列の集合

$$GL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z} \right\}$$

は行列の積に関し群になる。 $GL_2(\mathbb{Z})$ の元をユニモジュラ行列 (unimodular matrix) という。

$$SL_2(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mid \alpha\delta - \beta\gamma = 1; \alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{Z} \right\}$$

は $GL_2(\mathbb{Z})$ の部分群である。

二元二次形式の判別式は $GL_2(\mathbb{Z})$ による線型置換に関し不変である。19 世紀中期以降、不変式論の研究に繋がった。

4.2 曲線族の判別式

t を媒介変数とする平面曲線の族

$$C_t : f(x, y, t) = 0 \quad (14)$$

を考える。曲線 E が曲線族 (14) の包絡線であるとは、 E は $\{C_t\}$ の各曲線に接しており、 E と C_t の接点 $(\phi(t), \psi(t))$ の軌跡として E が

$$x = \phi(t), \quad y = \psi(t) \quad (15)$$

と媒介変数表示できるときいう。

曲線族 (14) が包絡線 E を持つとすると、それらの接点 $(\phi(t), \psi(t))$ における C_t と E の接線が一致する。陰関数定理 $\dagger$ により

$$f_x(\phi(t), \psi(t), t)\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t), t)\psi'(t) = 0$$

が成り立つ。したがって、

$$f(\phi(t), \psi(t), t) = 0 \quad (16)$$

を t で微分すると連鎖律 $\ddagger$ により

$$f_x(\phi(t), \psi(t), t)\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t), t)\psi'(t) + f_t(\phi(t), \psi(t), t) = 0$$

よって、

$$f_t(\phi(t), \psi(t), t) = 0 \quad (17)$$

が成り立つ。

E が $\{C_t\}$ の包絡線であれば (16) と (17) 成り立つ。(16) と (17) から t を消去して得られる関係式 $R(f, f_t) = 0$ を $f(x, y, t) = 0$ の判別式という。

命題 8 曲線族 C_t が包絡線 E を持つならば、 E は $R(f, f_t) = 0$ を満たす。逆に判別式 $R(f, f_t) = 0$ を満たす点の集合は、包絡線 E と C_t の特異点の軌跡

$$f_x(x, y, t) = f_y(x, y, t) = 0$$

を合わせたものである。

$\dagger$ 陰関数定理 D は $\mathbb{R}^2$ の領域、関数 $f : D \rightarrow \mathbb{R}$ は連続とする。 $f(x, y)$ は一点 (a, b) の近傍 U で y に関し偏微分可能で、 $f_y(x, y)$ も連続とする。 $f(x, y)$ が

$$f(a, b) = 0, \quad f_y(a, b) \neq 0$$

を満たしているとき、 $x = a$ の開近傍 V と V で定義された連続関数 $y = g(x)$ で

$$b = g(a), \quad \text{恒等的に } f(x, g(x)) \equiv 0$$

であるものが一意的に定まる。さらに、 $f(x, y)$ が U で C^1 級であれば、 $g(x)$ も C^1 級で

$$g'(x) = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)}$$

証明 略 ([10] を見よ。)

‡連鎖律 I, U をそれぞれ $\mathbb{R}, \mathbb{R}^3$ の開集合で、二つの関数 $\Phi: I \rightarrow \mathbb{R}^3, f: U \rightarrow \mathbb{R}$ は $f(I) \subset U$ を満たしているとする。いま $\Phi(t)$ が t で微分可能、 $f(x, y)$ が $\Phi(t) = (\phi(t), \psi(t), \chi(t))$ で微分可能とすれば、合成関数 $g(t) = f(\Phi(t)) = f(\phi(t), \psi(t), \chi(t))$ は t で微分可能で

$$g'(t) = f_x(\phi(t), \psi(t), \chi(t))\phi'(t) + f_y(\phi(t), \psi(t), \chi(t))\psi'(t) + f_z(\phi(t), \psi(t), \chi(t))\chi'(t)$$

偏微分を用いて包絡線を求めることは高校数学の範囲外であるが、曲線族の通過領域を求める問題は大学入試に頻繁に出題される。

東大前期 (2015) 正の実数 a に対して、座標平面上で次の放物線を考える。

$$C: \quad y = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a}$$

a が正の実数全体を動くとき、 C の通過する領域を図示せよ。

解答例

$$y = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a} = (x^2 - 1)a + \frac{1}{4a}$$

