

沢口一之編『古今算法記』の遺題を巡って Concerning the open problems in Kazuyuki Sawaguchi's *Kokon Sampōki*

長田直樹
Naoki Osada *

Abstract

The open problems of Kazuyuki Sawaguchi's *Kokon Sampōki* are famous for being solved in *Hatsubi Sampō* by Takakazu Seki using the method of elimination of unknowns. In this paper, we consider how Sawaguchi solved the open problems proposed by Masaoki Satō in the *Sampō Kongenki*, and how he made the open problems his book, *Kokon Sampōki*. We will reveal what kind of solutions Sawaguchi had expected. We will also describe Sawaguchi's contribution to the development of early-modern Japanese mathematics (*wasan*) that were beyond Chinese traditional mathematics of that time.

§ 1. はじめに

沢口一之編『^{ここん}古今算法記』(1671)は、日本で初めて天元術を正しく用いた算書である。その中で、佐藤正興が『^{まさおき}算法根源記』(1669)で出した遺題150題のうち「円理」の17題¹、「術右同意」の4題²および「無術」の1題³を除く128題を天元術に帰着させて解いた。さらに天元術に容易に帰着させることができない遺題15題を出題した。関孝和が『発微算法』(1674年序)において『古今算法記』の遺題に最初に解答を与えた。ついで田中由真が『算法明解』(1679)で解答を与えた。関も田中も問題ごとに工夫した消去法を用いて解答した。その後関は、汎用的な消去法である終結式を発見した。終結式発見の過程で傍書法

Received November 6, 2019. Revised February 18, 2020.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A45

Key Words: History of Japanese Mathematics, simultaneous algebraic equations, elimination of unknowns, Seki Takakazu, Sawaguchi Kazuyuki

*東京女子大学

email: osada@lab.twcu.ac.jp

¹沢口は序文で円や球の切片に関係する問題を「円理」の問題と呼んでおり、それらのうち弓形の弧長の公式などは正しくないとして解答を与えてない。

²第98問と第99問のように数値だけが異なる場合、後の問題は答えだけを与えている。

³第26問は条件が足りないので「無術」として解いてない。

を創案したと考えられる [5]。関の一番弟子の建部賢弘は『発微算法演段諺解』(1685)において傍書法を用いて『発微算法』を分かりやすく解説した。『発微算法』および『発微算法演段諺解』により、日本の数学は中国の伝統数学を超え、大きく発展することになった。

『古今算法記』の遺題の研究は、今世紀になって2つの大きな進展があった。一つは、木村・平野・横山 [6] と荒井・森継 [1] が、連立代数方程式を数式処理によって解くことにより、遺題の数値解を得たこと、もう一つは、佐藤賢一 [9] が、沢口により橋本流に伝えられた遺題の解を記載した『牛角伝』[7] および『当流算術難好伝記』[8] などを含む橋本流の文書を発見したことである。

本論文では、日本数学の大発展を与える契機となった『古今算法記』の遺題を多角的に検討する。第2節では、沢口が『算法根源記』の遺題をどのように解き、『古今算法記』の遺題を関と田中がどのように解いたかを調べる。それにより、沢口の解法と関と田中の解法の共通点と相違点を明らかにし、和算の発展に対する沢口の貢献について述べる。

第3節では、荒井と森継が与えた数値解およびその計算に付随して得られた結果を手がかりに、沢口が『古今算法記』の第4問、第12問、第13問と第14問をどのように作題したかをシミュレートし、沢口はどのような解を想定していたかを考察する。第4節では、橋本流文書に「述例曰」[7][8]として記載されている沢口から伝えられた解と第3節で得られた沢口の想定解を照合する。それにより、「述例曰」に沢口の解がどの程度反映しているか、作題のシミュレーションは適切か、「無傳無術」[8]はいかなる意味なのかについて述べる。第5節では、「述例曰」に基づき、沢口が第1問、第2問、第3問、第5問、第10問をどのように作題したかをシミュレートする。第3-5節におけるシミュレーションの結果、沢口の要求した数値解は、有効桁数が高々3桁の近似解であることを明らかにする。

第6節では橋本流文書を数学史的に検討する。そして、伝記者の久留氏正昆が「(関孝和の門人の)久留重孫と同一人物」[10]の適否について述べる。

問題文や術文の引用において、漢文は横書きで表し、訓点は省略し、必要に応じ口語訳を付ける。引用文中の[]内は筆者の補足である。口語訳における()内は和算用語や尺貫法の単位などの説明である。

§2. 『算法根源記』と『古今算法記』の遺題の比較

『古今算法記』の遺題は容易に天元術に帰着できない難問であるが、これまでの問題とどこが違うかを、沢口が天元術を使って解いた『算法根源記』の遺題と比較することにより、解明する。比較には、同系統の問題⁴である『算法根源記』第122問と『古今算法記』第2問を用いる。『算法根源記』第122問の解法は沢口のもの、『古今算法記』第2問の解法は関孝和が与えたものと田中由真が与えたものを見る。

⁴沢口は『古今算法記』の何題かの遺題は『算法根源記』の遺題からアイデアを得ている。たとえば、『古今算法記』第2問は『算法根源記』第122問から出題のアイデアを得たと考えられる。また5.5節で取り上げる『古今算法記』第10問は2.4節で取り上げる『算法根源記』第71問および『算法根源記』第125問などから出題のアイデアを得たと考えられる。

§ 2.1. 『算法根源記』第 122 問

『算法根源記』第百廿二問



今有大小平方冪^{寸平}和二万五千四百二十五步只云大小方面寸併為實開平方之見商寸与大小方面寸之差共
和三尺問大小方面幾何 [12]



大小の正方形がある。面積の和は 25425 歩、大小の正方形の辺の和の平方根と辺の差を加えると 3 尺である。大小の正方形の辺はそれぞれ幾らか。(1 歩は 1 平方寸、1 尺は 10 寸、1 丈^{じょう}は 10 尺である。)

小方面 (小正方形の 1 辺) を x 寸, 大方面 (大正方形の 1 辺) を y 寸とすると

$$x^2 + y^2 = 25425$$

$$\sqrt{x+y} + (y-x) = 30$$

と表される⁵。連立無理方程式であるが、

$$x^2 + y^2 = 25425$$

$$x + y = ((y-x) - 30)^2$$

と変形すると連立代数方程式になる。沢口はこのようにして $z = y - x$ とおき、 x, y を消去して z に関する 4 次方程式を導いている。

沢口の答えと術文は以下のようなものである。

答曰大方面一丈二尺○小方面一丈令五寸

術曰立天元一爲差以減和餘爲見商數自之爲大小方面和加入差爲二箇大方面亦減差爲二箇小方面自之爲四段小方冪寄左○列二箇大方面自之爲四段大方冪加入寄左再寄○列和冪四之與再寄相消得開方式三乘方開之得差依前術得大小方面各合問

[13]

沢口は、開方式 (方程式) の導き方と次数は与えているが、係数は与えてないことを注意しておく。このあと見るように、関と田中はこの点を踏襲している。

沢口の術文を現代表示する。:= (コロニイコール) は右辺の式を左辺に寄せる (置く) という記号である。右端は対応する術文である。

⁵現代の基準でいうと、辺の和の平方根の単位は $\text{寸}^{1/2}$ あるいは $\sqrt{\text{寸}}$ とでもすべきであるが、和算では寸と同一視し、 $\text{寸}^{1/2}$ と寸の加減算を行う。林鶴一は「和算家ハ數値ニ重キヲ置キ、量ノ次元 dimension ニ拘泥セズ」[22] と指摘している。

$z = y - x$	天元一為差
$(z - 30)^2 = x + y$	大小方面和
$(z - 30)^2 + z(= x + y + z) = 2y$	二箇大方面
$(z - 30)^2 - z(= x + y - z) = 2x$	二箇小方面
$\mathcal{L} := ((z - 30)^2 - z)^2 = 4x^2$	四段小方冪、寄左
$((z - 30)^2 + z)^2 = 4y^2$	四段大方冪
$\mathcal{L}_2 := ((z - 30)^2 + z)^2 + \mathcal{L} = 4x^2 + 4y^2$	再寄
4×25425	相消
$((z - 30)^2 - z)^2 + ((z - 30)^2 + z)^2 - 4 \times 25425 = 0$	得開方式

得られた開方式は z に関する 4 次方程式

$$(2.1) \quad 1518300 - 216000z + 10802z^2 - 240z^3 + 2z^4 = 0$$

である。(2.1) は 2 正根⁶

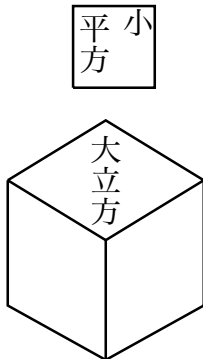
$$z = 15, \quad z = 44.865769137083 \dots$$

を持つが、 $0 < z < 30$ であるので $z = 15$ である。 $x + y = 225$ から、 $x = 105, y = 120$ が得られる。解は一意に定まるので第 122 問は「翻狂」⁷ではない。

§ 2.2. 『古今算法記』第 2 問の関孝和の解

つぎに『古今算法記』第 2 問とそれに対する関孝和の『発微算法』[16]における術文を見してみる。

『古今算法記』第二問



今有大立方小平方各一只云平方積爲實開立方之見商寸與立方積爲實開平方之見商寸二數共相併一尺別平方面寸與立方面寸和而七寸問平方面立方面幾何

[13]

大立方体と小正方形がある。正方形の面積の立方根と立方体の体積の平方根を加えると 1 尺 (10 寸) である。正方形の 1 辺と立方体の 1 辺の和は 7 寸である。正方形と立方体の辺の長さはそれぞれ幾らか。

⁶Weierstrass 法に基づき C 言語で計算し、小数第 5 位以下を切り捨てると他の 2 根は $30.0671 \pm 14.9666i$ である。

⁷沢口は解が二様に出る問題を翻狂と呼び、翻狂となる『算法根源記』の遺題に対しては解が一様 (一意) になるように問題文の数値を変えるか条件を付け加えて解いている。

平方面 (正方形の 1 辺) を x 寸, 立方面 (立方体の 1 辺) を y 寸とすると

$$(2.2) \quad \begin{aligned} \sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y^3} &= 10 \\ x + y &= 7 \end{aligned}$$

という連立無理方程式になる。関は (2.2) を

$$10^2 - y^3 = 2\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y^3} + \sqrt[3]{x^4}$$

