

関孝和編『開方翻変之法』について (I)
— 驗商有無をいかに読むか —
On Kaihō Honhen no Hō
edited by Seki Takakazu (I)

長田直樹
Naoki Osada*

Abstract

We give how to read *kenshō-umu* (in literal, test for existence of roots) in *Kaihō honhen no Hō* (Methods of Equation Modifications) re-revised by Seki Takakazu in 1685. We show that *kenshō-umu* is the first step of *tai sū* (replacement of a coefficient). By replacing *tekijin kikyū hō* (method of vanishing a polynomial and its certain derivative) with *tekijin hōkyū hō* (method of vanishing a polynomial and its derivative), *kenshō-umu* becomes to be a correct preprocess of *tai sū*.

§ 1. はじめに

関孝和編『開方翻変之法』(1685)は開出商数第一、驗商有無第二、適尽諸級第三、諸級替数第四、視商極数第五の五条から成り立つ。本論文では開出商数第一について簡単に説明した後、驗商有無第二を取り上げる。残りの三條は「関孝和編『開方翻変之法』について (II)」[8]で扱う。

『開方翻変之法』の驗商有無はこれまで藤原松三郎と Annick Horiuchi(堀内美都)氏以外は、字義通り「商の有無を驗す法」と解釈し「この方法は根の有無を確かめる方法としては誠に心もとないものである」(加藤平左エ門 [6, p.53])、「孝和がかかる誤りを犯したものととは思えないが、孝和の意図が奈辺にあったかが、今日までの研究ではまだ判明していない。」(平山諦 [3, p.94])と考えられてきた。本論文では藤原および Horiuchi 氏の解釈を踏まえた驗商有無の新しい読み方を与える。

Received November 27, 2016.

2010 Mathematics Subject Classification(s): 01A27, 01A45

Key Words: History of Japanese Mathematics, Seki Takakazu, polynomial equation

*東京女子大学 Tokyo Woman's Christian University

e-mail: osada@lab.twcu.ac.jp

『開方翻變之法』の底本は最良の写本である早稲田大学小倉文庫イ 16-228¹に基づく。関孝和編『病題明致之法』(貞享二(1685)年重訂)の底本は学士院 8918(旧伯爵有馬家文庫)を用いる。『解伏題之法』の底本は学士院 118 である。

枠で囲った縦書きの漢文は、底本を可能な限り忠実に活字にしたものである。ただし、正に朱、負に黒が用いられている算木は、印刷の都合上正は黒、負は正の表現に斜線を加えたものに改める。また、訓点は省いた。ポイントを小さくして原文を解説した箇所は、原文の割注に対応している。() 内は現代数学を用いた説明である。

§ 2. 開出商数第一

開出商数第一は前半で開方式(1変数代数方程式)を四つに分類している。後半では開方式の商数の開出の方法(すべての実根を求め、その結果商数が求められる)を述べている。開出商数はすでに林鶴一[2]、藤原松三郎[1]により解説されているが、以下に概略を述べる。

§ 2.1. 開方式の分類

凡開方式有全變交無之四商也正負各開出
商一件者謂之全商式也正負各開出商數件
者謂之變商式也開出商正負相交者謂之交
商式也正負各不得開出商者謂之無商式
于隻級也

開方式(1変数代数方程式)には、全商式、変商式、交商式、無商式、の4つがある。正負いずれか一方の商(根)を1つだけ持つのは全商式という。(重根は1つと数える。)正負いずれか一方の商を複数持つのは変商式という。正商と負商を両方持つときは交商式という。正負それぞれ開出商を得ることができないときは無商式という。無商式は隻級^{せききゅう}(偶数次数)に限る。

