

関孝和編『開方翻変之法』について (II)
— 『開方翻変之法』で意図したこと —
On *Kaihō Honhen no Hō*
edited by Seki Takakazu (II)

長田直樹
Naoki Osada*

Abstract

We discuss *tekijin-shokyū* (method of vanishing a polynomial and its certain derivative), *shokyū-taisū* (in literal, replacement of each coefficient to obtain a root), and *shishō-kyokusū* (in literal, find the common root of a given polynomial and its derivative) in *Kaihō honhen no Hō* (Methods of Equation Modifications) re-revised by Seki Takakazu in 1685. We show that the algorithm of *taisū* consists of five procedures of *Kaihō honhen no Hō*.

We declare *tekijin-renkyūhō*, which has been considered to be purposeless, is available to use *taisū*. We also demonstrate that *tekijin-renkyūhō* and *tekijin-karenkyūhō* provide useful information on roots of real cubic and quartic equations, respectively.

§ 1. はじめに

関孝和編『開方翻変之法』について、先行研究では「本書では幾多の不正確な結果を含んではあるが、方程式論において劃期的な研究」(藤原松三郎 [2, p.217])、「要するに、開方翻変之法は孝和の意図が奈辺にあるか、われわれには理解しがたいものがあつたが、方程式を論じ、負根の存在を認め、虚根の方程式は偶数次なること、判別式を作って、極大極小を論じようとしたことは画期的の業績であつた。」(平山諦 [5, p.100]) というような評価がなされてきた。さらに、適尽廉級法については「無意義」(加藤平左エ門 [7]) が定説である。

本論文では、「関孝和編『開方翻変之法』について (I)」[9] に続き、適尽諸級、諸級替數、視商極數を解説する。そして、『開方翻変之法』の全五條の關係をどう読めばよいか、

Received November 27, 2016.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A45

Key Words: History of Japanese Mathematics, Seki Takakazu, polynomial equation

*東京女子大学 Tokyo Woman's Christian University

e-mail: osada@lab.twcu.ac.jp

関が本書で意図したことは何かについて述べる。さらに、適尽廉級法の意義についても述べる。底本や表記法は「関孝和編『開方翻變之法』について (I)」と同じである。

紙数の関係で 2015 年 8 月の研究集会で発表した適尽方級法、適尽廉級法は本論文に収録し、2016 年 8 月の研究集会で発表した重根と判別式の歴史、『開方翻變之法』の世界数学史に於ける位置づけについては稿を改める。

§ 2. 適尽諸級

与えられた方程式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \cdots + a_nx^n = 0$$

を実行、

$$xf'(x) = a_1x + 2a_2x^2 + \cdots + na_nx^n = 0$$

を方行、

$$\frac{1}{2!}x^2f''(x) = a_2x^2 + 3a_3x^3 + \cdots + \frac{n(n-1)}{2}a_nx^n = 0$$

を(初)廉行、

$$\frac{1}{3!}x^3f'''(x) = a_3x^3 + 4a_4x^4 + \cdots + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}a_nx^n = 0$$

を次廉行という。各行は実行(原方程式)の係数に諸級之数(二項係数)がかかっている。

実行を前式とし、方行を後式とし、

$$\begin{cases} \text{前式} : f(x) = 0 \\ \text{後式} : xf'(x) = 0 \end{cases}$$

から x を消去する。前式を一級畳み (x^n の項を消去し)、後式を x で除して次数を 1 次下げ、

$$\begin{cases} \text{前式} : nf(x) - xf'(x) = 0 \\ \text{後式} : f'(x) = 0 \end{cases}$$

を両式として『解伏題之法』の方法により換式を求め、未知数 x を消去した式が適尽方級法である。

$f(x)$ の n 個の零点を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とし、 $f(x)$ の判別式を

$$D(f) = a_n^{2n-2} \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\alpha_i - \alpha_j)^2$$

每式以實行爲前式以所盡級行爲後式而前
 而得寄消也○諸級之數者如衰塚術求之
 實乃
 行之者基數方行者圭塚初廉行者三角衰塚
 餘
 之微廉行者再乘衰塚三廉行者三乘衰塚
 適盡諸級第三

で定義すると、 $n = 2$ のときの適尽方級法は判別式を 0 と置いた式 $D(f) = a_1^2 - 4a_0a_2 = 0$ に一致し、 $n \geq 3$ のときは

$$(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} D(f) = 0$$

となる。

実行を前式とし、廉行を後式とし、実行と廉行の次数を 1 次下げ

$$\begin{cases} \text{前式} : \frac{n(n-1)}{2} f(x) - \frac{1}{2!} x^2 f''(x) = 0 \\ \text{後式} : \frac{1}{2!} x f''(x) = 0 \end{cases}$$

を両式として換式を求め、未知数 x を消去した式が適尽廉級法である。

$n = 3$ の場合の適尽方級法について、原文と現代数学を用いた解説を示す。

不及交式直斜乘而求生尅而得寄消也	二式	一式	換式	後式	前式	前式一級畳之	後式	前式	位相併消	方廉隅相乘	方再乘隅相乘	實隅隅相乘	立方 適盡方級法																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																	
	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">隅</td><td style="padding: 2px;">方</td></tr> </table>	廉	隅	隅	方	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">實</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">方</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">隅</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> </table>	方	實	廉	方	隅	廉	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">○</td><td style="padding: 2px;">實</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">方</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">隅</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	○	實	方	方	廉	廉	隅	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;">廉</td></tr> <tr><td style="padding: 2px;">廉</td><td style="padding: 2px;">隅</td></tr> </table>	方	廉	廉	隅	<table border="1" style="border-collapse: collapse; width: 100%;"> <tr><td style="padding: 2px;">方</td><td style="padding: 2px;"></td></tr></table>	方	
	方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
	廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																												
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
隅	方																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	實																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	方																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
隅	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
○	實																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	方																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
隅	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方	廉																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
廉	隅																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																													
方																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																																														