と変形することから始めて巧妙に x を消去し、 y を未知数とする代数方程式を導いている。

関の術文を現代表示すると以下のようになる。10 の代わりに只云数⁸、7 の代わりに別云数⁹と文字定数にして解いている。

y	天元一為立方面
$\mathcal{A} := y^3$	立方積、寄甲位
別云数 $- y = 7 - y$	平方面
$\mathcal{B} := (\text{別云数} - y)^2 = x^2$	平方積、寄乙位
$\mathcal{C} := \text{只云数}^2 - \mathcal{A} = 10^2 - \mathcal{A} = 10^2 - y^3$	寄丙位
$\mathcal{D} := 8 \cdot \text{只云数} \cdot \mathcal{B} = 8 \cdot 10 \times (7 - y)^2$	寄丁位
$\mathcal{L} := (\text{只云数} \cdot \mathcal{C} - \mathcal{B})^2 = (10(10^2 - y^3) - (7 - y)^2)^2$	寄左
$(\mathcal{C}^2 + \mathcal{D})\mathcal{A} = ((10^2 - y^3)^2 + 80(7 - y)^2)y^3$	与寄左相消
$(10\mathcal{C} - \mathcal{B})^2 - (\mathcal{C}^2 + \mathcal{D})\mathcal{A} = 0$	得開方式

開方式は y に関する 9 次方程式

$$(2.3) \quad (10(10^2 - y^3) - (7 - y)^2)^2 - ((10^2 - y^3)^2 + 80(7 - y)^2)y^3 = 0$$

である。展開し昇幂で表すと

$$(2.4) \quad 904401 + 26628y - 1706y^2 - 32968y^3 + 841y^4 - 60y^5 + 300y^6 - y^9 = 0$$

である。(2.4) は 1 つの正根

$$y = 3.96837919385789018$$

と 4 組の共役複素数根¹⁰を持つ。したがって、第 2 問の解は

$$\begin{cases} x = 3.03162080614210982 \\ y = 3.96837919385789018 \end{cases}$$

⁸問題文に「只云... 一尺」とあるので、一尺を只云数としている。朱世傑『算学啓蒙』の術文で只云数が使われている。

⁹問題文に「別... 七寸」とあるので、別云数は七寸である。「別云数」や「先云数」は沢口が『算法根源記』第 125 問などの術文で用いている。

¹⁰共役複素数根は $4.9498 \pm 0.3897i$, $-1.8645 \pm 2.6067i$, $-1.3212 \pm 4.9645i$, $-3.7482 \pm 4.4779i$ である。

ただ1つである。

関は開方式を得るところで、

$$(10C - B)^2 = (C^2 + D)A$$

を用いているが、証明を省略している。建部賢弘『発微算法演段諺解』に基づき¹¹ 寄左(左辺)と相消す式(右辺)を x, y により表す。

$$C : 10^2 - y^3 = 2\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y^3} + (\sqrt[3]{x^2})^2$$

(2.2) と C を掛け $B(=x^2)$ を減じると

$$10C - B : (\sqrt[3]{x^2} + \sqrt{y^3})(2\sqrt[3]{x^2}\sqrt{y^3} + (\sqrt[3]{x^2})^2) - x^2 = 3(\sqrt[3]{x^2})^2\sqrt{y^3} + 2(\sqrt[3]{x^2})^2y^3$$

$$(10C - B)^2 : 9(\sqrt[3]{x^2})^4y^3 + 12x^2y^3\sqrt{y^3} + 4(\sqrt[3]{x^2})^2y^6$$

一方、

$$C^2 : 4(\sqrt[3]{x^2})^2y^3 + 4x^2\sqrt{y^3} + (\sqrt[3]{x^2})^4$$

$$C^2 + D : 4(\sqrt[3]{x^2})^2y^3 + 12x^2\sqrt{y^3} + 9x^2\sqrt[3]{x^2}$$

$$(C^2 + D)A : 9(\sqrt[3]{x^2})^4y^3 + 12x^2y^3\sqrt{y^3} + 4(\sqrt[3]{x^2})^2y^6$$

よりいえる。

§ 2.3. 『古今算法記』第2問の田中由真の解

つぎに、田中由真の『算法明解』[19]における第2問の術文を現代表示する。

x	天元一為平方面
$A := x^2$	平方積、寄乾位
$B := (\text{別云数} - x)^3$	(立方積、) 寄坤位
$\mathcal{L} := (\text{只云数}^2 - B)^3 + A^2$	寄左
$(2 \cdot \text{只云数}^3 + 6 \cdot \text{只云数} B)A$	与寄左相消
$(\text{只云数}^2 - B)^3 + A^2 - (2 \cdot \text{只云数}^3 + 6 \cdot \text{只云数} B)A = 0$	得開方式

田中は関と未知数の取り方を変えただけで寄左と相消の作り方はよく似ている。関と同様、開方式の係数も数値解も与えてない。只云数を10、別云数を7に戻すと、9次方程式

$$(10^2 - (7 - x)^3)^3 + x^4 - (2 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10(7 - x)^3)x^2 = 0$$

である。

¹¹ 『発微算法演段諺解』に基づく関の術文の解説は、最初林鶴一 [22](1935) が第一問と第二問に対し行なった。遺題全十五問に対する詳細な解説は小川東 [3](1994) にある。

田中由真は寄^{けん}乾位、寄^{こん}坤位を用いている。田中が関と別の名前(甲乙ではなく、乾坤)にしたのは、藤原松三郎が指摘している通り [20]、関との違いを出したかったのであろう。未知数も関は立方面を取っているのに対し、田中は平方面を取っている。

§ 2.4. 再寄と寄甲位

沢口は『算法根源記』第 122 問の術文において寄左と再寄を用いている。再寄は寄左への上書きで、再寄を通常の寄左のように用いて相消している。再寄は朱世傑『算学啓蒙』の「開方^{せきさ}釈鎖門」の第 12 問などにある。以下の引用文中では、算木による数字は算用数字で表す。本論文ではこれ以降、現代表示する場合は未知数や定数の(寸や尺などの)単位は省略する。

開方釋鎖門第十二問

今有方圓田各一段共地九畝四分五厘只云方田面與圓田徑適等問方面圓徑各幾何

荅曰 方面圓徑各三十六步

方田(正方形の田)と円田(円形の田)が1つずつある。面積を合わせると 9.45 畝である。方田の1辺と円田の直径の長さは等しい。1辺と直径はそれぞれ幾らか。答は、方田の1辺と円田の直径の長さそれぞれ 36 歩である。(1 畝は 240 平方歩、円周率は 3 とする。)

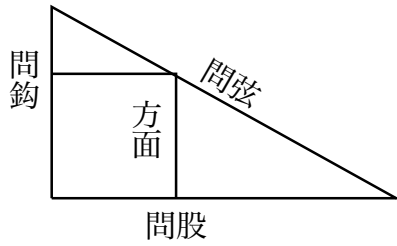
術曰立天元一爲方面亦圓徑 $\boxed{0\ 1}$ 自之爲方積 $\boxed{0\ 0\ 1}$ 寄左又列圓徑自之三因四而一爲圓積 $\boxed{0\ 0\ 0.75}$ 加入寄左得式 $\boxed{0\ 0\ 1.75}$ 再寄列畝通歩與再寄相消得開方式 $\boxed{-2268\ 0\ 1.75}$ 平方開之得方面圓徑合問 [14]

x を方面および円径とする。 x^2 を左に寄せ、 $0.75x^2$ に寄左を加えて $1.75x^2$ を得て、これを再び寄せて $9.45 \times 240 = 2268$ と相消して開方式 $-2268 + 1.75x^2 = 0$ を得る。

一方、『古今算法記』第 2 問に対する関の術文に現れる寄甲位、寄乙位、寄丙位、寄丁位、あるいは田中由真が『算法明解』で用いた寄^{けん}乾位、寄^{こん}坤位は、『算学啓蒙』には現れず、沢口が『算法根源記』第 5 問、第 6 問、第 7 問などの術文で用いているのが初見¹²である。寄甲位などが用いられている例として、沢口による第 71 問の術文を見してみる。

『算法根源記』第七十一問

¹²おそらく、沢口が『算法根源記』の遺題を解く過程で創案したものであろう。



今有鉤股弦只云方面四寸八分鉤寸與弦寸和而二尺二寸四分問鉤股弦幾何○荅曰鉤八寸四分○股一尺一寸二分○弦一尺四寸

鉤股弦 (直角三角形) があり、方面 (直角を共有する内接正方形の1辺) 4 寸 8 分、鉤と弦の和 2 尺 2 寸、鉤股弦 (直角三角形の各辺の長さ) はそれぞれいくらか。答は、鉤 8 寸 4 分、股 1 尺 1 寸 2 分、弦 1 尺 4 寸である。

術曰立天元一爲鉤内減方面餘自之爲短鉤纂寄甲位○列鉤以方面相乗得數亦自之爲因甲位股纂寄乙位○列云和内減鉤餘爲弦自乗之得内減鉤纂餘爲股纂以甲位乗之與寄乙位相消得開方式立方翻法開之得鉤依前術得股弦各合問 [13]

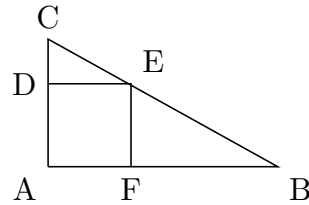


図 1. 『算法根源記』第七十一問

図 1 において $AD = DE = 4.8$, $AC + BC = 22.4$ のとき、 AC, AB, BC を求めよ。(図 1 において $AC = \text{鉤}$, $AB = \text{股}$, $BC = \text{弦}$, $CD = \text{短鉤}$ である。)

$AC = x, AB = y, BC = z$ とおくと、

$$x + z = 22.4$$

$$x^2 + y^2 = z^2$$

$$(2.5) \quad (x - 4.8)y = 4.8x$$

なる連立代数方程式となる。(2.5) は $\triangle DEC$ と $\triangle ABC$ が相似であることから導かれる。沢口の消去法を現代的に表す。方面は 4.8, 云和は 22.4 である。

x	天元一為鉤
$A := (x - \text{方面})^2 = (x - 4.8)^2 = 23.04 - 9.6x + x^2$	短鉤纂、寄甲位
$B := (x \times \text{方面})^2 = 23.04x^2$	因甲位股纂、寄乙位
云和 $- x = 22.4 - x$	弦
$(\text{云和} - x)^2 - x^2 = 501.76 - 44.8x$	股纂
股纂 $\times A - B = 0$	相消得開方式

