特集論考●学問史の世界　佐々木力と科学史・科学哲学

『発微算法』と傍書法
―関孝和はいつ傍書法を創案したか―

長田直樹 ◉東京女子大学名誉教授

1　はじめに

アイザック・ニュートンは『自然哲学の数学的諸原理』（1687 年、以下『プリンキピア』）において自然現象の法則を古代ギリシャの幾何学[*1]のスタイルで説明したが、『プリンキピア』の諸命題 の導出には1660 年代に彼が発見した流率法（微積分学）を用いたのではないかと疑われた[*2]。しかし今日この疑いは晴らされている[*3]。

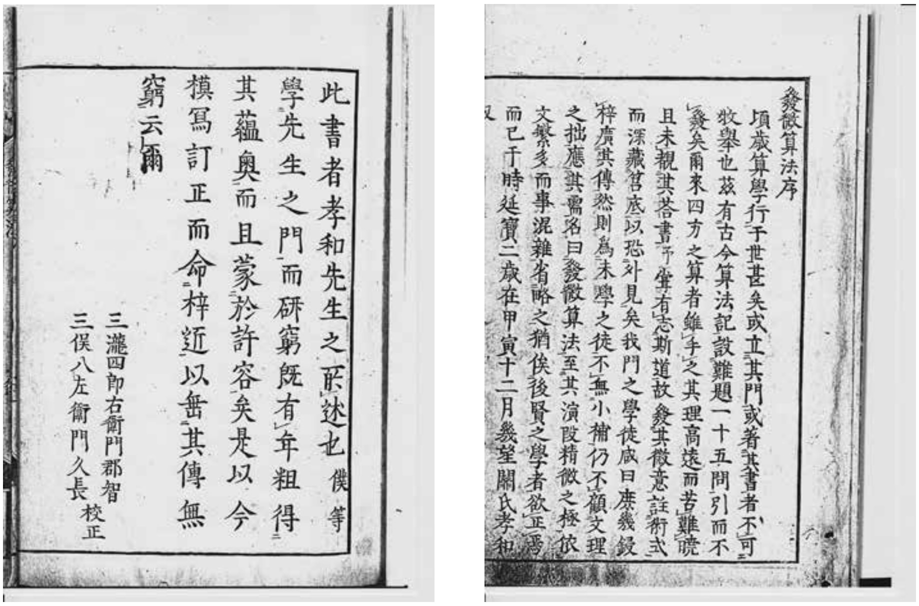
同様の疑いが関孝和の『発微算法』（1674 年序）にも掛けられている。関孝和は沢口一之の『古今算法記』（1671 年）の遺題（解答をつけないで出題する挑戦的な問題）を演段術を用いて解いた。これに対し、関は演段術のみならず傍書法も併用したのではないか、という疑いである。ちなみに演段術というのは、複数の未知数からなる連立代数方程式を立て未知数を 1 つづつ消去して 1 つの未知数のみからなる代数方程式に帰着させる方法である。また傍書法というのは、算木記号の傍に文字を書くことにより文字式を表示する方法で、これにより筆算での代数計算が可能になる。上記のような疑いは、演段術は傍書法を用いて遂行される、あるいは傍書法は演段術の一部である[*4]との考えによるものと思われる。そこで関が『発微算法』で用いた演段術に傍書法が含まれるのかが問題となる。含まれないとすると、傍書法を用いないで演段術が使えるのか、また傍書法は、いつ創案されたのかも問題になる。本稿ではこれらの問題を検討することにしたい。

2　『発微算法』の背景と数学史的意義

日本の数学は、中国の数学を吸収することから始まっているが、ここで先ず、江戸時代の数学に大きな影響を与えた算書『算学啓蒙』（1299 年）について少し触れておく。

中国の数学は宋・元時代に最も発展し、天元術が用いられた。天元術というのは、算木と算盤を使った代数、今日の未知数 1 つの代数方程式に相当する。天元術が記載されたこの時代の算書に元の朱世傑が著した『算学啓蒙』[*5]がある。明代になるとそろばんが算木に取って代わり、『算学啓蒙』は亡失してしまった。しかし、李氏朝鮮では取才という官吏登用試験で『算学啓蒙』が用い

おさだ　なおき◎ 1948 年生まれ。大阪大学大学院理学研究科修了。名古屋大学博士（工学）。
長崎総合科学大学助教授、東京女子大学教授。
専門は数値解析および数学史。
著書に『数値微分積分法』（現代数学社、1987）。論文に “An optimal multiple root-finding method of order three”（Journal of Computational and Applied Mathematics）、“A convergence acceleration method for some logarithmically convergent sequences”（SIAM Journal on Numerical Analysis）、「『解見題之法』について」（RIMS Kokyuroku Bessatsu）、「算博士三善為康について」（数学史研究）など多数。


發微算法序
頃歳算學行于世甚矣或立其門或著其書者不可
枚擧也茲有古今算法記設難題一十五問引而不
發矣爾来四方之算者雖手之其理高遠而若難曉
且未覩其答書予嘗有志斯道故發其微意註術式
而深藏笥底以恐外見矣我門之學徒咸曰庶幾鋟
梓廣其傳然則爲末學之徒不無小補仍不顧文理
之拙應其需名曰發微算法至其演段精微之極依
文繁多而事泥雜省略之猶俟後賢之學者欲正焉
而已于時延寶二歳在甲寅十二月幾望關氏孝和

