逆接線問題と微分方程式 — ドボーヌ問題に見る —

長田直樹

1　はじめに

1630 年代のフランスの数学者たちの重要な関心事は、曲線の接線 (あるいは法線)、曲線の極大値と極小値、長さ、面積などを求めることであった。これらのうち接線については、1636 年以前にロベルヴァル (Gilles Personne de Roberval) がサイクロイドの研究中に接線の決定法を発見した。1637 年デカルト (René Descartes) は、代数曲線の法線の決定法を著書『幾何学』で与えた。1637 年末にはフェルマ (Pierre de Fermat) は「極大および極小について、曲線の接線について」をメルセンヌ (Marin Mersenne) を介しデカルトに届けた。

次に問題になったのは、接線あるいは法線が特定の性質を満たすような曲線を求める問題、すなわち逆接線問題である。ドボーヌ (Florimond Debeaune) は、メルセンヌを介して 1638 年 9 月頃デカルトに後にドボーヌ問題と呼ばれる最初の逆接線問題を提出した。メルセンヌは、ロベルヴァルとフェルマにもその問題を送った。

ドボーヌと同時代の数学者でドボーヌ問題の解を与えることができたのはデカルトだけであった。デカルトは 1639 年 2 月 20 日付けのドボーヌに宛てた書簡において漸近線を用いて定式化し、解曲線とその構成法を与えた。デカルトはさらに 1645 年 6 月の宛先不明の書簡において、ドボーヌ問題を本来の問題に近い形に定式化した。これらの書簡はデカルト没後 1667 年にクレルスリエ (C. Clerselier) により『デカルト書簡集』全 3 巻 [2] として出版され、翌年にはラテン語訳も出た、

ドボーヌ問題は微分方程式

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{x-y}, \quad a \text{ は正の定数} \tag{1}$$

で表され、解は c を定数として $x = -a\log((y-x+a)/c)$ あるいは $y = x-a+ce^{-x/a}$ で

ある。微積分が発見されて程なくニュートン (Isaac Newton) とライプニッツ (Gottfried W. Leibniz) は、それぞれドボーヌ問題を含む逆接線問題に微分方程式を適用した。さらに、ライプニッツの微積分を改良・発展させたヨハン・ベルヌーイ (Johann Bernoulli) もドボーヌ問題に微分方程式を適用した。これら全ての数学者は『デカルト書簡集』[2] あるいはそのラテン語訳でドボーヌ問題を知ったと考えられている。

本論文ではデカルト、ニュートン、ライプニッツ、そしてヨハン・ベルヌーイのそれぞれの解法を現代の視点を交え議論する。引用文中 [ ] は筆者による訂正あるいは補足である。

2 ドボーヌの原問題とロベルヴァルの貢献

ドボーヌがメルセンヌに送った書簡も、メルセンヌがデカルトに送った書簡も残ってないので、ドボーヌの原問題の確実なことは分からない。デカルト全集の編集者の一人のタヌリ (P. Tannery) が 1904 年の第 3 回国際数学者会議で図 1 のような復元 [17] を発表した。

En ce qui concerne la seconde, la pièce C nous fournit l'énoncé exact, assez différent, comme forme, de ceux que l'on donne d'ordinaire. Voici cet énoncé:

„Soit la courbe AXE, de laquelle le sommet soit A, l'axe AYZ, et que la propriété de cette courbe soit telle, qu'ayant pris en icelle tel point qu'on voudra, comme X, duquel soit menée la ligne droite XY perpendiculairement ordonnée à l'axe, et par le même point X ayant mené la touchante GXN, sur laquelle, au point X, élevant la perpendiculaire XZ jusqu'à l'axe, il y ait même raison de ZY à YX que d'une ligne donnée, comme AB, à la ligne YX moins AY."

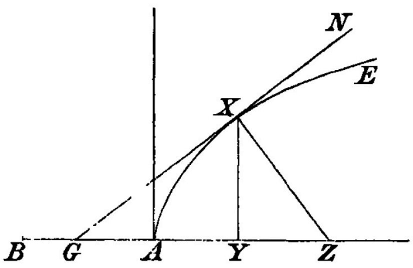

fig. 1.

図 1　タヌリによる原ドボーヌ問題の復元 [17, p.507]

問題文はドボーヌの 1638 年 10 月 10 日付けロベルヴァル宛て書簡に添付された問題[*1][18, pp.142-143] そのもので、図は 1645 年 6 月にデカルトの宛先不明の書簡 ([2] 第

*1　問題文に付けられた図は図 1 の fig. 1 ではなく、漸近線が書き込まれた図 2 である。

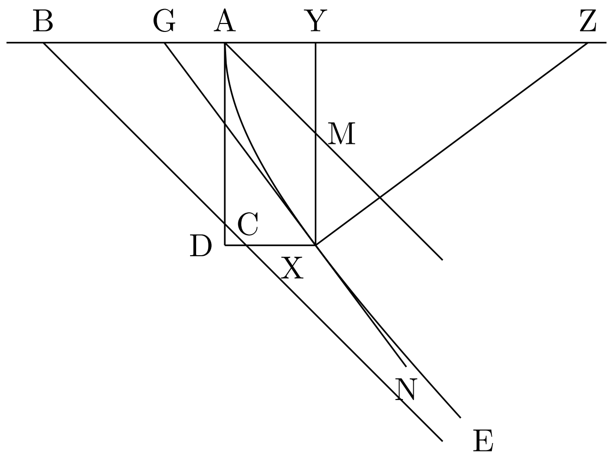

図 2　ドボーヌの 1638 年 10 月 10 日付け書簡につけられた図 [1, V, p.519][18, p.142]