開方式(方程式)の4分類を、開出商数第一で取り上げられている8例を併せ、表1にまとめる。商の件数(根の数)は重根を1つと数え、虚根は含めない。

§ 2.2. 商数を開出する方法

「開出商數之法」を小倉文庫イ 16-228 では「商数を開出するの法」と読み下しているので、商が何件あるかを求める方法ということになる。

¹小倉文庫イ 16-228 は一部の正字を略字(たとえば、従を從)で表したと考えられるので、略字は正字に置き換えている。[7]を見よ。

表 1. 開方式の 4 分類

四商	正商	負商	開出商数第一の例
全商式	1	0	例 1 : $1 - 2x + x^2 = (x - 1)^2 = 0$
	0	1	例 2 : $5 + 2x - 2x^2 + x^3 = (x + 1)(x^2 - 3x + 5) = 0$
変商式	2 以上	0	例 3 : $2 - 3x + x^2 = (x - 1)(x - 2) = 0$
	0	2 以上	例 4 : $6 + 11x + 6x^2 + x^3 = (x + 1)(x + 2)(x + 3) = 0$
交商式	1 以上	1 以上	例 5 : $-2 - x + x^2 = (x + 1)(x - 2) = 0$
			例 6 : $-6 - 7x + x^3 = (x - 3)(x + 1)(x + 2) = 0$
無商式	0	0	例 7 : $2 - 2x + x^2 = (x - 1)^2 + 1 = 0$
			例 8 : $2 - 4x + 6x^2 - 4x^3 + x^4 = (x - 1)^4 + 1 = 0$

干從偶命之
之至偶上級
加減之復立
盡之逐下命
至偶上級而
商遞同加異
減之得逐商

○開出商數之法立正負商各若
至實而開盡之逐下命
乃平方式者從方立方式者從
廉三乘方式者下廉也餘倣之而

開方式 (n 次代数方程式) $f(x) = 0$ が与えられたとき、実尽 $f(\alpha) = 0$ となる正商または負商 α を立て、 $x = y + \alpha$ と変数変換し、 $f(y + \alpha) = 0$ を組み立て除法により求め

$$f(y + \alpha) = f'(\alpha)y + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}y^n$$

を得る。続いて、 $g(y) = f(y + \alpha)/y = 0$ に対し方尽 $g(\beta) = 0$ となる正又は負の商 β を立て、 $y = z + \beta$ と変数変換し $g(z + \beta) = 0$ を求める。また続いて $h(z) = g(z + \beta)/z = 0$ に対し廉尽 $h(\gamma) = 0$ となる正又は負の商 γ を立て、 $h(w + \gamma) = 0$ を求める。以下同様に偶上級 ($n - 1$ 次の項) まで繰り返す。各級の商 $\alpha, \beta, \gamma, \dots$ が求められたとき、 $\alpha, \alpha + \beta, \alpha + \beta + \gamma, \dots$ が $f(x) = 0$ の逐商 (次々に求められた商、すなわち全ての商) である。ある級で開くことが出来ないときは無商とする。

$f(\alpha) = 0$ となる正商または負商 α の求め方を関孝和は『解隠題之法』で詳述している。関は 1 つの商の求め方を『解隠題之法』で扱い、すべての商の求め方を『開方翻変之法』開出商数で扱っているのである。

開出商数のアルゴリズムを例により見てみる。

			假 如 平 方	變 商 式
			開 出 商	
		盡實	卅	
卩		盡方	一	正商
				二

開出商数の例 3

$$2 - 3x + x^2 = 0 \text{ (根は 1, 2)}$$

$$\begin{array}{r}
 1) \quad \begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 1 & \\ -2 & 1 & & \\ \hline 0 & -2 & 1 & \\ & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & 1 & & \\ & -1 & 1 & \\ & 1 & & \\ & 0 & 1 & \end{array} \\
 \\
 1) \quad \begin{array}{rrrr} 2 & -3 & 1 & \\ -2 & 2 & & \\ \hline 0 & -1 & 1 & \\ & 2 & & \\ & 1 & 1 & \\ & 1 & 1 & \\ & -1 & & \\ & 0 & 1 & \end{array}
 \end{array}$$