此書者孝和先生之所述也僕等
學先生之門而研窮既有年粗得
其蘊奥而且蒙於許容矣是以今
摸寫訂正而命梓匠以壽其傳無
窮云爾
三瀧四郎右衛門郡智
三俣八左衛門久長　校正

図１『発微算法』（佐々木力蔵）（右：序文、左：跋）

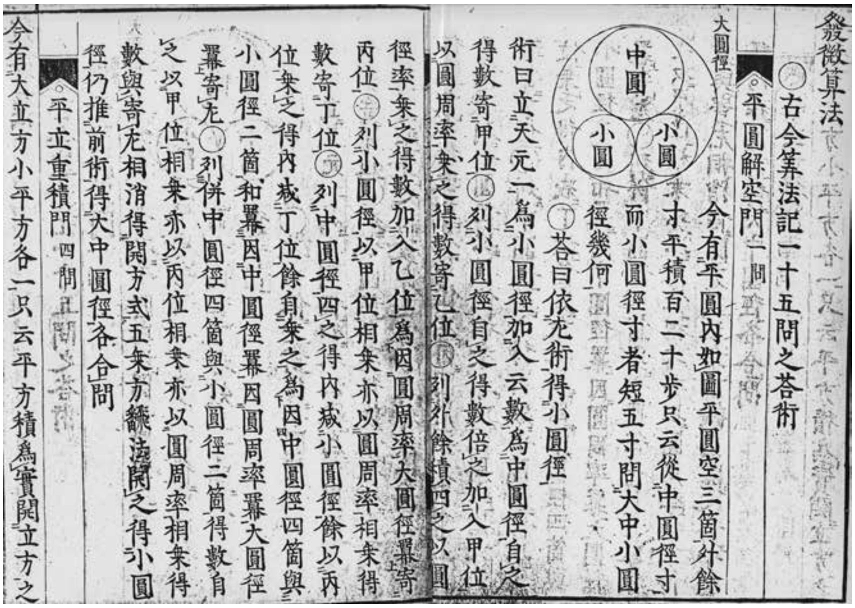
られ[*6]、朝鮮で４回復刻[*7]された。

そしてこれが、豊臣秀吉の朝鮮出兵（1592 年）を機に日本にもたらされた[*8]。これに久田玄哲が訓点を付けて『新編算学啓蒙』（1658 年）を出版した。だが、『算学啓蒙』には方程式（開方式）の立て方（天元術）は書かれているものの、解き方（開方術）が書かれておらず当初は久田を含め誰も理解できなかった[*9]。久田に続き、星野実宣（さねのぶ）が注釈をつけて『新編算学啓蒙註解』（1672 年）を刊行するが、星野も天元術を理解してなかった[*10]。『算学啓蒙』に正確で分かりやすい注をつけたのは、建部賢弘（たけべかたひろ）が『算学啓蒙諺解（げんかい）大成』（1690 年刊）においてである。

さて、日本で初めて天元術を正しく用いて算書を著した数学者は沢口一之である。沢口は『古今算法記』（1671 年）で天元術を解説し、この書で佐藤正興（まさおき）が『算法根源記』（1669 年）で出した遺題150 問すべてを天元術に帰着させて解いた。さらに天元術に容易に帰着させることができない遺題15問[*11]を出題した。これらは従来の方法では解けず、多くの数学者が挑戦したにもかかわらず誰も成功しなかった。

関孝和は、演段術を創案してこの難問を解決し、それを『発微算法』で公表した。その後彼はさらに傍書法を用いて、終結式、行列式、判別式などを世界に先駆けて発見している。なお、天元術では数字係数の代数方程式を扱うのに対し、傍書法では文字係数の代数方程式を扱う。したがって、文字として未知数を取ることにより、連立代数方程式が扱えることになる[*12]。

江戸時代の日本の数学は、この書と関の一番弟子である建部賢弘（たけべかたひろ）の『発微算法演段諺解（げんかい）』[*13]（1685年、以下『演段諺解』と略す）の出版により、算木を使った代数（天元術）から筆算による代数（傍書法）に飛躍的に発展した[*14]。関の孫弟子（松永良弼（よしすけ））の代になると傍書法を用いた演段術は点竄術（てんざんじゅつ）と呼ばれるようになり、点竄術を用いないと解けないような問題が各地の神社に算額として掲げられた。



發微算法
○古今算法記一十五問之荅術
平圓解空門 一問
大圓徑
中圓
小圓
小圓
今有平圓內如圖平圓空三箇外餘
寸平積百二十步只云從中圓徑寸
而小圓徑寸者短五寸問大中小圓
徑幾何
○荅曰依左術得小圓徑
術曰立天元一為小圓徑加入云數為中圓徑自之
得數寄甲位○列小圓徑自之得數倍之加入甲位
以圓周率乗之得數寄乙位○列外餘積四之以圓
徑率乗之得數加入乙位為因圓周率大圓徑冪寄
丙位○列小圓徑以甲位相乗亦以圓周率相乗得
數寄丁位○列中圓徑四之得內減小圓徑餘以丙
位乗之得內減丁位餘自乗之為因中圓徑四箇與
小圓徑二箇和冪因中圓徑冪因圓周率冪大圓徑
冪寄左○列併中圓徑四箇與小圓徑二箇得數自
之以甲位相乗亦以丙位相乗亦以圓周率相乗得
數與寄左相消得開方式五乗方飜法開之得小圓
徑仍推前術得大中圓徑各合問
平立重積門 四問
今有大立方小平方各一只云平方積為實開立方之