である。換式数は 2 だから換式を斜乗して 3 で割り立方適尽方級法

$$27a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 18a_0a_1a_2a_3 - a_1^2a_2^2 = 0$$

が得られる。

次に、 $n = 3$ の場合の適尽廉級法について、原文と現代数学を用いた解説を示す。

不及交式直斜乘而求生尅而得寄消也	二式	一式	換式	後式	前式	前式一級畳之	後式	前式	併寄	實	立方
	↘廉	偶實	○	實	○	實	○	方	○方廉	相乘	適盡廉級法
	偶	↘廉 偶方	廉	方	廉	廉	偶	廉	七段十	廉再自乘	
			偶	廉	偶	偶	偶	偶	九段	消	右二位相

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ に対し

$$\begin{cases} \text{前式} : a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0 \\ \text{後式} : a_2x^2 + 3a_3x^3 = 0 \end{cases}$$

から、 x を消去する。前式を一級畳み、後式の次数を 1 つ下げると両式

$$\begin{cases} \text{前式} : 3a_0 + 3a_1x + 2a_2x^2 = 0 \\ \text{後式} : a_2x + 3a_3x^2 = 0 \end{cases}$$

が得られる。換式は、 $3a_3 \times \text{前式} - 2a_2 \times \text{後式}$ を一式とし、 $(\text{一式} \times x + a_2 \times \text{前式} - 3a_1 \times \text{後式}) \div 3a_0$ を二式とした、

$$\begin{cases} \text{一式} : 9a_0a_3 + (9a_1a_3 - 2a_2^2)x = 0 \\ \text{二式} : a_2 + 3a_3x = 0 \end{cases}$$

である。斜乗により x を消去すると適尽廉級法

$$27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 = 0$$

が得られる。なお、原文の換式における二式の実 ↘廉 $(-a_2)$ は | 廉 (a_2) の誤りである。

§ 3. 諸級替数

替数とは、原式(与えられた代数方程式)が正商(正根)あるいは負商(負根)を持たないとき、級数(1つの係数)の符号は替えず絶対値のみを替えて、正商あるいは負商を持つようにすることである。さらに、関はそのような級数の範囲を考察している。諸級替数の原文と現代数学を用いた解説を示す。「以上」「以下」は絶対値で比較し、等号は含めない。下線の箇所は原文をそのまま現代数学で表現したものであるが、数学として正しくない。訂正した表現を【】内に記す。判別式は D 、適尽方級法は $\tilde{D} = 0$ 、適尽廉級法は $\tilde{D}_2 = 0$ で表す。

諸級替数第四

依驗商有無法視有異名級而立天元一爲所
 替各級數隨適盡其級法得式開除之得商
 商者實數偶數以最多商爲所替數他級數以
 最少商爲所替數以最少商爲所替數而開出同
 名商○無商者仍得商與原級數異名者不用
 不能替數也
 之同名者實數偶數乃平方式者從得商以下
 者原商有之以上者原商無之他級數從得商
 以下者原商無之以上者原商有之也

驗商有無の方法により、異符号の項を調べる。原式 $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n = 0$ に仮の根 $\alpha = \pm 1$ を立て、 $a_0(\alpha^n a_n) > 0$ のときは α と同符号の根は仮に持たないとする。 $a_0(\alpha^n a_n) < 0$ のときは α と同符号の根を持つ。 $a_0(\alpha^n a_n) > 0$ であっても、 $a_k(\alpha^{n-k} a_n) < 0$ となる $k, (1 \leq k \leq n - 1)$ が存在するときは適^き尽其級法 ($a_k(\alpha^{n-k} a_n) < 0$ となる k のうち最少のものを取り、 $k = 1$ のときは適尽方級法、 $k = 2$ のときは適尽(上)廉級法、 etc.) 【下線の箇所は正しくない。 $k > 1$ であっても適尽方級法】により α と同符号の根を持たせる。 $a_k(\alpha^{n-k} a_n) > 0, (k = 0, \dots, n - 1)$ のとき替数はできない。(ここまで、驗商有無)

原式

$$a_0 + a_1x + \dots + a_i x^i + \dots + a_n x^n = 0$$

が α と同符号の根を持たないとき、 a_i を $b_i (a_i b_i > 0)$ に替えた式

(3.1)
$$a_0 + a_1x + \dots + b_i x^i + \dots + a_n x^n = 0$$

が α と同符号の根を持つようにする。(3.1) の適^き尽其級法【適尽方級法】 $\tilde{D}(b_i) = 0$ が実根を持たないか a_i と同符号の根を持たないときは替数はできない。 a_i と同符号の根を1つだけ持つときは、その根を得商とする。2つ以上持つときは、 $i = 0$ または $i = n$ は a_i と同符号の絶対値が最大の根、 $1 \leq i \leq n - 1$ のときは a_i と同符号の絶対値が最小の根を得商とする。【適尽方級法の根で原式を替えた式を開いて、 α と同符号の根が得られたら替える数とする。原式と所布が同名か異名か、適尽方級法の最多商か最少商かだけでは決められない。】
 得商を β とする。 $i = 0$ または $i = n$ のとき、得商以下 ($0 < |b_i| < |\beta|$) ならば (3.1) は根を持ち、得商以上 ($|\beta| < |b_i|$) のとき (3.1) は根を持たない。 $0 < i < n$ のとき、得商以上 ($|\beta| < |b_i|$) ならば (3.1) は根を持ち、得商以下 ($0 < |b_i| < |\beta|$) のとき (3.1) は根を持たない。【0 <