$f(x) = 2 - 3x + x^2$ とおく。 $f(1) = 0$ (原文の「実尽」) より、 $x = y + 1$ と変数変換すると

$$f(y + 1) = 0 - y + y^2$$

となる。

$$g(y) = \frac{f(y + 1)}{y} = -1 + y$$

とおくと、 $g(1) = 0$ (原文の「方尽」) より 1 と $2 (= 1 + 1)$ が $f(x) = 0$ の根である。

ある級で開尽することが出来ない場合を例 2 により見てみる。

		又 立 方
		開 出 商
卩	盡實	
無	餘方	
無	餘廉	卩
		一 負商

開出商数の例 2

$$5 + 2x - 2x^2 + x^3 = 0 \text{ (負根 } -1 \text{ と共役虚根)}$$

$$\begin{array}{r}
 -1) \quad \begin{array}{rrrr} 5 & 2 & -2 & 1 \\ -5 & 3 & -1 & \\ \hline 0 & 5 & -3 & 1 \\ & 4 & -1 & \\ & 9 & -4 & 1 \\ & -1 & & \\ & -5 & 1 & \end{array}
 \end{array}$$

負商一を立てると実が尽きる。 $g(y) = 9 - 5y + y^2 = 0$ は実根を持たないので、いかなる正又は負の商を立てても方は尽きない。割注「若至其級而不能開盡者爲无商也」に該当する場合であり、方余、廉余の欄に無と書いている。

§ 3. 驗商有無第二

下線 の箇所は原文をそのまま現代表記したものであるが正しくない。訂正した表現を【】内に記す。

驗商有無第二
 假立正負商一算從其式之隅命之平方式者從廉命之
 至實級而布之原式之實與所布之實同名者
 其商無之異名者其商有之也若雖實同名他
 級中有異名者以適盡其級法而替原式各級
 數而后爲其商有之也
乃有異名級多則以上級爲主

与えられた原式 (方程式) を $a_0 + \cdots + a_n x^n = 0$ とし、正負商一算 $\alpha (= \pm 1)$ を立てる。所布の隅 (最高次の係数) に原式の隅 a_n をおき、商 α を順に掛けた数を実まで布く。

	実	方	...	下廉	隅	
α)	a_0	a_1	$\cdots$	a_{n-1}	a_n	原式
	$a_n \alpha^n$	$a_n \alpha^{n-1}$	$\cdots$	$a_n \alpha$	a_n	所布

所布の実 (定数項) $a_n \alpha^n$ と原式の実 a_0 が同名 (同符号) のときは其の商 (α と同符号の根) なし、異名 (異符号) のときは其の商ありとする。実が同名であっても、他の級の少なくとも1つが異名であれば其の商があるように適盡其級法 (たとえば、廉級が異名であれば適盡廉級法) 【適盡方級法】によって原式各級数 (実級から隅級の係数の一つ) の符号は替えず絶対値のみを替える。異名の級が多くあるときは上級 (低次) の適盡其級法を用いる。【いかなる場合も適盡方級法を用いる。】

a_n が正のとき所布の隅に 1 とおき、 a_n が負のとき -1 とおくというのが定説 (たとえば、[1][2][4][6] など) であるが、18 世紀前半に改変された『開方翻變五條』に基づいた誤った解釈である。原書の「原廉」「原隅」を無視している。詳細は [7] を見よ。

假如原式平方
 假立正商一算從廉命之至實級而布之
 原廉與原式實異名故正商有之
 假立負商一算從廉命之至實級而布之
 原廉與原式實異名故負商有之

驗商有無の例 1

$-2 + x + x^2 = 0$ (根は 1, -2)

正商一を立てる。

	実	方	廉	
1)	-2	1	1	原式
	1	1	1	所布

所布の実 1 は原式の実 -2 と異名なので正商有り。

負商一を立てる。

-1)	-2	1	1	原式
	1	-1	1	所布

所布の実 1 は原式の実 -2 と異名なので負商有り。

驗商有無の例 2

$1 - x + x^2 = 0$ (実根はない。共役 2 虚根をもつ)

実 方 廉

1) 1 -1 1 原式
1 1 1 所布

所布の実 1 は原式の実 1 と同名なので正商無し。方が異名なので適尽方級法により、実数、方数、廉数を替え正商を持たせるようにする。実行結果は視商極数の最初の例で取り上げているので、解説は [8] で行なう。