(2.5) の両辺を 2 乗すると左辺は $A \times$ 股冪, 右辺は B であることから乙位は「因甲位股冪 (甲位と股冪の積)」と表せる。このことから開方式が得られる。消去は必ずしも容易とは言えない。

再寄は『算学啓蒙』で用いられているが、甲位、乙位¹³などは沢口による『算学啓蒙』の拡張である。沢口が創案した寄甲位などの記述法を寄位法と呼ぶことにする。寄位法により、複雑な変数変換や消去を漢文で記載できるようになった。これにより、関の演段術は漢文で記載できるのである。寄位法は、建部賢弘『発微算法演段諺解』や佐藤茂春撰『算法天元指南』で用いられたこともあり、和算の標準的な表記法となった。

§ 2.5. 『算法根源記』と『古今算法記』の遺題の共通点と相違点

『算法根源記』と『古今算法記』の遺題に対する沢口と関と田中の術文の共通点は

1. 『算学啓蒙』に準じた漢文で記載されているが、開方式の係数は表していない。
2. 三者とも寄位法を用いて、高次代数方程式に帰着させている。

である。

つぎに『算法根源記』の遺題と『古今算法記』の遺題の相違点を見る。

1. 『算法根源記』は第 23 問、第 57 問、第 64 問、第 124 問で 8 次方程式に帰着されるというのが最高次であるが、『古今算法記』の第 14 問では 1458 次方程式、係数は 10 進 100 桁程度 [6] である。
2. 『算法根源記』の問題の答えはすべて有限小数で表せる有理数、『古今算法記』の問題の答えはすべて無理数である。

これら 2 点が『古今算法記』の遺題を著しく難問にしている。関は『角法并演段図』[17](1683 年重訂)で正 17 角形に対し 16 次方程式、正 19 角形に対し 18 次方程式を解いているので、『古今算法記』の 18 次以下の方程式になる第 1 問、第 2 問など 8 題の問題の数値解は求めることができたと考えられるが、50 次を超える方程式の数値解を求めるのは無理である。また 2 は、試行錯誤や直感で答えを見つけることを不可能にしている。

§ 3. 数値解による沢口一之の作題のシミュレーション

2005 年木村・平野・横山 [6] が『古今算法記』第 14 問の数値解を与え、2007 年には荒井・森継 [1] が『古今算法記』の遺題 15 題のうち超越方程式となる第 15 問を除く 14 題に数値解を与えた。いずれも数式処理ソフト Risa/Asir(リサ/アジール)が用いられている。さらに荒井と森継は沢口が第 4 問と第 12 問に与えたパラメータおよび想定した解について考察している。

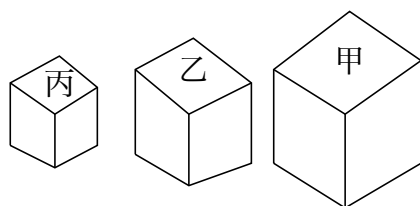
¹³甲位、乙位などは一時的に式を記憶しておく場所である。沢口の弟子の佐藤茂春撰『算法天元指南』(1698)の「用字凡例」に「寄位寄甲位寄乙位ノ類ハ重テ呼出スヘキ爲カリ一名付ル也」[11]とある。

荒井と森継の与えた数値解を見ると、第 12 問、第 13 問と第 14 問は半数以上の未知数¹⁴は小数第 4 位を四捨五入したとき整数¹⁵になる。

本節では、第 12 問、第 13 問、第 14 問と第 4 問について、数値解から沢口の出題方法の復元を試みる。第 4 問と第 12 問は荒井と森継の考察に基づく。

§ 3.1. 『古今算法記』の第 4 問

『古今算法記』第四問



今有甲乙丙立方各一只云甲積與乙積相併共寸立積十三萬七千三百四十坪又乙積與丙積相併共寸立積十二萬千七百五十坪別甲方面寸爲實開平方之見商寸與乙方面寸爲實開立方之見商寸及丙方面寸爲實開三乘方之見商寸各三和一尺二寸問甲乙丙方面各幾何 [13]

甲乙丙の立方体がある。甲と乙の立方体の体積の和は 137340 坪、乙と丙の立方体の体積の和は 121750 坪、甲の一边の平方根と乙の一边の立方根と丙の一边の 4 乗根の和は 1 尺 2 寸である。甲乙丙それぞれの辺の長さはそれぞれ幾らか。(1 辺が 1 寸の立方体の体積が 1 坪である。)

甲方面を x , 乙方面を y , 丙方面を z とすると

$$(3.1) \quad x^3 + y^3 = 137340$$

$$(3.2) \quad y^3 + z^3 = 121750$$

$$(3.3) \quad \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z} = 12$$

となる。荒井と森継は $a = \sqrt{x}, b = \sqrt[3]{y}, c = \sqrt[4]{z}$ とおき連立代数方程式

$$(3.4) \quad (a^2)^3 + (b^3)^3 - 137340 = 0$$

$$(3.5) \quad (b^3)^3 + (c^4)^3 - 121750 = 0$$

$$(3.6) \quad a + b + c - 12 = 0$$

を数式処理で解いて、2 組の解

$$\begin{cases} x = 36.864146537785304128 \\ y = 44.351676187667457304 \\ z = 32.556382116381103129 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 51.457036318368727728 \\ y = 10.293599457590667316 \\ z = 49.414409630840339604 \end{cases}$$

¹⁴たとえば、第 13 問 (3.3 節参照) では 3 つの未知数 x, y, z のうち x と y は、小数第 4 位を四捨五入すると整数とみなされる。

¹⁵厳密にいうと、無限小数で表し小数第 4 位を四捨五入すると小数第 1 位から第 3 位まで 0 が連続するということである。たとえば、第 12 問の 6.9999183... は、小数第 5 位を四捨五入すると 6.9999 となり整数とは見なさないが、小数第 4 位を四捨五入すると 7.000 となるので整数と見なす。

を与えている。第4問につけられた図は $x > y > z$ であるが、いずれの解も $x > y > z$ を満たしていない。荒井と森継は問題文を

$$\begin{cases} \text{甲積} + \text{乙積} = 137332 \\ \text{甲積} + \text{丙積} = 121745 \end{cases}$$

と下線部のように修正すれば、甲方面寸 = 49, 乙方面寸 = 27, 丙方面寸 = 16 という $x > y > z$ を満たす整数解が存在することを指摘している。そして、「現時点では全く推測でしかないが、沢口が {甲方面寸 = 49, 乙方面寸 = 27, 丙方面寸 = 16} を想定して作題した可能性はあると考えられる」と注意している。

「甲方面四十九寸、乙方面二十七寸、丙方面十六寸」という解になるようにパラメタを 137332, 121745 とし、それらの 1 の位を切り上げて 137340, 121750 として問題

$$(3.7) \quad \begin{cases} x^3 + y^3 = 137340 \\ x^3 + z^3 = 121750 \\ \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z} = 12 \end{cases}$$

を作った。 $x = 49$ として

$$\begin{cases} 49^3 + y^3 = 137340 \\ 49^3 + z^3 = 121750 \end{cases}$$

を解くと、

$$\begin{cases} y = 27.0036 \\ z = 16.0065 \end{cases}$$

で

$$\sqrt{49} + \sqrt[3]{27.0036} + \sqrt[4]{16.0065} = 12.000336 \dots$$

ある。したがって、沢口は「甲方面四十九寸、乙方面二十七寸余、丙方面十六寸余」という解¹⁶を想定していたことになる。ところが出版に際して、何かの理由で「又甲積與丙積」となるべきところが「又乙積與丙積」となったというのが、荒井と森継の推測である。

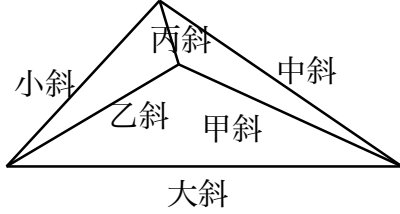
おそらく、書肆に渡す原稿を「又甲積與丙積」とすべきところを「又乙積與丙積」と誤記あるいは誤写¹⁷してしまったのであろう。問題 (3.7) は第 12-14 問などと同様に未知数が整数解になるように作題し、その後パラメタを少し変化させ試行錯誤では求められないように調整した問題であり、十分ありうる推測である。

¹⁶ $z = 16$ を与え、 $x = \sqrt[3]{121750 - 16^3} = \sqrt[3]{117654} = 49.0069 \dots$, $y = \sqrt[3]{137340 - 117654} = \sqrt[3]{19686} = 27.0013 \dots$ より、「甲方面四十九寸余、乙方面二十七寸余、丙方面十六寸」という想定解もある。 $y = 27$ を与える場合も同様。

¹⁷ 発表の際は「誤刻」と述べたが、書肆に渡す原稿の誤記あるいは誤写であろう。甲と乙の字形は似てないので誤刻の可能性は少ない。指摘してくれた佐々木力氏に感謝する。なお『発微算法』では、関の弟子の三滝と三俣が書肆に渡す原稿を「模寫訂正」[16] したとある。

§ 3.2. 『古今算法記』の第 12 問

『古今算法記』第十二問



今有三斜内如圖甲乙丙斜甲斜六寸乙斜四寸丙斜一寸四分四七只云大斜再自乗得數與小斜再自乗得數二數相併共寸立積六百卅七坪別中斜再自乗得數與又大斜再自乗得數二數相併共寸立積八百五十五坪問大中小斜各幾何 [13]

三角形があり、内に図のように甲乙丙斜があり、甲斜は 6 寸、乙斜は 4 寸、丙斜は 1 寸 4 分 47 で大斜の 3 乗と小斜の 3 乗を併せると体積 637 坪、中斜の 3 乗と大斜の 3 乗を併せると体積 855 坪である。大斜、中斜、小斜はそれぞれ幾らか。

大斜を x 、中斜を y 、小斜を z とすると、

$$(3.8) \quad x^3 + z^3 = 637$$

$$(3.9) \quad y^3 + x^3 = 855$$

$$(3.10) \quad \begin{aligned} &1.447^2 x^2 (-1.447^2 + 4^2 + 6^2 - x^2 + y^2 + z^2) \\ &+ 4^2 y^2 (1.447^2 - 4^2 + 6^2 + x^2 - y^2 + z^2) \\ &+ 6^2 z^2 (1.447^2 + 4^2 - 6^2 + x^2 + y^2 - z^2) \\ &- 4^2 6^2 x^2 - 6^2 1.447^2 y^2 - 1.447^2 4^2 z^2 - x^2 y^2 z^2 = 0 \end{aligned}$$