$i < n$ かつ (3.1) で $b_i = \beta$ と置いた式が a_i と同符号の根をもつ場合、所布と原式が同名 ($a_i a_n \alpha^{n-i} > 0$) のとき、得商以下 ($0 < |b_i| < |\beta|$) ならば (3.1) は α と同符号の根を持ち、得商以上 ($|\beta| < |b_i|$) のとき (3.1) は α と同符号の根を持たない。所布と原式が異名 ($a_i a_n \alpha^{n-i} < 0$) のとき、得商以上 ($|\beta| < |b_i|$) ならば (3.1) は α と同符号の根を持ち、得商以下 ($0 < |b_i| < |\beta|$) のとき (3.1) は α と同符号の根を持たない。】

假如原式平方
 依驗商有無法視之雖正負商各無之方
 級異名故以適盡方級法替實數方數及
 廉數而爲正商有之也

諸級替數例 1

2次方程式 $4 - 3x + x^2 = 0$ に驗商有無法を用いる。仮に根 ± 1 を立てる。

実	方	廉	
4	-3	1	原式
1	± 1	1	所布

原式の実 4 と所布の実 1 は同名なので正負商なしと考える。正一を立てたときは、原式と所布の方級が異名なので適盡方級法により各係数の符号は変えず絶対値のみ変えて正商を持たせるようにする。(負一を立てたときは、すべての級が同名なので替数はできない。)

立天元一爲實數。一以廉數相乘得數四
 之。寄左○列方數自之得三與寄左相
 消得歸除式三三上實下法而一得正二箇
 二分五釐故正實此數以下者原正商有之
 以上者原正商無之
 亦立天元一爲方數。一自之得。一寄
 左○列實數以廉數相乘得數四之十與寄
 左相消得開方式下。一平方開之雖得正
 式方異名故得負四箇故負方此數以下者
 不用之也
 原正商無之以上者原正商有之(以下略)

$4 - 3x + x^2 = 0$ の実数を替えて正商を持たせる。
 $a - 3x + x^2 = 0$ の適盡方級法 $D = \tilde{D} = 9 - 4a = 0$
 (原文は $4a - 9 = 0$) の得商は $a = 2.25$ である。得
 商以下 ($0 < a < 2.25$) のとき正商を持ち、得商以上
 ($2.25 < a$) のとき正商を持たない。
 $4 - 3x + x^2 = 0$ の方数を替えて正商を持たせる。
 $4 + bx + x^2 = 0$ ($b < 0$) の適盡方級法 $D = \tilde{D} =$
 $b^2 - 16 = 0$ の得商は $b = -4$ である。得商以上
 ($b < -4$) のとき正商を持ち、得商以下 ($-4 < b < 0$)
 のとき正商を持たない。

§ 4. 視商極數

得商極數
廉級逐下乘初廉級數餘微之
法而其級逐下乘其級數則自初則自方逐下乘方
置原式依前替諸級數而各得式隨適盡諸級
視商極數第五

原式 (与えられた方程式) を

$$a_0 + a_1x + \dots + a_i x^i + \dots + a_n x^n = 0$$

とし、原級 a_i を $b_i (a_i b_i > 0)$ に替え

$$a_0 + a_1x + \dots + b_i x^i + \dots + a_n x^n = 0$$

に正商/負商を持たせる。 b_i を未知数とする 適尽其級法 【適尽方級法】の商 [得商] を β とする。

$$(4.1) \quad a_0 + a_1x + \dots + \beta x^i + \dots + a_n x^n = 0$$

の正商/負商を商の極数 (取り得る係数の範囲の上限または下限) という。

商の極数は ((4.1) の其行を x^k で割った)

$$\frac{\binom{k}{k} a_k + \dots + \binom{i}{k} \beta x^{i-k} + \dots + \binom{n}{k} a_n x^{n-k}}{x^k} = 0$$

を開いて求める。【(方行を x で割った)

$$(4.2) \quad a_1 + \dots + i\beta x^{i-1} + \dots + n a_n x^{n-1} = 0$$

を開いて求める。(4.2) の商が (4.1) の正商/負商でもあるとき、それを商の極数とする。】
商の極数は (4.1) の重根であり、(4.1)(4.2) の共通根である。

假如原式平方一
此式依適盡方級法如前而替實數得式
○=|||
是用適盡方級法故自方逐下乘方級數
乘一廉乘
二後餘微之 得 一 || 實如法而一得正商五分
是替實數式商極數也
亦替方數得式 一 一
自方逐下乘方級數得 一 || 實如法而一得
正商一箇是替方數商極數也
復替廉數得式 一 一
自方逐下乘方級數得 一 || 實如法而一得
正商二箇是替廉數式商極數也

