上智大学数学講究録

No. 38

グレブナ基底と線型偏微分方程式系
(計算代数解析入門)

大阿久　俊則　著

上智大学数学教室
1994年11月

WEB公開用改訂版
2014年9月

まえがき

本講究録は, 筆者が 1993 年度冬学期に上智大学大学院で行なった講義の際に準備した講義ノートをもとに執筆したものである.

この講義の目標は, 多項式環や巾級数環に対するグレブナ基底の理論とアルゴリズムを微分作用素環に拡張し, その応用として線型偏微分方程式系の解の構造を求めるアルゴリズムを考察することである. ここで言うアルゴリズムとは, 実際の数式処理システム上に implement が可能で, 実際の計算も (ある程度まで) 実行可能なものを想定している.

線型偏微分方程式系の理論は, 微分作用素環上の加群の理論として 1970 年前後から佐藤幹夫, 柏原正樹, 河合隆裕, I.N. Bernstein などを始めとする人々によって飛躍的な発展を遂げ, 現在では代数解析 (より正確には D-加群の理論あるいは超局所解析) として, 高度な理論体系が構築されている.

我々の目標は, この代数解析あるいは D-加群の理論を, アルゴリズムの観点から見直すことである. このようないわば計算代数解析とでも呼ぶべき分野はまだ発展途上であり, 現在のところ D-加群の理論のうち極めて基礎的な部分が扱えるに過ぎないが, たとえば (多項式係数の) 線型偏微分方程式系の特性多様体, ホロノミー系のランク (解空間の次元) と特異点 (singular locus), フックス型偏微分方程式系の特性指数などの計算アルゴリズムは確立しており, 3 変数くらいまでの偏微分方程式系に対しては, コンピュータでこれらの量がかなり計算できるようになっている.

グレブナ基底 (Gröbner basis) の概念は, 1960 年代に B. Buchberger により多項式環のイデアルに対して導入され, それを計算するアルゴリズムも同時に提出された. これは多項式環のイデアル, 更には多項式環上の有限生成加群の構造を計算するのに極めて有用であるのみならず, 連立代数方程式の解法などにも応用されるため, 現在では主要な数式処理システムにはすべて implement されており, 最も基本的な数式処理アルゴリズムの一つになっている.

一方同じ頃, 有名な特異点解消の論文において, 広中平祐は巾級数環のイデアルに対して標準基底 (standard base) の概念を導入している. そこでは標準基底を計算するアルゴリズムは与えられていないが, その後グレブナ基底との関連ないし相似性は広く認識されるに至り, その関連で, 標準基底を求めるアルゴリズムもいくつか考案されている. そこでここでは巾級数環の標準基底のこともグレブナ基底と呼ぶことにする. 多項式環のグレブナ基底は大域的な概念であり, 巾級数環のグレブナ基底は局所的な概念であると考えられる. 従って理論的な (特に幾何学的な) 意味からすると, 巾級数環のグレブナ基底の方がある意味で簡明ではあるが, もちろん実際の計算は一般には多項式環の方が容易である.

さて微分作用素環には大別して多項式係数 (Weyl 代数) および巾級数係数 (解析的微分作用素環) の 2 種があるが, 微分方程式論の立場からすると, たとえ多項式係数の微分方程式系を扱っている場合でも, 解析的な微分作用素環の方が直接的な意味を持つ. しかしながら, 実際の計算は多項式係数の微分作用素環の場合の方がはるかに容易である. 従って, 特に微分方程式への応用の観点からは, どこまでが多項式係数の微分作用素環の計算で済むのかを明らかにすることも重要な論点となる.

本講究録では, 特別な予備知識を仮定せず, まず 1 章と 2 章で多項式環と巾級数環に対するグレブナ基底について解説し, 4 章でそれが種々の微分作用素環に自然に拡張される

ことを述べる. 更にその応用として5章と6章で D-加群に対する基本的なアルゴリズムが得られることを述べる. 微分方程式系と D-加群の対応などの D-加群の理論の初歩については, 3章でなるべく予備知識を仮定せず解説するが, 講義の性格上, いくつかの基本的な結果については, 証明なしで用いることにした. 7章 (補遺) では本文で証明を省略したいくつかの事項について具体的な証明を与える. なお1章から5章まではほぼ講義ノートに忠実であるが, 6章と7章はあとで加筆したものである. 本講究録が, 今後のこの方面の研究の発展に僅かでも資することができれば幸いである.

本講究録の (特に後半の) 内容に関して, 微分作用素環のグレブナ基底とその応用についてパイオニア的な仕事をされている高山信毅氏には論文, 討論, 電子メールなどを通して多くの刺激と示唆を受けました. 計算代数解析 (computational algebraic analysis) という言葉も氏が夙に提唱かつ実践されていたものです.

また, 実際にアルゴリズムを数式処理システム Risa/Asir へ implement する際に, 富士通情報社会科学研究所の下山武司氏と野呂正行氏に全面的な協力を頂きました. 特に本文で挙げた例の多くは, 下山氏の作成した Weyl 代数のグレブナ基底プログラムを筆者が目的に応じて書き換えたものを使用して計算したものです. 因みに同氏との共同研究が筆者のこの分野の研究の端緒となったものです. 更に Risa/Asir の開発者である野呂氏には筆者が Risa/Asir を使用する際に種々の便宜をはかって頂きました.

最後に, この講究録のもととなった講義をすることを薦めて下さると共に, このような形で講義録を出版する機会を与えて下さった, 斎藤友克, 内山康一, 森本光生の諸先生を始めとする上智大学数学教室の方々に心より感謝致します.

1994年4月30日
大阿久 俊則

WEB 公開版への追記

本講究録のWEB公開に当たって，記述の誤りや不正確な箇所の修正を施しました．定義や定理等の番号は変更されていませんが，当初使用したスタイルファイルが利用できないため，体裁やページ数などは若干変更されています．WEB公開に当たってお世話になった上智大学の関係者の皆様に感謝いたします．

2014年9月30日
大阿久 俊則

目 次

第1章　多項式環のグレブナ基底

1.1　多項式環のイデアルのグレブナ基底

ここでは K を一般の体とする．n を 1 以上の自然数として，不定元 $x_1,\ldots,x_n$ についての多項式環 $R := K[x_1,\ldots,x_n]$ を考察する．しばしば $x = (x_1,\ldots,x_n)$ として $R = K[x]$ と略記する．$\mathbf{N}$ を (0 を含む) 自然数全体の集合として，その n 個の直積 $\mathbf{N}^n$ の元 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ を多重指数 (multi-index) あるいは単に指数 (exponent) と呼ぶ．$\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$ を指数とするとき，$|\alpha| := \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ を α の長さ (length) と呼ぶ．また $x^\alpha = {x_1}^{\alpha_1}\cdots{x_n}^{\alpha_n}$ と略記する．従って，R の元 f は有限和 $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ ($c_\alpha \in K$) で表わされる．

定義 1.1.1. $\mathbf{N}^n$ における全順序 (total order) $\prec$ が**項順序** (term order, monomial order) とは，次の性質 (1), (2) を満たすことである．但し，$\alpha,\beta,\gamma \in \mathbf{N}^n$ とする．また $\alpha \preceq \beta$ は $\alpha \prec \beta$ または $\alpha = \beta$ を表わす:

(1) $\alpha \prec \beta$ ならば任意の γ に対して $\alpha + \gamma \prec \beta + \gamma$,

(2) 任意の α について $0 = (0,\ldots,0) \preceq \alpha$.

以下このような項順序 $\prec$ を一つ固定する．良く用いられるのは次の 3 つである．但し $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n)$, $\beta = (\beta_1,\ldots,\beta_n)$ とする．

(1) **辞書式順序** (lexicographic order) $\prec_L$:

$$\alpha \prec_L \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \exists j\ (\alpha_i = \beta_i\,(\forall i < j),\ \alpha_j < \beta_j);$$

(2) **全次数–辞書式順序** (total degree–lexicographic order):

$$\alpha \prec \beta \quad \Longleftrightarrow \quad |\alpha| < |\beta| \quad \text{or} \quad (|\alpha| = |\beta|,\, \alpha \prec_L \beta);$$

(3) **全次数–逆辞書式順序** (total degree–reverse lexicographic order):

$$\alpha \prec \beta \quad \Longleftrightarrow \quad |\alpha| < |\beta| \quad \text{or} \quad (|\alpha| = |\beta|,\, \alpha \succ_L \beta);$$

ところで，上記のような 2 つの指数 α, β に対して，$\alpha_i \le \beta_i$ がすべての i について成り立つとき $\alpha \le \beta$ と書くことにする．従って，$\le$ は $\mathbf{N}^n$ の部分順序 (partial order) である．$\alpha \le \beta$ のとき $\alpha \preceq \beta$ が成立する．実際このとき，定義 1.1.1 の (2) から $\beta - \alpha \succeq 0$ だから (1) から

$$\alpha = \alpha + 0 \preceq \alpha + (\beta - \alpha) = \beta$$

である.

さて, 固定したひとつの項順序 $\prec$ に関して, 多項式 $f \in R$ の **leading exponent**, **leading coefficient**, **leading term** を次のように定義する.

定義 1.1.2. $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in R \setminus \{0\}$ に対して, 有限集合 $\{\alpha \mid c_\alpha \neq 0\}$ の全順序 $\prec$ に関する最大元を β とするとき,

$$\mathrm{lexp}(f) := \beta, \quad \mathrm{lcoef}(f) := c_\beta, \quad \mathrm{lterm}(f) := c_\beta x^\beta.$$

補題 1.1.3. $f, g \in R \setminus \{0\}$ に対して, $f + g \neq 0$ ならば

$$\begin{aligned} \mathrm{lexp}(fg) &= \mathrm{lexp}(f) + \mathrm{lexp}(g), \\ \mathrm{lcoef}(fg) &= \mathrm{lcoef}(f)\mathrm{lcoef}(g), \\ \mathrm{lterm}(fg) &= \mathrm{lterm}(f)\mathrm{lterm}(g). \end{aligned}$$

証明: 最後の等式を証明すれば十分. $\mathrm{lterm}(f) = ax^\alpha$, $\mathrm{lterm}(g) = bx^\beta$ として $f' := f - \mathrm{lterm}(f)$, $g' := g - \mathrm{lterm}(g)$ とおくと

$$fg = abx^{\alpha+\beta} + ax^\alpha g' + bx^\beta f' + f'g'.$$

ここで右辺の第 2 項以降は, $\gamma \preceq \alpha$ かつ $\delta \prec \beta$, あるいは $\gamma \prec \alpha$ かつ $\delta \preceq \beta$ をみたすような γ, δ と $c \in R$ を用いて $cx^{\gamma+\delta}$ という形に表わされるような単項式の和になる. このとき, 項順序の定義より

$$\gamma + \delta \preceq \gamma + \beta \preceq \alpha + \beta$$

かつ $\gamma + \delta \neq \alpha + \beta$ であるから $\mathrm{lterm}(fg) = \mathrm{lterm}(f)\mathrm{lterm}(g)$ を得る. □

補題 1.1.4. $f, g \in R$ に対して, $f + g \neq 0$ ならば $\mathrm{lexp}(f+g) \preceq \max_\prec\{\mathrm{lexp}(f), \mathrm{lexp}(g)\}$ が成立する. ($\max_\prec$ は $\prec$ に関する最大元を表わす.)

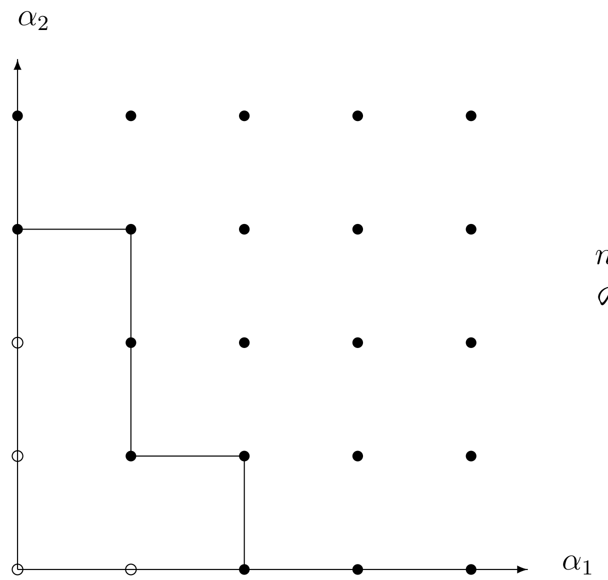
証明: $\mathrm{lexp}(f) \succeq \mathrm{lexp}(g)$ と仮定しても一般性を失わない. もし $\mathrm{lexp}(f) \succ \mathrm{lexp}(g)$ なら $\mathrm{lexp}(f+g) = \mathrm{lexp}(f)$; もし $\mathrm{lexp}(f) = \mathrm{lexp}(g)$ ならば (leading term が打消し合う可能性があるので) $\mathrm{lexp}(f+g) \preceq \mathrm{lexp}(f)$ となる. □

定義 1.1.5. $\mathbf{N}^n$ の部分集合 L が**モノイデアル** (monoideal) とは, 任意の $\alpha \in L$ と $\beta \in \mathbf{N}^n$ に対して $\alpha + \beta \in L$ が成立すること. また, $\mathbf{N}^n$ の部分集合 S に対して, 集合

$$\mathrm{mono}(S) := \{\alpha + \beta \mid \alpha \in S, \beta \in \mathbf{N}^n\}$$

のことを S の生成するモノイデアルと呼ぶ. (これが実際にモノイデアルになることを確かめよ.) 更に, $\mathbf{N}^n$ のある有限部分集合 S が存在して, $L = \mathrm{mono}(S)$ となっているとき, モノイデアル L は有限生成であるという.

補題 1.1.6. (Dickson の補題) (1) $\mathbf{N}^n$ の任意のモノイデアルは有限生成である.



$n = 2,\ S = \{(2,0),(1,1),(0,3)\}$ の場合の $\mathrm{mono}(S)$

(2) $L_1, L_2, L_3, \ldots$ を $\mathbf{N}^n$ のモノイデアルの増大列 (i.e. $L_1 \subset L_2 \subset L_3 \ldots$) とすると, ある自然数 k が存在して, $L_j = L_k$ が任意の $j \geq k$ について成立する.

証明: (1) と (2) の同値性をまず示しておく.

(1) $\Rightarrow$ (2): $L := \bigcup_{j=1}^{\infty} L_j$ もモノイデアルであることは明らかだから, (1) により L は有限集合 S で生成される. $S \subset L$ より, ある自然数 k が存在して, $S \subset L_k$. すると $j \geq k$ のとき L_j は S で生成されるから, $L_j = L_k$ が成立する.

(2) $\Rightarrow$ (1): モノイデアル L が有限生成でないとすると, L の有限部分集合の増大列 $S_1 \subset S_2 \subset S_3 \subset \ldots$ で $\mathrm{mono}(S_j) \neq \mathrm{mono}(S_{j+1})$ $(\forall j)$ なるものが構成できる. これは (2) に反する.

次に補題を次元 n に関する帰納法で示す.

$n = 1$ のとき: L を $\mathbf{N}$ のモノイデアルとして, $d := \min\{\alpha \in \mathbf{N} \mid \alpha \in L\}$ とおけば, L はモノイデアルだから $\{\alpha \in \mathbf{N} \mid \alpha \geq d\} \subset L$. 一方, d の定義から逆の包含関係も明らか. 従って L は $\{d\}$ で生成されるモノイデアルである.

$n-1$ については補題は証明されたとする. L を $\mathbf{N}^n$ のモノイデアルとして, 各自然数 j に対して,

$$L_j = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}) \in \mathbf{N}^{n-1} \mid (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, j) \in L\}$$

と置く. 定義から, $\{L_j\}$ は $\mathbf{N}^{n-1}$ のモノイデアルの増大列である. 従って帰納法の仮定から, 各 L_j はある有限集合 S_j で生成され, さらにある自然数 k が存在して, 任意の $j \geq k$ に対して $L_j = L_k$ が成立する.

$$S := \bigcup_{j=0}^{k} \{(\alpha', j) \mid \alpha' \in S_j\}$$

とおく. L がこの有限集合 S で生成されることを示せば十分である. $(\alpha', j) \in L$ とする. もし $0 \leq j \leq k$ ならば, ある $\beta' \in S_j$ と $\gamma' \in \mathbf{N}^{n-1}$ が存在して $\alpha' = \beta' + \gamma'$ が成立するので $(\alpha', j) = (\beta', j) + (\gamma', 0) \in \mathrm{mono}(S)$ を得る. また $j > k$ のときは $L_j = L_k$ から, 上と同じ理由で $(\alpha', k) \in \mathrm{mono}(S)$ となって, $(\alpha', j) = (\alpha', k) + (0, j-k) \in \mathrm{mono}(S)$ を得る. 以上によって $L = \mathrm{mono}(S)$ が示された. □

補題 1.1.7. $\mathbf{N}^n$ の任意の部分集合は $\prec$ に関して最小元を持つ; すなわち $\prec$ は整列順序 (well-order) である.

証明: L を $\mathbf{N}^n$ の部分集合とする. Dickson の補題により, $\mathrm{mono}(L)$ は有限集合 S で生成される. S の順序 $\prec$ に関する最小元を α とする. このとき, $\alpha \in L$ をまず示そう. 実際, $\alpha \in S \subset \mathrm{mono}(L)$ より, ある $\beta \in L$ があって $\alpha \geq \beta$ となる. 一方 $\beta \in L \subset \mathrm{mono}(S)$ より, $\beta \geq \gamma$ なる $\gamma \in S$ が存在する. 以上により $\alpha \geq \gamma$, 従って $\alpha \succeq \gamma$ となるが, α のとり方から $\alpha = \gamma$, 従って $\alpha = \beta \in L$ を得る.