３巻の書簡 79) につけられた図から復元したと考えられる。ロベルヴァル宛の 10 月 10 日付け書簡は､「私は、あなたが私に書いてくださった手紙を受け取りました。[...] そしてもう一方の漸近線の発明について、あなたが書いた手紙に含まれていました」[18, p.139] で始まり、問題文に図 2 が付けられているので、ロベルヴァルが図 2 の漸近線 BC の存在をドボーヌに知らせた返信と考えられる。ロベルヴァルが漸近線をどのように発見したかは不明である。問題文の日本語訳を以下に示す。

> 曲線 AXE は、A を頂点、AYZ を軸をとし、性質は、その上の任意の点、たとえば X をとり、直線 XY は軸に垂直な縦線として引かれ、そして同じ点 X から接線 GXN をとり、X における [接線の] 垂線 XZ を軸と交わるまで延ばしたとき、直線 [線分]ZY と直線 [線分]YX の比は、与えられた直線 [線分]AB と直線 [線分]YX から AY を減じた直線 [線分] と同じ比になるものとせよ。

3　ドボーヌ問題のデカルトによる定式化と解法

3.1　『デカルト書簡集』第 3 巻書簡 71

デカルトは、1639 年 2 月 20 日付けドボーヌ宛ての書簡 ([2] 第 3 巻の書簡 71、日本語訳 [13, pp.187-196]) において、ロベルヴァルが発見した漸近線を用いてドボーヌ問題を以下のように定式化した。

B を通り軸と 45 度で交わる漸近線への接線影が一定の曲線 (曲線上の任意の点 X における接線 GXM に対し RM = BC をみたす曲線) を求めよ。

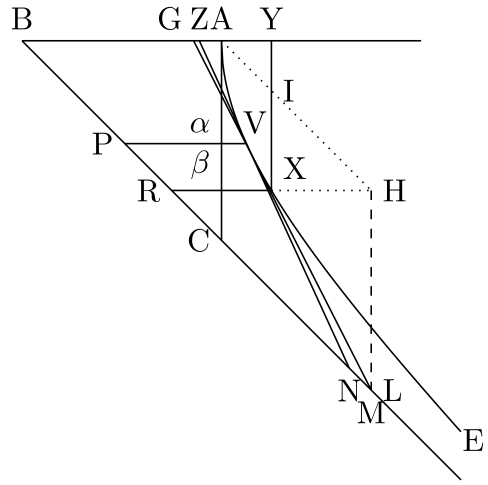

図 3 デカルトの書簡 71 における定式化
(破線と L は筆者の追加)

デカルトは定式化について「計算により簡単にわかる」とのみ書いており、RM = BC の証明は付けてないので、スクリバ (C. Scriba)[14, pp.211-212] を参考に証明を付ける。図 3 において A を通り漸近線に平行な直線と直線 RX の交点を H とし、直線 XY と直線 AH との交点を I とする。XHL が直角になるような点 L を BC 上にとる。そのとき、

$$\frac{\mathrm{XY}}{\mathrm{GY}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{XY} - \mathrm{AY}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{IX}} = \frac{\mathrm{HL}}{\mathrm{XH}},$$

となるので三角形 GYX と三角形 XHL は相似になり、L は接線 GX 上の点である。よって L = M で 2 つの三角形 HRM と ABC は合同であるので、RM = BC である。

デカルトは定式化に基づき、解曲線が今日から見ると対数曲線であることと解曲線の構成法を与えた。概略を述べておく。

解曲線についてデカルトは、図 3 において PV と AC の交点を α とし、AB $= b$ を m 等分し PV $= \frac{n}{m}b$ とおくと

$$\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) b < A\alpha < \left(\frac{1}{m-1} + \frac{1}{m-2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) b. \tag{2}$$

となることを述べている。以下現代の微積分を用いると (2) より

$$A\alpha = \lim_{m\to\infty} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{m-1} + \cdots + \frac{1}{n+1}\right) b = \int_n^m \frac{b}{x} dx = b \log \frac{m}{n}.$$

漸近線 BC を x-軸、軸 BA を y-軸とする斜交座標を用いると $y = \frac{n}{m}b$ のとき $x = \sqrt{2}b \log \frac{m}{n}$ である。m と n を消去すると

$$x = -\sqrt{2}b \log \frac{y}{b}. \tag{3}$$

となる。A を原点、AC を x'-軸、AY を y'-軸とする直交座標では $x=\sqrt{2}x', y=y'-x'+b$ となる。これらの関係を (3) に代入すると直交座標では $x'=-b\log((y'-x'+b)/b)$, あるいは $y'=x'-b+be^{-x'/b}$ となる。なお、デカルトは対数曲線のことは言及してない。上記の詳細は原亨吉 [7, pp.89-92]、三浦伸夫 [11] および三浦 [13, pp.191-194] の脚注を見よ。

デカルトの構成法は以下のように現代的に表すことができる。

AB $=b$ とおく。半直線 l は初期状態では A を通り漸近線に平行な直線上にあり、軸に沿って漸近線に向かって等速度 $\frac{b}{m}$ で動く。線分 k は AB を出発し漸近線に沿って初速度 $\sqrt{2}\frac{b}{m}$ で、l が $\frac{nb}{m}$ だけ進んだとき速度 $\left(\frac{1}{1-n/m}\frac{\sqrt{2}b}{m}=\right)\frac{\sqrt{2}b}{m-n}$ で動く。l と k の交点を X とすると X の軌跡が解曲線である。

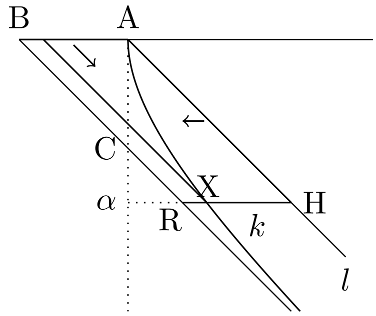

図 4 デカルトの作図法

デカルトの構成法が正しいことは微分方程式を用いると以下のように証明できる。漸近線 BC を x-軸とし軸 BA を y-軸とする斜交座標を取る。等速運動する l(初期位置 AH) と加速度運動する k(初期位置 AB) の交点の斜交座標を $(x,y)=(x(t),y(t))$ とする。

$(x(0),y(0))=(0,b)$,

$y(t)=b-\frac{b}{m}t, \quad (0\leq t<m)$,

$\frac{dx}{dt}=\frac{\sqrt{2}b^2}{my}, \quad (0\leq t<m)$.