視商極數例 1

原式 $1 - x + x^2 = 0$

方級の符号が廉級の符号と異なるので適尽方級法 $\tilde{D} = D = 0$ を用いる。

実数 $a - x + x^2 = 0 (a > 0)$ の適尽方級法 $D = 1 - 4a = 0$ の商は $a = 0.25$ である。
得式 $0.25 - x + x^2 = 0$ の商は適尽方級法を用いているので $-1 + 2x = 0$ を開いて商極数は 0.5 である。

方数 $1 + bx + x^2 = 0 (b < 0)$ の適尽方級法 $D = b^2 - 4 = 0$ の商は $b = -2$ である。
 $1 - 2x + x^2 = 0$ の商は $-2 + 2x = 0$ を開いて商極数は 1 である。

廉数 $1 - x + cx^2 = 0$ ($c > 0$) の適尽方級法 $D = 1 - 4c = 0$ の商は $c = 0.25$ である。
 $1 - x + 0.25x^2 = 0$ の商は $-1 + 0.5x = 0$ を開いて商極数は 2 である。

§ 5. 『開方翻変之法』の意図

貞享乙丑 (貞享二年、1685) の年紀のある関孝和編の稿本は次の 4 点

解隠題之法	貞享乙丑八月戊申日 (八月二十日) 龔書
開方翻變之法	貞享乙丑仲冬十三日 (十一月十三日) 重訂
病題明致之法	貞享乙丑麋角解日 (十二月一日頃) 重訂
題術辯議之法	貞享乙丑十二月戊申日 (十二月二十二日)

が知られている。

『解隠題之法』の得商以外は『大成算経』卷之十七に、『解隠題之法』得商と『開方翻變之法』は『大成算経』卷之三に、『題術辯議之法』は『大成算経』卷之十六に、『病題明致之法』は『大成算経』卷之十八に敷衍して載録されている。したがって、貞享二年の四篇の稿本は大成算経編纂のために関孝和が書き下ろしたか重訂したものと考えられる。

『解隠題之法』は、開方式 (数字係数 1 変数代数方程式) の立て方と解き方について扱っている。『病題明致之法』は転題 (条件が不足している問題)、繁題 (条件が多すぎる問題)、虚題 (解が無いか題意に合わない問題)、変題 (題意を満たす解が複数ある問題) の正し方を扱っている。『題術辯議之法』は、病題 (誤った問題)、邪術 (誤った解法)、権術 (望ましくない解法) を具体例を付けて述べている。

『開方翻變之法』『病題明致之法』『題術辯議之法』は『解隠題之法』を踏まえて書かれており、『病題明致之法』は『開方翻變之法』が随所に用いられているので、『開方翻變之法』は病題の判別と正し方に関する数学的理論 (方程式論) であると考えられる。より正確に言うと、『開方翻變之法』は替数および商の極数の求め方を述べた書である。(原文の適尽其級法の誤りを適尽方級法に改め) 全体の流れをフローチャート (図 1) で示す。

『開方翻變之法』では、全体で替数の方法が構造的に書かれており、各條はサブルーチンになっている。先行研究では唯一 Annick Horiuchi 氏が『開方翻變之法』を構造的に解釈している。

Le remplacement du coefficient par cette méthode s'effectue selon le schéma suivant¹:

—

¹. L'exposé qui suit résume les trois dernières sections du *Kaihô honhen no hô*.
 [6, p.216]

この方法による係数の置き換え (替数) は、以下のスキームにしたがって遂行される¹:

—

¹. 解説は『開方翻變之法』の最後の 3 條にまとめられている。

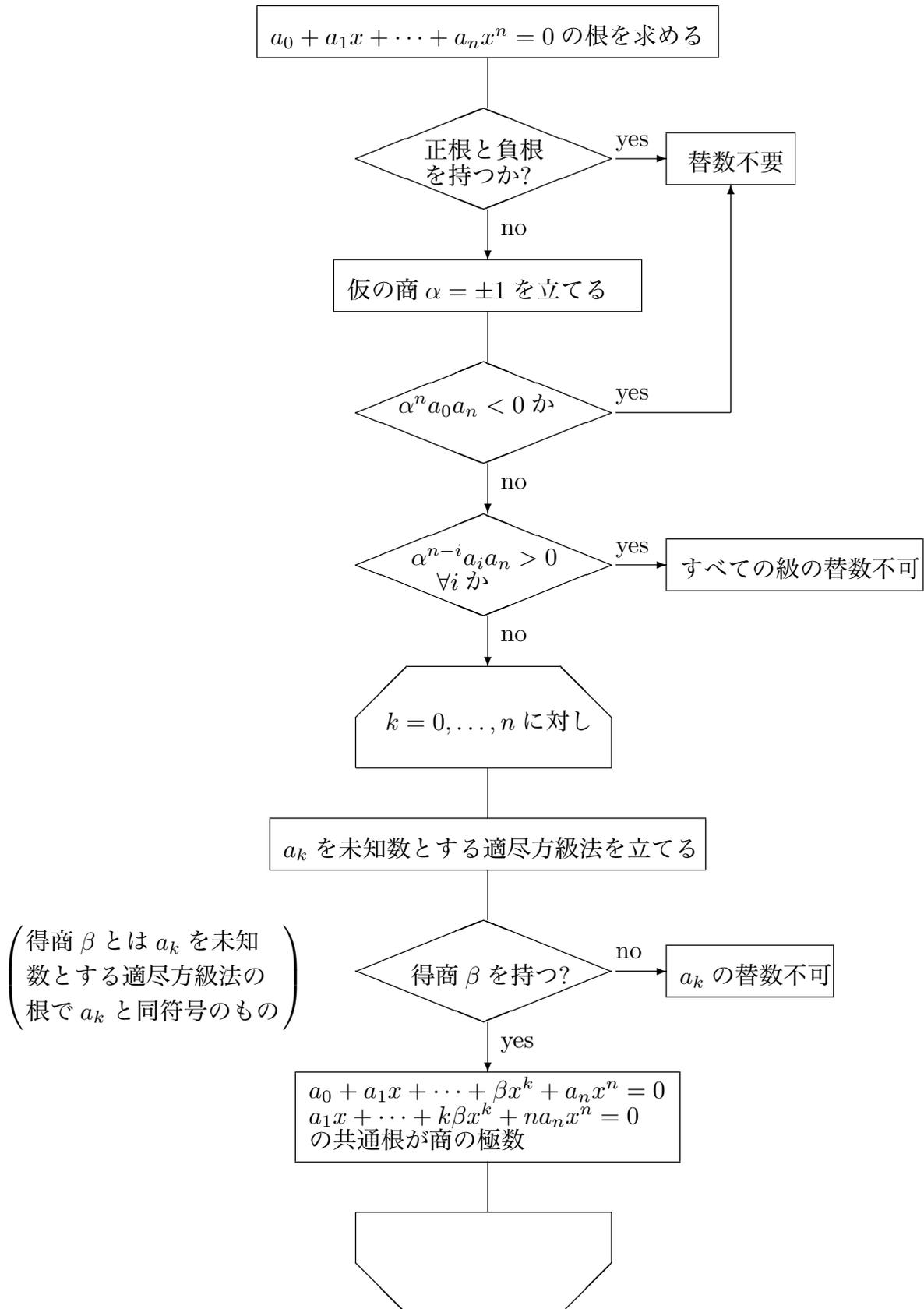


図 1. 『開方翻變之法』の流れ

平山は「孝和の意図が奈辺にあるか、われわれには理解しがたい」と書いているが、関の意図は明確である。また、すべて適尽方級法で処理すべきところを適尽其級法をもちいるという誤り以外にも得商の候補が複数あるときの決め方、正商を持つ係数の範囲には誤りがあるが、すべて『大成算経』巻之三で、解いてみて確かめるという方法で、訂正されている。

§ 6. 適尽廉級法は無意義か

§ 6.1. 先行研究

適尽廉級法について、加藤平左エ門は 1941 年

サテ方級法ハ $f(x) = 0, f'(x) = 0$ カラ x ヲ消去スルノデアルカラ判別式ヲ D トスレバ消去ノ結果ハ

$$D = 0$$

トナリ、 $f(x) = 0$ ガ等根ヲ有スル条件トナルノデアル。所ガ初廉級法ハ $f(x) = 0$ ト $f''(x) = 0$ トカラ x ヲ消去シテ終結式ヲ作ルノデアルカラ得タ式ハ両式ガ共通根ヲ有スル条件ニハナルガ $f(x) = 0$ ガ等根ヲ有スル条件ニハナラナイ。他級法ニ就テモ同様デアル。之レガ後ニ述ベル如ク方級法以外ハ無意義ニ終リ、之レヲ基トシテ行ツタ諸級替數ハ誤レル結果ニ到達スル所以デアル。 [7, p.7]

と書いている。また、藤原松三郎も

この條の結果の中、適盡方級法以外のものは意義のないものである。例へば $f(x) = 0$ と $f''(x) = 0$ から x を消去しても、根に對してなんらの意味をもたないからである。 [2, p.213]

と書いており、これらが定説となっている。上野健爾氏 [11, p.265] も同様の見解である。

確かに、「原式 (実数係数の代数方程式) が正商あるいは負商を持たないとき、級数 (1つの係数) の符号は替えず絶対値のみを替えて、正商あるいは負商を持つような級数の範囲を与える」問題に対して、適尽方級法以外は役に立たない。しかしながら、本来の「原式が正商あるいは負商を持たないとき、級数の符号は替えず絶対値のみを替えて、正商あるいは負商を持つようにする」問題に対しては、適尽廉級法は十分条件を与える。さらに適尽廉級法は 3 次方程式に、適尽下廉級法は 4 次方程式の実根について重要な意義を持つことを以下に述べる。

定説に対し唯一異論を唱えたのは後藤武史氏である。

これは、意味のないものとして「關孝和全集」などに紹介されているが 3 重根を求めるための条件として考えれば、全く意味のないものとは言えないのではないかと考える。 [3, p.137]

§ 6.2. 適尽廉級法は替数に利用できる

適尽廉級法は「原式が正商あるいは負商を持たないとき、級数の符号は替えず絶対値のみを替えて、正商あるいは負商を持つようにする」問題に利用できる。替数の第2例によりこのことを見してみる。下線部分^{【】}は級数の範囲を求める問題としてみたときの原文の誤り、**【】**内はその訂正である。

諸級替数例 2

原式

$$3 + x - x^2 + x^3 = 0$$

驗商有無の方法を用いる。

実 方 廉 偶

+1) 1 1 1 1 正商無し

-1) -1 1 -1 1 負商有り ($x = -1$ は負商である。)