図２『発微算法』の内題と第一問（佐々木力蔵）

３ 『発微算法』の書誌

『発微算法』については 4 点の所在が確認されている。

(1) 日本学士院所蔵本（遠藤利貞旧蔵本）

(2) 佐々木力所蔵本（旧蔵者不明）

(3) 関西大学図書館所蔵本（田中由真旧蔵本）

(4) 和算研究所所蔵本（下平和夫旧蔵本）

これらのうち、(1)(2)(3) は初版、(4) は再版である。初版と再版で異なる点は、初版では問題七の開方式（方程式）の次数を 52 次と間違えているのに対し、再版では 36 次と訂正され[*15]関連した巻末の数値も訂正されていること、さらに書肆名「本屋嘉兵衛刊行」が削除されている[*16]ことである。

享保七（1722）年に出版条例で、書物を新たに出版する際には作者と版元の実名を奥書に書くことが義務付けられたが、それ以前にも巻末に刊行年、版元名を入れる慣習はあった[*17]。しかし、『発微算法』には「本屋嘉兵衛刊行」とあるだけなので、正確な出版年はわからない。ただ、序文の最後（図１右の10行目）に「時に延宝二年十二月十四日関氏孝和叙す」[*18]とあるので、延宝二（1674）年十二月十四日[*19]から程なく[*20]して刊行（販行）されたと考えられる。したがって、刊行年は延宝三（1675）年であろう。

関は序文（図１右の５行目から９行目）で、「私はかつてその道を志ざしたので、そのほんの少しの志を発し、術式を書き記した。しかしながら、箱の底深くにしまい込み、他人に見せることを恐れた。私の門人らは皆、その伝を版木に刻み広めて欲しい。そうすれば、その伝は末学の徒にいささかも役立たないということはないという。よって、文理の拙きを顧みずその求めに応じ、名付けて発微算法という。その演段は極めて精微[*21]で、文は複雑で多く、術は入り組んでいるので省略 する。なお、後世の賢人の学者により本書が正されることを望むばかりである」[*22]と記している。

また二人の門弟、三滝那智と三俣久長による跋文（後書き）（図１左）には、「この書は孝和先生が述べたものである。僕ら先生の門に学び、長年に渡り研究した。粗くではあるが奥義を得たので許された。今模写訂正し、版木匠に命じて、先生の教えを未来に残す」とある。

関の序文および門弟の跋文通り[*23]とすると、門人たちから出版の強い要望があったので出版することになり、出版に際しては門人たちが草稿を模写し校正を行なったということになる。ニュートンの『プリンキピア』（1687年）に関してハリーがなしたのと同じように[*24]、門弟たちが出版交渉を行い、出版費用も負担した[*25]のかもしれない。

４　『発微算法』における第一問の解答

『発微算法』の解答はどのように記述され、何が省略されたのかを遺題第一問から考察する。第一問の問題と関の解答の原文を図２に示す。全て漢文で書かれているので、今日の数式を用いて現代語訳する。記号：＝（コロンイコール）は左辺の式を右辺の式で定義するという記号である。

第一問　大円の中に中円が１つと小円が２つそれぞれ図２のように接している。大円から中円と小円を取り除いた部分（外余）の面積が120歩、小円の直径（小円径）は中円の直径（中円径）より５寸短い。このとき、大円、中円、小円の直径を求めよ。（１平方寸を１歩とする。円周率πは有理数$\dfrac{q}{p}$で近似する。原文では、pを「圓徑率」、qを「圓周率」と呼んでいる。）

解答　小円径をxとする。中円径yは

$$y := x+5 \tag{1}$$

これを二乗した数をA（甲位）に寄せる。

$$A := (x+5)^2 \tag{2}$$

小円径を二乗した数を２倍し、Aを加えた数にqを掛けた数をB（乙位）に寄せる。

$$B := (2x^2+A)q \tag{3}$$

外余積120を４p倍しBを加えた数は、qと大円径zの二乗との積に等しい。これらの数をC（丙位）に寄せる。

$$C := 120\cdot 4p+B = qz^2 \tag{4}$$

小円径にAとqを掛けた数をD（丁位）に寄せる。

$$D := xAq \tag{5}$$

中円径yの４倍から小円径xを減じた余りをC倍した数からDを減じた余りの二乗は、中円径の４倍と小円径の２倍とを加えた和の冪と中円径の冪とqの冪と大円径zの冪の積に等しくこれをL（左）に寄せる。

$$L := ((4y-x)C-D)^2 = (4y+2x)^2y^2q^2z^2 \tag{6}$$

中円径の４倍と小円径の２倍を併せた数の冪にAとCとqの積をLから減じて開方式を得る。

$$((4y-x)C-D)^2-(4y+2x)^2ACq=0 \tag{7}$$

６次方程式が得られこれを開いて小円径、よって大円径、中円径が得られ、題意に合う。以上が『発微算法』の解答の全てである。

（3）式の B は、直径 d の円の面積は $\dfrac{\pi}{4}d^2 \approx \dfrac{q}{4p}d^2$ であるので、中円と２個の小円の面積の和（大円の面積から外余積の面積を引いた値）に４p を掛けた数を表す。