$|x| > 1$ のときは

$$y = (x^2 - 1)a + \frac{1}{4a} \geq 2\sqrt{(x^2 - 1)a \cdot \frac{1}{4a}} = \sqrt{x^2 - 1}$$

より、双曲線 $y = \sqrt{x^2 - 1}$ の上側である。

$x = \pm 1$ のとき、 $y = \frac{1}{4a}$ より $y > 0$ である。

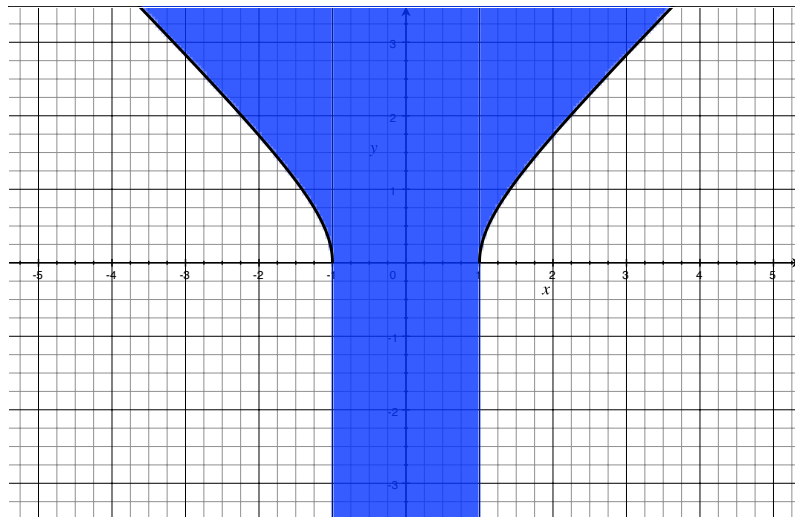
$|x| < 1$ のときは

$$\lim_{a \rightarrow +0} y = +\infty, \quad \lim_{a \rightarrow \infty} y = -\infty$$

より実数全体を取る。 C の通る範囲は

$$\{(x, y) \mid y \geq \sqrt{x^2 - 1} \text{ かつ } x > 1\} \cup \{(x, y) \mid |x| < 1\} \cup \{(x, y) \mid x = \pm 1 \text{ かつ } y > 0\}$$

である。図の青色の部分で $y > 0$ の部分は境界を含み $y \leq 0$ の部分は境界を含まない。
(図は Mac 付属の Grapher を用いた。)



領域の境界は包絡線である。

$$f(x, y, a) = ax^2 + \frac{1 - 4a^2}{4a} - y$$

とおく。

$$f(x, y, a) = 0 : (x^2 - 1)a + \frac{1}{4a} - y = 0$$

$$f_a(x, y, a) = 0 : x^2 - \frac{1}{4a^2} - 1 = 0$$

から a を消去すると包絡線は

$$y = \sqrt{x^2 - 1}$$

である。 C は双曲線 (の上半分) に接し、 y 軸を軸とし、下に凸の放物線群である。

5 判別式の歴史

近世以前のイスラムやヨーロッパでは、特定の 2 次や 3 次の方程式に対して判別式が考えられたが、一般の形式や多項式に対して考察されたのは、19 世紀中期以降である。

関孝和は『かいふくだいの ほう解伏題之法』(1683) において、2 つの代数方程式から未知数を消去して終結式を求める方法を表した。

$$\begin{cases} f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0 \\ g(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \cdots + b_mx^m = 0 \end{cases}$$

の終結式を

$$R_{\text{Seki}}(f, g) = (-1)^{mn} R_{\text{Sylvester}}(f, g) = (-1)^{mn} R(f, g)$$

により与えた。 x は補助の未知数で、 $a_0, \dots, a_n, b_0, \dots, b_m$ は真の未知数を含んでいる。

したがって、 $R_{\text{Seki}}(f, g) = 0$ は真の未知数に関する方程式になる。

関は『かいほうほんへんの ほう開方翻変之法』([5]1685) において、代数方程式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