さて, 補題を証明するためには α が L の $\prec$ に関する最小元であることを示せば十分である. L のある元 β が $\beta \prec \alpha$ を満たしたと仮定する. L は S で生成されるから, ある $\gamma \in S$ が存在して $\gamma \leq \beta$ 従って $\gamma \preceq \beta$ となる. これと $\beta \prec \alpha$ より $\gamma \prec \alpha$ となるが, $\gamma \in S$ であったから, これは α の最小性に反する. $\square$

補題 1.1.8. モノイデアル $L \subset \mathbf{N}^n$ に対して, それを生成するような (包含関係の意味で) 最小の有限集合 S_0 が存在する.

証明:

$$S_0 = \{\alpha \in L \mid \alpha \geq \beta \text{ かつ } \alpha \neq \beta \text{ なる } \beta \in L \text{ は存在しない}\}$$

が補題の条件をみたすことを示す.

(1) S_0 が L を生成すること: $\alpha \in L$ を固定して, 集合 $\{\beta \in L \mid \beta \leq \alpha\}$ の順序 $\prec$ に関する最小元を γ とおく (この集合は α を含むから空でない). このとき, γ の最小性から直ちに $\gamma \in S_0$ が従う. 従って L は S_0 で生成される.

(2) S_0 の最小性: 有限集合 $S \subset \mathbf{N}^n$ が L を生成したとする. $\alpha \in S_0$ とすると, $\alpha \geq \beta$ なる $\beta \in S \subset L$ が存在する. S_0 の定義により, このとき $\beta = \alpha$ でなければならない. 従って $S_0 \subset S$ である. $\square$

一般に多項式環 R の部分集合 S に対して $E(S) := \{\mathrm{lexp}(f) \mid f \in S,\ f \neq 0\}$ とおく.

補題 1.1.9. I を R のイデアルとすると, $E(I)$ は $\mathbf{N}^n$ のモノイデアルである.

証明: f を I の任意の元, β を任意の指数とする. $x^\beta f \in I$ より $\mathrm{lexp}(x^\beta f) = \mathrm{lexp}(f) + \beta \in E(I)$, すなわち $E(I)$ はモノイデアルである. $\square$

定義 1.1.10. (グレブナ基底) I を多項式環 R のイデアルとする. I の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が I の (順序 $\prec$ に関する) **グレブナ基底** (Gröbner basis) とは, 次の２条件が成り立つこと:

(1) I は $\mathbf{G}$ で生成されるイデアル;

(2) $E(I) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$.

さらに, $E(\mathbf{G})$ が $E(I)$ を生成する最小の集合 (cf. 補題 1.1.8) であるとき, $\mathbf{G}$ を極小グレブナ基底 (minimal Gröbner basis) と呼ぶ.

イデアル I に対して I の極小グレブナ基底 $\mathbf{G}$ は必ずしも一意的ではないが, $E(\mathbf{G})$ は補題 1.1.8 により一意的である (極小と呼ぶ理由).

$\mathbf{G}$ を R の有限部分集合, f を R の任意の元とするとき, f の $\mathbf{G}$ による**簡約操作** (reduction) を次のアルゴリズムで定義しよう. なおアルゴリズムを簡潔に記述するため, 以下では

while (条件) { 実行文; ...}

などの C 言語風の表現を用いる.

アルゴリズム 1.1.11. (簡約操作)
Input: $f \in R$ and a finite set $\mathbf{G} \subset R$;
while ($f \neq 0$ and $\mathrm{lexp}(f) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$) {
  Choose $g \in \mathbf{G}$ such that $\mathrm{lexp}(f) \geq \mathrm{lexp}(g)$;
  $f := f - (\mathrm{lterm}(f)/\mathrm{lterm}(g))g$;
}
Output: f;

命題 1.1.12. 上のアルゴリズムは停止して, その output f は $f = 0$ または $\mathrm{lexp}(f) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ をみたす.

証明: $\mathrm{lexp}(f) \geq \mathrm{lexp}(g)$ のとき $\mathrm{lterm}(f) = \mathrm{lterm}((\mathrm{lterm}(f)/\mathrm{lterm}(g))g)$ であるから $f_1 = f - (\mathrm{lterm}(f)/\mathrm{lterm}(g))g$ とおけば $\mathrm{lexp}(f_1) \prec \mathrm{lexp}(f)$ が成立する. もし上のアルゴリズムが停止しない (すなわち while の条件式が無限に成立し続ける) と仮定すると, 多項式の列 f, f_1, f_2,... で $\mathrm{lexp}(f) \succ \mathrm{lexp}(f_1) \succ \mathrm{lexp}(f_2) \succ \ldots$ となるものが存在することになるが, これは $\prec$ が整列順序であることに反する. □

定義 1.1.13. 上のアルゴリズムの output を $\mathrm{red}(f, \mathbf{G})$ で表わし, f の $\mathbf{G}$ による**簡約** (reduction) と呼ぶ. これは各ステップ毎の g の選び方によるので, 必ずしも f と $\mathbf{G}$ から一意的に決まる訳ではない. (g を選ぶ規則を予め与えておけば一意的にはできる.)

なお, f と $\mathbf{G}$ を上記のようにとるとき, $f \neq 0$ かつ $\mathrm{lexp}(f) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ ならば f は $\mathbf{G}$ に関して**可約** (reducible), そうでなければ**既約** (irreducible) という. またアルゴリズム 1.1.11 において $\mathrm{lexp}(f) \geq \mathrm{lexp}(g)$ で $f' := f - (\mathrm{lterm}(f)/\mathrm{lterm}(g))g$ のとき $f \xrightarrow[g]{} f'$, さらに $r = \mathrm{red}(f, \mathbf{G})$ のとき $f \xrightarrow[\mathbf{G}]{} r$ と書くことがある.

命題 1.1.14. 任意の $f \in R$ と R の任意の有限集合 $\mathbf{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ に対して, ある簡約操作により, $r = \mathrm{red}(f, \mathbf{G})$ とすると,

(1) $f - r$ は $\mathbf{G}$ の生成するイデアル I に含まれる;

(2) $r = 0$ または $\mathrm{lexp}(r) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$;

(3) ある $q_1,\ldots,q_s \in R$ が存在して, $f = \sum_{i=1}^{s} q_i g_i + r$ かつ各 i について $q_i = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_i g_i) \preceq \mathrm{lexp}(f)$ (従って $r = 0$ または $\mathrm{lexp}(r) \preceq \mathrm{lexp}(f)$).

証明: (2) は定義から明らか. (1) は (3) から従うから (3) を示せば十分. f が $\mathbf{G}$ に関して既約ならば $r = f$, $q_1 = \ldots = q_s = 0$ とすればよい. f が可約ならば, 上のアルゴリズムから単項式の有限列 $m_1, \ldots, m_N$ と, 集合 $\{1, \ldots, s\}$ に値を取る有限数列 $i(1), \ldots, i(N)$ が存在して,

$$f = m_1 g_{i(1)} + \cdots + m_N g_{i(N)} + r \tag{1.1}$$

かつ

$$\operatorname{lexp}(f) = \operatorname{lexp}(m_1 g_{i(1)}) \succ \operatorname{lexp}(m_2 g_{i(2)}) \succ \ldots \succ \operatorname{lexp}(m_N g_{i(N)}) \succ \operatorname{lexp}(r)$$

をみたす. (1.1) の左辺を $g_1, \ldots, g_s$ について整理して命題の結論を得る. □

命題 1.1.15. I を R のイデアル, $\mathbf{G}$ を I の有限部分集合で $\operatorname{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$ をみたすものとすると, $\mathbf{G}$ は I のグレブナ基底である.

証明: $\mathbf{G}$ が I を生成することを示せばよい. $\mathbf{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ とおく. f を I の任意の元として, ある簡約操作により $r := \operatorname{red}(f, \mathbf{G})$ とする. $r \neq 0$ ならば簡約操作の定義から $\operatorname{lexp}(r) \notin \operatorname{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$ であるが, これは $r = f - (f - r) \in I$ に矛盾する. 従って $r = 0$ となり, 命題 1.1.14 から, ある $q_1, \ldots, q_s \in R$ が存在して $f = \sum_{j=1}^{s} q_s g_s$ となる. 故に I は $\mathbf{G}$ で生成される. □

命題 1.1.16. I を R のイデアルとすると I のグレブナ基底は存在する.

証明: Dickson の補題により, モノイデアル $E(I)$ は $\mathbf{N}^n$ のある有限集合 S により生成される. S の各元 α に対して $\operatorname{lexp}(f) = \alpha$ なる $f \in I$ が存在するから, I の有限部分集合 $\mathbf{G}$ で $\{\operatorname{lexp}(f) \mid f \in \mathbf{G}\} = S$ を満たすものが存在する. このとき $\operatorname{mono}(E(\mathbf{G})) = \operatorname{mono}(S) = E(I)$ であるから, 上の命題によって $\mathbf{G}$ は I のグレブナ基底である. □

これから直ちに Hilbert の基底定理が従う:

系 1.1.17. 多項式環 R はネター (Noether) 環である. すなわち, R の任意のイデアルは有限生成である.

命題 1.1.18. I, J が R のイデアルで, $I \subset J$ かつ $E(I) = E(J)$ とすると, $I = J$ である.

証明: $\mathbf{G}$ を I のグレブナ基底とすると, 仮定と命題 1.1.15 により $\mathbf{G}$ は J のグレブナ基底でもある. 従って $I = J$ を得る. □

以下の目標は, イデアル I の生成元からグレブナ基底を計算するアルゴリズムを得ることである. それには簡約操作と下記に定義する S-多項式が用いられる.

２つの指数 $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ と $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ に対して,

$$\alpha \vee \beta := (\max\{\alpha_1, \beta_1\}, \ldots, \max\{\alpha_n, \beta_n\})$$

と置く.

定義 1.1.19. (S-多項式) $f, g \in R$ に対して,

$$\alpha := (\mathrm{lexp}(f) \vee \mathrm{lexp}(g)) - \mathrm{lexp}(f), \quad \beta := (\mathrm{lexp}(f) \vee \mathrm{lexp}(g)) - \mathrm{lexp}(g)$$

とおいて, f と g の **S-多項式** (S-polynomial) $\mathrm{sp}(f, g)$ を

$$\mathrm{sp}(f, g) = \mathrm{lcoef}(g)x^\alpha f - \mathrm{lcoef}(f)x^\beta g$$

で定義する.

定義から $\mathrm{lexp}(\mathrm{sp}(f, g)) \prec \mathrm{lexp}(f) \vee \mathrm{lexp}(g)$ が従う. 次の定理がグレブナ基底の理論の key point である.

定理 1.1.20. $\mathbf{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ を R の有限部分集合, I を $\mathbf{G}$ の生成する R のイデアルとするとき, 次の条件 (1)–(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は I のグレブナ基底;

(2) $f \in I$ のとき f の $\mathbf{G}$ による任意の簡約操作により $\mathrm{red}(f, \mathbf{G}) = 0$ となる.

(3) 任意の $g_i, g_j \in \mathbf{G}$ に対して, ある $q_{ij1}, \dots, q_{ijs} \in R$ が存在して

$$\mathrm{sp}(g_i, g_j) = q_{ij1}g_1 + \cdots + q_{ijs}g_s$$

かつすべての $k = 1, \dots, s$ について $q_{ijk} = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_{ijk}g_k) \prec \mathrm{lexp}(g_i) \vee \mathrm{lexp}(g_j)$ が成立する.

証明: (1) $\Rightarrow$ (2): $f \in I$ として, ある簡約操作により $r := \mathrm{red}(f, \mathbf{G}) \neq 0$ となったとする. 定義から $\mathrm{lexp}(r) \notin E(\mathbf{G}) = E(I)$ であるが, 命題 1.1.14 の (1) から $r \in I$ であるから, これは矛盾である.

(2) $\Rightarrow$ (3): $\mathrm{sp}(g_i, g_j) \in I$ であるから, (2) より, 任意の簡約操作によって

$$\mathrm{red}(\mathrm{sp}(g_i, g_j), \mathbf{G}) = 0$$

となる. 従って命題 1.1.14 から (3) が従う.

(3) $\Rightarrow$ (1): $\mathbf{G} = \{g_1, \dots, g_s\}$ とする. ここで $\mathrm{lcoef}(g_k) = 1$ $(k = 1, \dots, s)$ と仮定しておいても一般性を失わない. (3) を仮定すると, $i \neq j$ なる $\{1, \dots, s\}$ の各々の組 (i, j) に対して, 多項式 $q_{ij1}, \dots, q_{ijs}$ が存在して,

$$\mathrm{sp}(g_i, g_j) = \sum_{k=1}^{s} q_{ijk}g_k, \tag{1.2}$$

かつ $q_{ijk} \neq 0$ ならば $\mathrm{lexp}(q_{ijk}g_k) \prec \mathrm{lexp}(g_i) \vee \mathrm{lexp}(g_j)$ が成り立つ.

さて $f \in I$ とする. このとき $\mathrm{lexp}(f) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を示せばよい. そのためには, ある $q_1, \dots, q_s \in R$ が存在して $f = \sum_{k=1}^{s} q_k g_k$ かつ各 k について $q_k = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_k g_k) \preceq \mathrm{lexp}(f)$ とできることを示せば十分である. 実際このとき, ある k について $\mathrm{lexp}(f) = \mathrm{lexp}(q_k g_k) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を得る.

上記の証明のため, f に対して

$$f = \sum_{k=1}^{s} q_k g_k, \quad (q_1, \ldots, q_s \in R) \tag{1.3}$$

という形の表示の全体を考え, その中で, $\max_{\prec}\{\mathrm{lexp}(q_k g_k) \mid 1 \le k \le s,\, q_k \ne 0\}$ が順序 $\prec$ について最小になるものを一つとり, それを改めて (1.3) とみなすことにする. ($f \in I$ よりこのような表示は少なくともひとつ存在し, また $\prec$ が整列順序であるから, 上の意味で最小な表示を一つ選べる.) ただし, ここで $\max_{\prec}$ は $\prec$ に関する最大元を表わす. このような最小性をもつ表示 (1.3) を一つ固定する.

$$\alpha := \max_{\prec}\{\mathrm{lexp}(q_k g_k) \mid 1 \le k \le s,\, q_k \ne 0\}$$

とおく. 上の注意により $\alpha = \mathrm{lexp}(f)$ ならば (1) が証明できたことになる.

そのため以下では $\alpha \ne \mathrm{lexp}(f)$ (従って $\alpha \succ \mathrm{lexp}(f)$) と仮定しよう. $g_1, \ldots, g_s$ を並べ替えて, $1 \le k \le \ell$ のとき $\mathrm{lexp}(q_k g_k) = \alpha$, $\ell < k \le s$ のとき $\mathrm{lexp}(q_k g_k) \prec \alpha$ または $q_k = 0$ が成立するとしてよい. $q'_k := q_k - \mathrm{lterm}(q_k)$, $\mathrm{lterm}(q_k) = c_k x^{\beta^{(k)}}$, $\alpha^{(k)} := \mathrm{lexp}(g_k)$ とおくと,

$$f = \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k) g_k + \sum_{k=1}^{\ell} q'_k g_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} q_k g_k. \tag{1.4}$$

ここでこの第一項を次のように変形する:

$$\begin{aligned}
& \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k) g_k = \sum_{k=1}^{\ell} c_k x^{\beta^{(k)}} g_k \\
= \; & \sum_{k=1}^{\ell-1} (c_1 + \cdots + c_k)(x^{\beta^{(k)}} g_k - x^{\beta^{(k+1)}} g_{k+1}) + (c_1 + \cdots + c_\ell) x^{\beta^{(\ell)}} g_\ell.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

ここで $1 \le k \le \ell$ のとき $\alpha^{(k)} + \beta^{(k)} = \alpha$ が成り立つことから, $\alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} \le \alpha$ となり, $\gamma^{(k)} := \alpha - \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)}$ とおけば (1.2) と (1.5) から

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k) g_k &= \sum_{k=1}^{\ell-1} (c_1 + \cdots + c_k) x^{\gamma^{(k)}} \mathrm{sp}(g_k, g_{k+1}) + (c_1 + \cdots + c_\ell) x^{\beta^{(\ell)}} g_\ell \\
&= \sum_{k=1}^{\ell-1} (c_1 + \cdots + c_k) x^{\gamma^{(k)}} \sum_{\nu=1}^{s} q_{k,k+1,\nu} g_\nu + (c_1 + \cdots + c_\ell) x^{\beta^{(\ell)}} g_\ell.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

$\gamma^{(k)} + \mathrm{lexp}(q_{k,k+1,\nu} g_\nu) \prec \gamma^{(k)} + \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} = \alpha$ だから, もし $c_1 + \cdots + c_\ell \ne 0$ ならば, (1.4) と (1.6) から $\mathrm{lexp}(f) = \alpha$ となり, 仮定に反する. 従って $c_1 + \cdots + c_\ell = 0$ である. このことと (1.4), (1.6) から

$$f = \sum_{k=1}^{\ell-1} (c_1 + \cdots + c_k) x^{\gamma^{(k)}} \sum_{\nu=1}^{s} q_{k,k+1,\nu} g_\nu + \sum_{k=1}^{\ell} q'_k g_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} q_k g_k$$

を得る. この右辺の各項の leading exponent は $\prec$ に関して α より小さいから, これは (1.3) の最小性に矛盾する. 以上により (1.3) において $\alpha = \mathrm{lexp}(f)$ とできることが示された. □

これから直ちにグレブナ基底を構成するアルゴリズム (Buchberger アルゴリズム) を得る:

アルゴリズム 1.1.21. (多項式環のグレブナ基底)
Input: a finite set $\mathbf{G} \subset R$;
while $(\exists (f,g) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ such that $r := \mathrm{red}(\mathrm{sp}(f,g), \mathbf{G}) \neq 0)$
$\quad\quad \mathbf{G} := \mathbf{G} \cup \{r\}$;
Output: $\mathbf{G}$;

ここで, r を計算する際の簡約操作は, 自由に選んでよい. また $\mathrm{sp}(f,f) = 0$ であるから $f \neq g$ なる f, g についてだけ調べれば十分である.