実 方 廉

-1) 1 -1 1 原式
1 -1 1 所布

所布の実 1 は原式の実 1 と同名なので負商無し。(実方廉すべて原式と同名なので替数により負商を持たせることは出来ない。実際、 $c + bx + ax^2 = 0, (a > 0, b < 0, c > 0)$ は正根 2 つを持つが実根を持たないかのいずれかで負根を持つことはない。)

驗商有無の例 3(原文略)

$5 - 9x + 5x^2 - x^3 = 0$ (正根 1 と共役 2 虚根をもつ)

実 方 廉 隅

1) 5 -9 5 -1 原式
-1 -1 -1 -1 所布

所布の実 -1 は原式の実 5 と異名なので正商有り。

実 方 廉 隅

-1) 5 -9 5 -1 原式
1 -1 1 -1 所布

所布の実 1 は原式の実 5 と同名なので負商なし。(所布と原式のすべての級が同名なので替数はできない。実際、 $d + cx + bx^2 + ax^3 = 0, (a < 0, b > 0, c < 0, d > 0)$ は負根を持たない。)

§ 4. 驗商有無をどう読むか

驗商有無で述べていることを現代の数学で表すと次のようになる。

驗商有無 (字義通りの解釈) 方程式 $a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n = 0, (a_0a_n \neq 0)$ の正根と負根の有無は次の通り。

(1) $a_0a_n > 0$ のときは正根を持たない。

(2) $a_0a_n < 0$ のときは正根を持つ。

又
原式平方
假立正商一算從廉命之至實級而布之
—— 原 與原式實同名故正商無之雖然
方異名故以適盡方級法替實數方數及
廉數而後為正商有之
假立負商一算從廉命之至實級而布之
—— 原 與原式實同名故負商無之

(3) $(-1)^n a_0 a_n > 0$ のときは負根を持たない。

(4) $(-1)^n a_0 a_n < 0$ のときは負根を持つ。

評価 (2)(4) は中間値の定理により正しいが、(1)(3) は関が開出商数で取り上げた 8 例中 3 例が反例になっている。

(1) の反例：全商式 $1 - 2x + x^2 = 0$ 、変商式 $2 - 3x + x^2 = 0$

(3) の反例：交商式 $-6 - 7x + x^3 = 0$

関は数学的に正しくない命題を述べているのであろうか。驗商有無 (字義通りの解釈) にたいする疑問は藤原松三郎が提示している。

孝和がかかる誤りをするとはちょっと思へないのである。上に引用した文章の次に

若雖實同名，他級中有異名者，以適盡其級法而替原式各級數，而后爲其商有之也

とあり、實 a_0 が布くところの實 1 (または $(-1)^n$) と同名のとき (正根無しといつてゐるにも拘はらず)，もし他の級に異名のものあらば，適盡其級法で a_0 の値をかへ (符號はもとのままにして)，しかる後にその商有りと言つてゐるのは矛盾である。故に上文中「其の商無しとする」とあるは「一時商無しと見」ることであつて，適盡其級法によつて，商のあるための係数の範圍を定めるのではあるまいか。

[1, p.212]

また、A. Horiuchi 氏も次のように述べている。

Fault-il considérer ici que Seki a commis une erreur? Pour plusieurs raisons, il convient de ne pas conclure trop vite. Il semble, en effet, que, malgré le nom attribué au test, son principal objectif ne soit pas de déterminer dans un cadre général l'existence d'une racine; il s'agit plutôt de repérer les coefficients susceptibles d'être remplacés afin de transformer l'équation en une équation admettant une racine.