に対し判別式を (「^{てきじんほうきゅうほう}適尽方級法」と名づけ)

$$\frac{1}{n^{n-2}a_n}R_{\text{Seki}}(nf - xf', f') = (-1)^{n(n-1)/2}D(f)$$

により与えた。

さらに関は 3 次方程式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$$

の $-D_2 = 0$ を

$$R_{\text{Seki}}(f, \frac{1}{2!}x^2f'') = \frac{1}{8a_3}R_{\text{Seki}}(f, f'') = 0$$

により求め、「^{てきじんれんきゅうほう}適尽廉級法」と名づけている。[14]

ヨーロッパでは 19 世紀になって二次形式、不変式などの研究で判別式が考察された。1801 年にフリードリッヒ・ガウス [3] が、二元および三元の二次形式の判別式を考察したことに始まる。研究が盛んに行われるようになったのはジョージ・ブール [1] が 1841 年に二元三次形式

$$Q = Ax^3 + 3Bx^2y + 3Cxy^2 + Dy^3$$

に対し

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = 0$$

から x, y を消去して

$$\begin{aligned}\theta(Q) &= (ad - bc)^2 - 4(b^2 - ac)(c^2 - bd) \\ &= a^2d^2 - 3b^2c^2 + 4ac^3 + 4b^3d - 6abcd\end{aligned}$$

を与えてからである。ジェームス・ジョセフ・シルヴェスター [7] は 1851 年に二元三次形式

$$s_0x^3 + s_1x^2y + s_2xy^2 + s_3y^3$$

の判別式

$$\begin{aligned}I &= -12\epsilon(s_1^2s_2^2 - 27s_0^2s_3^2 + 18s_0s_1s_2s_3 - 4s_1^3s_3 - 4s_0s_2^3) \\ &= -12\epsilon D\end{aligned}$$

を与え、 I に判別式 (*discriminant*) と命名している。

シルヴェスターが今から 164 年前に与えた二元三次形式の判別式を関孝和はそれより 166 年前に得ていたことになる。

参考文献

一次資料

- [1] George Boole, Exposition of a general theory of linear transformations, Part I., The Cambridge mathematical Journal Vol. III. No.XIII (1841), 1-20.

- [2] Gerolamo Cardano, *Ars Magna*, English translation *The Rules of Algebra: (Ars Magna)* (Dover Books on Mathematics)
- [3] Friderico Gauss, *Disquisitiones Arithmeticae*, 1801, in Carl Friedrich Gauss *Werke*, Erster Band, 1863.
- [4] 高瀬正仁訳、*ガウス整数論*、朝倉書店、1995
- [5] 関孝和編、*開方翻変之法*、早稲田大学小倉文庫イ 16-228
- [6] J.J. Sylvester, A method of determining by mere inspection the derivatives from two equations of any degree, *Philosophical Magazine*, XVI. (1840), 132-135, in *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, vol. I, 54-57
- [7] J.J. Sylvester, On a remarkable discovery in the theory of canonical forms and of hyperdeterminants, *Philosophical Magazine*, II. (1851), 391-410, in *The Collected Mathematical Papers of James Joseph Sylvester*, vol. I, 265-283

二次資料

- [8] J. デュドネ編、上野健爾他訳、*数学史 1700-1900 I*、岩波書店、1985
- [9] 藤原松三郎、*代数学第一巻*、内田老鶴圃、1982(初版 1928)
- [10] 一松信、*解析学序説 (新版) 下巻*、裳華房、1982
- [11] Victor J. Katz, *A History of Mathematics*, 3rd ed., Addison-Wesley, 2009.
- [12] ヴィクター・カッツ、上野健爾・三浦伸夫監訳、*カッツ数学の歴史* ([11] 第 2 版の日本語訳)、共立出版、2005
- [13] 増田佳代・宮西正宜、*判別式と終結式*
<http://sci-tech.ksc.kwansei.ac.jp/mathc/achievement/masumiya.pdf>
- [14] 長田直樹、関孝和編『*開方翻変之法*』について、「*数学史の研究*」研究集会講演、京都大学数理解析研究所、2015 年 8 月 5 日
- [15] 佐武一郎、*線型代数学*、裳華房、1974
- [16] 高木貞治、*代数学講義改訂新版*、共立出版、1965