命題 1.1.22. 上のアルゴリズムは停止して, その output $\mathbf{G}$ は $\mathbf{G}$ の生成するイデアル I のグレブナ基底である.

証明: (1) アルゴリズムが停止すること: 上のアルゴリズムの while ループの実行毎の $\mathbf{G}$ を添字を付けて $\mathbf{G}_0, \mathbf{G}_1, \mathbf{G}_2, \ldots$ と書こう. もしアルゴリズムが停止しないとすると $\mathbf{G}_0 \subset \mathbf{G}_1 \subset \mathbf{G}_2 \subset \ldots$ という可算増大列が得られる. $\{\mathrm{mono}(E(\mathbf{G}_j))\}$ はモノイデアルの増大列である. 従って Dickson の補題からある自然数 k があって $j \geq k$ のとき $\mathrm{mono}(E(\mathbf{G}_{j+1})) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}_j))$ が成立する. $\mathbf{G}_{j+1} = \mathbf{G}_j \cup \{r_j\}$ とすると, $r_j \neq 0$ かつ $\mathrm{lexp}(r_j) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}_j))$ であるから, $\mathrm{mono}(E(\mathbf{G}_{j+1})) \neq \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}_j))$ となり矛盾である.

(2) output $\mathbf{G}$ が I のグレブナ基底であること: アルゴリズム中の r はまた I に属するから $\mathbf{G}$ が I を生成することは, アルゴリズムの実行中保存される. アルゴリズムが停止したとき, 任意の $f, g \in \mathbf{G}$ について, 適当な簡約操作により $\mathrm{red}(\mathrm{sp}(f,g), \mathbf{G}) = 0$ となっているから定理 1.1.20 により, $\mathbf{G}$ は I のグレブナ基底である. □

アルゴリズム 1.1.23. (極小グレブナ基底)
Input: a finite set $\mathbf{G} \subset R$;
$\mathbf{G}$:= the output of Algorithm 1.1.21 with input $\mathbf{G}$;
while $(\exists g \in \mathbf{G}$ such that $\mathrm{lexp}(g) \in E(\mathbf{G} \setminus \{g\})$)
$\quad\quad \mathbf{G} := \mathbf{G} \setminus \{g\}$;
Output: $\mathbf{G}$;

命題 1.1.24. 上のアルゴリズムは停止して, その output は $\mathbf{G}$ の生成するイデアル I の極小グレブナ基底である.

証明: アルゴリズムの実行中 $\mathbf{G}$ は真に減少するから, アルゴリズムが停止することは明らか. また $g \in \mathbf{G}$ が $\mathrm{lexp}(g) \in E(\mathbf{G} \setminus \{g\})$ をみたすとき, $\mathrm{mono}(E(\mathbf{G} \setminus \{g\})) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$ であるから, $\mathbf{G}$ が I のグレブナ基底であることはアルゴリズムの実行中保存される.

さて $\mathbf{G}$ を output とすると, すべての $g \in \mathbf{G}$ について $\mathrm{lexp}(g) \notin E(\mathbf{G} \setminus \{g\})$ が成立するから $E(\mathbf{G} \setminus \{g\})$ は $E(I)$ を生成しない. すなわち $E(\mathbf{G})$ は $E(I)$ を生成する最小の集合である. □

グレブナ基底の応用として, まず次の命題を得る:

命題 1.1.25. R の元 f と R のイデアル I が与えられたとする. $\mathbf{G}$ を I のグレブナ基底とするとき, 次の 3 つの条件は同値である:

(1) $f \in I$;

(2) 任意の簡約操作により $\mathrm{red}(f, \mathbf{G}) = 0$;

(3) ある簡約操作により $\mathrm{red}(f, \mathbf{G}) = 0$.

従って, 勝手な簡約操作により $r := \mathrm{red}(f, \mathbf{G})$ となったとき, $r = 0$ ならば $f \in I$; $f \neq 0$ ならば $f \notin I$ である.

証明: (1) ⇒ (2) は定理 1.1.20 の (2) から従う.
(2) ⇒ (3) は自明.
(3) ⇒ (1): $r := \mathrm{red}(f, \mathbf{G})$ とおくと 命題 1.1.14 より $f \in I \Leftrightarrow r \in I$ であるから, $r = 0$ ならば $f \in I$. □
次に, グレブナ基底を用いて R のイデアル I による剰余環 R/I の構造を考察しよう.

定義 1.1.26. $\mathbf{G}$ を R の有限部分集合とする. R の元 $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ が $\mathbf{G}$ に関して**完全既約** (completely irreducible) とは, f のすべての単項式が $\mathbf{G}$ に関して既約, すなわち $c_\alpha \neq 0$ ならば $\alpha \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ となることである. f が $\mathbf{G}$ に関して完全既約でないとき,

$$
\begin{aligned}
\mathrm{redlexp}(f) &:= \max_{\prec}\{\alpha \mid c_\alpha \neq 0,\ \alpha \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))\},\\
\mathrm{redlterm}(f) &:= c_\alpha x^\alpha \quad (\alpha := \mathrm{redlexp}(f))
\end{aligned}
$$

とおく.

アルゴリズム 1.1.27. (完全簡約操作)
Input: $f \in R$ and a finite set $\mathbf{G} \subset R$;
while (f is not completely irreducible with respect to $\mathbf{G}$) {
  Choose $g \in \mathbf{G}$ such that $\mathrm{redlexp}(f) \geq \mathrm{lexp}(g)$;
  $f := f - (\mathrm{redlterm}(f)/\mathrm{lterm}(g))g$;
}
Output: f;

命題 1.1.28. 上のアルゴリズムは停止して, その output f は $\mathbf{G}$ に関して完全既約である.

証明: アルゴリズムが停止することを示せばよい. もし停止しなかったとして, while ループの実行ごとの f を添え字をつけて $f_0 = f, f_1, f_2, \ldots$ と表わすことにする. f_j に対し $\mathrm{redlexp}(f_j) \geq \mathrm{lexp}(g)$ なる $g \in \mathbf{G}$ を選ぶと, $\mathrm{lterm}((\mathrm{redlterm}(f_j)/\mathrm{lterm}(g))g) = \mathrm{redlterm}(f_j)$ であり, $\mathrm{redlterm}(f_j)$ より大きな指数を持つ f_j と f_{j+1} の項はすべて一致するから, $\mathrm{redlexp}(f_j) \succ \mathrm{redlexp}(f_{j+1})$ となる. これがすべての自然数 j について成立することになり, $\prec$ が整列順序であることに反する. □
$\mathrm{redlexp}(f) \preceq \mathrm{lexp}(f)$ であるから, 完全簡約操作に対しても命題 1.1.14 が成立することは明らかであろう. 従って定理 1.1.20 の (2) の簡約操作を完全簡約操作で置き換えてもよい.

命題 1.1.29. $\mathbf{G}$ を R のイデアルのグレブナ基底とすると, $f \in R$ の $\mathbf{G}$ による完全簡約操作の結果は (アルゴリズム中の g の選び方によらず) 一意的に定まる。

証明: f の $\mathbf{G}$ による 2 つの完全簡約操作の結果を r_1,r_2 とする. $\mathbf{G}$ の生成するイデアルを I とすると, $r_1 - r_2 \in I$ は $\mathbf{G}$ に関して完全既約である. 従って特に, $r_1 - r_2 \neq 0$ ならば $\mathrm{lexp}(r_1 - r_2) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$ となるが, これは $r_1 - r_2 \in I$ に反する. 従って $r_1 = r_2$ である. □

定理 1.1.30. I を R のイデアルとして $S(I) := \mathbf{N}^n \setminus E(I)$ とおくと, 剰余環 R/I は K 上のベクトル空間として, 直和 $K(S(I)) := \bigoplus_{\alpha \in S(I)} Kx^\alpha$ に同型である.

証明: K-線型写像 $\varphi : K(S(I)) \longrightarrow R/I$ を $f = \sum_{\alpha \in S(I)} c_\alpha x^\alpha$ に対して f の R/I での剰余類 $[f]$ を対応させる写像として定義する. (K-線型であることは明らか.) $\mathbf{G}$ を I のグレブナ基底とする.

(1) φ が単射であること: $\varphi(f) = 0$ とすると $f \in I$. ところが $f \neq 0$ とすると f は $\mathbf{G}$ に関して完全既約であるから $\mathrm{lexp}(f) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$. これは $f \in I$ に矛盾する.

(2) φ が全射であること: $f \in R$ に対して f の $\mathbf{G}$ による完全簡約操作の結果を r とする. このとき $f - r \in I$ かつ $r \in K(S(I))$ であるから $\varphi(r) = [r] = [f]$ となる. □

系 1.1.31. I を R のイデアル, $\mathbf{G}$ を I のグレブナ基底とするとき次の条件は同値 ($\dim_K$ は K 上のベクトル空間の次元, $\sharp$ は集合の元の個数を表わす):

(1) $\dim_K(R/I) = \sharp S(I) < \infty$;

(2) 各 $i = 1, \dots, n$ に対してある $\alpha_i \in \mathbf{N}$ が存在して, $(0, \dots, \overset{(i)}{\alpha_i}, \dots, 0) \in E(\mathbf{G})$.

証明: 上の定理から $\dim_K(R/I) = \sharp S(I)$ は明らか. (1) を仮定して (2) を否定すると, ある i について, すべての $k \in \mathbf{N}$ に対して

$$(0, \dots, \overset{(i)}{k}, \dots, 0) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I).$$

従って $S(I)$ は無限集合となり (1) に反する.

(2) を仮定すると $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$ が $\beta_i \geq \alpha_i$ ($\exists i$) をみたすとき $\beta \in E(I)$ となるから $E(I)$ に含まれない $\mathbf{N}^n$ の元は高々有限個, すなわち (1) が成立する. □

上の条件がなりたつとき, 各 $\alpha, \beta \in S(I)$ に対して $x^{\alpha+\beta}$ の $\mathbf{G}$ に関する完全簡約操作の結果を $r(\alpha, \beta)$ とおけば, 積 $x^\alpha \cdot x^\beta := r(\alpha, \beta)$ によって $K(S(I))$ が R/I と同型な環になる. すなわち R/I の具体的な環構造を計算できる.

さらに K が代数閉体のときは系 1.1.31 の条件 (1), (2) は代数集合 $\{x = (x_1, \dots, x_n) \in K^n \mid f(x) = 0\,(\forall f \in I)\}$ が高々有限集合となることと同値であることもわかるが, 証明にはグレブナ基底の他に, 終結式 (resultant) の理論も必要となる ([CLO] 参照).

最後に計算例をあげる.

例 1.1.32. $n = 2$ として $x = x_1, y = x_2$ と書く.

$$f_1 := xy - 1, \quad f_2 := x^2 - y$$

とおき f_1, f_2 の生成する $K[x, y]$ のイデアルを I と書く. (K は標数 0 の体とする.)

(1) 全次数–辞書式順序では $\mathbf{G} = \{xy-1, x^2-y, y^2-x\}$ が I の極小グレブナ基底となり $E(\mathbf{G}) = \{(1,1),(2,0),(0,2)\}$ となって $\dim_K K[x,y]/I = 3$ を得る.

(2) 辞書式順序では $\mathbf{G} = \{x-y^2, y^3-1\}$ が I の極小グレブナ基底となり $E(\mathbf{G}) = \{(1,0),(3,0)\}$ でやはり $\dim_K K[x,y]/I = 3$ を得る.

問題 1. (1) 上の例の (1),(2) を手計算で確かめよ.

(2) 上の例で $K[x,y]/I$ の乗法の表を作れ. すなわち, 上の記号で, 各 $\alpha, \beta \in S(I)$ に対して $r(\alpha,\beta)$ を計算せよ.

例 1.1.33. $n=3$ として $x=x_1, y=x_2, z=x_3$ と書いて

$$f_1 := x^3-y^2, \quad f_2 := y^3-z^2, \quad f_3 := z^3-x^2$$

とおいて f_1, f_2, f_3 が $K[x,y,z]$ で生成するイデアル I のグレブナ基底を計算すると次のようになる (但し, K は標数 0 の体とする):

(1) 全次数–辞書式順序では, $\mathbf{G} := \{f_1, f_2, f_3\}$ 自身が極小グレブナ基底で

$$E(\mathbf{G}) = \{(3,0,0),(0,3,0),(0,0,3)\}.$$

(2) 辞書式順序では,

$$\mathbf{G} := \{x^2-z^3,\ xz^2-z^{13},\ y^2-z^{14},\ yz^2-z^9,\ z^{21}-z^2\}$$

が極小グレブナ基底で,

$$E(\mathbf{G}) = \{(2,0,0),(1,0,2),(0,2,0),(0,1,2),(0,0,21)\}$$

となる.

計算には数式処理システム risa/asir のグレブナ基底パッケージ (富士通研究所の野呂正行氏, 下山武司氏による) を用いた. このパッケージを load すると例えば

```
gr([F1,F2,F3],[x,y,z]);
```

により変数 x,y,z の多項式 $F1, F2, F3$ の (極小) グレブナ基底が (リストとして) 得られる. ここで項順序 $\prec$ は大域変数 `Ord` で制御され,

`Ord` $= 0$ (default) のときは全次数–逆辞書式順序;

`Ord` $= 1$ のときは全次数–辞書式順序;

`Ord` $= 2$ のときは辞書式順序

となる. ただし辞書式順序は変数リストの順番に従う. (詳しくは [Nor], [SN] を参照のこと.)

問題 2. (1) 例 1.1.33 の (1) を手計算で確かめよ.

(2) 例 1.1.33 の (2) から $\dim_K K[x,y,z]/I = 27$ を確かめよ.

(3) 例 1.1.33 の (1) を用いて, $K(S(I))$ の $K[x,y,z]/I$ と同型な環としての乗法表を作れ.

問題 3. $\mathbf{G}$ を R の有限部分集合とする. $f, g \in \mathbf{G}$ が $\mathrm{lexp}(f) \vee \mathrm{lexp}(g) = \mathrm{lexp}(f) + \mathrm{lexp}(g)$ をみたすとき, ある $a, b \in R$ が存在して

$$\mathrm{sp}(f,g) = af + bg$$

かつ

$$\mathrm{lexp}(af), \mathrm{lexp}(bg) \prec \mathrm{lexp}(f) \vee \mathrm{lexp}(g)$$

が成立することを示せ. またこれを用いて, アルゴリズム 1.1.21 において, このような $f, g \in \mathbf{G}$ については S-多項式とその簡約操作の計算は不要であることを示せ. (ヒント: $fg - gf = 0$ に注意せよ.)

1.2 多項式環上の加群のグレブナ基底

ここでは, 前節と同じく $R := K[x]$ を n 変数多項式環として, R 上の階数 r の有限生成自由加群 R^r の R-部分加群 N を扱おう. r 次元単位ベクトル $\vec{e}_i := (0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0)$ を用いると, R^r の任意の元 $\vec{f}$ は

$$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_r) = \sum_{i=1}^{r} f_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha} c_{\alpha i} x^{\alpha} \vec{e}_i \qquad (c_{\alpha i} \in K) \tag{2.1}$$

と書ける.

$\prec$ を $\mathbf{N}^n$ の一つの項順序として, 集合 $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ の順序 $\prec_r$ で次の性質を満たすものを考える ($\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{N}^n$, $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ とする):

(r-1) $(\alpha, i) \prec_r (\beta, i) \Longleftrightarrow \alpha \prec \beta$;

(r-2) $(\alpha, i) \prec_r (\beta, j)$ ならば, 任意の γ について $(\alpha + \gamma, i) \prec_r (\beta + \gamma, j)$.

例 1.2.1. (1) $\prec$ を任意の項順序として,

$$(\alpha, i) \prec_r (\beta, j) \quad \Longleftrightarrow \quad (i < j) \quad \text{or} \quad (i = j,\ \alpha \prec \beta)$$

(2) $\prec$ を全次数–辞書式順序として

$$\begin{aligned}(\alpha, i) \prec_r (\beta, j) \quad \Longleftrightarrow \quad & (|\alpha| < |\beta|) \\ \text{or} \quad & (|\alpha| = |\beta|,\ i < j) \\ \text{or} \quad & (|\alpha| = |\beta|,\ i = j,\ \alpha \prec \beta)\end{aligned}$$

問題 1. 例 1.2.1 の (1), (2) の $\prec_r$ が条件 (r-1),(r-2) を満たすことを示せ. また, 他の例を一つ挙げよ.

以下では, 条件 (r-1), (r-2) を満たす順序 $\prec_r$ を固定して, (2.1) の $\vec{f} \in R^r \setminus \{0\}$ に対して, その **leading exponent** を

$$\mathrm{lexp}(\vec{f}) := \max{}_{\prec_r}\{(\alpha, i) \mid c_{\alpha i} \neq 0\}$$

で定義し $(\alpha, i) := \mathrm{lexp}(\vec{f})$ とするとき, $\vec{f}$ の **leading point**, **leading term**, **leading coefficient** を

$$\mathrm{lp}(\vec{f}) := i, \quad \mathrm{lterm}(\vec{f}) := c_{\alpha i}x^{\alpha}, \quad \mathrm{lcoef}(\vec{f}) = c_{\alpha i}$$

で定義する. 以上の定義のもとで, 前節の R のイデアルの場合の議論がほとんど機械的に R^r の部分加群に対して拡張される. 以下では $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$ と $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して

$$(\alpha, i) \pm \beta = (\alpha \pm \beta, i), \quad (\alpha, i) \pm (\beta, i) = (\alpha \pm \beta, i), \quad (\alpha, i) \vee (\beta, i) = (\alpha \vee \beta, i)$$

などと書く.