と表せる。そのとき x と y は $x=0$ のとき $y=b$ を初期条件とする微分方程式

$$\frac{dx}{dy}=\frac{\frac{\sqrt{2}b^2}{my}}{-\frac{b}{m}}=-\frac{\sqrt{2}b}{y}$$

をみたす。一般解は $x=-\sqrt{2}b\log y+c$ であるが、初期条件より $c=\sqrt{2}b\log b$ なので、$x=-\sqrt{2}b\ \log\frac{y}{b}$ である。

3.2 書簡 79 における定式化

デカルトは、1645 年 6 月に宛先不明の書簡 (([2] 第 3 巻の書簡 79、日本語訳 [9, pp.273-276]) において、ドボーヌの原問題の法線についての性質を接線についての性質に書き換えて定式化した。図はそのまま用い、問題文は現代的に書きなおす。

> N を与えられた線分とする。A を頂点とし GD を軸とする曲線上の任意の点 B をとり、B における接線と軸の交点を L、B から軸に下ろした垂線の足を C とする。A を通り軸と 45 度で交わる直線と BC の交点を I とする。つねに BC : CL = N : BI となるような曲線 ABO を記述する方法を求めよ。

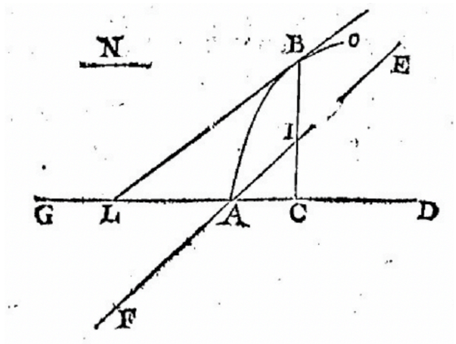

図 5 デカルトの定式化
[2, p.460](`https://gallica.bnf.fr`)

デカルトが定式化した問題がドボーヌの原問題と同値であることを示す。図 5 の D を BD が法線になるように取る。図 6 参照。ドボーヌの原問題の条件は $\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{N}}{\mathrm{BC}-\mathrm{AC}}$ となる。$\dfrac{\mathrm{CD}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CL}}$ と $\mathrm{BC}-\mathrm{AC}=\mathrm{BI}$ よりデカルトが定式化した条件

$$\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CL}} = \frac{\mathrm{N}}{\mathrm{BI}}$$

が得られる。逆も同様である。

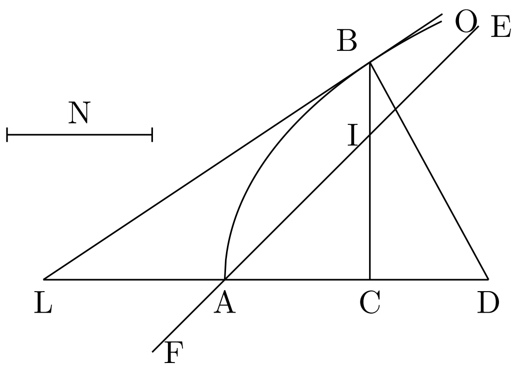

図 6 デカルトの定式化の正当性

4 ニュートンとドボーヌ問題

4.1 「級数と流率の方法について」

ニュートンは 1671 年「級数と流率の方法について」において流率方程式*2を導入し、多項式係数の完全形*3に対する解法と完全形でない場合の無限級数解法 (冪級数解法と漸近冪級数解法) を与えた。そして完全形でない方程式の例として $\dot{x}x - \dot{x}y + \dot{y}a = 0$ を挙げ背理法で証明した。

> しかし、もし $\dot{x}x - \dot{x}y + \dot{y}a = 0$ という方程式が示され、x と y の関係式 $\frac{1}{2}x^2 -$

---

*2 現代の概念と表記法を用いると、ニュートンは時間 t の関数である変数 x, y を流量、$\dot{x} = \frac{dx}{dt}, \dot{y} = \frac{dy}{dt}$ をそれぞれ x, y の流率と呼んだ。$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ を用いて流率方程式から t を消去すると微分方程式が得られる。

*3 微分方程式 $p(x,y)dx + q(x,y)dy = 0$ が $\frac{\partial p(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial q(x,y)}{\partial x}$ をみたすとき、完全形といい $\frac{\partial \Phi}{\partial x} = p(x,y)$, $\frac{\partial \Phi}{\partial y} = q(x,y)$ をみたす関数 $\Phi(x,y)$ が存在する。このとき $\Phi(x,y) = C$ が一般解である。

$xy + ay = 0$ を前述の方法で導いたとすると、問題 1 により $\dot{x}x - \dot{x}y - \dot{y}x + \dot{y}a = 0$ が導かれ、最初に提示した方程式と異なるのでこの手続きは誤りである。

[19, pp.84-87]

完全形でない流率方程式の例としてあげた $\dot{x}x - \dot{x}y + \dot{y}a = 0$ は、微分方程式

$$\frac{dx}{dy} = \frac{a}{y - x}$$

と同値であり、ドボーヌ問題から生じる流率方程式である。

つぎにニュートンは、現代的に表示したとき

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} \left[= \frac{dy}{dx} \right] = f(x, y)$$