[4, p.215]

関がここで誤りを犯したと考えるべきか。いくつかの理由で拙速に結論を出すべきでないと考える。実際、テストに帰する名前にも拘らず、その主目的は一般的枠組みでの根の存在の決定にあるのではなく、むしろ、方程式が根を持つような係数の範圍を決めることであるように見える。

関孝和は、藤原が指摘しているように、諸級替数で符号を替えないで絶対値のみ替えて商を持たせるようにしているので、符号のみにより商の有無を判断しているとは考えられない。

『開方翻變之法』は、驗商有無第二に先立ち開出商数第一で

1. 開方式の商 (方程式の根) の符号と数による 4 通りの分類
2. 開方式の全ての商の求め方
3. 開方式の全ての商と分類の例

を述べている。驗商有無第二に続いて、適尽諸級第三で適尽方級法、適尽廉級法などを与えている。諸級替数第四は「依驗商有無法視有異名級 (驗商有無法に依りて異名有る級を視)」た後、適尽其級法 (たとえば、異名の最上級が廉級のときは適尽廉級法) を用いて各級の係数の符号は変えず絶対値のみ変えて商を持つようにする方法を述べている。したがって、驗商有無第二は開出商数の方法で正商または負商が求められないときに行なう替数の第一ステップとして述べたと考えられる。このことは、『開方翻變之法』重訂の半月後に重訂された『病題明致之法』の下記の文が傍証になる。

○虚題増損第二
凡虚題者三品其一得無商式者其二得負商式
者其三得商背題圖意者也得無商式者立天元
一爲題中所替極數如適盡方級法而得式開除
之視極數也得負商式者依驗商有無法視有異
名級而立天元一爲題中所替極數如適盡其級
法而得式開除之視極數也

関孝和編『病題明致之法』

虚題には無商の式 (実根を持たない方程式) を得るもの、負商の式 (正根が必要なのに負根しかない方程式) を得るもの、背題図意 (題意に適さない) 商を得るものの三品がある。無商式は替える数を天元の一として 適尽方級法 など【適尽方級法】を開除し商の極数を視る。負商式は驗商有無によって異名の項を見つけ替える数を天元の一として 適尽其級法 【適尽方級法】を開除し商の極数を視る。

負商式に驗商有無を適用することから、驗商有無に先立ち商を求めていることが分かる。すなわち、驗商有無は商の有無を驗すだけの方法ではない。

驗商有無が開出商数の方法で正商または負商が求められないときに行なう替数の第一ステップであることをフローチャート (図 1) に示す。

最後に、A. Horiuchi 氏が “Il semble, en effet, que, malgré le nom attribué au test, (実際、テストに帰する名前にも拘らず、)” と問題にしている「驗商有無」の名称について見ておく。Horiuchi 氏が書いているように、「驗商有無」を訓読すると「商の有無を驗す」となる。そこで関孝和の「驗」の用例を見てみる。関は『解伏題之法』において「得 A 驗 B 之後求 C 也 (A を得て B を驗しこの後 C を求むるなり)」の構文を 3 回用いている。