補題 1.2.2. $\vec{f} \in R^r$ と $a \in R$ に対して ($\vec{f} \neq 0, a \neq 0$ とする)

$$\begin{aligned}
\mathrm{lexp}(a\vec{f}) &= \mathrm{lexp}(\vec{f}) + \mathrm{lexp}(a), \\
\mathrm{lcoef}(a\vec{f}) &= \mathrm{lcoef}(a)\mathrm{lcoef}(\vec{f}), \\
\mathrm{lterm}(a\vec{f}) &= \mathrm{lterm}(a)\mathrm{lterm}(\vec{f}).
\end{aligned}$$

補題 1.2.3. $\vec{f}, \vec{g} \in R^r$ に対して,

$$\mathrm{lexp}(\vec{f} + \vec{g}) \preceq_r \max{}_{\prec_r}\{\mathrm{lexp}(\vec{f}), \mathrm{lexp}(\vec{g})\}$$

が成立する.

問題 2. 補題 1.2.2 と 1.2.3 を証明せよ.

定義 1.2.4. $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ の部分集合 L が**モノイデアル**とは, 任意の $i \in \{1, \ldots, r\}$ に対して $L_i := \{\alpha \mid (\alpha, i) \in L\}$ が $\mathbf{N}^n$ のモノイデアルであること. また集合 $S \subset \mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ に対して

$$\mathrm{mono}(S) := \{(\alpha, i) + \beta = (\alpha + \beta, i) \mid (\alpha, i) \in S,\ \beta \in \mathbf{N}^n\}$$

で定義される集合を S の生成するモノイデアルと呼ぶ. 更に, $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ のある有限部分集合 S が存在して, $L = \mathrm{mono}(S)$ となっているとき, モノイデアル L は有限生成であるという.

Dickson の補題から $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ の任意のモノイデアルは有限生成である.

補題 1.2.5. 条件 (r-1), (r-2) をみたす $\prec_r$ は整列順序である.

証明: $(\alpha_1,\nu_1)\succ_r(\alpha_2,\nu_2)\succ_r(\alpha_3,\nu_3)\ldots$ とすると, 少なくとも一つの $i\in\{1,\ldots,r\}$ が存在して $\nu_k=i$ なる k が無限個ある. このような k を順に並べて $k_1,k_2,\ldots$ とすれば, (r-1) より $\alpha_{k_1}\succ\alpha_{k_2}\succ\ldots$ となり $\prec$ が整列順序であることに反する. □

一般に R^r の部分集合 S に対して $E(S):=\{\mathrm{lexp}(\vec{f})\mid\vec{f}\in S,\,\vec{f}\neq 0\}$ とおく. 次の補題は定義と補題 1.2.2 から明らかである:

補題 1.2.6. N を R^r の R-部分加群とすると, $E(N)$ は $\mathbf{N}^n\times\{1,\ldots,r\}$ のモノイデアルである.

定義 1.2.7. (グレブナ基底) N を R^r の R-部分加群とする. N の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が N の (順序 $\prec_r$ に関する) **グレブナ基底**とは, 次の 2 条件が成り立つこと:

(1) N は R 上 $\mathbf{G}$ で生成される;

(2) $E(N)=\mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$.

さらに, $E(\mathbf{G})$ が $E(N)$ を生成する最小の集合であるとき, $\mathbf{G}$ を極小グレブナ基底と呼ぶ.

$\mathbf{G}$ を R^r の有限部分集合, $\vec{f}\neq 0$ を R^r の任意の元とするとき, $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による簡約操作を次のアルゴリズムで定義しよう (但し $(\alpha,i)\geq(\beta,j)\Leftrightarrow(\alpha\geq\beta,\ i=j)$ とする):

アルゴリズム 1.2.8. (簡約操作)
Input: $\vec{f}\in R$ and a finite set $\mathbf{G}\subset R^r$;
while ($\vec{f}\neq 0$ and $\mathrm{lexp}(\vec{f})\in\mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$) {
    Choose $\vec{g}\in\mathbf{G}$ such that $\mathrm{lexp}(\vec{f})\geq\mathrm{lexp}(\vec{g})$;
    $\vec{f}:=\vec{f}-(\mathrm{lterm}(\vec{f})/\mathrm{lterm}(\vec{g}))\vec{g}$;
}
Output: $\vec{f}$;

命題 1.2.9. 上のアルゴリズムは停止して, その output $\vec{f}$ は $\vec{f}=0$ または $\mathrm{lexp}(\vec{f})\notin\mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ をみたす.

証明: $\mathrm{lexp}(\vec{f})\geq\mathrm{lexp}(\vec{g})$ のとき $\vec{f_1}:=\vec{f}-(\mathrm{lterm}(\vec{f})/\mathrm{lterm}(\vec{g}))\vec{g}$ とおけば (r-1), (r-2), 補題 1.2.2, 1.2.3 から $\mathrm{lexp}(\vec{f_1})\prec_r\mathrm{lexp}(\vec{f})$ が成立する. もし上のアルゴリズムが停止しないと仮定すると, R^r の元の列 $\vec{f},\vec{f_1},\vec{f_2},\ldots$ で $\mathrm{lexp}(\vec{f})\succ_r\mathrm{lexp}(\vec{f_1})\succ_r\mathrm{lexp}(\vec{f_2})\succ_r\ldots$ となるものが存在することになるが, これは $\prec_r$ が整列順序であることに反する. □

定義 1.2.10. 上のアルゴリズムの output を $\mathrm{red}(\vec{f},\mathbf{G})$ で表わし, $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による簡約と呼ぶ.

なお, $\vec{f}$ と $\mathbf{G}$ を上記のようにとるとき, $\vec{f}\neq 0$ かつ $\mathrm{lexp}(\vec{f})\in\mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ ならば $\vec{f}$ は $\mathbf{G}$ に関して可約, そうでなければ既約という.

命題 1.2.11. 任意の $\vec{f}\in R^r$ と R^r の任意の有限集合 $\mathbf{G}=\{\vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_s\}$ に対して, ある簡約操作により, $\vec{r}=\mathrm{red}(\vec{f},\mathbf{G})$ とすると,

(1) $\vec{f}-\vec{r}$ は $\mathbf{G}$ の生成する加群 N に含まれる;

(2) $\vec{r}=0$ または $\mathrm{lexp}(\vec{r}) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$;

(3) ある $q_1,\ldots,q_s \in R$ が存在して, $\vec{f}=\sum_{i=1}^{s} q_i\vec{g}_i+\vec{r}$ かつ各 i について $q_i=0$ または $\mathrm{lexp}(q_i\vec{g}_i) \preceq_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$ (従って $\vec{r}=0$ または $\mathrm{lexp}(\vec{r}) \preceq_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$).

証明: 命題 1.1.14 の証明とほとんど同じにできる. □

以下の命題も前節の対応する命題と同様に証明できる:

命題 1.2.12. N を R^r の R-部分加群, $\mathbf{G}$ を N の有限部分集合で $\mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))=E(N)$ をみたすものとすると, $\mathbf{G}$ は N のグレブナ基底である.

命題 1.2.13. N を R^r の R-部分加群とすると N のグレブナ基底は存在する.

命題 1.2.14. N, M が R^r の R-部分加群で, $N \subset M$ かつ $E(N)=E(M)$ とすると, $N=M$ である.

定義 1.2.15. (S-多項式) $\vec{f},\vec{g} \in R$ に対して, $\mathrm{lexp}(\vec{f})=(\alpha,i)$, $\mathrm{lexp}(\vec{g})=(\beta,j)$ とおいて, $\vec{f},\vec{g}$ の S-多項式 (ベクトル) $\mathrm{sp}(\vec{f},\vec{g})$ を, $i=j$ のとき

$$\mathrm{sp}(\vec{f},\vec{g})=\mathrm{lcoef}(g)x^{\alpha\vee\beta-\alpha}\vec{f}-\mathrm{lcoef}(f)x^{\alpha\vee\beta-\beta}\vec{g};$$

$i \neq j$ のとき $\mathrm{sp}(\vec{f},\vec{g})=0$ で定義する.

定義と補題 1.2.2 から $\mathrm{lp}(\vec{f})=\mathrm{lp}(\vec{g})$ のとき $\mathrm{lexp}(\mathrm{sp}(\vec{f},\vec{g})) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{f}) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g})$ が従う.

定理 1.2.16. $\mathbf{G}=\{\vec{g}_1,\ldots,\vec{g}_s\}$ を R の有限部分集合, N を $\mathbf{G}$ の生成する R^r の R-部分加群とするとき, 次の条件 (1)–(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は N のグレブナ基底;

(2) $\vec{f} \in N$ のとき $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による任意の簡約操作により $\mathrm{red}(\vec{f},\mathbf{G})=0$ となる.

(3) 任意の $\vec{g}_i,\vec{g}_j \in \mathbf{G}$ に対して, $\mathrm{lp}(\vec{g}_i)=\mathrm{lp}(\vec{g}_j)$ ならば, ある $q_{ij1},\ldots,q_{ijs} \in R$ が存在して

$$\mathrm{sp}(\vec{g}_i,\vec{g}_j)=q_{ij1}\vec{g}_1+\cdots+q_{ijs}\vec{g}_s$$

かつすべての $k=1,\ldots,s$ について, $q_{ijk}=0$ または $\mathrm{lexp}(q_{ijk}\vec{g}_k) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{g}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g}_j)$ が成立する.

証明: (1) ⇒ (2) と (2) ⇒ (3) は定理 1.1.20 の証明と同様.

(3) ⇒ (1) も定理 1.1.20 の証明と同様であるが, 念のため証明を与えておこう. まず $\mathrm{lcoef}(\vec{g}_k)=1$ $(k=1,\ldots,s)$ と仮定しておいても一般性を失わない. (3) を仮定すると, $i \neq j$ かつ $\mathrm{lp}(\vec{g}_i)=\mathrm{lp}(\vec{g}_j)$ なる $\{1,\ldots,s\}$ の各々の組 (i,j) に対して, 多項式 $q_{ij1},\ldots,q_{ijs}$ が存在して,

$$\mathrm{sp}(\vec{g}_i,\vec{g}_j)=\sum_{k=1}^{s} q_{ijk}\vec{g}_k, \tag{2.2}$$

かつ $q_{ijk} \neq 0$ ならば $\mathrm{lexp}(q_{ijk}\vec{g}_k) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{g}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g}_j)$ が成り立つ.

さて $\vec{f} \in N$ とする. このとき $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を示せばよい. そのためには, ある $q_1, \ldots, q_s \in R$ が存在して $f = \sum_{k=1}^s q_k g_k$ かつ各 k について $q_k = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \preceq_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$ とできることを示せば十分である. 実際このとき, ある k について $\mathrm{lexp}(\vec{f}) = \mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を得る.

上記の証明のため, $\vec{f}$ に対して

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^{s} q_k\vec{g}_k, \quad (q_1, \ldots, q_s \in R) \tag{2.3}$$

という形の表示の全体を考え, その中で, $\max_{\prec_r}\{\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \mid 1 \leq k \leq s,\, q_k \neq 0\}$ が順序 $\prec_r$ について最小になるものを一つとり, それを改めて (2.3) とみなすことにする. ($\vec{f} \in N$ よりこのような表示は少なくとも一つ存在し, また $\prec_r$ が整列順序であるから, 上の意味で最小な表示を一つ選べる.) このような最小性をもつ表示 (2.3) を一つ固定する.

$$(\alpha, i) = \max_{\prec_r}\{\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \mid 1 \leq k \leq s,\, q_k \neq 0\}$$

とおく. 上の注意により $(\alpha, i) = \mathrm{lexp}(\vec{f})$ ならば (1) が証明できたことになる.

そのため以下では $(\alpha, i) \neq \mathrm{lexp}(\vec{f})$ (従って $(\alpha, i) \succ_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$) と仮定しよう. $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s$ を並べ替えて, $1 \leq k \leq \ell$ のとき $\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) = (\alpha, i)$, $\ell < k \leq s$ のとき $\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \prec_r (\alpha, i)$ または $q_k = 0$ が成立するとしてよい. $q'_k := q_k - \mathrm{lterm}(q_k)$, $\mathrm{lterm}(q_k) = c_k x^{\beta^{(k)}}$, $(\alpha^{(k)}, i) = \mathrm{lexp}(\vec{g}_k)$ とおくと,

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k)\vec{g}_k + \sum_{k=1}^{\ell} q'_k\vec{g}_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} q_k\vec{g}_k. \tag{2.4}$$

ここでこの第一項を次のように変形する:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k)\vec{g}_k = \sum_{k=1}^{\ell} c_k x^{\beta^{(k)}}\vec{g}_k \\ = \;&\sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)(x^{\beta^{(k)}}\vec{g}_k - x^{\beta^{(k+1)}}\vec{g}_{k+1}) + (c_1 + \cdots + c_\ell)x^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell. \end{aligned} \tag{2.5}$$

ここで $1 \leq k \leq \ell$ のとき $\alpha^{(k)} + \beta^{(k)} = \alpha$ が成り立つことから, $\alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} \leq \alpha$ となり, $\gamma^{(k)} := \alpha - \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)}$ とおけば (2.2) と (2.5) から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k)\vec{g}_k &= \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}\mathrm{sp}(\vec{g}_k, \vec{g}_{k+1}) + (c_1 + \cdots + c_\ell)x^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}\sum_{\nu=1}^{s} q_{k,k+1,\nu}\vec{g}_\nu + (c_1 + \cdots + c_\ell)x^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell. \end{aligned} \tag{2.6}$$

$\gamma^{(k)} + \mathrm{lexp}(q_{k,k+1,\nu}g_\nu) \prec \gamma^{(k)} + \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} = \alpha$ だから, もし $c_1 + \cdots + c_\ell \neq 0$ ならば, (2.4) と (2.6) から $\mathrm{lexp}(\vec{f}) = (\alpha, i)$ となり, 仮定に反する. 従って $c_1 + \cdots + c_\ell = 0$ である. このことと (2.4), (2.6) から

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}\sum_{\nu=1}^{s} q_{k,k+1,\nu}\vec{g}_\nu + \sum_{k=1}^{\ell} q'_k\vec{g}_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} q_k\vec{g}_k$$

を得る．この右辺の各項の leading exponent は $\prec_r$ に関して (α, i) より小さいから，これは (2.3) の最小性に矛盾する．以上により (2.3) において $(\alpha, i) = \mathrm{lexp}(\vec{f})$ とできることが示された．□

この定理からイデアルの場合と同様に次のアルゴリズムと命題を得る:

アルゴリズム 1.2.17. (多項式環上の加群のグレブナ基底)
Input: a finite set $\mathbf{G} \subset R^r$;
while $(\exists(\vec{f}, \vec{g}) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ such that $\mathrm{lp}(\vec{f}) = \mathrm{lp}(\vec{g})$ and $\vec{r} := \mathrm{red}(\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g}), \mathbf{G}) \neq 0)$
　　$\mathbf{G} := \mathbf{G} \cup \{\vec{r}\}$;
Output: $\mathbf{G}$;

命題 1.2.18. 上のアルゴリズムは停止して，その output $\mathbf{G}$ は $\mathbf{G}$ の生成する R^r の R-部分加群 N のグレブナ基底である．

以下の命題や定理もイデアルの場合と同様に示される:

命題 1.2.19. R^r の元 $\vec{f}$ と R^r の部分加群 N が与えられたとする．N のグレブナ基底を $\mathbf{G}$ とするとき，次の 3 つの条件は同値である:

(1) $\vec{f} \in N$;

(2) 任意の簡約操作により $\mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G}) = 0$;

(3) ある簡約操作により $\mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G}) = 0$.

従って，勝手な簡約操作により $\vec{r} := \mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G})$ となったとき，$\vec{r} = 0$ ならば $\vec{f} \in N$; $\vec{f} \neq 0$ ならば $\vec{f} \notin N$ である．

定義 1.2.20. $\mathbf{G}$ を R^r の有限部分集合とする．R^r の元 $\vec{f} = \sum_{i=1}^r \sum_\alpha c_{\alpha i} x^\alpha \vec{e}_i$ が $\mathbf{G}$ に関して完全既約とは，$c_{\alpha i} \neq 0$ ならば $(\alpha, i) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ となることである．$\vec{f}$ が $\mathbf{G}$ に関して完全既約でないとき，

$$\begin{aligned} \mathrm{redlexp}(\vec{f}) &:= \max{}_{\prec_r}\{(\alpha, i) \mid c_{\alpha i} \neq 0,\ (\alpha, i) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))\}, \\ \mathrm{redlterm}(\vec{f}) &:= c_{\alpha i} x^\alpha \quad ((\alpha, i) := \mathrm{redlexp}(\vec{f})) \end{aligned}$$

とおく．

アルゴリズム 1.2.21. (完全簡約操作)
Input: $\vec{f} \in R^r$ and a finite set $\mathbf{G} \subset R^r$;
while ($\vec{f}$ is not completely irreducible with respect to $\mathbf{G}$){
　　Choose $\vec{g} \in \mathbf{G}$ such that $\mathrm{redlexp}(\vec{f}) \geq \mathrm{lexp}(\vec{g})$;
　　$\vec{f} := \vec{f} - (\mathrm{redlterm}(\vec{f})/\mathrm{lterm}(\vec{g}))\vec{g}$;
}
Output: $\vec{f}$;

命題 1.2.22. 上のアルゴリズムは停止して, その output $\vec{f}$ は $\mathbf{G}$ に関して完全既約である.