となる完全形でない流率方程式に対し、4 つの例題により無限級数解法[*4]を説明した。$f(x, y)$ が実解析的であれば適用可能である。詳細は拙論 [12] に書いた。

4.2 ドボーヌ問題のニュートンによる解の推定

流率方程式

$$\dot{x}x - \dot{x}y + \dot{y}a = 0 \tag{4}$$

をどのように導き、どのような解を得たかについてニュートンは何も残してない。

(4) の導出方法はいくつか考えられるが、一番ありそうな方法を述べる。3.1 節の図 3 において、$\mathrm{AB} = a$ とおき、AC を x 軸にとり上向きを正、AB を y 軸にとり左向きを正とする直交座標を考える。X の座標を (x, y) とおくと、$|x| > |y|, x < 0, y < 0$ である。そのとき、$\mathrm{XH} = x - y < 0$ で、$\mathrm{HM} = -a$ である。

$$\frac{\dot{x}}{\dot{y}} \left[= \frac{dx}{dy} \right] = \frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{XH}} = \frac{-a}{x - y} = \frac{a}{y - x}$$

から (4) が従う。

ニュートンはどのような解を得たのであろうか。(4) を

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{x}{a} + \frac{y}{a}$$

と変形し、表 1 を作成する。

---

*4 ニュートンは多項式係数の完全形に対する解法を特殊解法、特殊解法以外を一般解法と呼んだ。一般解法は $\dot{y} = f(x)\dot{x}$ あるいは $\dot{x} = f(y)\dot{y}$ を場合 1、$\dot{y} = f(x, y)\dot{x}$ あるいは $\dot{x} = f(x, y)\dot{y}$ を場合 2 と呼んだ。無限級数解法は一般解法の場合 2 に対するアルゴリズムである。[19, pp.86-113]

	$-\dfrac{x}{a}$				
$\dfrac{y}{a}$	$*$	$-\dfrac{x^2}{2a^2}$	$-\dfrac{x^3}{6a^3}$	$-\dfrac{x^4}{24a^4}$	$-\dfrac{x^5}{120a^5}$
総計	$-\dfrac{x}{a}$	$-\dfrac{x^2}{2a^2}$	$-\dfrac{x^3}{6a^3}$	$-\dfrac{x^4}{24a^4}$	$-\dfrac{x^5}{120a^5}$
$y =$	$-\dfrac{x^2}{2a}$	$-\dfrac{x^3}{6a^2}$	$-\dfrac{x^4}{24a^3}$	$-\dfrac{x^5}{120a^4}$	$-\dfrac{x^6}{720a^5}$

表 1　ドボーヌ問題のニュートンによる解 (推定)

ニュートンが得た解は

$$y = -\frac{x^2}{2a} - \frac{x^3}{6a^2} - \frac{x^4}{24a^3} - \frac{x^5}{120a^4} - \frac{x^6}{720a^5} \cdots .$$

と考えられる。現代の微積分を用いると

$$y = -a \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n!} \left(\frac{x}{a}\right)^n = a + x - ae^{\frac{x}{a}}.$$

と表せる[*5]。ここでは縦軸を x 軸、横軸は左側を正とする y 軸にとっているので、座標平面を原点に関し $+90^\circ$ 回転させる、すなわち (x, y) を $(y, -x)$ に置き換えると $x = -a - y + ae^{y/a}$ となる。$y = a + x - ae^{\frac{x}{a}}$ のグラフを図 7 に、$x = -a - y + ae^{\frac{y}{a}}$ のグラフを図 8 に示す。

*5 ホワイトサイド (D.T. Whiteside) は「彼 [ニュートン] は、実際には、ドボーヌ問題に対する解をどこにも示していないが、この論文の文脈では、おそらくデカルトの初期条件である $x = y = 0$（これは $k = -a$ を決定する）を用いて、$y(= x + a + ke^{x/a})$ を x の無限級数として展開することを好んだだろう。」[19, p.85 (109)] と注釈した。

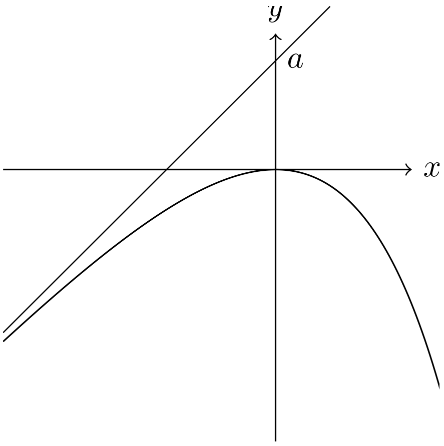

図 7 $y=a+x-ae^{\frac{x}{a}}$ と $y=a+x$ のグラフ

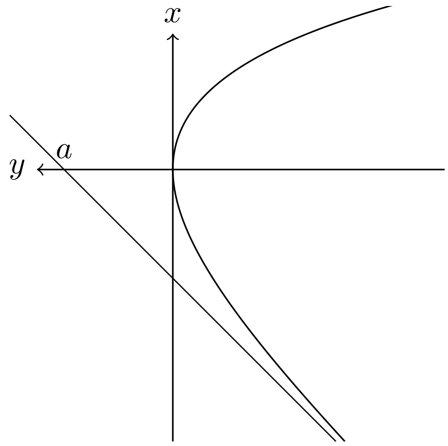

図 8 $x=-a-y+ae^{\frac{y}{a}}$ と $x=-a-y$ のグラフ

5　ライプニッツとドボーヌ問題

ライプニッツは 1676 年 7 月「逆接線法」[6, pp.201-203][8, pp.211-216][5, pp.426-428] において、デカルトによるドボーヌ問題の書簡 71 と 79 の 2 つの定式化を別の問題と考え、それぞれに解答を与えた。おそらく、ライプニッツは書簡 79 の定式化による曲線が軸と 45 度で交わる漸近線を持つことに気がつかなかったためと思われる。