となる。(3.10) は六斜術¹⁸である。

荒井と森継による数値解は

$$\begin{cases} x = 8.0000624823779463523 \\ y = 6.9999183887746205743 \\ z = 4.9998400387456928662 \end{cases}$$

である。小数第 4 位を四捨五入すると $x = 8, y = 7, z = 5$ となる。

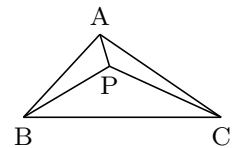
荒井と森継は「澤口は、大斜 = 8, 中斜 = 7, 小斜 = 5 を想定したと考えられる」として、

$$\begin{cases} 8^3 + 5^3 = 637 \\ 7^3 + 8^3 = 855 \end{cases}$$

¹⁸△ABC 内に 1 点 P をとる。BC = a , CA = b , AB = c , AP = d , BP = e , CP = f としたとき、

$$\begin{aligned} &a^2 d^2 (-d^2 + e^2 + f^2 - a^2 + b^2 + c^2) + b^2 e^2 (d^2 - e^2 + f^2 + a^2 - b^2 + c^2) \\ &+ c^2 f^2 (d^2 + e^2 - f^2 + a^2 + b^2 - c^2) - a^2 e^2 f^2 - b^2 f^2 d^2 - c^2 d^2 e^2 - a^2 b^2 c^2 = 0 \end{aligned}$$

が成り立つ。この等式を六斜術という。



で、「これらの値に加え、与えられている値 甲斜 = 6, 乙斜 = 4 を六斜術の式へ代入すると 1.44714728107... が得られる。丙斜 = 1.447 はこの近似値と考えられる」としている。実際、丙斜を d とすると六斜術は

$$d^2 8^2 (7^2 + 5^2 + 4^2 + 6^2) - d^4 8^2 - d^2 8^4 + 4^2 7^2 (8^2 + 5^2 + d^2 + 6^2) - 4^4 7^2 - 4^2 7^4 \\ + 6^2 5^2 (8^2 + 7^2 + 4^2 + 6^2) - 6^4 5^2 - 6^2 5^4 - 8^2 7^2 5^2 - 4^2 6^2 8^2 - 6^2 d^2 7^2 - d^2 4^2 5^2 = 0$$

すなわち、

$$-7024 + 3488d^2 - 64d^4 = 0$$

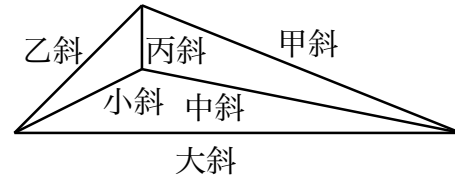
なので、

$$d = 1.44714728107659$$

となる。解が整数解と小数第 4 位ないし 5 位に誤差があるのは、1.447147... を 1.447 に丸めたためである。

荒井と森継は「澤口一之が想定していないと考えられる解の組み」として

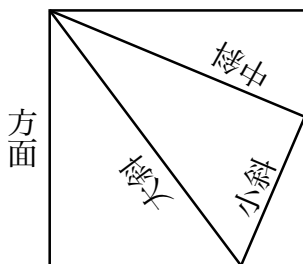
$$\begin{cases} x = 8.5104874260733040651 \\ y = 6.2023494789587359352 \\ z = 2.7412524066380665512 \end{cases}$$



をあげている。連立代数方程式 (3.8)(3.9)(3.10) の解ではあるが、甲斜、乙斜、丙斜が三角形の外側になり、問題文「今有三斜内如圖甲乙丙斜」に適さないのが、第 12 問の解はただ 1 つである。

§ 3.3. 『古今算法記』の第 13 問

『古今算法記』第十三問



今有平方内如圖三斜只云大斜再自乗得數與小斜再自乗得數二數相併共寸立積三千八百十七坪又云中斜再自乗得數與大斜再自乗得數二數相併共寸立積五千五百七十二坪方面一尺二寸問大中小斜各幾何 [13]

正方形の内に図のように三角形があり、大斜の 3 乗と小斜の 3 乗を併せると体積 3817 坪、中斜の 3 乗と大斜の 3 乗を併せると体積 5572 坪である。方面は 1 尺 2 寸である。大斜、中斜、小斜はそれぞれ幾らか。

図 2 において大斜 = $AE = x$, 中斜 = $AF = y$, 小斜 = $EF = z$, $BE = u$, $CF = v$ とすると、

$$(3.11) \quad x^3 + z^3 = 3817$$

$$(3.12) \quad y^3 + x^3 = 5572$$

$$(3.13) \quad u^2 + 12^2 = x^2$$

$$(3.14) \quad (12 - v)^2 + 12^2 = y^2$$

$$(3.15) \quad (12 - u)^2 + v^2 = z^2$$

が成り立つ。

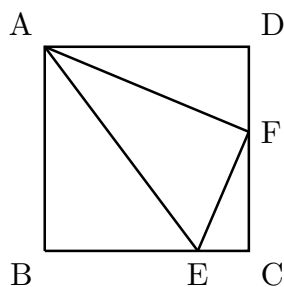


図 2. 『古今算法記』 第十三問

荒井と森継による数値解は

$$\begin{cases} x = 15.000255860664998387 \\ y = 12.999659342365642892 \\ z = 7.6164193209439103114 \end{cases}$$

である。

沢口の作題方法を考える。 $13^3 + 15^3 = 5572$ より $x = 15, y = 13$ とおいたと思われる。そして、(3.11) より、

$$(3.16) \quad z = \sqrt[3]{3817 - 15^2} = \sqrt[3]{442} = 7.617411603\dots$$

(3.13) より、

$$u = \sqrt{15^2 - 12^2} = 9$$

(3.14) より、

$$v = 12 - \sqrt{13^2 - 12^2} = 7$$

である。(3.15) は

$$(12 - 9)^2 + 7^2 = z^2$$

となるので、

$$(3.17) \quad z = \sqrt{58} = 7.615773105\dots$$

である。よって、沢口の想定解¹⁹は $x = 15, y = 13, u = 9, v = 7$ で、 z は (3.16) の近似値 (7.61, 7.62, 7.617 など) であろう。

図2において、 $\triangle ABE$ は辺の比が $3 : 4 : 5$ の直角三角形で、 $\triangle AFD$ は辺の比が $5 : 12 : 13$ の直角三角形である。この2つの三角形は和算家がよく用いるものであるので、沢口は

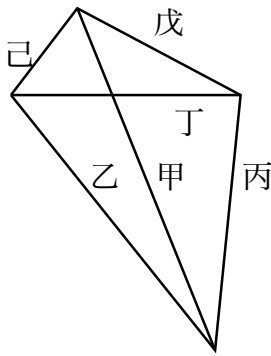
$$AB = 12, AE = 15, AF = 13, BE = 9, FD = 5$$

を与え、小斜 = EF を未知数として作題したと考えられる。

§ 3.4. 『古今算法記』の第14問

『古今算法記』第14問は1458次方程式が導かれる問題である。

『古今算法記』第十四問



今有兩平錐只云列甲乙丙丁戊己寸各別別再自乘之各其差云則者從甲數而乙數者少寸立積二百七十一坪從乙數而丙數者少寸立積二百十七坪從丙數而丁數者少寸立積六十坪令八分從丁數而戊數者少寸立積三百二十六坪二分從戊數而己數者少寸立積六十一坪問甲乙丙丁戊己幾何 [13]

兩平錐 (図のような四角錐の平面図) の辺、甲、乙、丙、丁、戊、己の長さを別々に3乗したときの差について、甲の3乗より乙の3乗は271坪 (立方寸) 少なく、乙の3乗より丙の3乗は217坪少なく、丙の3乗より丁の3乗は60.8坪少なく、丁の3乗より戊の3乗は326.2坪少なく、戊の3乗より己の3乗は61坪少ない。甲、乙、丙、丁、戊、己の長さは幾らか。

甲、乙、丙、丁、戊、己の1辺をそれぞれ x, y, z, u, v, w とすると

$$\begin{aligned}
 x^3 - y^3 - 271 &= 0 \\
 y^3 - z^3 - 217 &= 0 \\
 z^3 - u^3 - 60.8 &= 0 \\
 u^3 - v^3 - 326.2 &= 0 \\
 v^3 - w^3 - 61 &= 0 \\
 (3.18) \quad &u^2x^4 + ((-u^2 - v^2 + w^2)y^2 + (-u^2 + v^2 - w^2)z^2 + u^4 + (-v^2 - w^2)u^2)x^2 \\
 &+ v^2y^4 + ((u^2 - v^2 - w^2)z^2 - v^2u^2 + v^4 - w^2v^2)y^2 + w^2z^4 \\
 &+ (-w^2u^2 - w^2v^2 + w^4)z^2 + w^2v^2u^2 = 0
 \end{aligned}$$

¹⁹(3.16) と (3.17) が3桁一致することにより、 $x = 15, y = 13, z = 7.62, u = 9, v = 7$ が有効桁数3桁の近似解と判断できるが、おそらく沢口は (3.17) の検算は行っていないと思われる。

で、木村・平野・横山 [6] による小数第 10 位までの数値解²⁰ は

$$\begin{cases} x = 10.0000056403 \\ y = 9.0000069815 \\ z = 8.0000083910 \\ u = 7.6699093899 \\ v = 5.0000228360 \\ w = 4.0000357240 \end{cases}$$

である。さらに木村等は w に関する最小多項式が 1458 次であることも述べている。

沢口は $x = 10, y = 9, z = 8, v = 5, w = 4$ とおき、六斜術 (3.18) により u を求めている。すなわち、

$$10726 - 6065u^2 + 100u^4 = 0$$

を解き $u = 7.66985512133$ の小数第 5 位以下を切り捨て

$$u = 7.6698$$

を得る。これより

$$z^3 - u^3 = 60.8$$

$$u^3 - v^3 = 326.2$$

により問題文のパラメタ²¹ を与えた²²と考えられる。第 12 問と同様の方法である。

§ 4. 作題シミュレーションと橋本流文書の照合

前節では、荒井と森継らの数値解に基づき、第 4 問、第 12 問、第 13 問と第 14 問に対する沢口の作題シミュレーションを行なったが、本節では、橋本流文書 (『牛角伝』と『当流算術難好伝記』) に「述例曰」として記載されている沢口から伝えられた解と前節で得た沢口の想定解を照合する。それにより、作題シミュレーションを検証するとともに、「述例曰」の信頼性を検討する。