（4）式の中辺と右辺はともに大円の面積の４p 倍である。ここまでは、門人以外の読者も丁寧に読めばフォローできたと思われる。しかしながら、（5）式以下は途中の説明が略されており難解である。

（5）（6）式を『演段諺解』に基づき説明する。大円、中円、小円の中心をそれぞれ O_1, O_2, O_3 とし、２つの小円の接点を C とする。図３参照。

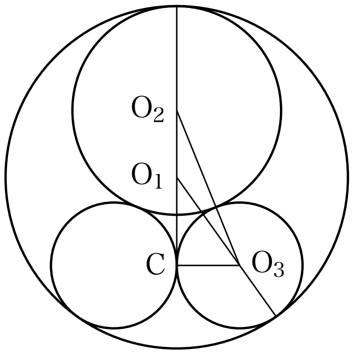


図３　問一演段図

三平方の定理を繰り返し用いて、

$$\overline{O_1C}^2=\overline{O_1O_3}^2-\overline{O_3C}^2=\frac{1}{4}z^2-\frac{1}{2}xz$$

$$\overline{O_1O_2}=\frac{1}{2}(z-y)$$

$$\overline{O_2C}^2=\overline{O_2O_3}^2-\overline{O_3C}^2=\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}xy$$

このとき、

$$\overline{O_2C}^2-\overline{O_1O}^2-\overline{O_1O_2}^2=\frac{1}{2}(xy+xz+yz-z^2)$$

一方、

$$\overline{O_2C}^2=\overline{O_1C}^2+2\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_1C}+\overline{O_1O_2}^2$$

より、

$$\overline{O_2C}^2-\overline{O_1C}^2-\overline{O_1O_2}^2=2\overline{O_1O_2}\cdot\overline{O_1C}=(z-y)\overline{O_1C}$$

したがって、

$$\frac{1}{2}(xy+xz+yz-z^2)=(z-y)\overline{\mathrm{O_1C}}$$

両辺を２倍し二乗すると

$$(xy+xz+yz-z^2)^2=(z-y)^2(z^2-2xz)$$

両辺を展開し、左辺から右辺を引くと

$$x^2y^2+x^2z^2+2x^2yz+4xy^2z-4xyz^2=0$$

x で約すと

$$xy^2+xz^2+2xyz+4y^2z-4yz^2=0$$

ここで、

$$xy^2+(x-4y)z^2=-z(2xy+4y^2)$$

と変形し、両辺二乗する（二乗化という）と、

$$(xy^2+(x-4y)z^2)^2=z^2(2xy+4y^2)^2$$

両辺 q^2 を掛けると

$$((4y-z)z^2q-xy^2q)^2=(4y+2x)^2y^2q^2z^2$$

これは、(6) 式である。

(7) が x の６次方程式であることは次のようにわかる。

$$y=x+5,\quad A=(x+5)^2,\quad C=120\cdot 4p+(2x^2+(x+5)^2)q,\quad D=x(x+5)^2q$$

を (7) に代入すると

$$\begin{aligned}&((3x+20)(120\cdot 4p+(3x^2+10x+25)q)-x(x+5)^2q)^2\\&\quad-(6x+20)^2(x+5)^2(120\cdot 4p+(3x^2+10x+25)q)q=0\end{aligned}\tag{8}$$

これは、x についての６次方程式である。

５　『発微算法』の記述スタイル

４節で見た第一問の解答から分かるように、『発微算法』では記号表現された式の変形や計算は行っておらず、すべて文章表現（術文）である。

『発微算法』は、

１．消去の概略は与えているが、詳細は記してない。

２．開方式の次数は与えているが係数は与えてない。

３．数値解は与えてない。

という記述の仕方[*26]をしているが、どこが理解を困難にさせているのであろうか。

沢口の出題意図は、一意的な解が存在するか否かを問い、存在する場合は数値解を要求した[*27]と考えられる。第一問のように６次方程式であれば、(8) 式を展開して係数を示すことも数値解を求めることも可能であるが、100次を超えるような方程式の場合は係数を書き下すのは大変であるし、ほとんど意味を持たないであろう。さらに、100次を超えるような方程式の実数解を求めることは、現代でこそコンピュータと数式処理を用いて実行されている[*28]が、手計算あるいは天元術ではほぼ不可能である。関は開方式が立てられれば、原理的には解を求めることができるので開方式の係数および数値解は重要視していないと考えられる[*29]。

重要なのは開方式を導くところである。第一問の (5) (6) 式なども建部が行ったように図３を用いて丁寧に説明すれば、多くの読者に理解されたであろう。しかしながら、消去の方法の核心的なところを省いたため、門人以外のほとんどの読者には理解できなかったのだろう。