1684 年 10 月、ライプニッツが微積分について最初に出版した論文「分数式にも無理式にも煩わされない極大・極小ならびに接線を求める新しい方法」[10][8, pp.296-307][16, pp.272-280] の付録でドボーヌ問題として扱った問題は、逆接線問題ではあるがドボーヌ問題ではない。微分方程式で表したときドボーヌ問題は $\frac{dy}{dx}=\frac{a}{y-x}$ となるが、ライプニッツが取り上げた問題は $\frac{dw}{w}=\frac{dx}{a}$ である。

5.1　書簡 79 の定式化によるドボーヌ問題に対する解

三浦 [8, p.213] が指摘しているように、ライプニッツは冒頭で比例の処理を誤った。$\mathrm{BC}:\mathrm{CL}=\mathrm{N}:\mathrm{BJ}$ を条件としているので、$\mathrm{CL}=\dfrac{\mathrm{BC}\cdot\mathrm{BJ}}{\mathrm{N}}=\dfrac{y(y-x)}{n}$ とすべきところを、$\mathrm{CL}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BJ}}=\dfrac{yn}{y-x}$ としている。[ ] 内に訂正を書く。さらにライプニッツは $\int\overline{yd\bar{x}}.$[*6] と書くべきところを $\int\overline{dx}y$ あるいは $\int\overline{d\bar{x}y}$ とした。これに関連する誤りも [ ] に訂正する。

(図 7 参照) EAD は 45 度の角、ABO は曲線、BL は接線であるとし、縦線 BC-

---

*6　数式における上線 $\overline{}$ はカッコを表す。たとえば、$\int\overline{d\bar{x}y}=\int(d(x)y)$ である。

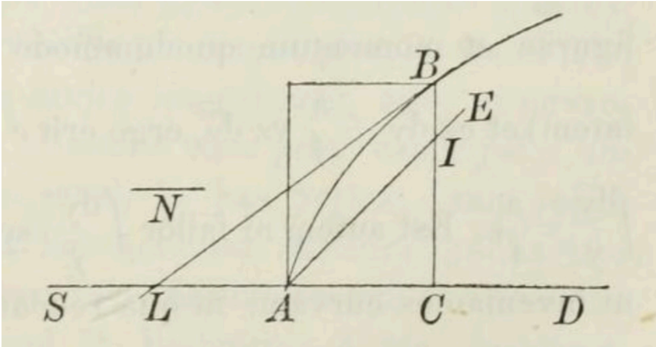

図 7　書簡 79 の定式化に対するライプニッツの解答 [6, p.201](https://archive.org/)

対-CL は線 N-対-BJ とすれば、[$\mathrm{BC} = y, \mathrm{AC} = x$ とおくと]

$$\mathrm{CL} = \frac{\mathrm{BC} = yn}{\mathrm{BJ} = y - x} \quad \left[\mathrm{CL} = \frac{\mathrm{BC} \cdot \mathrm{BJ}}{\mathrm{N}} = \frac{y(y-x)}{n}\right]$$

$\mathrm{CL} = t$(とすると)

$$t = \frac{ny}{y-x},\ \frac{n}{t} = \frac{y-x}{y} = 1 - \frac{x}{y},\ \frac{x}{y} = \frac{t-n}{t}$$

$$\left[t = \frac{y(y-x)}{n},\ \frac{t}{y} = \frac{y-x}{n}\right]$$

(また)

$$\frac{t}{y} = \frac{d\bar{x}}{dy}$$

故に

$$\frac{d\bar{x}}{dy} = \frac{n}{y-x},\ d\bar{x}y - xd\bar{x} = d\bar{y}n \quad \left[\frac{d\bar{x}}{dy} = \frac{y-x}{n},\ yd\bar{y} - xd\bar{y} = nd\bar{x}\right]$$

故に

$$\int d\bar{x}y - \int \overline{xd\bar{x}} = n\int dy \quad \left[\int \overline{yd\bar{y}} - \int xd\bar{y} = n\int d\bar{x}\right]$$

ところが、

$$\int d\bar{y} = y,\ \int \overline{xd\bar{x}} = \frac{x^2}{2}, \quad \left[\int \overline{yd\bar{y}} = \frac{y^2}{2},\ \int d\bar{x} = x,\right]$$

また $\int \overline{d\bar{x}y}$ は領域 ACBA であるから、

$\Big[$AB を対角線とする長方形を ACBF とする。$\int xd\bar{y}$は領域 ABFA だから$\Big]$

領域 ABCA が

$$\frac{x^2}{2}+ny \text{ または } \frac{\mathrm{AC}^2}{2}+n\mathrm{BC}.$$
$$\left[xy-\frac{y^2}{2}+nx \text{ または } \mathrm{ACBH}-\frac{\mathrm{BC}^2}{2}+n\mathrm{AC}.\right]$$

となる曲線が求められている。[後略]

三浦・原訳 [8, pp.213-213]

ライプニッツは

$$\int ydx=\frac{x^2}{2}+ny \quad \left[\int ydx=xy-\frac{y^2}{2}+nx\right]$$

から y を求めると述べているが、両辺を x で微分すると

$$y=x+n\frac{dy}{dx} \quad \left[y=y+x\frac{dy}{dx}-y\frac{dy}{dx}+n\right]$$

すなわち

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y-x}{n} \quad \left[\frac{dy}{dx}=\frac{n}{y-x}\right]$$