廉級が異名なので 適尽廉級法 **【適尽方級法】**

$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0$ に対し

$$\tilde{D}_2 = 27a_0a_3^2 + 2a_2^3 - 9a_1a_2a_3 = 0$$

$$\text{【}\tilde{D} = -D = 27a_0^2a_3^2 + 4a_0a_2^3 + 4a_1^3a_3 - 18a_0a_1a_2a_3 - a_1^2a_2^2 = 0\text{】}$$

を以て、実数、方数、廉数、偶数を替え正商を持つようにする。

又
原式立方
此式負商有之雖正商無之廉級異名故
以適盡廉級法替實數方數廉數及偶數
而爲正商有之也

立天元一爲實數。一以偶數乘相乘^{二十}
○廉數再自乘^二 卅右二位相併共得 卅
寄左○列方數以廉數相乘亦以偶數相
乘得數九之 卍與寄左相消得歸除式 卍上
實下法而一得負二分五釐九毫二絲五
九強與原式實異名故不用之
復立天元一爲方數。一以廉數相乘亦以
偶數相乘得數九之。卍寄左○實數偶數
相乘^{二十} 卍廉數再自乘^二 卅右二位相
併共得 卍與寄左相消得歸除式 卍上實
下法而一得負八箇七分七釐七毫七絲七
八弱與原式方異名故不用之
亦立天元一爲廉數。一再自乘之^二 ○
○實數偶數相乘^{二十} 卍右二位相併
共得 卍○寄左○列方數以廉數相乘
亦以偶數相乘得數九之。卍與寄左相消
得開方式 卍○立方翻法開之得負三
箇八分六釐八毫八絲七二弱故負廉此數
以下者原正商無之以上者原正商有之
又立天元一爲偶數。一自之以實數相乘
二十 ○廉數再自乘^二 卅右二位相併
共得 卍○寄左○列方數以廉數相乘亦
以偶數相乘得數九之。卍與寄左相消得
開方式 卍 卍平方開之<sup>雖得負商與原式
偶異名故不用之</sup>
也 得正一分一釐一毫一絲一一強故正偶
此數以下者原正商有之以上者原正商無
之

実数 $a + x - x^2 + x^3 = 0$ ($a > 0$)

適尽廉級法より帰除式 $7 + 27a = 0$ を得、 $a (= -7/27) = -0.259259$ 強を得る。原式

の實3と異名なのでこれを用いない。【適尽方級法 $27a^2 + 14a + 3 = 0$ は正商を持たない。(もっと強く、無商式である。)】したがって替数はできない。

方数 $3 + bx - x^2 + x^3 = 0$ ($b > 0$)

適尽廉級法より帰除式 $-79 - 9b = 0$ [適尽廉級法の定義では、 $79 + 9b = 0$ である。] を得、 $b(= -79/9) = -8.777778$ 弱を得る。原式の方1と異名なのでこれを用いない。【適尽方級法 $23 + 54b + 4b^3 = 0$ の商(唯一の実根)は -2.7383109 弱で原式の方1と異名なのでこれを用いない。】したがって替数はできない。

廉数 $3 + x + cx^2 + x^3 = 0$ ($c < 0$)

適尽廉級法より開方式 $81 - 9c + 2c^3 = 0$ を得、これを開いて -3.868872 弱を得る。負廉がこの数以下 ($-3.868872 < c < 0$) なら原式に正商無し。この数以上 ($c < -3.868872$) なら原式に正商有り。【適尽方級法 $247 - 54c - c^2 + 12c^3 = 0$ の唯一の実根は -3.25 である。負廉がこの数以下 ($-3.25 < c < 0$) なら原式に正商無し。この数以上 ($c < -3.25$) なら原式に正商有り。】

偶数 $3 + x - x^2 + dx^3 = 0$ ($d > 0$)

適尽廉級法より開方式 $-2 + 9d + 81d^2 = 0$ を得、これを開いて $d = 1/9 = 0.111111$ 強を得る。[負商 ($-2/9$) も得るが原式の偶1と異名なので用いない。] 正偶この数以下 ($0 < d < 0.111111$) のときは原式に正商有り、 $d > 0.111111$ のときは原式に正商なし。【適尽方級法 $-13 + 58d + 243d^2 = 0$ の正商は 0.140928 強より $0 < d < 0.1409282$ のとき、原式に正商有り、 $0.1409282 < d$ のとき原式に正商なし。】

少なくとも、例題 $3 + x - x^2 + x^3 = 0$ に関しては、適尽廉級法は替数の解を与えていることは、以下のように確認できる。

実数 原文は、実数は替数不可という正しい結果を与えている。

方数 原文は、方数は替数不可という正しい結果を与えている。

廉数 $c < -3.868872$ は正商を持つ必要十分条件ではないが、十分条件になっている。 $c = \alpha = -3.868871704455$ として $3 + x + \alpha x^2 + x^3 = 0$ の商は $\alpha + 3x = 0$ の正商 ($-\frac{1}{3}\alpha =$) 1.289623901 である。 $3 + x + \alpha x^2 + x^3 = 0$ は3実根 $1.289623901, 3.286969495, -0.7077216925$ を持つので 1.289623901 は原式の重根ではないが原式と廉行の共通根である。関は 1.28962 強を(商の極数として)求めたと思われる。

偶数 $0 < d < 0.111111$ は正商を持つ必要十分条件ではないが、十分条件になっている。関は $3 + x - x^2 + 0.111111x^3 = 0$ の正商3を $-1 + 0.333333x = 0$ を開いて(商の極数として)求めたと考えられる。3は原式の重根ではないが、原式と廉行の共通根である。