６　傍書法とは

傍書法とは算木記号で数係数を、漢字１文字ないし数文字[*30]で未知数あるいは定数を表す文字式の表現方法である。たとえば、

$$3甲^2乙^3-2甲^4乙$$

は

と表す。算木の|||, ||はそれぞれ、数字の +3, −2を表す。二乗は巾（冪の略字）、三乗は再二乗の再、四乗は三乗法[*31]の三で表す。

４節の寄乙位の文（(3) 式およびそれに先立つ文）を傍書法を用いない場合と用いた場合の双方を図４に表す。

漢文で書かれた術文は同じで、右は術文に傍書式（算木と文字による数式）が挿入されている。数学的には同等であるが、読む（可読性）のは右が格段に良い。『発微算法』(図３参照) および建部賢弘の『研幾算法』(1683年) は左 (傍書法なし) が用いられており、『演段諺解』(図５参照) は右 (傍書法あり) が用いられている。

７　田中由真『算法明解』

関に続いて田中由真も『古今算法記』の遺題を解き、『算法明解』(1679年) を出版している。『算法明解』の跋に「田中氏正利書」とあるが、田中氏正利は田中由真（よしざね）（吉真（よしざね））と同一人物である[*32]。これは、松田正則の『算法入門』下巻[*33]に「佐治氏（一平）の師である田中氏吉真は洛陽（京

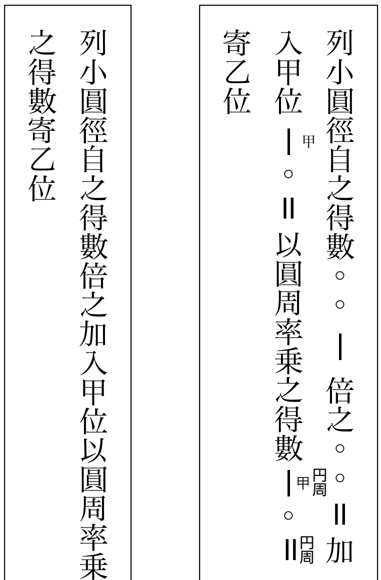


図４　傍書法なし（左）、傍書法使用（右）

都）に有て算法明解の書を編む」[*34]とあることに基づく。

『算法明解』は『国書総目録』(1965年）および『国書総目録』補訂版（1990 年）に、削除と版本の印がつけられて「貞享四（1687）版 – 東北大、享保一二（1727）版 – 東北大」と記載されている。東北大学図書館に問い合わせたところ、「当館では貞享四・享保一二版は所蔵しておりません」とのことである。学士院の写本（学 458）は岡本則録蔵書を学士院で書写している[*35]ので、親本は東北大学の貞享四・享保一二版のうちの１つと思われるが、現在は行方不明[*36]ということになる。

田中由真旧蔵の『発微算法』が関西大学図書館に所蔵されているので、田中はこれを参考にしながら執筆した[*37]と考えられる。田中の解答も関と同様に術文と開方式の次数だけである。第一問で比較すると、関は外余の面積百二十（平方）寸、中円の直径と小円の直径の差五寸として開方式を導いているが、田中はこれらを外余積、只云数と一般化[*38]している。関は π を 円周率／円径率$=\dfrac{q}{p}$で近似しているのに対し、田中は$\pi/4$を円積率としている。

田中の解答の初めの方を現代語訳する。

大円径を x とし、これを自乗し円積率$\pi/4$を掛け得た数を A（宮位）に寄せる。

$$A := x^2\frac{\pi}{4}$$

大円径 x に只云う数 a を掛け、これに円積率$\pi/4$を掛け B（商位）に寄せる。

$$B := xa\frac{\pi}{4}$$

以下略

田中は『発微算法』を研究して各問に対しそれぞれ関と異なる方法で、自分で解法を見つけ[*39]、関の記述スタイルを真似て解答を作ったと思われる。というのも、田中が所持していたのは『発微算法』の初版であるが、初版では問七に対し関は52次と誤っているのに対し、田中は『算法明解』で36次と正しい答えを出している[*40]からである。

８ 『発微算法演段諺解』

『発微算法』は、新規な解法を用いている上に５節で述べたような記述スタイルであったため、当時のほとんどの数学者[*41]には理解されなかった。そればかりでなく根拠のない批判さえ浴びた。たとえば、７節で言及した佐治一平の門人の松田正則の表した『算法入門』[*42]（1681年）は上下２巻本で、序文に「今、発微算法が古今算法記の遺題15問の答術をあらわす。理術はわずかに可で、残りは可でないから改める」[*43]と書き、下巻の前半で的外れな訂正を行い、また結論として15問のうち12問は誤っているとさえ断言している。

関の解法が正しく理解されるようになったのは、関の一番弟子の建部賢弘（たけべかたひろ）が『発微算法演段諺解（げんかい）』（1685 年）を出版し、傍書法を用いて『発微算法』の演段を分かりやすく解説したことによる。『発微算法演段諺解』の影印[*44]を図５に示す。傍書法が多用されていることがわかる。

これにより、『演段諺解』の出版から二年後には、持永豊次と大橋宅清は『改算記綱目』(1687 年）の序において「予師（宮城）清行先生日 ... 関氏孝和の編る所の発微算法演段諺解 ... 誠に如斯の術式深く味之孝和之新意の妙旨至れるを知るべし」[*45]と絶賛している。また、世界で最初に行列