命題 1.2.23. $\mathbf{G}$ を R^r の部分加群のグレブナ基底, $\vec{f} \in R^r$ とするとき, $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による完全簡約操作の結果は (アルゴリズム中の $\vec{g}$ の選び方によらず) 一意的に定まる。

定理 1.2.24. N を R^r の R-部分加群として $S(N) := \mathbf{N}^n \times \{1, \dots, r\} \setminus E(N)$ とおくと, 剰余加群 R^r/N は K 上のベクトル空間として, 直和 $K(S(N)) := \bigoplus_{(\alpha,i)\in S(N)} Kx^\alpha \vec{e_i}$ に同型である.

最後にいわゆるシジジー (syzygy) に関する定理を証明しておこう.

定義 1.2.25. R^r の有限集合 $\mathbf{G} := \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s\}$ に対して, R^s の R-部分加群

$$S(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s) := \{(f_1, \dots, f_s) \in R^s \mid \sum_{k=1}^{s} f_k \vec{g}_k = 0\}$$

を $\mathbf{G}$ の (1 次) **シジジー加群**と呼ぶ.

定理 1.2.26. $\mathbf{G} = \{\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s\}$ を R^r の R-部分加群 N のグレブナ基底とする. $\mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)$ かつ $i \neq j$ をみたす $i, j \in \{1, \dots, s\}$ に対して,

$$\mathrm{sp}(\vec{g}_i, \vec{g}_j) = \sum_{k=1}^{s} q_{ijk} \vec{g}_k$$

かつ $\mathrm{lexp}(q_{ijk}\vec{g}_k) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{g}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g}_j)$ (または $q_{ijk} = 0$) をみたす $q_{ijk} \in R$ を任意にとる (cf. 定理 1.2.16). このとき $\mathrm{lexp}(\vec{g}_i) = (\alpha^{(i)}, \nu_i)$ として,

$$\begin{aligned} s_{ij} &:= \mathrm{lcoef}(\vec{g}_j) x^{\alpha^{(i)} \vee \alpha^{(j)} - \alpha^{(i)}}, \\ \vec{v}_{ij} &:= (0, \dots, \overset{(i)}{s_{ij}}, \dots, \overset{(j)}{-s_{ji}}, \dots, 0) - (q_{ij1}, \dots, q_{ijs}) \in R^s \end{aligned}$$

とおけば, シジジー加群 $S(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s)$ は R 上 $V := \{\vec{v}_{ij} \mid i < j,\ \mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)\}$ で生成される.

証明: $\vec{v}_{ij} \in S(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s)$ は定義から明らか. まず $a_i := \mathrm{lcoef}(\vec{g}_i)$ とおくとき $a_i = 1$ と仮定しても一般性を失わない. これは

$$(f_1, \dots, f_s) \in S(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s) \Longleftrightarrow (a_1 f_1, \dots, a_s f_s) \in S((1/a_1)\vec{g}_1, \dots, (1/a_s)\vec{g}_s)$$

と, $\vec{v}_{ij}$ の第 k 成分に a_k を掛けたものが $\{(1/a_1)\vec{g}_1, \dots, (1/a_s)\vec{g}_s\}$ に対する $\vec{v}_{ij}$ (の $1/a_i a_j$ 倍) になることから言える.

さて, $S(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s)$ が V で生成されないと仮定して矛盾を導こう. このとき, シジジー加群の元 $(f_1, \dots, f_s) \in S(\vec{g}_1, \dots, \vec{g}_s)$ で, V の (R-係数の) 一次結合で表わせないもののうち

$$(\alpha, i) := \max_{\prec_r} \{\mathrm{lexp}(f_k \vec{g}_k) \mid 1 \le k \le s,\ f_k \neq 0\}$$

が整列順序 $\prec_r$ に関して最小になるものを一つとる. 以下, $(f_1, \dots, f_s)$ はこの最小性をもつものとして, (α, i) を上のようにとる.

$\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s$ を並べ替えて, $1 \le k \le \ell$ のとき $\mathrm{lexp}(f_k\vec{g}_k) = (\alpha, i)$, $\ell < k \le s$ のとき $\mathrm{lexp}(f_k\vec{g}_k) \prec_r (\alpha, i)$ (または $f_k = 0$) が成立するとしてよい. $\mathrm{lterm}(f_k) = c_k x^{\beta^{(k)}}$, $f'_k := f_k - \mathrm{lterm}(f_k)$, $(\alpha^{(k)}, i) = \mathrm{lexp}(\vec{g}_k)$ $(1 \le k \le \ell)$ とおくと,

$$0 = \sum_{k=1}^{s} f_k\vec{g}_k = \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(f_k)\vec{g}_k + \sum_{k=1}^{\ell} f'_k\vec{g}_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} f_k g_k. \tag{2.7}$$

ここでこの第一項を次のように変形する:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(f_k)\vec{g}_k = \sum_{k=1}^{\ell} c_k x^{\beta^{(k)}}\vec{g}_k \\ = \ &\sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)(x^{\beta^{(k)}}\vec{g}_k - x^{\beta^{(k+1)}}\vec{g}_{k+1}) + (c_1 + \cdots + c_\ell)x^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell. \end{aligned} \tag{2.8}$$

$1 \le k \le \ell$ のとき $\alpha^{(k)} + \beta^{(k)} = \alpha$ が成り立つことから, $\alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} \le \alpha$ となり, $\gamma^{(k)} := \alpha - \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)}$ とおけば (2.7), (2.8) と仮定から

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(f_k)\vec{g}_k &= \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}\mathrm{sp}(\vec{g}_k, \vec{g}_{k+1}) + (c_1 + \cdots + c_\ell)x^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell \\ &= \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}\sum_{\nu=1}^{s} q_{k,k+1,\nu}\vec{g}_\nu + (c_1 + \cdots + c_\ell)x^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell. \end{aligned} \tag{2.9}$$

$\gamma^{(k)} + \mathrm{lexp}(q_{k,k+1,\nu}\vec{g}_\nu) \prec \gamma^{(k)} + \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} = \alpha$ だから, もし $c_1 + \cdots + c_\ell \ne 0$ ならば, $\mathrm{lexp}(\sum_{k=1}^{s} f_k\vec{g}_k) = (\alpha, i)$ となり, (2.7) に反する. 従って $c_1 + \cdots + c_\ell = 0$ であるから

$$0 = \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}\sum_{\nu=1}^{s} q_{k,k+1,\nu}\vec{g}_\nu + \sum_{k=1}^{\ell} f'_k\vec{g}_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} f_k\vec{g}_k$$

を得る. 従って

$$h_\nu := \begin{cases} \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}q_{k,k+1,\nu} + f'_\nu & (\nu = 1, \ldots, \ell) \\ \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}q_{k,k+1,\nu} + f_\nu & (\nu = \ell+1, \ldots, s) \end{cases}$$

とおくと

$$(h_1, \ldots, h_s) \in S(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s), \qquad \mathrm{lexp}(h_k\vec{g}_k) \prec_r (\alpha, i)$$

だから仮定により $(h_1, \ldots, h_s)$ は V の生成する加群に含まれる. 一方

$$\vec{w} = (w_1, \ldots, w_s) := \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}\vec{v}_{k,k+1}$$

とおくと $1 \le i, j \le \ell$ のとき $s_{ij} = x^{\alpha^{(i)} \vee \alpha^{(j)} - \alpha^{(i)}}$ だから $1 \le \nu \le \ell$ のとき

$$\begin{aligned} w_\nu &= (c_1 + \cdots + c_\nu)x^{\gamma^{(\nu)}}s_{\nu,\nu+1} - (c_1 + \cdots + c_{\nu-1})x^{\gamma^{(\nu-1)}}s_{\nu,\nu-1} \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)x^{\gamma^{(k)}}q_{k,k+1,\nu} \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= (c_1+\cdots+c_\nu)x^{\alpha-\alpha^{(\nu)}} - (c_1+\cdots+c_{\nu-1})x^{\alpha-\alpha^{(\nu)}}\\
&\quad -\sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1+\cdots+c_k)x^{\gamma^{(k)}}q_{k,k+1,\nu}\\
&= c_\nu x^{\beta^{(\nu)}} - \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1+\cdots+c_k)x^{\gamma^{(k)}}q_{k,k+1,\nu}\\
&= \mathrm{lterm}(f_\nu) - \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1+\cdots+c_k)x^{\gamma^{(k)}}q_{k,k+1,\nu}
\end{aligned}
$$

となり (ただし便宜上 $s_{1,0}=s_{\ell,\ell+1}=0$ とおいた), また $\ell<\nu\le s$ のときは

$$
w_\nu = -\sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1+\cdots+c_k)x^{\gamma^{(k)}}q_{k,k+1,\nu}
$$

となる. 従って

$$
\vec{w} = (f_1,\dots,f_s)-(h_1,\dots h_s)
$$

を得る. 以上により $\vec{w}$ と $(h_1,\dots,h_s)$ は共に V の一次結合で表わされる. 従って $(f_1,\dots,f_s)$ も V の一次結合で表わされることになるが, これは最初の仮定に反する. □

問題 3. (1) $x^3-y^2, y^3-z^2, z^3-x^2\in K[x,y,z]$ のシジジー加群の生成元を求めよ. ただし, K は標数 0 の体とする.

(2) $xy-1, x^2-y, y^2-x\in K[x,y]$ のシジジー加群の生成元を求めよ. ただし, K は標数 0 の体とする.

問題 4. 前問の (1),(2) においてシジジー加群の適当な順序によるグレブナ基底を計算せよ.

問題 5. $\mathbf{G}$ を R^r の有限部分集合とする. $\vec{f},\vec{g},\vec{h}\in\mathbf{G}$ が $\mathrm{lp}(\vec{f})=\mathrm{lp}(\vec{g})=\mathrm{lp}(\vec{h})$ および

$$
\mathrm{lexp}(\vec{f})\vee\mathrm{lexp}(\vec{h})\ge\mathrm{lexp}(\vec{g})
$$

をみたし, かつある簡約操作により

$$
\mathrm{red}(\mathrm{sp}(\vec{f},\vec{g}),\mathbf{G})=\mathrm{red}(\mathrm{sp}(\vec{g},\vec{h}),\mathbf{G})=0
$$

となったとすると, ある簡約操作によって $\mathrm{red}(\mathrm{sp}(\vec{f},\vec{h}),\mathbf{G})=0$ とできることを示せ. 従ってアルゴリズム 1.2.17 において, 上記の性質が既に確かめられているときは $\mathrm{red}(\mathrm{sp}(\vec{f},\vec{h}),\mathbf{G})$ の計算は不要である.

第2章　巾級数環のグレブナ基底

2.1　理論的方法

巾級数環に対しても多項式環の場合と同様にグレブナ基底の理論が構成でき, 多項式から生成されるイデアルに対しては, グレブナ基底が実際に計算できることを示すのがこの章の目標である. 考察の範囲を巾級数にまで広げる理由は, 一つにはもちろん, 解析の立場からすると多項式は関数として特殊過ぎるからであるが, もう一つの重要な理由は, たとえ多項式から生成されるイデアル (の定める代数多様体) を扱う場合でも, 幾何学的あるいは局所的な性質を調べるためには, 多項式を巾級数としてとらえた方が自然であるからである. すなわち巾級数環のグレブナ基底は, 多項式環のグレブナ基底のある意味の局所化と考えることができる.

さて K を体, n を 1 以上の自然数として, 不定元 $x = (x_1,\ldots,x_n)$ についての形式巾級数環 $K[[x]] = K[[x_1,\ldots,x_n]]$, 及び K が複素数体 $\mathbf{C}$ の部分体のときは, 収束巾級数環 $K\{x\} = K\{x_1,\ldots,x_n\}$ を考察する (以下の議論では K の完備性は必要ない).

以下 $R := K[[x]]$ または $R := K\{x\}$ とおこう. 従って, R の元 f は無限和 $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ $(c_\alpha \in K)$ で表わされる.

以下正の実数 $\delta_1,\ldots,\delta_n$ を固定して $\delta = (\delta_1,\ldots,\delta_n)$ とおき, 指数 $\alpha = (\alpha_1,\ldots,\alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ に対して

$$\delta(\alpha) = \sum_{i=1}^{n} \delta_i \alpha_i$$

と書くことにする. δ を**重み** (weight) と呼ぶ. この節では $\mathbf{N}^n$ における全順序 $\prec_\delta$ を次で定義する. ただし $\prec_L$ は辞書式順序とする (あるいは逆辞書式順序でもよい).

定義 2.1.1. $\quad \alpha \prec_\delta \beta \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(\alpha) > \delta(\beta) \quad \text{or} \quad (\delta(\alpha) = \delta(\beta),\ \alpha \prec_L \beta)$

このとき $\prec_\delta$ の大小関係を逆にした順序は項順序である. 従って $\mathbf{N}^n$ の任意の部分集合は $\prec_\delta$ に関して最大元を持つ. $\delta = (1,\ldots,1)$ の場合が最も多く用いられる. 全順序 $\prec_\delta$ が整列順序でないため, 多項式環の場合の議論はそのままでは適用できない. 特に問題となるのは, 簡約操作が有限回で終了しないことである. たとえば一変数の場合で x を $g := x - x^2$ で多項式環のときと同様に簡約すると (ただし順序は逆になる)

$$x \underset{g}{\longrightarrow} x^2 \underset{g}{\longrightarrow} x^3 \underset{g}{\longrightarrow} \cdots$$

となり終了しない. これを解決するために, ある意味で超越的な割算操作 (Weierstrass-広中の割算定理) を用いる.

定義 2.1.2. $f=\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in R\setminus\{0\}$ に対して, 集合 $\{\alpha \mid c_\alpha \neq 0\}$ の全順序 $\prec_\delta$ に関する最大元を β とするとき,

$$\mathrm{lexp}(f) := \beta, \quad \mathrm{lcoef}(f) := c_\beta, \quad \mathrm{lterm}(f) := c_\beta x^\beta$$

で f の **leading exponent**, **leading coefficient**, **leading term** を定義する.

次の 2 つの補題は 1 章の多項式環の場合と同様に示される:

補題 2.1.3. $f, g \in R$ に対して,

$$\begin{aligned} \mathrm{lexp}(fg) &= \mathrm{lexp}(f) + \mathrm{lexp}(g), \\ \mathrm{lcoef}(fg) &= \mathrm{lcoef}(f)\mathrm{lcoef}(g), \\ \mathrm{lterm}(fg) &= \mathrm{lterm}(f)\mathrm{lterm}(g). \end{aligned}$$

補題 2.1.4. $f, g \in R$ に対して, $\mathrm{lexp}(f+g) \preceq_\delta \max_{\prec_\delta}\{\mathrm{lexp}(f), \mathrm{lexp}(g)\}$ が成立する. ($\max_{\prec_\delta}$ は $\prec_\delta$ に関する最大元を表わす.)

一般に巾級数環 R の部分集合 S に対して $E(S) := \{\mathrm{lexp}(f) \mid f \in S, f \neq 0\}$ とおく.

補題 2.1.5. I を R のイデアルとすると, $E(I)$ は $\mathbf{N}^n$ のモノイデアルである.

証明: f を I の任意の元, β を任意の指数とする. $x^\beta f \in I$ より $\mathrm{lexp}(x^\beta f) = \mathrm{lexp}(f) + \beta \in E(I)$, すなわち $E(I)$ はモノイデアルである. □

定義 2.1.6. (グレブナ基底) I を巾級数環 R のイデアルとする. I の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が I の (順序 $\prec_\delta$ に関する) **グレブナ基底**または**標準基底** (standard basis) とは, 次の 2 条件が成り立つこと:

(1) I は $\mathbf{G}$ で生成されるイデアル;

(2) $E(I) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$.

さらに, $E(\mathbf{G})$ が $E(I)$ を生成する最小の集合 (cf. 補題 1.1.8) であるとき, $\mathbf{G}$ を**極小グレブナ基底**または極小標準基底と呼ぶ.

次に, 多項式に対する完全簡約操作にあたる操作を定義しよう.

定義 2.1.7. $f=\sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in R$ に対して $\mathrm{exps}(f) := \{\alpha \mid c_\alpha \neq 0\}$ とおく.

補題 2.1.8. $\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s)} \in \mathbf{N}^n$ と $f \in R$ に対して,

$$f = \sum_{i=1}^{s} q_i x^{\alpha^{(i)}} + r, \qquad \mathrm{exps}(r) \cap \mathrm{mono}(\{\alpha^{(1)}, \ldots, \alpha^{(s)}\}) = \emptyset$$

かつ各 i に対して, $q_i = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_i) + \alpha^{(i)} \preceq_\delta \mathrm{lexp}(f)$ がなりたつような $q_i \in R$ と $r \in R$ が存在する.

証明: $\mathbf{N}^n$ の部分集合 $L_1, \dots, L_s, L_0$ を

$$\begin{aligned} L_1 &:= \{\alpha \in \mathbf{N}^n \mid \alpha \geq \alpha^{(1)}\}, \quad L_i := \{\alpha \in \mathbf{N}^n \mid \alpha \geq \alpha^{(i)}\} \setminus \bigcup_{j=1}^{i-1} L_j \quad (2 \leq i \leq s), \\ L_0 &:= \mathbf{N}^n \setminus \bigcup_{j=1}^{s} L_j \end{aligned}$$

で定義して

$$q_i := \sum_{\alpha \in L_i} c_\alpha x^{\alpha - \alpha^{(i)}} \quad (1 \leq i \leq s), \qquad r := \sum_{\alpha \in L_0} c_\alpha x^\alpha$$

とすればよい. □

定理 2.1.9. (Weierstrass-広中の割算定理) $\mathbf{G} := \{g_1, \dots, g_s\} \subset R \setminus \{0\}$ とする. 任意の $0 \neq f \in R$ に対して

$$f = \sum_{i=1}^{s} q_i g_i + r, \qquad \mathrm{exps}(r) \cap \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = \emptyset$$

かつ各 i に対して $q_i = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_i g_i) \preceq_\delta \mathrm{lexp}(f)$ がなりたつような $q_i \in R$ と $r \in R$ が存在する. (このような r は必ずしも一意的ではないが, 上記の性質をみたす r を $\mathrm{red}(f, \mathbf{G})$ と書き, f の $\mathbf{G}$ による **WH-簡約**と呼ぶことにする.)