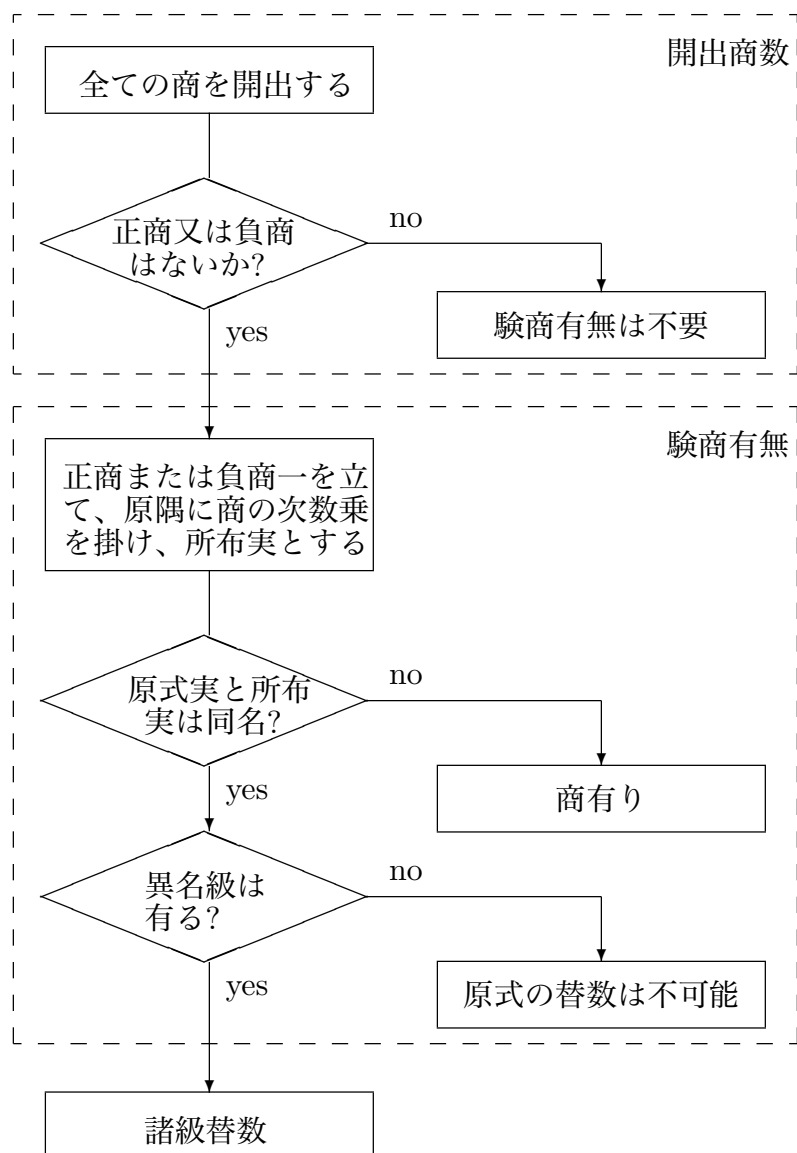


図 1. 験商有無のフローチャート

得兩式驗畧省約縮之後求定乗也 換式第四附芟治 得定乗驗晷括之後求換式也 生尅第五附交式斜乗 得換式驗芟治之後求生尅也 関孝和編『解伏題之法』抜粹	定乗第三附晷括 換式第四附芟治 生尅第五
---	----------------------------

定乗第三
 兩式を得て、畧省約縮を^{こころ}驗むるの後、定乗を求むるなり
 換式第四
 定乗を得て、晷括を驗むるの後、換式を求むるなり
 生尅第五
 換式を得て、^{さんじ}芟治を驗むるの後、生尅を求むるなり。

根幹になる操作の前処理となる手続きを実行することを驗と呼んでおり、「一定の条件にあるかどうかを調べ、条件に合えば処理を行なう」というように使われている。

§ 5. おわりに

本研究では『開方翻変之法』驗商有無について以下のことを示した。

「驗商有無」の役割は、正商または負商を持たないとき、替数が出来る可能性があるか否かを事前に判定することにある。可能性があるときは、「適尽其級法」ではなく「適尽方級法」により替える級数(係数)の範囲を決める。「實同名者其商無之」は藤原松三郎が書いているように『其の商無しとする』とあるは『一時商無しと見』る」と解釈すべきで、そのときは替数を行なうということを表している。「驗商有無」は替数の第一ステップとして正しいアルゴリズムである。

参考文献

- [1] 藤原松三郎(日本学士院編)、明治前日本数学史第二卷、岩波書店、2008(初版 1956)
- [2] 林鶴一、和算ニ於ケル方程式論ニ就テ、東北數學雑誌 **34** (1931), 145-185.
- [3] 平山諦、関孝和 – その業績と伝記 –, 恒星社、1974(初版 1959)
- [4] Annick Horiuchi, les mathématiques japonaises à l'époque d'Edo, J. Vrin, 1994.
- [5] Annick Horiuchi, Japanese Mathematics in the Edo Period, translated from [4] by Silke Wimmer-Zagier, Birkhäuser, 2010.
- [6] 加藤平左エ門、算聖関孝和の業績、槇書店、1972
- [7] 長田直樹、関孝和編『開方翻変之法』の諸写本について、数学史研究、**224** (2016), 1-22.
- [8] 長田直樹、関孝和編『開方翻変之法』について (II)、RIMS Kôkyûroku Bessatsu、本号 (**69**) (2018), 49-64).