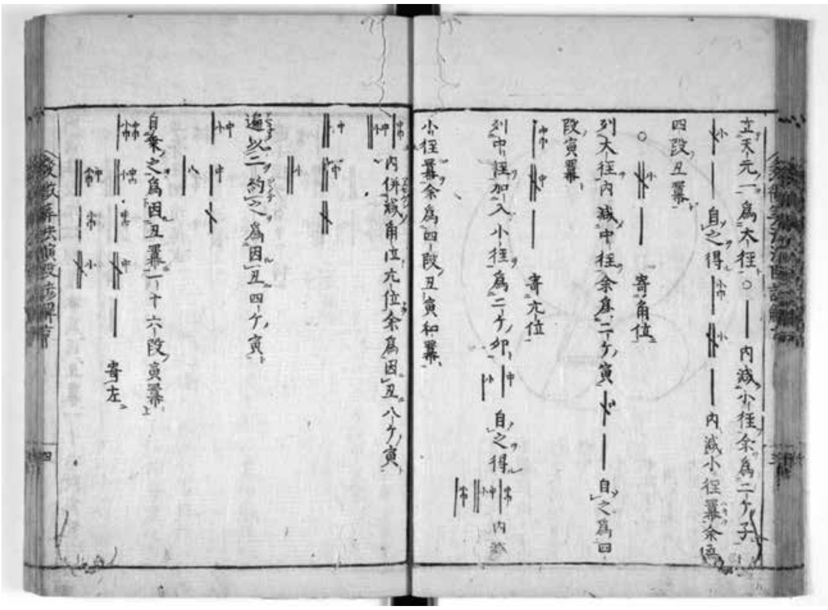


図５ 『発微算法演段諺解』第一問解説（京都大学数学教室蔵）

式の小行列式による展開を出版した井関知辰撰『算法発揮』（1690 年）は、冒頭の凡例において『演段諺解』に言及することなく引用している[*46]。

ともあれ、『発微算法』は数学の飛躍的発展の契機となったのであるが、それを分かりやすく解説した建部の寄与なくしては和算家に広く理解されることにはならなかったことは明らかである[*47]。そういう意味でも建部は関とともに、日本の数学（和算）の発展に大いに貢献したといえよう。

９　演段術と傍書法

最後に演段術と傍書法の関係についてだが、関は序文で「その演段は極めて精微で、文は複雑で多く、術は入り組んでいるので省略する」と言っているが、その「演段」は、たとえば、第一問でいうと（5）（6）式の導出などを指しており、その消去は複雑で文で説明するのは困難だというのは、まさにその通りだったからではないか。もし「演段」に傍書法が含まれていれば、『演段諺解』に見られるように「文繁多」にはならないだろう。したがって、「演段」とは消去法のみを指し、傍書法は含まないと考えられる。

では、「演段」に傍書法が含まれないとすると、傍書法を用いないで消去法で解くことは可能であるか。それは田中吉真が『算法明解』において『古今算法記』の遺題を消去法で解いているのを見れば可能と推察される。おそらく、関も田中も傍書法に代わる何らかの方法で消去を実行したのだろう。

よって、『発微算法』執筆時には傍書法が創案されてなかったと考えられるが、それでは傍書法はいつ創案されたのだろうか。傍書法が関の稿本（未出版の草稿本）に登場するのは、『解伏題之法』（1683 年重訂）、『開方飜変之法』（1685 年重訂）、『病題明致之法』（1685 年重訂）、『解見題之法』（年記なし）の４点である。『病題明致之法』には「傍書術」、「傍書式」という術語が出てくる。これら４点は、1683年に始まり 1690年代にひとまず完成した『算法大成』[*48]編纂の準備のた

めに用意されたものであろう。1683年に重訂した『解伏題之法』で傍書法を用いて終結式が導かれているので、傍書法は『解伏題之法』の初稿*49編集のときには出来ていたはずである。以上より、傍書法が創案されたのは、『発微算法』執筆後、汎用的な消去法を模索している過程と考えられる。その結果、汎用的な消去法として終結式を発見し、さらに終結式を行列式として表示しそれらを『解伏題之法』の初稿として編集したと思われる。関はさらに、終結式を用いて判別式を得た。『開方飜変之法』では、判別式（適尽方級法）を導出し、判別式を用いて重根を求めている。

しかしながら、1675年から1682年の間の年記のある関孝和が編集した稿本の写本は、『授時発明』（1680年）、『立円率解』（1680年）、『八法略訣』（1680年）、『授時暦経立成之法』（1681年）のみが残っているだけで、傍書法に多少とも関連するものはない。したがって、傍書法の創案時期を絞り込むのは容易ではない。

10　まとめ

本稿では、以下のことを述べた。

1. 関は演段術を創案して沢口の遺題を解き『発微算法』で発表した。その時点では傍書法はまだ創られてなかった。つまり、『発微算法』の演段術には傍書法は含まれない*50。
2. 傍書法を用いなくても演段術が使えることは、田中吉真が『算法明解』で示している。
3. 傍書法は、1675年以降1682年以前に汎用的な消去法（終結式）を見つけ出す過程で創案された。

注

＊1　エウクレイデス、アポロニウス、パッポスなど。

＊2　高橋秀裕は「『プリーンキピア』をめぐる数学史の伝統的疑問」と呼んでいる。詳細は以下の書を見よ。高橋秀裕、『ニュートン』、東京大学出版会、2003、pp.198-207