適尽其級法を用いても替数を行なうことができるので、関は『開方翻変之法』重訂当時誤りに気付かなかつたと考えられる。

§ 6.3. 実数係数 3 次方程式

実数係数 3 次方程式について次の定理 6.1 が知られている。たとえば、

<https://ja.wikipedia.org/wiki/三次方程式> (2016 年 11 月 25 日閲覧) を見よ。

定理 6.1 実数係数の 3 次方程式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 = 0, \quad (a_3 \neq 0)$$

に対し

$$D = -27a_0^2a_3^2 - 4a_0a_2^3 - 4a_1^3a_3 + 18a_0a_1a_2a_3 + a_1^2a_2^2$$

$$D_2 = -27a_0a_3^2 - 2a_2^3 + 9a_1a_2a_3$$

とおくと、

1. $D > 0$ のとき、3 つの異なる実根を持つ。
2. $D < 0$ のとき、1 つ実根と 2 つの互いに共役な複素数根を持つ。
3. $D = 0, D_2 = 0$ のとき、3 重根を持つ。
4. $D = 0, a_3D_2 > 0$ のとき、2 重根 α と単根 β を持ち、 $\alpha < \beta$ となる。
5. $D = 0, a_3D_2 < 0$ のとき、2 重根 α と単根 β を持ち、 $\alpha > \beta$ となる。

証明 1,2 は [1, p.440] を見よ。 $D = 0$ のときは重根 α を持つので、 $f(x) = a_3(x - \alpha)^2(x - \beta)$ と書ける。

$$f(x) = a_3(-\alpha^2\beta + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - (2\alpha + \beta)x^2 + x^3)$$

より

$$D_2 = a_3^3(-27(-\alpha^2\beta) - 2(-(2\alpha + \beta))^3 + 9(\alpha^2 + 2\alpha\beta)(-(2\alpha + \beta))) = 2a_3^3(\beta - \alpha)^3$$

よって、3,4,5 がいえる。 □

定理 6.1 の D は $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ の判別式、 D_2 は $\frac{1}{8a_3}R(f, f'')$ である。ここで、 $R(f, f'')$ は昇幂順に表した f, f'' の終結式である。 $-D = 0$ は立方適尽方級法、 $-D_2 = 0$ は立方適尽廉級法である。

§ 6.4. 実数係数 4 次方程式

4 次方程式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0$$

に対し、

$$D_2 = 256a_0a_4^3 - 64a_1a_3a_4^2 + 16a_2a_3^2a_4 - 3a_3^4$$

とおくと、三乗方適尽下廉級法は $D_2 = 0$ である。

$f(x)$ に変換 $x = \xi - \frac{a_3}{4a_4}$ を施すと

$$\begin{aligned} f\left(\xi - \frac{a_3}{4a_4}\right) &= \frac{1}{256a_4^3}(256a_0a_4^3 - 64a_1a_3a_4^2 + 16a_2a_3^2a_4 - 3a_3^4) \\ &\quad + \frac{1}{16a_4^2}(16a_1a_4^3 - 8a_2a_3a_4 + 2a_3^3)\xi + \frac{1}{8a_4}(8a_2a_4 - 3a_3^2)\xi^2 + a_4\xi^4 \\ &= \frac{D_2}{256a_4^3} + \frac{1}{16a_4^2}(16a_1a_4^3 - 8a_2a_3a_4 + 2a_3^3)\xi + \frac{1}{8a_4}(8a_2a_4 - 3a_3^2)\xi^2 + a_4\xi^4 \end{aligned}$$

となる。

実数係数 4 次方程式について次の定理 6.2([1, p.440]) が知られている。

定理 6.2 実数係数の 4 次方程式

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0, \quad (a_4 \neq 0)$$

に対し

$$\begin{aligned} D &= 256a_0^3a_4^3 + 144a_0^2a_2a_3^2a_4 + 144a_0a_1^2a_2a_4^2 + 18a_0a_1a_2a_3^3 \\ &\quad + 16a_0a_2^4a_4 + 18a_1^3a_2a_3a_4 + a_1^2a_2^2a_3^2 - 192a_0^2a_1a_3a_4^2 \\ &\quad - 128a_0^2a_2^2a_4^2 - 27a_0^2a_3^4 - 6a_0a_1^2a_3^2a_4 - 80a_0a_1a_2^2a_3a_4 \\ &\quad - 4a_0a_2^3a_3^2 - 27a_1^4a_4^2 - 4a_1^3a_3^3 - 4a_1^2a_2^3a_4 \end{aligned}$$

とおくと

$$D > 0 \iff \text{異なる 4 実根または二組の共役虚根}$$

$$D < 0 \iff \text{異なる 2 実根と共役虚根}$$

証明 D は $f(x) = 0$ の判別式であり、 $D = 0$ は三乗方適尽方級法である。 $f(x) = 0$ の相異なる 4 根を $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ とすると

$$D = a_4^6(\alpha - \beta)^2(\alpha - \gamma)^2(\alpha - \delta)^2(\beta - \gamma)^2(\beta - \delta)^2(\gamma - \delta)^2$$

$\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{R}$ のとき $D > 0$ である。 $\alpha, \beta \in \mathbb{R}, \bar{\gamma} = \delta \notin \mathbb{R}$ のとき、 $\gamma = \lambda + i\mu, \delta = \lambda - i\mu, (\lambda, \mu \in \mathbb{R})$ と書ける。

$$\alpha - \gamma = (\alpha - \lambda) - i\mu = \alpha - (\overline{\lambda - i\mu}) = \overline{\alpha - \delta}, \quad \beta - \gamma = (\beta - \lambda) - \mu i = \overline{\beta - \delta}$$