となるので、スクリバ [15] が指摘したように、微分方程式を積分方程式 $\int ydx = \frac{x^2}{2}+ny$ $\left[\int ydx=xy-\frac{y^2}{2}+nx\right]$ に書き直しただけで解にはなってない。

5.2 書簡 79 の定式化によるドボーヌ問題に対する解

ライプニッツは漸近線と軸のなす角を 45 度に固定しないで任意にとっている。また、スクリバが指摘したように、$\frac{dy}{dx}$ の符号を誤っている。(図 8 において $\mathrm{BR}=x, \mathrm{RX}=y$ とおいているので、x が増加すれば y は減少するので、$\frac{dy}{dx}<0$) 符号の誤りは [ ] 内に正す。

> (図 8 参照) RX を縦線、XN を接線とすると、RN は常に定長すなわち BC に等しくなる。このような曲線の性質が問われているのです。この場合、私としては次のように行うのがよいと考えます。
> 先の RX とは直線 SV だけ異なる別の縦線を PV とする。明らかに、RN に平行な XS を引くと、三角形 SVX と RXN は相似になるであろう。
> $\mathrm{RN}=t=c$ 定数、$\mathrm{PR}=\mathrm{SX}=\beta=d\bar{x}$. $\mathrm{BR}=x,\ \mathrm{RX}=y,\ \mathrm{SV}=dy$
> とすれば、$\frac{d\bar{y}}{dx}=[-]\frac{y}{t=c}$ となるであろう。故に $[-]cy=\int \overline{yd\bar{x}}$ あるいは $[-]cd\bar{y}=$

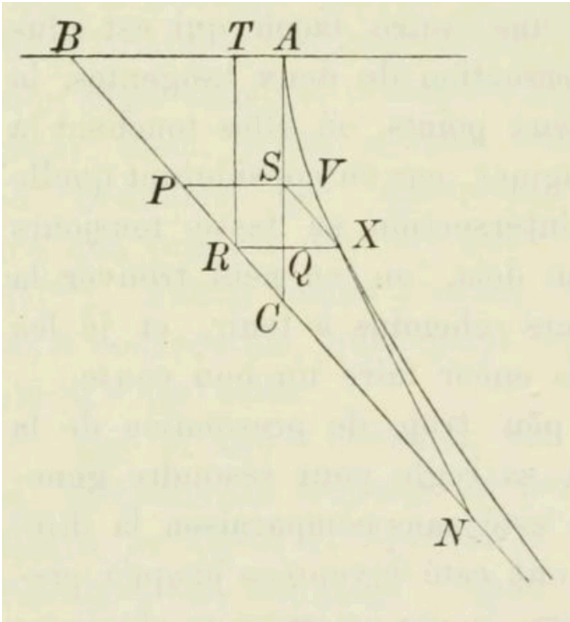

図 8　ライプニッツの書簡 71 の解答 [6, p.202](https://archive.org/)

> $yd\bar{x}$.
>
> (中略)
>
> さて、$[-]c\int\frac{dy}{y}=\frac{a}{f}z$ であったから、$[-]\frac{fc}{a}\int\frac{dy}{y}=z$, であり、これは対数曲線に属する。
>
> 三浦・原訳 [8, pp.213-216]

$\frac{dy}{dx}$ の符号を訂正しても、正しいのは $[-]cy=\int\overline{yd\bar{x}}$ までで、斜交座標を直交座標に変換するところは正しくない。ライプニッツの結語

> 以上により、私たちはデカルト『書簡集』の第 3 巻に見られる逆接線法の問題をすべて解いたことになる。そのうちの一つは彼自身が解いたと『書簡集』の第 3 巻書簡 79 の 460 頁で言われているが、解は存在しない。もう一つの問題は、解こうとしたが、彼にはそれができず、その線は変則的であって、他に表現法がなければまったく人知を超え、天使の力をも超えた表現によるほかない、と告白している。
>
> 三浦・原訳 [8, p.216]

の大部分は事実でない。特に後段の「その線は変則的であって、他に表現法がなければまったく人知を超え、天使の力をも超えた表現によるほかない、と告白している」は、ライプニッツの作り話（フェイク）である。

とはいえ、ドボーヌ問題に微分方程式を適用したこと、比例の処理を誤らなければ $\frac{dy}{dx} = \frac{n}{y-x}$ を導いていたこと、式の形では与えることができなかったものの「(解曲線は) 対数関数に属する」と明示したことの 3 点は評価に値するだろう。

6　ヨハン・ベルヌーイとドボーヌ問題

1742 年にクラメール (Gabriel Cramer) が編集したヨハン・ベルヌーイの『全集』にはドボーヌ問題に関連する論文が 4 編収録されている。表 2 に初出と『全集』の巻、章、ページを示す。

表 2　ヨハン・ベルヌーイのドボーヌ問題についての論考

初出	『全集』(1742)
ジュルナール・デ・サヴァン 1692, pp.598-599	Vol. 1, N° IX pp.62-63
学術紀要 1693 V, pp.234-235	Vol. 1, N° XI pp.65-66
学術紀要 1696 II, pp.82-85	Vol. 1, N° XXVII pp.145-148
	Vol. 3, N° CXLIX. Lectio XI. pp.423-424

ベルヌーイがロピタル (Guillaume François Antoine de l'Hôpital) に対し 1691-92 年に個人講義した「積分計算講義録」[*7]は『全集』第 3 巻に収められている。「積分計算講義録」の第 11 講は他の 3 編をほぼ網羅している[*8]ので、本節では第 11 講の後半 [3, III,pp.423-424] を取り上げる。