本節では、最初に橋本流文書の簡単な紹介を行うが、記載内容の検討や伝記者の久留正昆について考察は 6 節で行う。

²⁰ 荒井・森継 [1] とは小数第 7 位に違いがあるので、小数第 6 位までは正しいと考えてよいだろう。

²¹ 講演の際筆者は、問題文の「立積六十坪令八分」は 60.08 坪 と解するのが沢口の用法 (一尺令五分 = 10.5 寸 = 1.05 尺) に合致していると述べたが正しくない。十坪の位が六、一坪の位が零、十分の一坪の位が八という意味で、60.8 坪 が正しい。

²² 小数第 6 位以下を切り捨て $u = 7.66985$ としても同じ結果を得るが、沢口の他の問題に比べ精密過ぎるので採用してない。小数第 4 位以下を切り捨て $u = 7.669$ とすると $8^3 - u^3 = 60.9588, u^3 - 5^3 = 326.0411$ となり 60.8 および 326.2 に丸められないので、小数第 5 位以下を切り捨てたと考えられる。

§ 4.1. 橋本文書

佐藤賢一は『近世日本数学史』において、『古今算法記』の遺題十五問に対して、橋本流の側に伝えられた解答例(数値解とその検算)を集成したもの」[9, p.272]として『牛角伝』と『当流算術難好伝記』を紹介している。『牛角伝』はかなりの破損があるが、佐藤は同書において可能な範囲で翻刻している。また、『当流算術難好伝記』の「述例曰」として与えられている数値解を表に示している。

この度筆者は佐藤氏から橋本文書のコピーの提供を受けた。『当流算術難好伝記』の巻頭(内題から第二問まで)は以下のである。

當流算術難好傳記	
古今算法記一十五問	因率何 因古法
橋本氏正数門弟	
沢口氏一之述例	
久留氏正昆傳記	
第一問	
号牛角傳有別卷故不記之	矣
第二問	
今有大立方小平方各一只云	
平方積爲實開立方之見商寸	
與立方積爲實開平方之見商	
寸二數共相併一尺別平方面	
寸與立方面寸和而七寸問平	
方面立方面幾何	
述例曰立方面四寸	
平方面三寸	
傳云先置立方積	六十
一爲廉平方開之得商八寸寄	爲實以
左又置平方積爲實以一爲廉	
立方開之得商二寸不盡	一步
者命之而併二商得一尺也	

巻頭の五行によると、『古今算法記』の遺題について橋本正数の門弟の沢口一之が述例を与え、橋本の門弟の久留正昆が伝を記している。第三問以降(第四問と第十五問を除く)も、第二問と同様に問題文、述例および伝から構成されている。

巻末は次のようである。

右一十五問之内第一問即有法 術矣第四問与第十五問無傳無 術也其餘一十二問者有傳無術 學者時々可考於此術也	
松庭朱世傑先生	
号待隣軒	
橋本傳兵衛尉	
正数	花押
天和三	癸
多田八右衛門殿	曆涼月日

天和三(1683)年に橋本正数が多田八右衛門に発給した伝書である。

本論文で取り上げている問題について、『牛角伝』と『当流算術難好伝記』の「述例曰」を抜き出し表にする。[]内は欠損の復元および誤記の訂正である。

問題	述例曰
第 1 問	大圓徑二尺有奇 中圓徑一尺 [二寸] 小圓徑七 [寸]
第 2 問	立方面四寸 平方面三寸
第 3 問	甲方面四尺三寸 乙方面四尺 丙方面三尺三寸 丁方面一尺
第 4 問	此一問無傳無術也
第 5 問	甲方面七寸四 [分] 乙方面六寸七分五厘 丙方面六寸一分 丁方面五寸四分五厘 戊方面四寸八分 差各六分五厘
第 10 問	勾三尺七寸 股三尺八寸 弦五尺三寸余 中勾二尺六寸五分 方面一尺八寸七分余
第 12 問	大斜八寸六分余 中斜七寸 小斜五寸
第 13 問	大斜一尺五寸 中斜一尺三寸 小斜七寸六分二厘
第 14 問	甲一尺 乙九寸 丙八寸 丁七寸六分六 [厘] 余 戊五寸 [己] 四寸

§ 4.2. 『古今算法記』第 4 問の「無傳無術」

『当流算術難好伝記』第 4 問については、問題文に続いて「述例曰此一問無傳無術也」とのみ記されている。3.1 節で述べたように、沢口は「又甲積與丙積」とすべきところを「又乙積與丙積」と誤って印刷して出版した可能性が高い。以下では、「無傳無術」の意味することを検討する。

誤まって出題した

$$(4.1) \quad x^3 + y^3 = 137340$$

$$(4.2) \quad y^3 + z^3 = 121750$$

$$(4.3) \quad \sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z} = 12$$

の近似解を沢口が求め得たとすれば、 y をたとえば 0.05 から 51.5 ($< \sqrt[3]{137340} = 51.593\dots$) まで 0.05 刻みで与えて、それぞれの y に対し、(4.1) から x , (4.2) から z の近似値を求め、 $\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z}$ を計算し 12 に十分近ければ採用するという方法であろう。現代であれば、コンピュータで計算すれば次の 2 組みの解 $x = 51.457, y = 10.3, z = 49.414$ ($\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z} = 12.000443$) と $x = 36.867, y = 44.35, z = 32.559$ ($\sqrt{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[4]{z} = 12.000238$) が容易に見つかるが、恐らく沢口には不可能であろう。また、 $x > y > z$ を満たす解が存在しない (第 4 問は解を持たない) ことを示すこともできなかった²³と思われる。

したがって、沢口は第 4 問の近似解を求めることができなかったので伝えなかったというのが、「無傳無術」の真相であろう。

先行研究は、「無傳無術」を「現在ならば解なし、解答不能とすべき問題」[9] としている。「無術」はたしかに「現在ならば解なし、解答不能とすべき問題」とも考えられるが、

²³ 荒井と森継は「この結果を実際に確かめるためには 108 次の方程式を具体的に解く必要があるが、当時、それは不可能であり、遺題に解答を与えた関らもこの大小関係は確認できていないと考える」[1] と述べている。その後、上野健爾は、 $x > y > z$ を満たす解は存在しないことを背理法を使って証明しているが、「もっとも沢口がこのように議論した可能性は低いと思われる」[2, p.270] と付け加えている。

「無傳」の説明がつかない。さらに、『当流算術難好伝記』の巻末に「右一十五問之内第一問即有法術矣第四問与第十五問無傳無術也其餘一十二問者有傳無術」とあり(4.1 節参照)、第 1 問、第 4 問と第 15 問以外の 12 問は「述例曰」として解が与えられており、「術曰」が欠けている。したがって、「有傳」か「無傳」かは、沢口から解が伝えられたか否か、「有法術」か「無術」かは、沢口から術が伝えられたか否かを意味していると解するのが妥当である。

§ 4.3. 『古今算法記』第 12 問の「述例曰」

3.2 節で見たように、沢口の想定解は「大斜 8 寸、中斜 7 寸、小斜 5 寸」である。沢口が問題文で与えた「丙斜一寸四分四七」が六斜術で求めたものに一致しているので、想定解は確実である。一方、第 12 問の「述例曰」は「大斜八寸六分余 中斜七寸 小斜五寸」となっており、沢口の解と異なるものである。「述例曰」は

$$8.6^3 + 5^3 = 761.056 >> 637$$

$$7^3 + 8.6^3 = 979.056 >> 855$$

となり題意を満たさないことは容易に分かる。

沢口が橋本流に「大斜八寸 中斜七寸 小斜五寸」を解として伝えたが、久留には「大斜八寸六分余 中斜七寸 小斜五寸」と誤って伝えられたのであろうか。あるいは、沢口が解を「大斜八寸六分余 中斜七寸 小斜五寸」と伝えたのであろうか。

§ 4.4. 『古今算法記』第 13 問の「述例曰」

3.3 節で与えた作題方法は、大斜 = 15 寸、中斜 = 13 寸を与え、小斜 = 7.617411603... 寸を計算で求めている。つまり沢口の想定解は「大斜 15 寸、中斜 13 寸、小斜 7.62 寸(あるいは 7.61 寸、7.617 寸)」である。一方、『当流算術難好伝記』第 13 問では「述例曰 大斜一尺五寸 中斜一尺三寸 小斜七寸六分二厘」とあり、沢口が作題の際に与えた大斜と中斜は寸単位で 2 桁の整数、計算により求めた小斜は寸単位で小数第 2 位まで与えている。「述例曰」は沢口が用意していた解答であろう。

逆に、3.3 節で行った作題シミュレーションは適切であると考えられる。

§ 4.5. 『古今算法記』第 14 問の「述例曰」

3.4 節で与えた作題方法による解は

$$\text{甲} = 10 \text{ 寸}, \text{乙} = 9 \text{ 寸}, \text{丙} = 8 \text{ 寸}, \text{丁} = 7.6699093899 \dots \text{ 寸}, \text{戊} = 5 \text{ 寸}, \text{己} = 4 \text{ 寸}$$

であるが、『当流算術難好伝記』第 14 問では「述例曰 甲一尺 乙九寸 丙八寸 丁七寸六分六余 戊五寸 己四寸」とある。沢口が作題の際に最初に与えた甲乙丙戊己は寸単位で整数、六斜術を用いて求めた丁は寸単位で小数第 2 位まで与え、さらに「余」を付けている。

第 13 問と同様、「述例曰」は沢口が用意していた解答であろう。逆に、3.4 節で行った作題シミュレーションは適切であると考えられる。

§ 4.6. 「述例曰」

第 13 問と第 14 問は沢口の想定解が「述例曰」に反映しており、出題の際に整数で与えた未知数は「述例曰」でも整数、計算で求めた未知数は小数第 2 位まで記載してある。したがって、沢口の想定解が「述例曰」に反映している他の問題についても、整数で与えられている未知数を最初に与えて作題したと考えてよさそうである。