＊3　高橋秀裕、前掲書、p.199

＊4　「演段術は記号使用の筆算式代数学である」（いいかえると、演段術は傍書法を用いて遂行される）を最初に唱えた数学史家は三上義夫である。三上義夫、関孝和の業績と京坂の算家並に支那の算法との関係及び比較、佐々木力総編集、『三上義夫著作集』第 2 巻、日本評論社、2016、pp.88-91、初出は『東洋学報』、第二十巻、1932

＊5　『算学啓蒙』は上中下の 3 巻からなり、上巻は整数の掛け算から始まり下巻の最後「開方釋（せき）鎖（さ）門」は算木による開平、開立などの計算に引き続き天元術が解説されている。

＊6　川原秀城、『朝鮮数学史』、東京大学出版会、2010、p.58

＊7　森本光生、算学啓蒙の日本における受容、数理解析研究所講究録、1625（2009）, p.154
なお、数理解析研究所講究録に掲載された論文の多くは Web で公開されている。http://www.kurims.kyoto-u.ac.jp/

＊8　筑波大学図書館所蔵の書に「養安院蔵書」（曲直瀬正琳）の印記があることによる。考証は、三上義夫、関孝和の業績と京坂の算家並に支那の算法との関係及び比較（前掲）、『三上義夫著作集』第 2 巻、p.86、にある。

＊9　藤原松三郎は「これを移入した當時のわが國の學者が、これを了解するのにいかに苦しんだかは、想像に余りあるところである。」と述べている。日本学士院編（藤原松三郎著）、『明治前日本数学史』第一巻、岩波書店、2008、p.400

＊10　藤原松三郎は「（天元術を扱った）開方釋鎖門の各問の註解の中に、處處「以天元一爲負廉」あるひは「以天元一然正廉」、「以天元一爲正廉、爲平」、「命天元一置徑方」等といふ句がある。天元一は未知數に名づくるものであることを（星野は）認識してゐなかつたやうである。」と指摘している。『明治前日本数学史』第一巻（前掲）、p.360

＊11　第一問から第十四問までは図形を使った問題で連立代数方程式になり、第十五問は利息の問題で連立超越方程式になる。

＊12　小川束・森本光生、『江戸時代の数学最前線』、技術評論社、2014、pp.160-161

＊13　『発微算法』の演段術を傍書法を用いて詳細に解説した書である。

＊14　佐々木力は、「その特異な記号代数技法は近世日本の数学を、東アジア数学を、未曾有の水準にまで高める礎石を据えることになった」と述べている。佐々木力、『数学史』、岩波書店、2010、p.670

＊15　佐藤賢一、『近世日本数学史』、東大出版会、2005、pp.283-287

＊16　小林龍彦、解説、『三上義夫著作集』第 2 巻（前掲）、p.442

＊17　橋口侯之介、『和本入門』、平凡社、2011、p.77

＊18　于時延寶二歳在甲寅十二月幾望關氏孝和叙

＊19 グレゴリオ暦では 1675 年 1 月 9 日である。

＊20 建部賢弘の『演段諺解』の序文は「貞享二年歳乙丑季夏序」、書肆の年記は「貞享二歳丑十一月吉日」なので、約 5 ヶ月後である。

＊21 原文は「其演段精微之極依」である。本稿の目的は「演段」の意味を探ることであるので演段のままにしておく。演段の意味は 9 節で述べる。

＊22『発微算法』からの口語訳は次を参照した。小川束、『関孝和「発微算法」— 現代語訳と解説』、大空社、1994

＊23 小林龍彦は、序文について「これはレトリックの可能性もありますので全面的に信用することは危険でしょう」と注意している。http://www.mirun.sctv.jp/~suugaku/15.8/ 和算入門（13）.htm

＊24 ハリー彗星の回帰を予言したことで知られるエドモンド・ハリーが、1684 年 8 月にアイザック・ニュートンに「太陽に向かう引力が太陽から惑星までの距離に二乗に逆比例すると仮定すれば、惑星の描く曲線はどんなものになるか」尋ねたところ、ニュートンは即座に楕円になるだろうと答えた。以前計算したのだが見つからないので、もう一度計算して送ると約束した。11 月にニュートンは『回転している物体の運動について』という論考をハリーに送った。ハリーは王立協会で『運動について』を紹介し、ニュートンは研究を発展させ、王立協会から出版することになった。ハリーは王立協会の事務員（クローク）になり『プリンキピア』の出版を担当した。しかも、王立協会は予想外のことで財政が悪くなり、出版費用をハリーが負担することになった。リチャード・ウェストフォール、田中一郎・大谷隆昶訳、『アイザック・ニュートン』I、pp.440-511、平凡社、1993

＊25 真島秀行は、「門人たちが出版費を工面してくれて刊行に至ったのであろう」と推察している。真島秀行、関新助孝和の履歴について、数学史研究 204（2010）, pp.36-45

＊26 上野健爾は「骨と皮だけの解答集」と表現している。上野健爾、関孝和の数学と大成算経、数理解析研究所講究録、1831（2013), p.116

＊27 橋本流『当流算術難好伝記』に記された沢口の解答は、第四問と第十五問が「無伝・無術」の他は数値解が与えられているという。佐藤賢一、『近世日本数学史』（前掲）、pp.272-273

＊28 荒井千里・森継修一、古今算法記遺題の数値解について、数理解析研究所講究録 1568（2007）,pp.87-93.