> もう一つの例は、ドボーヌ氏がデカルト氏に与えた問題である。この問題の解決法は彼の著作には載ってないが、彼の書簡集 (III 巻、書簡 71) に載っている。この方法によれば、この問題の解決はそれほど簡単ではないようで、実際、一見すると、この方法では問題は不可能に思える。しかし、変数を変更することで変数を分離することが容易になり、双曲線の求積法が与えられれば、この問題は完全に解決できることがわかる。なぜなら、曲線は機械的だからである。
> [図 9 Fig.46 参照] 問題はこのようである。直線 AC は軸 AD と半直角をなし、E

[*7] ベルヌーイの「積分計算講義録」は『全集』で初めて公刊された。第 8 講から第 14 講までは「逆接線法」を扱っている。

[*8] 3 編とも図 9 と共通の図を用いている。N° IX は Fig.47、N° XI は Fig.46、N° XXVII は Fig.46 と Fig.49 である。

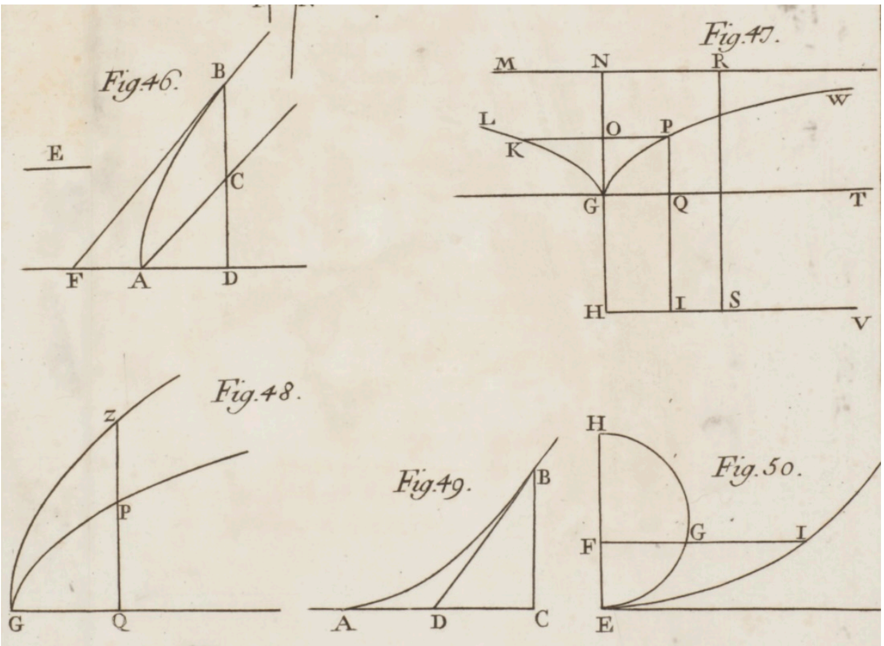

図 9　ベルヌーイの解法につけられた図 [3, III,p.426](京都大学数学教室貴重書)

は与えられた定線分とする。縦座標 BD と接線影 FD の比が E と BC になるような曲線 AB の性質は何か。

解法。AD $= x$, DB $= y$, E $= a$, とせよ、仮定より $dy : dx = a : (y - x)$ とすると、$adx = ydy - xdy$ となる。この方程式から曲線の性質を見つけるには、積分するか、一方の辺に y と dy、他方の辺に x と dx が現れるように書き換えて求める。そうすれば 2 つの面積を求めることができ、それらを比較することで曲線の性質を知ることができる。しかし、今求めた方程式を積分することはできないし、x と dx を y と dy から分離することもできない。しかしながら、別の変数の値を代入することで、別の式に変えることができる。それゆえ、$y - x = z$ とせよ。そうすれば、$y = x + z, dy = dx + dz$ である。ちょうど求めたい方程式は $adx = zdz + zdx$ あるいは $adx - zdx = zdz$ そして $dx = zdz : (a - z)$ に変換される。したがって、これら 2 つの変数は分離し、a を掛けると曲線 $adx = adz : (a - z)$ となる。[以下は図 9 Fig.47 参照] そして、垂直線 GT と NH を描き、GN = GH = a とし、点 H と N を通り GT に平行な HV と MR を描き、NR = NG を仮定し、[GT の] 垂線 RS を描き、RM, RS を漸近線とする G を通る双曲線 LKG を描く：したがって、GO = z、GQ = x の場合、KO = $az : (a - z)$ であり、QI は常に a に等しいので、双曲線領域 KGO は長方形 HQ と等しくなり、直線 IQ, KO が交わる点 P

は、今求めた式 $adx = azdz : (a - z)$ を満たす曲線 GPW を作り出す。[以下は図 9 Fig.48 参照] しかし、これから目的の曲線 AB を構成するには、PZ が横軸 GQ に等しくなるように QP を Z に生成する以外に何の作業も必要ない；点 Z は目的の曲線 AB 上にある。なぜなら、PZ $=$ GQ $= x =$ AD であり、QP $= z$ であるので、QP $+$ PZ $= z + x = y =$ DB となる。これが求めるべきものであった。

系 I NR は GPW の漸近線で [図 9 Fig.47]、QP $=$ BC である [図 9 Fig.46, 47]。この曲線 AB は AC に平行な漸近線を持つ [図 9 Fig.46]。
系 II 領域 ADB[の面積] は $xy + ax - \frac{1}{2}yy$ である [図 9 Fig.46]。