証明: (1) まず, R が形式巾級数環の場合に証明しよう. 以下では便宜上任意の指数 α に対して $\mathrm{lexp}(0) \prec_\delta \alpha$ とみなすことにする (実際には $\mathrm{lexp}(0)$ は定義されていない). 条件を満たす q_i と r を逐次近似法で構成しよう. $\mathrm{lterm}(g_i) = x^{\alpha^{(i)}}$ (従って $\mathrm{lcoef}(g_i) = 1$) としても一般性を失わない. $g'_i := g_i - \mathrm{lterm}(g_i)$ とおく. まず補題 2.1.8 により

$$f = \sum_{i=1}^{s} q_i^{(0)} \mathrm{lterm}(g_i) + r_0, \qquad \mathrm{exps}(r_0) \cap \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = \emptyset \tag{1.1}$$

かつ $\mathrm{lexp}(q_i^{(0)}) + \alpha^{(i)} \preceq_\delta \mathrm{lexp}(f)$ をみたす $q_i^{(0)}, r_0 \in R$ がとれる. さらに $k \geq 1$ に対して

$$-\sum_{i=1}^{s} q_i^{(k-1)} g'_i = \sum_{i=1}^{s} q_i^{(k)} \mathrm{lterm}(g_i) + r_k, \qquad \mathrm{exps}(r_k) \cap \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = \emptyset \tag{1.2}$$

かつ $\mathrm{lexp}(q_i^{(k)} g_i) \preceq_\delta \max_{\prec_\delta}\{\mathrm{lexp}(q_j^{(k-1)} g'_j) \mid 1 \leq j \leq s\}$ をみたす $q_i^{(k)}, r_k \in R$ を帰納的にとれる.

$$\beta^{(k)} := \max{}_{\prec_\delta}\{\mathrm{lexp}(r_k), \mathrm{lexp}(q_1^{(k)}) + \alpha^{(1)}, \dots, \mathrm{lexp}(q_s^{(k)}) + \alpha^{(s)}\}$$

とおく. このとき $\mathrm{lexp}(f) = \beta^{(0)} \succ_\delta \beta^{(1)} \succ_\delta \beta^{(2)} \succ_\delta \dots$ がなりたつ. 実際 (1.2) から $k \geq 1$ のとき

$$\begin{aligned} \beta^{(k)} &\preceq_\delta \max{}_{\prec_\delta}\{\mathrm{lexp}(q_j^{(k-1)} g'_j) \mid j = 1, \dots, s\} \\ &\prec_\delta \max{}_{\prec_\delta}\{\mathrm{lexp}(q_j^{(k-1)} g_j) \mid j = 1, \dots, s\} \preceq_\delta \beta^{(k-1)} \end{aligned}$$

を得る. 特に $\delta(\beta^{(0)}) \leq \delta(\beta^{(1)}) \leq \delta(\beta^{(2)}) \leq \dots$ となるが, $\delta(\alpha) = c$ なる α は高々有限個しかないから $\lim_{k\to\infty} \delta(\beta^{(k)}) = \infty$ を得る. $\delta_0 := \max\{\delta_1, \dots, \delta_n\}$ とおくと $|\alpha| \geq (1/\delta_0)\delta(\alpha)$ であるから, 結局 $\lim_{k\to\infty} |\beta^{(k)}| = \infty$ が成立する.

さて (1.1) および (1.2) で k を $0,1,\ldots,k-1$ とした式を加えて

$$\begin{aligned} f &= \sum_{i=1}^{s} q_i^{(0)} x^{\alpha^{(i)}} + r_0 + \sum_{j=0}^{k-1}\sum_{i=1}^{s} q_i^{(j)} g_i' + \sum_{j=1}^{k}\sum_{i=1}^{s} q_i^{(j)} x^{\alpha^{(i)}} + \sum_{j=1}^{k} r_j \\ &= \sum_{i=1}^{s}\sum_{j=0}^{k-1} q_i^{(j)} g_i + \sum_{i=1}^{s} q_i^{(k)} x^{\alpha^{(i)}} + \sum_{j=0}^{k} r_j \end{aligned}$$

を得るが, 上記のことから, 右辺で $k \to \infty$ としたものは形式巾級数環の元として収束して

$$f = \sum_{i=1}^{s}(\sum_{k=0}^{\infty} q_i^{(k)}) g_i + \sum_{k=0}^{\infty} r_k$$

となる. 従って $q_i := \sum_{k=0}^{\infty} q_i^{(k)}$, $r = \sum_{k=0}^{\infty} r_k$ とおけばよい. 上の議論から $\mathrm{lexp}(q_i g_i) \preceq_\delta \beta^{(0)} = \mathrm{lexp}(f)$ もわかる.

(2) $R = K\{x\}$ $(K \subset \mathbf{C})$ の場合: $\rho > 0$ として $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha$ に対してノルムを

$$\|f\| := \sum_\alpha |c_\alpha| \rho^{\delta(\alpha)}$$

で定義する. $\|f\| < \infty$ は f が $|x_i| \le \rho^{\delta_i}$ で絶対収束することと同値である.

以下では $\delta(\mathrm{lexp}(g_i')) < \delta(\mathrm{lexp}(g_i))$ を仮定する. 実際, もしそうでなければ十分小さな ε_k を適当に選んで δ を $(\delta_1+\varepsilon_1,\ldots,\delta_n+\varepsilon_n)$ で置き換えれば, $\mathrm{lterm}(g_i)$ と $\mathrm{lterm}(q_i g_i)$ を変えることなく, 上の要請を満たすことができる.

さて $d_i := \delta(\alpha^{(i)})$ とおいて, $\|f\| < \infty$ となるような $\rho > 0$ をとると, 補題2.1.8(の証明)において

$$\|q_i\|\rho^{d_i} = \sum_{\alpha \in L_i} |c_\alpha| \rho^{\delta(\alpha)} \le \|f\|$$

を得る. $d_i' := \delta(\mathrm{lexp}(g_i'))$ とおくと, $\|g_i'\| \le C_i \rho^{d_i'}$ が十分小さな任意の $\rho > 0$ について成立するような $C_i \ge 0$ がとれる. $C := \max\{C_i \mid i = 1,\ldots,s\}$ とする. また, $\varepsilon := \min\{d_i' - d_i\}$ とおくと, 上の仮定から $\varepsilon > 0$ である.

以上のことを用いて $q_i^{(k)}$ のノルムを評価しよう. まず (1.1) において

$$\|q_i^{(0)}\|\rho^{d_i} \le \|f\| \quad (i = 1,\ldots,s)$$

が成り立つ. $\|q_i^{(k-1)}\|\rho^{d_i} \le (Cs\rho^\varepsilon)^{k-1}\|f\|$ $(i = 1,\ldots,s)$ と仮定すると (1.2) から

$$\begin{aligned} \|q_i^{(k)}\|\rho^{d_i} &\le \sum_{j=1}^{s} \|q_j^{(k-1)}\| \cdot \|g_j'\| \\ &\le \sum_{j=1}^{s} (Cs\rho^\varepsilon)^{k-1}\|f\|\rho^{-d_j} C \rho^{d_j'} \\ &\le (Cs\rho^\varepsilon)^k \|f\| \end{aligned}$$

を得る. 従って $\rho > 0$ を十分小さくとって, $Cs\rho^\varepsilon < 1/2$ とすれば

$$\|q_i^{(k)}\| \le 2^{-k}\rho^{-d_i}\|f\| \quad (i = 1,\ldots,s, k = 0,1,\ldots)$$

が成立する. 故にすべての $i=1,\ldots,s$ について

$$\|q_i\| \le \sum_{k=0}^{\infty} \|q_i^{(k)}\| \le 2\rho^{-d_i}\|f\| < \infty$$

であるから q_i は収束巾級数である. 従って $r = f - \sum_{i=1}^{s} q_i g_i$ も収束巾級数である. □

定理 2.1.9 は古典的な Weierstrass の予備定理を特殊な場合として含むことを注意しておこう. $R = \mathbf{C}\{x\}$ として $g \in R$ に $x_2 = \ldots = x_n = 0$ を代入したとき

$$g(x_1, 0, \ldots, 0) = \sum_{j=m}^{\infty} c_j {x_1}^j \quad (c_m \ne 0)$$

であったとする. このとき $\delta = (1/2m, 1, \ldots, 1)$ とおけば $\mathrm{lexp}(g) = (m, 0, \ldots, 0)$ となるから, 定理 2.1.9 によって, 任意の $f \in R$ に対して,

$$f = qg + r, \qquad r = \sum_{j=0}^{m-1} r_j(x_2, \ldots, x_n){x_1}^j \qquad (r_j \in \mathbf{C}\{x_2, \ldots, x_n\})$$

と書けるような $q, r \in R$ が存在することがわかる. これが Weierstrass の予備定理, または Späth 型割算定理に他ならない.

問題 1. $\mathbf{G}$ が 1 個の元からなるとき, 任意の $f \in R$ に対して f の $\mathbf{G}$ による WH-簡約は一意的であることを証明せよ.

問題 2. $R = \mathbf{C}\{x, y\}$, $\delta = (1, 1)$ とする. $\mathbf{G} = \{xy - y^2 - x^2y\}$, $f = xy$ のとき f の $\mathbf{G}$ による WH-簡約を計算せよ.

命題 2.1.10. I を R のイデアル, $\mathbf{G}$ を I の有限部分集合で $\mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$ をみたすものとすると, $\mathbf{G}$ は I のグレブナ基底である.

証明: $\mathbf{G}$ が I を生成することを示せばよい. $\mathbf{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ とおく. f を I の任意の元として, ある WH-簡約により $r := \mathrm{red}(f, \mathbf{G})$ とする. $r \ne 0$ ならば定理 2.1.9 より $\mathrm{lexp}(r) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$ であるが, これは $r \in I$ に矛盾する. 従って $r = 0$ となり, ある $q_1, \ldots, q_s \in R$ が存在して $f = \sum_{j=1}^{s} q_s g_s$ となる. 故に I は $\mathbf{G}$ で生成される. □

命題 2.1.11. I を R のイデアルとすると I のグレブナ基底は存在する.

証明: Dickson の補題により, モノイデアル $E(I)$ は $\mathbf{N}^n$ のある有限集合 S により生成される. S の各元 α に対して $\mathrm{lexp}(f) = \alpha$ なる $f \in I$ が存在するから, I の有限部分集合 $\mathbf{G}$ で $\{\mathrm{lexp}(f) \mid f \in \mathbf{G}\} = S$ を満たすものが存在する. このとき $\mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = \mathrm{mono}(S) = E(I)$ であるから, 上の命題によって $\mathbf{G}$ は I のグレブナ基底である. □

系 2.1.12. 巾級数環 R はネター環である. すなわち, R の任意のイデアルは有限生成である.

命題 2.1.13. I, J が R のイデアルで, $I \subset J$ かつ $E(I) = E(J)$ とすると, $I = J$ である.

証明: $\mathbf{G}$ を I のグレブナ基底とすると, 仮定と命題 2.1.10 により $\mathbf{G}$ は J のグレブナ基底でもある. 従って $I = J$ を得る. □

定義 2.1.14. (S-級数) $f, g \in R$ に対して,

$$\alpha := (\mathrm{lexp}(f) \vee \mathrm{lexp}(g)) - \mathrm{lexp}(f), \quad \beta := (\mathrm{lexp}(f) \vee \mathrm{lexp}(g)) - \mathrm{lexp}(g)$$

とおいて, f と g の **S-級数** (S-series) $\mathrm{sp}(f, g)$ を

$$\mathrm{sp}(f, g) = \mathrm{lcoef}(g) x^{\alpha} f - \mathrm{lcoef}(f) x^{\beta} g$$

で定義する.

定義から $\mathrm{lexp}(\mathrm{sp}(f, g)) \prec_{\delta} \mathrm{lexp}(f) \vee \mathrm{lexp}(g)$ が従う.

定理 2.1.15. $\mathbf{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ を R の有限部分集合, I を $\mathbf{G}$ の生成する R のイデアルとするとき, 次の条件 (1),(2),(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は I のグレブナ基底;

(2) $f \in I$ のとき f の $\mathbf{G}$ による任意の WH-簡約により $\mathrm{red}(f, \mathbf{G}) = 0$ となる;

(3) 任意の $g_i, g_j \in \mathbf{G}$ に対して, ある $q_{ij1}, \ldots, q_{ijs} \in R$ が存在して

$$\mathrm{sp}(g_i, g_j) = q_{ij1} g_1 + \cdots + q_{ijs} g_s$$

かつすべての $k = 1, \ldots, s$ について, $q_{ijk} = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_{ijk} g_k) \prec_{\delta} \mathrm{lexp}(g_i) \vee \mathrm{lexp}(g_j)$ が成立する.

証明: (1) $\Rightarrow$ (2): $f \in I$ より $r := \mathrm{red}(f, \mathbf{G}) \in I$ であるが, $r \neq 0$ ならば $\mathrm{lexp}(r) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$ となり矛盾であるから $r = 0$.

(2) $\Rightarrow$ (3): $\mathrm{sp}(g_i, g_j) \in I$ から明らか.

(3) $\Rightarrow$ (1): $\mathbf{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ とする. ここで $\mathrm{lcoef}(g_k) = 1$ $(k = 1, \ldots, s)$ と仮定しておいても一般性を失わない. (3) を仮定すると, $i \neq j$ なる $\{1, \ldots, s\}$ の各々の組 (i, j) に対して, $q_{ij1}, \ldots, q_{ijs} \in R$ が存在して,

$$\mathrm{sp}(g_i, g_j) = \sum_{k=1}^{s} q_{ijk} g_k, \tag{1.3}$$

かつ $q_{ijk} \neq 0$ ならば $\mathrm{lexp}(q_{ijk} g_k) \prec_{\delta} \mathrm{lexp}(g_i) \vee \mathrm{lexp}(g_j)$ が成り立つ.

さて $f \in I$ とする. このとき $\mathrm{lexp}(f) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を示せばよい. そのためには, ある $q_1, \ldots, q_s \in R$ が存在して $f = \sum_{k=1}^{s} q_k g_k$ かつ各 k について $q_k = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_k g_k) \preceq_{\delta} \mathrm{lexp}(f)$ とできることを示せば十分である. 実際このとき, ある k について $\mathrm{lexp}(f) = \mathrm{lexp}(q_k g_k) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を得る.

上記の証明のため, f に対して

$$f = \sum_{k=1}^{s} q_k g_k, \quad (q_1, \ldots, q_s \in R) \tag{1.4}$$

という形の表示の全体を考え, その中で, $\max_{\prec_\delta}\{\mathrm{lexp}(q_kg_k) \mid 1 \le k \le s,\, q_k \ne 0\}$ が順序 $\prec_\delta$ について最小になるものを一つとり, それを改めて (1.4) とみなすことにする. 実際 $f \in I$ よりこのような表示は少なくとも一つ存在し, また補題 2.1.4 から

$$\mathrm{lexp}(f) \preceq_\delta \max_{\prec_\delta}\{\mathrm{lexp}(q_kg_k) \mid 1 \le k \le s,\, q_k \ne 0\}$$

であるから, この右辺は $\mathbf{N}^n$ の有限集合を動く. (一般に $\alpha \preceq_\delta \beta$ のとき $\delta(\alpha) \ge \delta(\beta)$ であるから, α を固定するとき $\{\beta \in \mathbf{N}^n \mid \beta \succeq_\delta \alpha\}$ は有限集合である.) 従って上記の意味で最小な表示を一つ選べる. そこで, このような最小性をもつ表示 (1.4) を一つ固定して

$$\alpha := \max_{\prec_\delta}\{\mathrm{lexp}(q_kg_k) \mid 1 \le k \le s,\, q_k \ne 0\}$$

とおく. すると定理 1.1.20 の証明と全く同じ式変形によって, $\alpha = \mathrm{lexp}(f)$ でなければならないことがわかる. 従って $\mathrm{lexp}(f) = \alpha \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ である. □

命題 2.1.16. $\mathbf{G}$ を R のイデアルのグレブナ基底とすると, 任意の $f \in R$ の $\mathbf{G}$ による WH-簡約操作の結果は ($\mathbf{G}$ の元の並べ方によらず) 一意的に定まる。

証明: f の $\mathbf{G}$ による２つの WH-簡約操作の結果を r_1,r_2 とする. $\mathbf{G}$ の生成するイデアルを I とおこう. $\mathrm{exps}(r_1 - r_2) \subset \mathrm{exps}(r_1) \cup \mathrm{exps}(r_2)$ より, $\mathrm{exps}(r_1 - r_2) \cap \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = \emptyset$ となる. 一方 $r_1 - r_2 \in I$ であるから $r_1 - r_2 \ne 0$ ならば $\mathrm{lexp}(r_1 - r_2) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(I)$ であるが, $\mathrm{lexp}(r_1 - r_2) \in \mathrm{exps}(r_1 - r_2)$ であるから, これは矛盾である. □

定理 2.1.17. I を R のイデアルとして $S(I) := \mathbf{N}^n \setminus E(I)$ とおくと, 剰余環 R/I は K 上のベクトル空間として, $R_{S(I)} := \{f \in R \mid \mathrm{exps}(f) \subset S(I)\}$ に同型である.