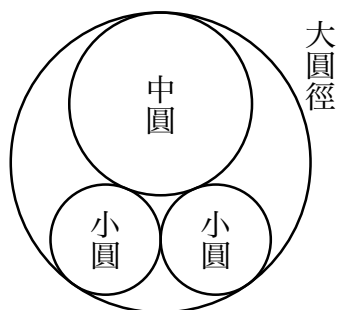
一方、第 12 問の「述例曰」は明らかに誤答で、沢口の想定解が反映していないと思われるが、詳細は不明である。

§ 5. 橋本流文書に基づく作題シミュレーション

本節では、『牛角伝』および『当流算術難好伝記』に沢口の近似解として与えられた「述例曰」に基づき、第 1 問、第 2 問、第 3 問、第 5 問、第 10 問を沢口がいかに作題したかのシミュレーションを行う。

§ 5.1. 『古今算法記』第 1 問の作題

『古今算法記』第一問



今有平圓内如圖平圓空^{三箇}外餘寸平積百二十歩只云從中圓徑寸而小圓徑寸者短五寸問大中小圓徑幾何 [13]

大円の中に中円が 1 つと小円が 2 つそれぞれ図のように接している。大円から中円と小円を取り除いた部分 (外余) の面積が 120 歩、小円の直径 (小円径) は中円の直径 (中円径) より 5 寸短い。このとき、大円、中円、小円の直径を求めよ。

大円径を x 、中円径を y 、小円径を z とすると、

$$(5.1) \quad \frac{\pi}{4}(x^2 - y^2 - 2z^2) = 120$$

$$(5.2) \quad y - z = 5$$

$$(5.3) \quad z(x + y)^2 - 4xy(x - y) = 0$$

なる連立代数方程式が得られる。式 (5.3) は、3 円が図のように接触するという条件を表しており、建部賢弘が『発微算法』第一問の解説として『発微算法演段諺解』亨巻 (四丁裏) で用いた

$$(5.4) \quad y^2z + (4y^2 + 2yz)x + (-4y + z)x^2 = 0$$

と同値²⁴である。

沢口はどのようにして問題を作成したのであろうか。パラメタ (中円径と小円径の差、外余) のうち、中円径と小円径の差は任意に与えられるので5寸とする。そして中円径も任意なので12寸とすると (5.2) から小円径は7寸となる。大円径 x は2つの方程式

$$(5.5) \quad \frac{\pi}{4}(x^2 - 12^2 - 2 \cdot 7^2) = \text{外余}$$

$$(5.6) \quad 7(x + 12)^2 - 4 \cdot 12x(x - 12) = 0$$

を満たす。(5.6) は

$$1008 + 744x - 41x^2 = 0$$

となるので、 $x = 19.4127932093594$ である。外余を

$$\frac{\pi}{4}(19.4127932093594^2 - 12^2 - 2 \times 7^2) = 105.91607898685$$

とすると (5.5)(5.6) は共通根を持つ。中円径12寸、小円径7寸、外余120歩として大円径を求めても3円は図のようにには接触しない。

『当流算術難好伝記』の内題の後に円率は古法を用いるとあるので円周率を3として、(5.3) は考慮せずに、 $y = 12, z = 7$ とすると、大円径 x が満たす方程式は

$$\frac{3}{4}(x^2 - 12^2 - 2 \times 7^2) = 120$$

となる。これを解いて

$$x = \sqrt{4 \cdot 120/3 + 12^2 + 2 \cdot 7^2} = 20.049937655$$

が得られる。これは、二尺有奇に該当する。

「述例曰 大圓徑二尺有奇 中圓徑一尺[二寸] 小圓徑七[寸]」²⁵が沢口の解であるとする、作題にあたって、円周率3、中円径一尺二寸、小円径七寸として外余のみから大円径を求めたことになる。したがって、最も重要な3円の接触条件 (5.3) を考慮していない。

§ 5.2. 『古今算法記』第2問の作題

第2問の数値解は2節で見たように、

$$\begin{cases} x = 3.031620806142 \\ y = 3.968379193857 \end{cases}$$

である。関孝和も田中由真もこの解を与える方程式の導き方を述べており、両者ともこの解は容易に与えることができたと思われる。

²⁴(5.3) を展開し、 x に関して昇幂に並べたものが (5.4) である。

²⁵[二寸] と [寸] は『牛角伝』の破損箇所を佐藤が補ったものであるが、中円径と小円径の差が五寸なので佐藤の復元は正当と考える。

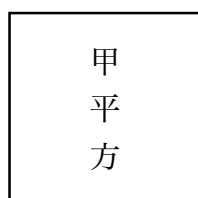
一方、「立方面四寸 平方面三寸」であるが、

$$\begin{cases} \sqrt[3]{3^2} + \sqrt{4^3} = 10.08008\dots \\ 3 + 4 = 7 \end{cases}$$

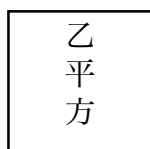
より、「述例曰」の解は小数第2位以下を切り捨てた近似値あるいは小数第1位を四捨五入した近似値である。おそらく沢口は、 $\sqrt[3]{9} = 2.08008\dots$ と整数に近いことを知っていて、『算法根源記』第122問を元に作題したと思われる。

§ 5.3. 『古今算法記』第3問の作題

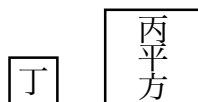
『古今算法記』第三問



今有甲乙丙丁平方各一只云從甲方面寸而乙方面寸者短三寸從乙方面寸而丙方面寸者短七寸從丙方面寸而丁方面寸者短二尺三寸別列甲乙丙丁方面寸別之爲實開立方之見商寸各四和五尺五寸問甲乙丙丁方面幾何 [13]



甲乙丙丁の正方形がある。甲の一边より乙の一边は3寸短い。乙の一边より丙の一边は7寸短い。丙の一边より丁の一边は2尺3寸短い。甲乙丙丁の各辺の立方根の和は5尺5寸である。甲乙丙丁の各辺の長さは幾らか。(立方根は尺単位で行い、尺^{1/3}と尺を同一視する。)



甲乙丙丁の辺の長さを尺単位²⁶で x, y, z, u とする。

$$\begin{aligned} x - y &= 0.3 \\ y - z &= 0.7 \\ z - u &= 2.3 \\ (5.7) \quad \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{u} &= 5.5 \end{aligned}$$

「述例曰」は「甲方面四尺三寸 乙方面四尺 丙方面三尺三寸 丁方面一尺」である。 $x = 4.3, y = 4.0, z = 3.3, u = 1.0$ は最初の3式を満たしているが、

$$\sqrt[3]{4.3} + \sqrt[3]{4.0} + \sqrt[3]{3.3} + \sqrt[3]{1.0} = 5.70233993\dots$$

²⁶ 荒井と森継は寸単位で計算したので、数値解は

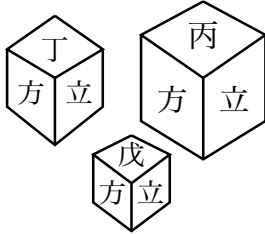
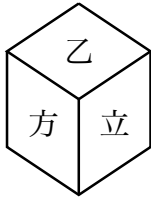
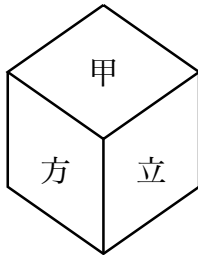
$$\begin{cases} x = 2611.1308741444867849 \\ y = 2608.1308741444867849 \\ z = 2601.1308741444867849 \\ u = 2578.1308741444867849 \end{cases}$$

としている。

と 1 桁しか合っていない。立方根を小数第 1 位切り捨てで計算すると $1.6+1.5+1.4+1 = 5.5$ となる。おそらく沢口は、 $x = 4.3, y = 4.0, z = 3.3, u = 1.0$ のいずれか 1 つを与え、(5.7) のパラメタを立方根の小数第 1 位切り捨て計算で与えたと思われる。

§ 5.4. 『古今算法記』 第 5 問の作題

『古今算法記』 第五問



今有甲乙丙丁戊立方各一只云甲積與乙積相併共寸立
積七百坪又丙戊丁積各三和共寸五百坪問甲乙丙丁戊
方面各幾何 乃甲乙丙丁戊方
面之差各同寸也 [13]

甲乙丙丁戊の立方体がある。甲積と乙積を併せると
体積 700 坪、また丙戊丁の体積を併せると 500 坪、
甲乙丙丁戊の 1 辺はそれぞれいくらか。すなわち、
甲乙丙丁戊の 1 辺の差は同一である。

甲、乙、丙、丁、戊の 1 辺をそれぞれ x, y, z, u, v と
し、差を d とする。

$$(5.8) \quad x^3 + y^3 = 700$$

$$(5.9) \quad z^3 + u^3 + v^3 = 500$$

$$(5.10) \quad x - y = d$$

$$(5.11) \quad y - z = d$$

$$(5.12) \quad z - u = d$$

$$(5.13) \quad u - v = d$$

「述例曰」には「甲方面七寸四分 乙方面六寸七分五厘 丙方面六寸一分 丁方面五寸四分五厘 戊方面四寸八分 差各六分五厘」とある。「述例曰」の数値解を (5.8) に代入すると、

$$(5.14) \quad 7.4^3 + 6.75^3 = 712.770875$$

となり、(5.8) を満たさない。あるいは、 $x = 7.4$ を (5.8) に代入すると、

$$y = \sqrt[3]{700 - 7.4^3} = 6.655244887$$

となり、6.75 と合致しない。

荒井と森継の数値解は

$$\begin{cases} x = 7.34880635202149911295 \\ y = 6.7175159515506248173 \\ z = 6.0862255528862585051 \\ u = 5.4549351542218921929 \\ v = 4.8236447555575258807 \\ d = 0.6312903086643663122 \end{cases}$$

であるので、「述例曰」が解と合致しているのは1桁だけである。

原因を検討してみる。有効桁数が2桁で与えられている甲丙戊の各辺を $x = 7.4, z = 6.1, v = 4.8$ として作題したとする。(5.10)(5.11)(5.12)(5.13) より $d = (7.4 - 6.1)/2 = 0.65$ であるので $y = 7.4 - 0.65 = 6.75, u = 6.1 - 0.65 = 5.45$ となる。(5.14) より「甲積與乙積相併共寸立積七百十三坪」とする。(5.9) は