ヨハン・ベルヌーイは、$\frac{dy}{dx} = \frac{a}{y-x}$ を $adx = ydy - xdy$ と表し、変数変換 $y - x = z$ を行い変数分離形 $dx = \frac{zdz}{a-z}$ に帰着させた。初期条件を $x = 0$ のとき $z = 0$ とすると対数関数を用いれば

$$x = -z - a\log\frac{a-z}{a}$$

と表せるので、$z = y - x$ と置き戻せば

$$y = -a\log\frac{a-y+x}{a}$$

が得られるが、17 世紀末にはまだ対数関数は定義されてなかったので、ベルヌーイは解を以下のように構成した。

G を原点、GT を x-軸、NH を z-軸とし、GN $=$ GH $=$ NR $= a$ に取る (図 9 Fig. 48 参照)。G を通り RS と RM を漸近線とする直角双曲線 LKG を描く。(LKG は方程式 $z = \dfrac{-ax}{a-x}$ で表される。) GO $= z$ および GQ $= x$ とおくと KO $= az : (a - z)$ となる。領域 KGO と長方形 GQIH の面積が等しくなるように点 P を取る。KGO $= \displaystyle\int_0^z \frac{az}{a-z}dz$ と GQIH $= \displaystyle\int_0^x adx$, $zdz = (a - z)dx$ より曲線 GPW が xz-平面における解になる。$z = y - x$ に置き戻すと xy-平面の解が得られる。

系 I はロベルヴァルが発見した漸近線 (2 節参照) の導出である。系 II はライプニッツが比例の処理を誤まらなかったら導けたであろう面積 (5.1 節参照) である。

7 おわりに

ドボーヌ問題は、17 世紀の数学者にとって 2 つの理由で難問であった。第 1 の理由は、解曲線が対数曲線、見方を変えれば指数曲線であることである。17 世紀には対数関数および指数関数は定義されてなかった。1848 年にオイラー (Leonhard Euler) が『無限解析

序説』[4] において対数関数および指数関数を無限級数により定義した。第 2 の理由は、微分方程式はそのままでは積分できず、さらに完全形でも、変数分離形でもないことである。

ドボーヌ問題解決についての最初の貢献は、ロベルヴァルが漸近線の存在を見つけドボーヌに知らせたことである。漸近線はドボーヌあるいはメルセンヌからデカルトにも伝えられたと考えられる。最大の貢献は、デカルトが漸近線への接線影が一定であることを見出し、この性質を使って解曲線を提示し、2 本の動く直線の交点として正確な構成法を与えたことである。デカルトの構成法が正しいことは斜交座標における微分方程式を用いて証明できる。さらに書簡 79 における定式化は微積分を手にした後世の数学者に影響を与えた。

ニュートンはドボーヌ問題を表す流率方程式が完全形でないことを証明した。ドボーヌ問題の解は残ってないが、彼が考案した無限級数解法を適用して最初の数項を与えたと考えられる。1 階流率方程式 $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = f(x,y)$[1 階常微分方程式 $\frac{dy}{dx} = f(x,y)$] に対する無限級数解法は、$f(x,y)$ が実解析的であれば変数分離形でなくても支障なく適用できる。

ヨハン・ベルヌーイは、微分方程式の変数を変換することで変数分離形に帰着させ、両辺の積分に対応する 2 つの面積がつねに等しくなるように解曲線を構成した。対数曲線の代わりに双曲線の面積を用いたのである。

参考文献

[1] C. Adam et P. Tannery ed., *Œuvres de Descartes*, publiées, J.Vrin, 1996.

[2] C. Clerselier, *Lettres de M. Descartes*, Tome 3, 1667.
`https://gallica.bnf.fr/ark:/12148/bpt6k54012281/f438.item.r=.langEN`

[3] Gabriel Cramer ed., *Johann Bernoulli, Opera Omnia*, 1742.
`https://rmda.kulib.kyoto-u.ac.jp/item/rb00028921#?c=0&m=0&s=0&cv=1776&r=0&xywh=75%2C438%2C3281%2C3421`

[4] Leonhard Euler, Introductio in analysin infinitorum, E101, 1748.
`http://eulerarchive.maa.org/docs/originals/E101capitel7.8.pdf`

[5] John Fauvel and Jeremy Gray, *The History of Mathematics – A Reader –*, The Open University, 1987.

[6] C.J. Gerhardt, *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* 1. Bd, 1899.
`https://archive.org/details/derbriefwechselv00leibuoft/`

page/201/mode/1up
[7] 原亨吉、近世の数学、ちくま学芸文庫、2013、(『数学講座 18 数学史』1975 の文庫化).
[8] 原亨吉他、ライプニッツ著作集、2、工作舎、1977.
[9] 倉田隆他、デカルト全書簡集、第 6 巻、知泉書院、2015.
[10] G.W. Leibniz, Nova methodus pro maximis et minimis, *Acta eruditorum*, 1684, 467-473.
https://archive.org/details/s1id13206500/page/n499/mode/2up
[11] 三浦伸夫、デカルトとドボーヌ問題、[13, pp.335-339].
[12] Naoki Osada, Fluxional equations by Isaac Newton, RIMS Kôkyûroku Bessatsu, accepted.
[13] 武田裕紀他、デカルト全書簡集、第 3 巻、知泉書院、2015.
[14] Christoph J. Scriba, Zur Lösung des 2. Debeaunescben Problems durcb Descartes, *Archive for History of Exact Sciences*, 1, 406-419 (1961).
[15] Christoph J. Scriba, The inverse method of tangents: A dialogue between Leibniz and Newton (1675-1677), *Archive for history of exact sciences*, 1964.
[16] D.J. Struik, *A source book in mathematics*, 1200-1800, Harvard University Press, 1969.
[17] P. Tannery, Pour l'histoire du problème inversa des tangentes, *Verhandlungen des dritten Mathematiker-Kongresses in Heidelberg von 8. bis 13. August 1904*. Leipzig: B. G. Teubner. 502–514.
[18] P. Tannery and C. de Waard, *Correspondance du P. Marin Mersenne, religieux minime*, VIII, Publiée et annotée, Editions du Centre National de la Recherche Scientique, 1963.
[19] D.T. Whiteside, *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Vol.III, Cambridge at the University Press, 1969.