証明: K-線型写像 $\varphi : R_{S(I)} \longrightarrow R/I$ を $f = \sum_{\alpha \in S(I)} c_\alpha x^\alpha$ に対して f の R/I での剰余類 $[f]$ を対応させる写像として定義する. (K-線型であることは明らか.) $\mathbf{G}$ を I のグレブナ基底とする.

(1) φ が単射であること: $\varphi(f) = 0$ とすると $f \in I$. ところが $f \ne 0$ とすると $\mathrm{exps}(f) \cap E(I) = \emptyset$ であるから $\mathrm{lexp}(f) \notin E(I)$. これは矛盾だから $f = 0$ である.

(2) φ が全射であること: $f \in R$ に対して f の $\mathbf{G}$ による WH-簡約操作の結果を r とする. このとき $f - r \in I$ かつ $r \in R_{S(I)}$ であるから $\varphi(r) = [r] = [f]$ となる. □

系 2.1.18. I を R のイデアル, $\mathbf{G}$ を I のグレブナ基底とするとき次の条件は同値 ($\dim_K$ は K 上のベクトル空間の次元, $\sharp$ は集合の元の個数を表わす):

(1) $\dim_K(R/I) = \sharp S(I) < \infty$;

(2) 各 $i = 1, \ldots, n$ に対してある $\alpha_i \in \mathbf{N}$ が存在して, $(0, \ldots, \overset{(i)}{\alpha_i}, \ldots, 0) \in E(\mathbf{G})$.

この証明は系 1.1.31 の証明と同様である. R/I が K 上無限次元のときも, ある意味でその大きさをはかるものとして Hilbert 多項式がある. グレブナ基底から Hilbert 多項式を計算でき, それによって I により定まる解析的集合の (局所的な) 次元と重複度がわかる. このへんの話題に触れるには少し準備が必要なのでここでは立ち入らない.

さて, あとで必要になるので多項式環のグレブナ基底との関連について述べておく.

定義 2.1.19. $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \in R$ に対して $d := \min\{\delta(\alpha) \mid c_\alpha \neq 0\}$ とおき, δ に関する f の **initial part** を

$$\mathrm{in}(f) := \sum_{\delta(\alpha)=d} c_\alpha x^\alpha \in K[x]$$

で定義する. また f が d 次 δ-**斉次**とは $c_\alpha \neq 0$ ならば, $\delta(\alpha) = d$ であることとする. 更に R のイデアル I に対して $\{\mathrm{in}(f) \mid f \in I\}$ の生成する $K[x]$ のイデアルを $\mathrm{in}(I)$ とおく.

命題 2.1.20. 項順序 $\prec'_\delta$ を

$$\alpha \prec'_\delta \beta \iff \delta(\alpha) < \delta(\beta) \quad \text{or} \quad (\delta(\alpha) = \delta(\beta),\, \alpha \prec_L \beta)$$

で定義しよう. I を R のイデアル, $\mathbf{G} = \{g_1, \ldots, g_s\}$ を順序 $\prec_\delta$ に関する I のグレブナ基底とすると, $\mathrm{in}(\mathbf{G}) := \{\mathrm{in}(g_1), \ldots, \mathrm{in}(g_s)\}$ は $K[x]$ のイデアル $\mathrm{in}(I)$ の順序 $\prec'_\delta$ に関するグレブナ基底である.

証明: (1) まず $\mathrm{in}(\mathbf{G})$ がグレブナ基底であることを示す. 定理 2.1.15 により, 任意の $g_i, g_j \in \mathbf{G}$ に対して, ある $q_{ij1}, \ldots, q_{ijs} \in R$ が存在して

$$\mathrm{sp}(g_i, g_j) = q_{ij1}g_1 + \cdots + q_{ijs}g_s \tag{1.5}$$

かつすべての $k = 1, \ldots, s$ について, $q_{ijk} = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_{ijk}g_k) \prec_\delta \mathrm{lexp}(g_i) \vee \mathrm{lexp}(g_j)$ が成立する. $\alpha^{(i,j)} := \mathrm{lexp}(g_i) \vee \mathrm{lexp}(g_j) - \mathrm{lexp}(g_i)$ とおいて,

$$s_{ij} := \mathrm{lcoef}(g_j)x^{\alpha^{(i,j)}}, \qquad d_{ij} := \delta(\mathrm{lexp}(g_i) \vee \mathrm{lexp}(g_j))$$

と定義して (1.5) の両辺で, $|\alpha| = d_j$ なる α についての和をとると

$$s_{ij}\mathrm{in}(g_i) - s_{ji}\mathrm{in}(g_j) = \sum_{k \in L(d_{ij})} \mathrm{in}(q_{ijk})\mathrm{in}(g_k), \tag{1.6}$$

但し $L(d_{ij}) := \{k \in \{1, \ldots, s\} \mid \delta(\mathrm{lexp}(q_{ijk}g_k)) = d_{ij}\}$, を得る. $h \in R$ のとき, $\mathrm{in}(h)$ の順序 $\prec_\delta$ に関する leading term と $\prec'_\delta$ に関する leading term は一致するから, (1.6) は $\mathrm{in}(\mathbf{G})$ が $K[x]$ のイデアルの $\prec'_\delta$ に関するグレブナ基底になっていることを意味する.

(2) $\mathrm{in}(\mathbf{G})$ が $\mathrm{in}(I)$ を生成すること: 定理 2.1.15 により, 任意の $f \in I$ に対して $f = q_1g_1 + \cdots + q_sg_s$ かつ $\delta(\mathrm{lexp}(q_kg_k)) \geq \delta(\mathrm{lexp}(f))$ または $q_k = 0$ をみたすものが存在する. 両辺の initial part をとって $\mathrm{in}(f)$ は $\mathrm{in}(\mathbf{G})$ の生成するイデアルに含まれることがわかる. □

次にシジジー加群を考察しよう.

定義 2.1.21. R の有限集合 $\mathbf{G} := \{g_1, \ldots, g_s\}$ に対して, R^s の R-部分加群

$$S(g_1, \ldots, g_s) := \{(f_1, \ldots, f_s) \in R^s \mid \sum_{k=1}^{s} f_kg_k = 0\}$$

を $\mathbf{G}$ の (1 次) **シジジー加群**と呼ぶ.

定理 2.1.22. $R=K[[x]]$ とする. $\mathbf{G}=\{g_1,\dots,g_s\}$ を R のイデアル I のグレブナ基底とする. $i,j\in\{1,\dots,s\}$ に対して,

$$\mathrm{sp}(g_i,g_j)=\sum_{k=1}^{s} q_{ijk}g_k$$

かつ $\mathrm{lexp}(q_{ijk}g_k)\prec_\delta \mathrm{lexp}(g_i)\vee\mathrm{lexp}(g_j)$ (または $q_{ijk}=0$) をみたす $q_{ijk}\in R$ を任意にとる (cf. 定理 2.1.15). このとき $\mathrm{lexp}(g_i)=\alpha^{(i)}$ として,

$$\begin{aligned} s_{ij} &:= \mathrm{lcoef}(g_j)x^{\alpha^{(i)}\vee\alpha^{(j)}-\alpha^{(i)}},\\ \vec{v}_{ij} &:= (0,\dots,\overset{(i)}{s_{ij}},\dots,\overset{(j)}{-s_{ji}},\dots,0)-(q_{ij1},\dots,q_{ijs})\in R^s \end{aligned}$$

とおけば, シジジー加群 $S(g_1,\dots,g_s)$ は R 上 $V:=\{\vec{v}_{ij}\mid 1\le i<j\le s\}$ で生成される.

証明: $\vec{v}_{ij}\in S(g_1,\dots,g_s)$ は定義から明らか. $\vec{f}=(f_1,\dots,f_s)\in S(g_1,\dots,g_s)$ とする.

$$\begin{aligned} d_0 &:= \min\{\delta(\mathrm{lexp}(f_kg_k))\mid k=1,\dots,s\},\\ L &:= \{k\in\{1,\dots,s\}\mid \delta(\mathrm{lexp}(f_kg_k))=d_0\} \end{aligned}$$

とおくと

$$\sum_{k\in L}\mathrm{in}(f_k)\mathrm{in}(g_k)=0$$

である. そこで $k\in L$ のとき $f'_k:=\mathrm{in}(f_k)$, $k\notin L$ のとき $f'_k:=0$ とおけば, $(f'_1,\dots,f'_s)$ は $K[x]$ における $\mathrm{in}(g_1),\dots,\mathrm{in}(g_s)$ のシジジー加群に属する.

$$\vec{v'}_{ij}:=(0,\dots,\overset{(i)}{s_{ij}},\dots,\overset{(j)}{-s_{ji}},\dots,0)-(q'_{ij1},\dots,q'_{ijs})\in R^s,$$

とおこう. ただし $\delta(\mathrm{lexp}(q_{ijk}g_k))=\delta(\alpha^{(i)}\vee\alpha^{(j)})$ のとき $q'_{ijk}:=\mathrm{in}(q_{ijk})$, そうでないとき $q'_{ijk}:=0$ とする. すると命題 2.1.20 と 1 章の 定理 1.2.26 から, ある $u^{(0)}_{ij}\in K[x]$ が存在して

$$(f'_1,\dots,f'_s)=\sum_{i<j}u^{(0)}_{ij}\vec{v'}_{ij} \tag{1.7}$$

が成立することがわかる. ここで $d_{ij}:=\delta(\alpha^{(i)}\vee\alpha^{(j)})$ とおけば f'_k は $d_0-\delta(\alpha^{(k)})$ 次 δ-斉次, v'_{ij} の第 k 成分は $d_{ij}-\delta(\alpha^{(k)})$ 次 δ-斉次であるから, $u^{(0)}_{ij}$ は d_0-d_{ij} 次 δ-斉次としてよい. そこで

$$\vec{f}^{(1)}=(f^{(1)}_1,\dots,f^{(1)}_s):=\vec{f}-\sum_{i<j}u^{(0)}_{ij}\vec{v}_{ij}$$

とおくと, $(f^{(1)}_1,\dots,f^{(1)}_s)\in S(g_1,\dots,g_s)$ でかつ (1.7) により

$$d_1:=\min\{\delta(\mathrm{lexp}(f^{(1)}_\nu g_\nu))\mid 1\le\nu\le s\}>d_0$$

がわかる. この操作を繰返すと $S(g_1,\dots,g_s)$ の列 $\{\vec{f}^{(k)}\}$ と d_k-d_{ij} 次 δ-斉次な多項式 $u^{(k)}_{ij}$ で,

$$\vec{f}=\vec{f}^{(k)}+\sum_{i<j}\sum_{\nu=1}^{k}u^{(\nu)}_{ij}\vec{v}_{ij} \tag{1.8}$$

を満たし, かつ $\{d_k\}$ が狭義単調増加であるようなものがとれる. ここで

$$d_k := \min\{\delta(\mathrm{lexp}(f_\nu^{(k)} g_\nu)) \mid 1 \le \nu \le s\}$$

である. このことから $k \to \infty$ のとき, (1.8) の右辺の各項は形式巾級数として収束し, 特に形式巾級数として $\lim_{k\to\infty} \vec{f}^{(k)} = 0$ であるから,

$$\vec{f} = \sum_{i<j} \sum_{\nu=1}^{\infty} u_{ij}^{(\nu)} \vec{v}_{ij}$$

を得る. □

定理 2.1.22 は R が収束巾級数環の場合にも成立する. 証明は 7 章を参照せよ.

2.2 巾級数環上の加群のグレブナ基底

ここでは前節の議論が加群の場合にも拡張できることを簡単に述べる. 証明は前節の証明をベクトルの場合にあてはめれば, ほとんどそのままで通用する.

引き続き, 体 K を固定して $R := K[[x]]$ または $R := K\{x\}$ ($K \subset \mathbf{C}$ のとき) とおき, $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ ($\delta_i > 0$) を重みとする. 以下 R^r の R-部分加群を考察しよう. R^r の元 $\vec{f}$ は

$$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_s) = \sum_{i=1}^{r} f_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha} c_{\alpha i} x^\alpha \vec{e}_i \qquad (c_{\alpha i} \in K) \tag{2.1}$$

と書ける.

以下では次で定義される $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ の全順序 $\prec_{\delta r}$ を用いる ($\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, $i, j \in \{1, \ldots, r\}$ とする):

$$\begin{aligned}(\alpha, i) \prec_{\delta r} (\beta, j) \iff\ & (\delta(\alpha) > \delta(\beta)) \\ \text{or}\ & (\delta(\alpha) = \delta(\beta),\ i < j) \\ \text{or}\ & (\delta(\alpha) = \delta(\beta),\ i = j,\ \alpha \prec_L \beta).\end{aligned}$$

(2.1) の $\vec{f} \in R^r$ に対して, $\mathrm{exps}(\vec{f}) := \{(\alpha, i) \mid c_{\alpha i} \neq 0\}$ とおき, $\vec{f} \neq 0$ のとき $\vec{f}$ の **leading exponent** を $\mathrm{lexp}(\vec{f}) := \max_{\prec_{\delta r}} \mathrm{exps}(\vec{f})$ で定義する. また $(\alpha, i) := \mathrm{lexp}(\vec{f})$ とするとき, $\vec{f}$ の **leading point**, **leading term**, **leading coefficient** をそれぞれ

$$\mathrm{lp}(\vec{f}) := i, \quad \mathrm{lterm}(\vec{f}) := c_{\alpha i} x^\alpha, \quad \mathrm{lcoef}(\vec{f}) = c_{\alpha i}$$

で定義する.

補題 2.2.1. $\vec{f}, \vec{g} \in R^r$ に対して,

$$\mathrm{lexp}(\vec{f} + \vec{g}) \preceq_{\delta r} \max_{\prec_{\delta r}} \{\mathrm{lexp}(\vec{f}), \mathrm{lexp}(\vec{g})\}$$

が成立する.

一般に R^r の部分集合 S に対して $E(S) := \{\mathrm{lexp}(\vec{f}) \mid \vec{f} \in S,\ \vec{f} \neq 0\}$ とおく.

補題 2.2.2. N を R^r の R-部分加群とすると, $E(N)$ は $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ のモノイデアルである.

定義 2.2.3. (グレブナ基底) N を R^r の R-部分加群とする. N の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が N の (順序 $\prec_{\delta r}$ に関する) **グレブナ基底** (標準基底) とは, 次の２条件が成り立つこと:

(1) N は R 上 $\mathbf{G}$ で生成される;

(2) $E(N) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$.

さらに, $E(\mathbf{G})$ が $E(N)$ を生成する最小の集合であるとき, $\mathbf{G}$ を**極小グレブナ基底**と呼ぶ.

命題 2.2.4. $\mathbf{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s\}$ を R^r の有限部分集合とすると, 任意の $\vec{f} \in R^r$ に対して

$$\vec{f} = q_1\vec{g}_1 + \cdots + q_s\vec{g}_s + \vec{r}, \qquad \mathrm{exps}(\vec{r}) \cap \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = \emptyset$$

かつ各 i について, $q_i = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_i\vec{g}_i) \preceq_{\delta r} \mathrm{lexp}(\vec{f})$ をみたす $q_1, \ldots, q_s \in R$ と $\vec{r} \in R^r$ が存在する. この $\vec{r}$ のことを $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による WH-簡約と呼び, $\vec{r} = \mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G})$ と書く ($\vec{r}$ は必ずしも一意的ではない).

証明: この場合にも補題 2.1.7 が成立するので，定理 2.1.9 の証明がほとんどそのまま通用する．□

命題 2.2.5. N を R^r の R-部分加群, $\mathbf{G}$ を N の有限部分集合で $\mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(N)$ をみたすものとすると, $\mathbf{G}$ は N のグレブナ基底である.

定義 2.2.6. (S-級数) $\vec{f}, \vec{g} \in R$ に対して, $\mathrm{lexp}(\vec{f}) = (\alpha, i)$, $\mathrm{lexp}(\vec{g})) = (\beta, j)$ とおいて, $\vec{f}, \vec{g}$ の **S-級数** (ベクトル) $\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g})$ を, $i = j$ のとき

$$\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g}) = \mathrm{lcoef}(\vec{g})x^{\alpha\vee\beta-\alpha}\vec{f} - \mathrm{lcoef}(\vec{f})x^{\alpha\vee\beta-\beta}\vec{g};$$

$i \neq j$ のとき $\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g}) = 0$ で定義する.

定義から $\mathrm{lp}(\vec{f}) = \mathrm{lp}(\vec{g})$ のとき $\mathrm{lexp}(\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g})) \prec_{\delta r} \mathrm{lexp}(\vec{f}) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g})$ が従う.
以下では $(\alpha, i) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ に対して簡単のため $\delta((\alpha, i)) := \delta(\alpha)$ と書こう.

定義 2.2.7. $\vec{f} = \sum_{\alpha,i} c_{\alpha,i}x^\alpha\vec{e}_i \in R^r$ に対して $d := \delta(\mathrm{lexp}(\vec{f}))$ とおいて, $\vec{f}$ の **initial part** を

$$\mathrm{in}(\vec{f}) := \sum_{i=1}^{r} \sum_{\delta(\alpha)=d} c_{\alpha,i}x^\alpha\vec{e}_i$$

で定義する.