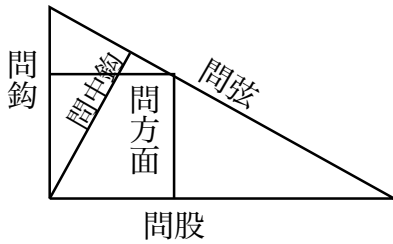
$$(5.15) \quad 6.1^3 + 5.45^3 + 4.8^3 = 499.451625$$

であるので、ほぼ3桁合致している。したがって、云数の「七百十三坪」あるいは「七百十二坪」が何らかの理由で「七百坪」に変更されたことが考えられる。

§ 5.5. 『古今算法記』第10問の作題

『古今算法記』第10問は、『当流算術難好伝記』の「述例曰」から作題方法が復元できる。

『古今算法記』第十問



今有鉤股弦内如圖平方空外餘寸平積三百五十歩
只云股取七分之五得數與亦中鉤取三分之五得數
二數相併共四尺五寸問鉤股弦中鉤方面幾何

[13]

今鉤股弦 (直角三角形) があり、図のように平方 (正方形) の空があり、外余の面積は350歩、股の長さの $\frac{5}{7}$ と鉤の長さの $\frac{2}{3}$ を併せると4尺5寸である。鉤股弦 (直角三角形の辺の長さ)、中鉤 (直角から対辺に下ろした垂線)、方面 (正方形の一辺) はそれぞれいくらか。

鉤を x , 股を y , 弦を z , 中鉤を u , 方面を v とすると

$$(5.16) \quad \frac{1}{2}xy - v^2 = A$$

$$(5.17) \quad \frac{5}{7}y + \frac{2}{3}u = B$$

$$(5.18) \quad x^2 + y^2 = z^2$$

$$(5.19) \quad xy = uz$$

が成り立つ²⁷。

『当流算術難好伝記』には「述例曰 鈎三尺七寸 股三尺八寸 弦五尺三寸余 中鈎二尺六寸五分 方面一尺八寸七分余」とある。これらのうち、「余」がついてない鈎、股、中鈎を与えて問題を作成したとして復元する。すなわち、 $x = 37, y = 38, u = 26.5$ とする。 v は (5.16) にのみ現れるため、 A は任意に与えることができるので、 $A = 350$ とする。(5.16) より

$$v = \sqrt{\frac{1}{2} \times 37 \times 38 - 350} = 18.78829422 \dots$$

となるので、 $v = 18.7$ 余 とする。 z は (5.18) からは

$$z = \sqrt{37^2 + 38^2} = 53.037722424 \dots$$

となり、(5.19) からは

$$z = 37 \times 38 / 26.5 = 53.056603773 \dots$$

となる。有効桁数 3 桁で弦 $= z = 53$ 寸余 となる。 $y = 38, u = 26.5$ を (5.17) に代入すると

$$B = \frac{5}{7}38 + \frac{2}{3}26.5 = 44.8095238$$

となりパラメタ $B = 45$ を決定している。

つぎに (5.19) の代わりに

$$(5.20) \quad xy = (x + y)v$$

を用いる場合を考える。 u は (5.17) のみに現れるので、 B は任意に与えることができ、 $B = 45$ とする。 $x = 37, y = 38$ とすると

$$v = 37 \times 38 / (37 + 38) = 18.7466666 \dots$$

となり、中鈎は 18.7 寸余 となる。(5.17) より、

$$u = \frac{3}{2}(45 - \frac{5}{7}38) = 26.7857142 \dots$$

となるが、26.785 寸を二尺六寸五分とすることは考えられないので、 $x = 37, y = 38, B = 45$ と連立代数方程式 (5.16)(5.17) (5.18)(5.20) から u, v, z, A を求めることはしない。

以上により、沢口は外餘三百五十歩 (平方寸)、鈎三尺七寸、股三尺八寸、中鈎二尺六寸五分を与えて作題したと考えられる。「述例曰」では、計算で求めた未知数 (弦 z と方面 v) は有効桁数 2 桁ないし 3 桁で切り捨て「餘」をつけている。

²⁷ A, B を与えたとき、4 つの式 (5.16)(5.17) (5.18)(5.19) から x, y, z, u, v を確定させることはできないが、沢口は、作題のとき A, x, y, u を与え、 B, z, v の近似値を有効桁数 2 桁ないし 3 桁求めている。一方、関は補助の未知数として長弦 (弦を中鈎で 2 分したときの長い方の切片) を導入し、関係式

$$(\text{股})^2 = (\text{中鈎})^2 + (\text{長弦})^2, \quad (\text{股})^2 = (\text{弦}) \times (\text{長弦})$$

なども用いて、股 $= y$ に関する 10 次方程式を導いている。

§ 6. 橋本流文書の数学史的検討

4.1 節で紹介した橋本流文書の数学史的検討を行う。

§ 6.1. 『牛角伝』の「術曰」

『古今算法記』の第1問については、『牛角伝』に「術曰」として術文の記載があるが、前半は破損がひどく一部しか判読できない。判読し翻刻したものは [9, p.270] を見よ。判読が可能な丙以下を現代的に表すと次のようになる。大円径を x , 中円径を y , 小円径を z とする。

$$\begin{array}{ll}
 \mathcal{B} := & z(x - y) + \frac{\pi}{2}x \quad \text{乙} \\
 \mathcal{C} := yz + \mathcal{B} & zx + \frac{\pi}{2}x \quad \text{丙} \\
 \mathcal{D} := (\frac{\pi}{4}x^2) \times 4 & \pi x^2 \quad \text{丁} \\
 \mathcal{E} := ((\frac{\pi}{4}x^2) \times 4)\pi^2 \times \frac{1}{4} & \pi(\frac{\pi}{2}x)^2 \quad \text{戊} \\
 \mathcal{F} := \mathcal{D}z^2 & \pi z^2 x^2 \quad \text{己} \\
 \mathcal{G} := \mathcal{E}z^2 & \pi z^2 (\frac{\pi}{2}x)^2 \quad \text{庚} \\
 \mathcal{H} := (\mathcal{C}^2\pi - \mathcal{F} - \mathcal{G})^2 & \pi^4 x^4 (\frac{\pi}{4} + z - \frac{\pi}{4}z^2)^2 \quad \text{辛} \\
 (\mathcal{F} \times \mathcal{G} \times 4) = \pi^4 z^4 x^4 & \mathcal{H} \quad \text{辛与適数也}
 \end{array}$$

一見もっともらしい術文が書いてあるが内容はない。たとえば、「大円の面積を4倍すると円周率と大円径冪の積となり丁とする」を式で書けば $(\frac{\pi}{4}x^2) \times 4 = \pi x^2$ ということである。戊己庚も同様である。「術曰立天元一爲 (以下4行判読不能)」で始まっているので、一見すると天元術のようであるが、全体としては天元術の術文ではない²⁸。

5.1 節で見たように、沢口は中円径12寸または小円径7寸を与え、外余の120歩(平方寸)から大円径 x を $\frac{3}{4}(x^2 - 12^2 - 2 \times 7^2) = 120$ を解いて求めているが、上記の「術曰」はそのような解法とは関係なさそうである。『牛角伝』の「術曰」が沢口が書いたかあるいは沢口が伝えたことが元になっていたとすると、何か事情があったのかもしれない。

§ 6.2. 『当流算術難好伝記』の「傳云」

『当流算術難好伝記』は『古今算法記』の遺題ごとに、問題文、「述例曰」、「傳云」から構成されている。「述例曰」は沢口の解答例で、「傳云」は久留による「述例曰」の検算あるいは説明と考えられる。

「傳云」について、第3問、第5問と第12問を見てみる。

²⁸ 佐藤賢一が「方程式を導かねばならない問題であるはずなのに恒等式を導いており、解答としては全く意味をなしていない」[9, p.271]と指摘している通りである。

6.2.1. 『古今算法記』第3問の「傳云」

第3問は5.3節で見たように、甲乙丙丁の辺の長さを x, y, z, u としたとき、

$$\begin{aligned}
 x - y &= 0.3 \\
 y - z &= 0.7 \\
 z - u &= 2.3 \\
 (6.1) \quad \sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} + \sqrt[3]{z} + \sqrt[3]{u} &= 5.5
 \end{aligned}$$

となる x, y, z, u を求めよという問題である。

「述例曰」は「甲方面四尺三寸 乙方面四尺 丙方面三尺三寸 丁方面一尺」であり、「傳云」は以下のようである。

傳曰先置丁方面爲實以一爲廉立方開之得商一尺又置丙方面爲實以一爲廉立方開之得商一尺四不盡^{五五六}者命之又置乙方面爲實以一爲廉立方開之得商一尺五寸不盡^{六二五}者命之又置甲方面爲實以一爲廉立方開之得商一尺六寸不盡^{二令四}者命之併和右之四商而得五尺五寸也 [8]

現代的に表すと、

$$\begin{aligned}
 \sqrt[3]{1.0} &= 1.0000[1.0000 \dots] \\
 \sqrt[3]{3.3} &= 1.4556[1.48880 \dots] \\
 \sqrt[3]{4.0} &= 1.5625[1.58740 \dots] \\
 \sqrt[3]{4.3} &= 1.6204[1.62613 \dots] \\
 &+) 5.6385[5.70233 \dots]
 \end{aligned}$$

である。[]内は数学的に正しい数を表す。「傳云」における立方根の計算は正しくない。たとえば、 $\sqrt[3]{4.3}$ は $1.62613 \dots$ であるが、「一尺六寸不盡^{二令四}」すなわち、 1.6204 としており、小数第3位以下が間違えている。 $\sqrt[3]{3.3}$, $\sqrt[3]{4}$ も同様に正しくない。 $\sqrt[3]{3.3}$, $\sqrt[3]{4}$ の小数第2位が間違っているが、尺単位で小数第2位以下を切り捨てにより(6.1)の検算を行うと、 $1 + 1.4 + 1.5 + 1.6 = 5.5$ となり、沢口が作題の際に行った計算に一致している。

6.2.2. 『古今算法記』第5問の「傳云」

第5問は5.4節で見たように、甲、乙、丙、丁、戊の1辺をそれぞれ x, y, z, u, v とし、差を d とすると

$$\begin{aligned}
 (6.2) \quad & x^3 + y^3 = 700 \\
 & z^3 + u^3 + v^3 = 500 \\
 & x - y = d \\
 & y - z = d \\
 & z - u = d \\
 & u - v = d
 \end{aligned}$$