より

$$\begin{aligned} D &= a_4^6 (\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma)^2 (\alpha - \delta)^2 (\beta - \gamma)^2 (\beta - \delta)^2 (\gamma - \delta)^2 \\ &= a_4^6 (\alpha - \beta)^2 (\alpha - \gamma) (\overline{\alpha - \delta}) (\alpha - \delta) (\overline{\alpha - \gamma}) (\beta - \gamma) (\overline{\beta - \delta}) (\beta - \delta) (\overline{\beta - \gamma}) (\gamma - \delta)^2 \\ &= a_4^6 (\alpha - \beta)^2 |\alpha - \gamma|^2 |\alpha - \delta|^2 |\beta - \gamma|^2 |\beta - \delta|^2 (-4\mu^2) < 0 \end{aligned}$$

同様に $\bar{\alpha} = \beta, \bar{\gamma} = \delta$ のときは $D > 0$ である。実係数の 4 次方程式が重根を持たないときは、(i) 異なる 4 実根、(ii) 二組の共役虚根、(iii) 異なる 2 実根と共役虚根の 3 通りだから、求める結果が得られる。□

定理 6.2 は、 D_2 の符号を条件に加えるとさらに精密になる。次に一例を挙げる。

定理 6.3 実数係数の 4 次方程式

$$f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3 + a_4x^4 = 0, \quad (a_4 \neq 0)$$

に対し判別式を D とし、

$$D_2 = 256a_0a_4^3 - 64a_1a_3a_4^2 + 16a_2a_3^2a_4 - 3a_3^4$$

とおく。このとき

$$D > 0, D_2 \leq 0 \implies \text{異なる 4 実根}$$

証明 $D_2 < 0$ のとき、 $f(\xi - a_3/(4a_4)) = 0$ の定数項 $D_2/(256a_4^3)$ と ξ^4 の係数 a_4 は異符号なので、 $f(\xi - a_3/(4a_4)) = 0$ は正根と負根を持つ。 $D > 0, D_2 < 0$ のとき $f(x) = 0$ は 2 組の共役虚根を持ち得ないので、定理 6.2 より 4 実根である。 $D > 0, D_2 = 0$ のときは、 $f(x) = 0$ は実根 $-a_3/(4a_4)$ を持つので、定理 6.2 より 4 実根である。□

§7. おわりに

本研究では『開方翻変之法』について以下のことを示した。

- 『開方翻変之法』を執筆した関孝和の意図は替数の方法を示すことにある。取り上げられていることは、替数に必要なことだけであり、構造的に順を追って書かれている。本質的でない誤り (すべて適尽方級法で処理すべきところを適尽其級法をもちいるという誤り以外にも得商の候補が複数あるときの決め方、正商あるいは負商を持つ係数の範囲) はあるが、それらはすべて『大成算経』卷之三で、解いてみて確かめるという方法で、訂正されている。

2. 替数とは係数を替えて重根を求めることではなく、係数を替えて正根あるいは負根を持たせること、さらに正根あるいは負根をもつ係数の範囲を決めることである。適尽廉級法は正根あるいは負根をもつ係数の範囲の部分集合を与えることができる。したがって、適尽廉級法は替数に使えないというこれまでの定説は正しくない。適尽廉級法は正根あるいは負根をもつ係数の範囲の部分集合を与えることができるので、関が誤った(すべて適尽方級法で処理すべきところを適尽其級法をもちいる)と考えられる。
3. 立方適尽廉級法および三乗方適尽下廉級法は、三次方程式および四次方程式の実根について情報を与える。立方適尽方級法と立方適尽廉級法の左辺の符号により、三次方程式が三重根を持つか、二重根と単根かの区別を与える。後者の場合、二重根と単根の大小も分かる。三乗方適尽方級法と三乗方適尽下廉級法の左辺の符号により、四次方程式が異なる4実根持つための十分条件を与えることができる。

参考文献

- [1] 藤原松三郎、代數學第一卷、内田老鶴圃、1982 (初版 1928)
- [2] 藤原松三郎 (日本学士院編)、明治前日本数学史第二卷、岩波書店、2008 (初版 1956)
- [3] 後藤武史、大成算經の前集の研究、京都大学数理解析研究所講究録、1195(2001), 128-138.
- [4] 林鶴一、和算ニ於ケル方程式論ニ就テ、東北數學雑誌 **34** (1931), 145-185.
- [5] 平山諦、関孝和 - その業績と伝記 -, 恒星社、1974 (初版 1959)
- [6] Annick Horiuchi, les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo, J. Vrin, 1994.
- [7] 加藤平左衛門、關孝和編 開方翻變ノ研究、東北數學雑誌 **48** (1941),1-24
- [8] 長田直樹、関孝和編『開方翻變之法』の諸写本について、数学史研究、**224** (2016), 1-22.
- [9] 長田直樹、関孝和編『開方翻變之法』について (I)、RIMS Kôkyûroku Bessatsu、本号 (**69**) (2018), 49-64).
- [10] 高木貞治、代数学講義改訂新版、共立出版、1965
- [11] 上野健爾・小川束・小林龍彦・佐藤賢一、関孝和論序説、岩波書店、2008.