＊29 上野健爾他、『関孝和論序説』（前掲）、p.108,p.269

＊30『演段諺解』では、中円は「中」とし、中円冪は「中巾」としているが、立方積は漢字 3 文字で「立方責」としている。責は和算家がよく使う積の略字（俗字）である。

＊31 A^4 は $A \times A \times A \times A$ と掛け算が 3 つあるので三乗法という。

＊32 日本学士院編（藤原松三郎著）、『明治前日本数学史』第三巻、岩波書店、2008、p.425

＊33「発微算法一十五術内誤改術」の最後

＊34 京都大学数学教室 http://edb.math.kyoto-u.ac.jp/wasan/020

＊35 書写奥書に「大正三（1914）年一月岡本則録氏藏書ヨリ冩記」とある。

＊36 三上義夫は「『算法明解』は田中吉真作の刊行の算書ということであるが、今その刊本の現存することの見聞がない」と述べている。三上義夫、関孝和の業績と京坂の算家並に支那の算法との関係及び比較（前掲）、『三上義夫著作集』第 2 巻、p.98。

＊37 田中由真旧蔵の『発微算法』発見以前に藤原松三郎は、各問で立てる天元の一が第十四問を除き全て発微算法と異なっているので、発微算法との一致を避けるため変えたのではないかと指摘している。
『明治前日本数学史』第三巻（前掲）、p.470

＊38 関も第二問では只云数、別云数などのまま開方式を導いている。関も田中も数値解にはこだわってないようである。

＊39 藤原松三郎は、「術文はあるが、發微算法には孝和の演段術は全然書かれてゐないのであるから、由眞は自身發見の演段術により解義を得て、これから術文を得たのであろう」と書いている。ここで、藤原の「演段術」には傍書法は含まない。
『明治前日本数学史』第三巻（前掲）、p.470

＊40 小林龍彦、解説、『三上義夫著作集』第 2 巻（前掲）、p.444

＊41『演段諺解』出版以前に『発微算法』を理解した数学者に 7 節で取り上げた田中吉真がいる。

＊42 藤原松三郎は、『算法入門』は佐治一平が門人の松田正則の名前で出版したとみている。
『明治前日本数学史』第三巻（前掲）、p.425
なお、『算法入門』の年記は「延寳九辛酉歳三月吉日 松會 開刊」であるので、刊行は 1681 年である。

＊43 今發微筭法 見（アラハス） 古今記一十五問之荅術理術僅可未可故改之。

＊44 亨巻三丁裏四丁表 http://edb.math.kyoto-u.ac.jp/wasan/165-0028

＊45 東北大学和算資料データベース、林文庫 640

＊46『算法発揮』は「凡術ヲ作ス時ニ相消ス數見難キ者ハ本術ニ有ル所ノ者ヲ悉有トシテ別ニ天元ノ一ヲ立テ何某トシテ側ニ其名ト段数ト正負トヲ記シテ常ノ如ク相消シテ式ヲ得ル事二ツ也分ツテ前式後式トス」（東北大学和算資料データベース、『算法発揮』岡本刊 63）とあるが、『演段諺解』の「演段起例」は「天元ノ一ヲ立テ如ク㆑意ノ求ム㆑之ヲトイヘトモ相消（ケス）数容易（タヤスク）見難（ガタキ）ヲ伏題ト云ナリ（中略）相消（ケス）数見難キ時本術ニ出ル所ノ者ヲ皆アリトシテ別ニ天元ノ一ヲ立テ正負段数ヲ畫（クハク）シ傍（カタハラ）ニ其名（ソノナ）ヲ書（カキ）テ如常相消テ得式」（http://edb.math.kyoto-u.ac.jp/wasan/165-0025）である。現代の基準に照らせば『算法発揮』は『演段諺解』からの剽窃と疑われるレベルであろう。

＊47 森本光夫は「演段を実際に書き下して見せたのは賢弘の功績」と評価している。森本光夫、建部賢弘と『大成算経』、数学文化、22（2014）、p.9

＊48『算法大成』は、建部賢明『建部氏伝記』（1715 年）によると、1683 年夏、関孝和、建部賢明、建部賢弘が相談し、賢弘が中心になって新たに考えたものや既存の算法を集めて出版しようということになった。元禄中年（1690 年代）に一応完成し全 12　巻で『算法大成』と名付け推敲していたが、賢弘が多忙になり、関は老年の上病気で考検熟思できなくなったため、1701 年より、賢明一人で 10 年かけて完成させ、『大成算経』全 20 巻として完成させたというものである。出版はされず、写本として伝わっている。

＊49 真島秀行は『解伏題之法』の初稿について推察している。真島秀行、「算学玄訓」における関孝和の行列式、RIMS Kôkyûroku Bessatsu B50（2014), pp.35-40

＊50 文脈から藤原松三郎はそのような解釈と思われる。
日本学士院編（藤原松三郎著）、『明治前日本数学史』第二巻、岩波書店、2008、p.193、p.260