と表される。「述例曰」の「甲方面七寸四分 乙方面六寸七分五厘 丙方面六寸一分 丁方面五寸四分五厘 戊方面四寸八分 差各六分五厘」は、

$$7.4^3 + 6.75^3 = 712.770875$$

が原因で有効桁数 1 桁の近似解である。

「傳云」は

傳云甲方面再自乗得四百令五坪二二四乙方面再自乗得三百令七坪五四六八七五右二数相併得七百坪不盡^{十一坪七七令八七五}者命之也又丙方面再自乗得二百二十六坪九八一丁方面再自乗得一百六十一坪八七八六二五戊方面再自乗得一百一十五坪令五九二右三数相併而得五百坪不盡者加入之也 [8]

である。現代的に表すと

$$\begin{aligned}
 7.4^3 &= 405.224 \\
 6.75^3 &= 307.546875 \\
 &+) 711.770875 [712.770875] \\
 6.1^3 &= 226.981 \\
 5.45^3 &= 161.878625 \\
 4.8^3 &= 115.0592 [110.592] \\
 &+) 500 \text{ 不盡 } [499.451625]
 \end{aligned}$$

である。[] 内は数学的に正しい数値である。(6.2) が 1 桁しか一致していないのにそのままにしているのは、沢口から百坪未満は切り捨てと伝えられていたのかもしれない。712.770875 を 711.770875 と記していることは、おそらく伝写の際の誤りであろう。110.592 (= 4.8³) を 115.0592 と記していることは計算間違いと思われる。というのは、「不盡」について佐藤茂春は「割ノコル數ヲ云ナリ」[11] としているので、「五百坪不盡者加入之」は

$$\begin{aligned}
 226.981 + 161.878625 + 115.0592 &= 503.918825 > 500 \\
 226.981 + 161.878625 + 110.592 &= 499.451625 < 500
 \end{aligned}$$

より、500 坪の余り 3.918825 坪を 500 坪に加え入れるという意味である。つまり、 4.8^3 を 115.0592 と計算している。

§ 6.3. 『古今算法記』第 14 問の「傳云」

第 14 問の「傳云」は

傳曰此一問之六斜各不合于曲尺故其定寸不能知幾何者也 [8]

伝がいうことには、この一問の六斜はそれぞれ曲尺かねじゃくに合わないの、その長さを
 知ることはできない。

である。

「六斜」が見えることより、沢口が六斜術を用いることを伝えたとも考えることができるが、曲尺云々を沢口が伝えることは考えられない。要するに「傳云」では、曲尺に合わないことを口実にして長さは分からないと言っている。

6.3.1. 沢口と「傳曰」

沢口が「述例曰」を橋本流に伝えたとき、「述例曰」が近似解として適切であることの
 検算方法を伝えた可能性はある。

第 2 問と第 3 問の「傳曰」の「立方開之得商二寸不盡」および「立方開之得商一尺五寸
 不盡」は、沢口が「立方根は寸で切り捨てよ」というようなことを伝えたとなると説明が
 つく。たとえ沢口がそのような指示をしたとしても、第 3 問の立方根の計算に誤りがある
 ことから、細かい計算までは伝えてないと思われる。

「傳曰」と沢口の関わりについて確たることは分からない。

§ 6.4. 久留正昆

本節の最後に『当流算術難好伝記』などの伝記者久留正昆について検討する。佐藤賢一
 [10] は、久留正昆と関孝和の『開方翻変之法』を書写した久留重孫が同一人物であるとい
 う驚くべきことを述べている。『新訂 寛政重修諸家譜』第九 [15] の以下の記述により、
 久留重孫が改名して久留正昆になったというのが根拠である。

つぐまさ
 (久留次正の子)

まさひで
 正昆

初重孫 市郎右衛門 號道喜 久留半右衛門勝正が養子となり、のち病によりて
 家へかへる。 [15, p.357]

かつまさ
 (久留勝正の子)

しげざね
 重孫

市郎右衛門 實は久留善兵衛次正が五男。勝正が養子となる。

貞享元年五月四日はじめて常憲院殿 [綱吉] にまみえたてまつり、のち病によりて
 家にかへる。 [15, p.360]

天和三年(1683)以前に『当流算術難好伝記』を記録した久留正昆が貞享二年(1685)関孝和の『開方翻変之法』を書写したとすると、「初重孫^{しげざね}」に矛盾する。また、貞享三年生まれの蜂屋定章(淡山尚綱)が『円理発起』の自序で書いている「予游関子之高弟久留重孫之門下」[21]にも矛盾する。

さらに、久留重孫は『開方翻変之法』を関の許可を得て書写している²⁹ので、かなりの数学力があつたと考えられるが、『当流算術難好伝記』の「傳云」を記録した久留正昆は6.2.1節で見たように、自明でない立方根($\sqrt[3]{1}$)を除くすべての立方根の計算を間違えており、立方根を正しく求められない、したがって3次方程式を解くことができない、と判断できる。以上より久留正昆と関孝和の高弟久留重孫が同一人物ではあり得ない。

§ 7. おわりに

沢口一之は『古今算法記』において、佐藤正興が『算法根源記』で出題したほとんどの遺題を未知数の消去により天元術に帰着させ、開方式(方程式)の導き方と近似解ではない正確な解を与えた。一方、本論文で示したように、沢口は高々3桁の近似解を想定して遺題を出題した³⁰。そして出題した遺題の最後を次のように結んだ。

右問一十五好之法 予 所以不出答術者讀前書例俟後學勘哲耳 [13]

右一十五の好みの法(答えに至る計算過程)を問う。私が答術を出さない理由は前書の例にのっとったためである。後学の研究を待つだけである。

「右問一十五好之法」を読んだ関孝和を含むほとんどの和算家は、正確な解を10進5～10桁³¹程度とそれを与える計算過程を示せと受け止めたはずである。このように受け取ると、沢口の遺題はすこぶる難解になる。そのような難問に対し、関は未知数の消去法である演段術を創案して、正確な解を与える方程式の導き方の骨子と方程式の次数を示したのである。導き方の詳細な説明は、関の一番弟子の建部賢弘が『発微算法演段諺解』(1675)において傍書法を用いて行なった。『古今算法記』の遺題の数値解は、今世紀になって木村・平野・横山[6]と荒井・森継[1]によって数式処理を用いて与えられた。

『古今算法記』の遺題の日本の数学に対する最大の貢献は、それ以前の問題を遥かに凌ぐ難問を出すことで、関孝和が演段術を創案する切っ掛けを与えたことである。演段術を記述するのに適した寄位法を沢口が発明したことも、忘れてはならない功績である。

²⁹関孝和が『開方翻変之法』を重訂した貞享二年十一月十三日の6日後の十一月十九日に久留重孫は書写している。さらに内題の下に関の朱印が押されているが、この印は関孝和編『角法并演段図』に押された印と同一である。詳細は[4]を見よ。

³⁰筆者は[5]で「沢口の出題意図は、一意的な解が存在するか否かを問い、存在する場合は数値解を要求したと考えられる」と書いたが、沢口の要求した数値解は有効桁数が高々3桁の近似解である。「沢口は有効桁数が高々3桁の近似解を要求したのであるが、今日までほとんどの読者(その中には関や田中も含まれる)は、沢口は5～10桁程度の数値解を要求していると考えてきた。」と訂正する。

³¹関は『角法并演段図』(1683重訂)で正3三角形から正20角形までの内接円と外接円の半径および面積を9～10桁与えている。

謝辞

佐藤賢一氏は筆者の求めに応じて、『牛角伝』、『当流算術難好伝記』および『当流算術相伝書』の影印のPDFファイルを作成し、快く提供してくれた。また、小川東氏は多くの有益なコメントを寄せ、本論文は格段に改善された。佐藤氏と小川氏に心より感謝申し上げる。

参考文献

- [1] 荒井千里・森継修一、古今算法記遺題の数値解について、数理解析研究所講究録、1568 (2007), 87-93
- [2] 上野健爾・小川東・小林龍彦・佐藤賢一、『関孝和論序説』、岩波書店、2008
- [3] 小川東、『関孝和「発微算法」 — 現代語訳と解説』、大空社、1994
- [4] 長田直樹、関孝和編『開方翻変之法』の諸写本について、数学史研究、224 (2016), 1-22
- [5] 長田直樹、『発微算法』と傍書法 — 関孝和はいつ傍書法を創案したか —, アリーナ、21 (2018), 65-76
- [6] 木村欣司・平野照比古・横山和弘、関孝和の問題を解く、J.JSSAC (日本数式処理学会誌) (2005) Vol.11, No.3,4, 35-42
- [7] 久留正昆、『牛角伝』、個人蔵
- [8] 久留正昆、『当流算術難好伝記』、個人蔵
- [9] 佐藤賢一、『近世日本数学史』、東大出版会、2005
- [10] 佐藤賢一、関孝和と同時代の和算家たち、日本数学会 2018 年度季秋総合分科会・数学基礎論および歴史分科会・特別講演
- [11] 佐藤茂春、『算法天元指南』、1698, 東北大学デジタルコレクション, 林文庫 54
- [12] 佐藤正興、『算法根源記』、1669, 東北大学デジタルコレクション, 林文庫 18
- [13] 沢口一之、『古今算法記』, 1671, 東北大学デジタルコレクション, 岡本刊 35
- [14] 朱世傑、『新編算学啓蒙』、1658, (原本は 1299), 東北大学デジタルコレクション, 藤原集書 6
- [15] 新訂寛政重修諸家譜、第九、続群書類従完成会、1991
- [16] 関孝和、『発微算法』、1674 年序、佐々木力氏蔵
- [17] 関孝和、『角法并演段図』、1683 年重訂, 東北大学デジタルコレクション, 平山文庫 MA/387
- [18] 建部賢弘、『発微算法演段諺解』、1685, 東北大学デジタルコレクション, 林文庫 37
- [19] 田中正利 (由真)、『算法明解』、1678, 東北大学デジタルコレクション, 岡本写 C06
- [20] 日本学士院編 (藤原松三郎著)、『明治前日本数学史』第三卷、岩波書店、2008
- [21] 蜂屋定章 (淡山尚綱)、円理発起、1728 年序, 東北大学デジタルコレクション, 岡本写 67
- [22] 林鶴一、天元術及ビ點竄術ニ就テ、東北数学雑誌、第四十巻、1935、(林鶴一博士和算研究集録、上巻、東京開成館、1937)