定理 2.2.8. $\mathbf{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s\}$ を R の有限部分集合, N を $\mathbf{G}$ の生成する R^r の R-部分加群とするとき, 次の条件 (1)–(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は N のグレブナ基底;

(2) $\vec{f} \in N$ のとき $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による任意の WH-簡約操作により $\mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G}) = 0$ となる;

(3) 任意の $\vec{g}_i, \vec{g}_j \in \mathbf{G}$ に対して, $\mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)$ ならば, ある $q_{ij1}, \ldots, q_{ijs} \in R$ が存在して

$$\mathrm{sp}(\vec{g}_i, \vec{g}_j) = q_{ij1}\vec{g}_1 + \cdots + q_{ijs}\vec{g}_s$$

かつすべての $k = 1, \ldots, s$ について, $q_k = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_{ijk}\vec{g}_k) \prec_{\delta r} \mathrm{lexp}(\vec{g}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g}_j)$ が成立する.

証明: 例によって (3) ⇒ (1) を証明すれば十分である. (3) を仮定して, $\vec{f} \in N$ として $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \in E(\mathbf{G})$ を示せばよい.

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{s} q_i \vec{g}_i \tag{2.2}$$

という表示を考えると,

$$\mathrm{lexp}(\vec{f}) \preceq_{\delta r} \max{}_{\prec_{\delta r}}\{\mathrm{lexp}(q_i\vec{g}_i) \mid 1 \leq i \leq s,\ q_i \neq 0\} \tag{2.3}$$

であるから, (2.2) の表示のうちで (2.3) の右辺が順序 $\prec_{\delta r}$ に関して最大になるものがとれる. 実際 (β, ν) を固定したとき

$$\{(\alpha, \mu) \in \mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\} \mid (\beta, \nu) \preceq_{\delta r} (\alpha, \mu)\}$$

は有限集合であるから, これは可能である. あとは定理 1.2.16 の証明と同様にできる. □

定理 2.2.9. N を R^r の R-部分加群として $S(N) := \mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\} \setminus E(N)$ とおくと, 剰余加群 R^r/N は K 上のベクトル空間として, $(R^r)_{S(N)} := \{\vec{f} \in R^r \mid \mathrm{exps}(\vec{f}) \subset S(N)\}$ に同型である.

定義 2.2.10. R^r の有限集合 $\mathbf{G} := \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s\}$ に対して, R^s の R-部分加群

$$S(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s) := \{(f_1, \ldots, f_s) \in R^s \mid \sum_{k=1}^{s} f_k \vec{g}_k = 0\}$$

を $\mathbf{G}$ の (1 次) **シジジー加群**と呼ぶ.

定理 2.2.11. $R = K[[x]]$ として, $\mathbf{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s\}$ を R^r の R-部分加群 N のグレブナ基底とする. $\mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)$ かつ $i \neq j$ をみたす $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ に対して,

$$\mathrm{sp}(\vec{g}_i, \vec{g}_j) = \sum_{k=1}^{s} q_{ijk} \vec{g}_k$$

かつ $\mathrm{lexp}(q_{ijk}\vec{g}_k) \prec_{\delta r} \mathrm{lexp}(\vec{g}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g}_j)$ (または $q_{ijk} = 0$) をみたす $q_{ijk} \in R$ を任意にとる (cf. 定理 2.2.8). このとき $\mathrm{lexp}(\vec{g}_i) = (\alpha^{(i)}, \nu_i)$ として,

$$\begin{aligned} s_{ij} &:= \mathrm{lcoef}(\vec{g}_j) x^{\alpha^{(i)} \vee \alpha^{(j)} - \alpha^{(i)}}, \\ \vec{v}_{ij} &:= (0, \ldots, \overset{(i)}{s_{ij}}, \ldots, \overset{(j)}{-s_{ji}}, \ldots, 0) - (q_{ij1}, \ldots, q_{ijs}) \in R^s \end{aligned}$$

とおけば, シジジー加群 $S(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s)$ は R 上 $V := \{\vec{v}_{ij} \mid i < j,\ \mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)\}$ で生成される.

問題 1. この節の補題, 命題, 定理を証明せよ.

問題 2. $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ の全順序 $\prec_{\delta r}$ を

$$(\alpha, i) \prec_{\delta r} (\beta, j) \quad \Longleftrightarrow \quad (i < j) \text{ or } (i = j,\ \alpha \prec_\delta \beta)$$

で定義しても, この節の補題, 命題, 定理は成立することを示せ. (前節の議論を R^r の元 (ベクトル) の成分毎に適用せよ.)

2.3 Tangent cone アルゴリズム

この節では $\delta = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$ の成分はすべて自然数と仮定する. $\delta \in \mathbf{R}^n$ にいくらでも近い $\delta' \in \mathbf{Q}^n$ が存在し, 適当な自然数を掛ければ $\delta' \in \mathbf{Z}^n$ とできるから, こう仮定しても実質的にはほとんど一般性は失われないであろう. 目標は, 巾級数環 $R = K[[x]]$ または $R = K\{x\}$ のイデアル I が多項式で生成されるときは, I のグレブナ基底が, 多項式環のグレブナ基底アルゴリズムを用いて計算できることを示すことである.

まず tangent cone アルゴリズムという名の由来について説明しておこう. 多項式 $f_1, \ldots, f_s$ の共通零点として定義される代数多様体の原点における**接錐** (tangent cone) とは $f_1, \ldots, f_s$ が巾級数環 R (あるいは多項式環 $K[x]$) で生成するイデアルを I とおくとき, $\delta = (1, \ldots, 1)$ の場合の $\mathrm{in}(I)$ (cf. 定義 2.1.19) の共通零点のことである. $\mathbf{G}$ を I のグレブナ基底とすれば, 命題 2.1.20 によって, $\mathrm{in}(I)$ は $\mathrm{in}(\mathbf{G})$ で生成される. すなわち, 接錐の定義方程式が具体的に得られることになる.

以下に述べる斉次化の手法を標準基底の計算に応用したのは Lazard [La] が最初のようである ([Mo2] による). 他に Mora [Mo1] による別のより効率的な方法があり, そちらの方を tangent cone algorithm と呼ぶことも多いが, 理論的に簡明なため, 斉次化の手法についてだけ説明する.

以下 $\tilde{\delta} := (1, \delta_1, \ldots, \delta_n) \in \mathbf{N}^{n+1}$ とおく.

定義 2.3.1. 多項式 $f = \sum_\alpha c_\alpha x^\alpha \neq 0$ に対して, その**斉次化** (homogenization) $f^h \in K[x_0, x] = K[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ を, $d := \deg_\delta(f) := \max\{\delta(\alpha) \mid a_\alpha \neq 0\}$ として,

$$f^h(x_0, x) := \sum_\alpha c_\alpha x_0^{d-\delta(\alpha)} x^\alpha$$

で定義する. このとき f^h は d 次 $\tilde{\delta}$-斉次で, $f^h(1, x) = f(x)$ が成立する.

$\mathbf{N}^{n+1}$ の項順序 $\prec_h$ を次で定義しよう: $\alpha, \beta \in \mathbf{N}^n$, $i, j \in \mathbf{N}$ に対して

$$\begin{aligned}(i, \alpha) \prec_h (j, \beta) \quad \Longleftrightarrow \quad & (i + \delta(\alpha) < j + \delta(\beta)) \\ \text{or} \quad & (i + \delta(\alpha) = j + \delta(\beta),\ i < j) \\ \text{or} \quad & (i = j,\ \delta(\alpha) = \delta(\beta),\ \alpha \prec_L \beta).\end{aligned}$$

特に $\delta = (1, \ldots, 1)$ のときは $\prec_h$ は $\mathbf{N}^{n+1}$ の全次数-辞書式順序に他ならない.

以下では, n 変数多項式 f に対して前節と同様に巾級数環 R の元としての leading exponent を $\mathrm{lexp}(f)$ で表わし, $n+1$ 変数多項式 g の項順序 $\prec_h$ に関する leading exponent を $\mathrm{lexp}_h(g)$ で表わすことにする.

補題 2.3.2. $\tilde{\delta}$-斉次な $n+1$ 変数多項式 $f = f(x_0, x) \in K[x_0, x]$ に対して, ある自然数 i が存在して $\mathrm{lexp}_h(f) = (i, \mathrm{lexp}(f(1, x)))$ が成立する.

証明: $(i, \alpha), (j, \beta) \in \mathbf{N}^{n+1}$ に対して, $i + \delta(\alpha) = j + \delta(\beta)$ のとき, $i < j \Leftrightarrow \delta(\alpha) > \delta(\beta)$ であることから明らか. □

補題 2.3.3. n 変数多項式 $f, g \in K[x]$ に対して, $(fg)^h = f^h g^h$ が成立する.

証明: $f = \sum_\alpha a_\alpha x^\alpha$, $g = \sum_\beta b_\beta x^\beta$ として $d := \deg_\delta(f), d' := \deg_\delta(g)$ とおくと $\deg_\delta(fg) = d + d'$ だから

$$
\begin{aligned}
(fg)^h &= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha b_\beta {x_0}^{d+d'-\delta(\alpha+\beta)} x^{\alpha+\beta} \\
&= \sum_\alpha a_\alpha {x_0}^{d-\delta(\alpha)} x^\alpha \sum_\beta b_\beta {x_0}^{d'-\delta(\beta)} x^\beta \\
&= f^h g^h
\end{aligned}
$$

を得る. □

補題 2.3.4. $f_1, \ldots, f_m \in K[x_0, x]$ がすべて $\tilde{\delta}$-斉次ならば, $f_1, \ldots, f_m$ の生成する $K[x_0, x]$ のイデアルの順序 $\prec_h$ に関するグレブナ基底で $\tilde{\delta}$-斉次多項式からなるものが存在する.

証明: $\tilde{\delta}$-斉次な 2 つの多項式の S-多項式はまた $\tilde{\delta}$-斉次である. また $\tilde{\delta}$-斉次な多項式を $\tilde{\delta}$-斉次な多項式からなる有限集合で簡約した結果もまた $\tilde{\delta}$-斉次である. 従ってアルゴリズム 1.1.21 の input として $\{f_1, \ldots, f_m\}$ を与えれば output も $\tilde{\delta}$-斉次な多項式からなる. □

定理 2.3.5. 多項式 $f_1, \ldots, f_m \in K[x]$ が与えられたとき, $(f_1)^h, \ldots, (f_m)^h$ の生成する $K[x_0, x]$ のイデアルを J とする. J の項順序 $\prec_h$ に関するグレブナ基底を

$$\{g_1(x_0, x), \ldots, g_s(x_0, x)\}$$

とすると, $\mathbf{G} := \{g_1(1, x), \ldots, g_s(1, x)\}$ は巾級数環 R で $f_1, \ldots, f_m$ の生成するイデアル $\tilde{I}$ の順序 $\prec_\delta$ に関するグレブナ基底 (標準基底) である. ただし, $g_1, \ldots, g_s$ は $\tilde{\delta}$-斉次とする.

証明: 最初に $\mathbf{G}$ が $\tilde{I}$ を生成することを証明しよう. $f_1, \ldots, f_m$ が $K[x]$ で生成するイデアルを I とする. $\tilde{I}$ は I が R で生成するイデアルであるから, $\mathbf{G}$ が $K[x]$ で I を生成することを示せば十分である.

まず $\mathbf{G} \subset I$ を示す. $g_i \in J$ より, $q_1, \ldots, q_m \in K[x_0, x]$ が存在して

$$g_i = q_1 (f_1)^h + \cdots + q_m (f_m)^h$$

となるが, ここで $x_0 = 1$ とおけば

$$g_i(1, x) = q_1(1, x) f_1(x) + \cdots + q_m(1, x) f_m(x) \in I.$$

従って $\mathbf{G} \subset I$ である.

さて, $f \in I$ とすると $q_1, \dots, q_m \in K[x]$ が存在して

$$f = q_1 f_1 + \cdots + q_m f_m$$

となる. $d := \deg_\delta(f), d_i := \deg_\delta(f_i), e_i := \deg_\delta(q_i)$ とおき, $e := \max\{d_i + e_i \mid 1 \le i \le m\}$ とすると, $e \ge d$ で

$$ {x_0}^{e-d} f^h = \sum_{i=1}^{m} {x_0}^{e-d_i-e_i} (q_i)^h (f_i)^h \in J$$

が成立することがわかる. J は $\{g_1, \dots, g_s\}$ で生成されるから $p_1, \dots, p_s \in K[x_0, x]$ が存在して

$$ {x_0}^{e-d} f^h = \sum_{k=1}^{s} p_k g_k$$

となる. ここで $x_0 = 1$ とおけば

$$f(x) = (f^h)(1, x) = \sum_{k=1}^{s} p_k(1, x) g_k(1, x)$$

を得るから, I は $\mathbf{G}$ で生成されることがわかった.

次に

$$\{\mathrm{lexp}(f) \mid f \in I \setminus \{0\}\} = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) \tag{3.1}$$

を示そう. ここで右辺の $E(\mathbf{G})$ は $\mathbf{G}$ の順序 $\prec_\delta$ に関する leading exponents の集合である. $f \in I$ とする. 上の議論から, 適当な $e \in \mathbf{N}$ をとれば ${x_0}^e f^h \in J$ となる. また, $\{g_1, \dots, g_s\}$ が $\prec_h$ に関する J のグレブナ基底であることから,

$$\mathrm{lexp}_h({x_0}^e f^h) \in \mathrm{mono}(\{\mathrm{lexp}_h(g_1), \dots, \mathrm{lexp}_h(g_s)\}) \tag{3.2}$$

がわかるが補題 2.3.2 から, ある $i \in N$ が存在して $(i, \mathrm{lexp}(f)) = \mathrm{lexp}_h({x_0}^e f^h)$ となるから, (3.2) より

$$\mathrm{lexp}(f) \in \mathrm{mono}(\{\mathrm{lexp}(g_1(1, x)), \dots, \mathrm{lexp}(g_s(1, x))\}) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$$

を得る. これで (3.1) が証明できた.

最後に

$$E(\tilde{I}) := \{\mathrm{lexp}(f) \mid f \in \tilde{I} \setminus \{0\}\} = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$$

を示そう. $f \in \tilde{I} \setminus \{0\}$ とすると $q_1, \dots, q_s \in R$ が存在して

$$f(x) = q_1(x) g_1(1, x) + \cdots + q_s(x) g_s(1, x)$$

となる. $d := \delta(\mathrm{lexp}(f))$, $q_i = \sum_\alpha c_{i\alpha} x^\alpha$ とおいて

$$\begin{aligned} q_i' &:= \sum_{\delta(\alpha) \le d} c_{i\alpha} x^\alpha \in K[x], \\ f'(x) &:= q_1'(x) g_1(1, x) + \cdots + q_s'(x) g_s(1, x) \in I \end{aligned}$$

と定義すれば

$$f''(x) := f(x) - f'(x) = (q_1(x) - q_1'(x))g_1(1,x) + \cdots + (q_s(x) - q_s'(x))g_s(1,x)$$

は $\delta(\alpha) \le d$ であるような単項式 x^α を含まないから $\mathrm{lexp}(f) = \mathrm{lexp}(f' + f'') = \mathrm{lexp}(f')$ であり, (3.1) から $\mathrm{lexp}(f) = \mathrm{lexp}(f') \in E(I)$ を得る. 従って $E(\tilde{I}) \subset E(I)$ であるが, $E(\tilde{I}) \supset E(I)$ は明らかだから, (3.1) と合わせて, $E(\tilde{I}) = E(I) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を得る. □

この定理によって, 多項式で生成されるような巾級数環 R のイデアルについては, 多項式環のグレブナ基底アルゴリズムでグレブナ基底が計算できることがわかった. これから直ちに, 多項式 $f_1, \ldots, f_m \in K[x]$ が与えられたとき, $\dim_K(R/Rf_1 + \cdots + Rf_m)$ を計算するアルゴリズムを得る. 特に, 多項式 $f \in K[x]$ に対して, その Milnor 数

$$\mu := \dim R/R(\partial f/\partial x_1) + \cdots + R(\partial f/\partial x_n)$$

が計算できる. Milnor 数は, 超曲面の特異点の理論において重要である (例えば [Kan] とそこに挙げられている文献を参照のこと).

また, 定理 2.3.5 の仮定のもとで, 多項式 $f \in K[x]$ が与えられたとき, $f \in \tilde{I}$ かどうかを判定するには, 定理 2.3.5 の方法で $f, f_1, \ldots, f_m$ の生成する R のイデアル $\tilde{I}'$ のグレブナ基底を求め, $E(\tilde{I}') = E(\tilde{I})$ が成立するかどうかを見ればよい.

巾級数環の一般のイデアルについては, 完全な (実行可能な) アルゴリズムは今のところ知られていないようであるが, グレブナ基底をある意味で逐次近似的に求める方法は開発されている ([KFS]).

定理 2.3.6. 定理 2.3.5 の仮定の下で, 各 $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ に対して

$$\mathrm{sp}(g_i, g_j) = s_{ij}(x_0, x)g_i(x_0, x) - s_{ji}g_j(x_0, x) = \sum_{k=1}^{s} q_{ijk}(x_0, x)g_k(x_0, x) \tag{3.3}$$

かつ

$$\mathrm{lexp}_h(q_{ijk}(x_0, x)g_k(x_0, x)) \prec_h \mathrm{lexp}_h(g_i(x_0, x)) \vee \mathrm{lexp}_h(g_j(x_0, x)) \tag{3.4}$$

を満たす $\tilde{\delta}$-斉次な多項式 q_{ijk} がとれる. このとき $\mathbf{G}$ のシジジー加群

$$S(g_1(1, x_0), \ldots, g_s(1, x_0)) := \{(h_1, \ldots, h_s) \in R^s \mid \sum_{k=1}^{s} h_k(x)g_k(1, x) = 0\}$$

は, $\{\vec{v}_{ij} \mid 1 \le i < j \le s\}$ で生成される R のイデアルである. ただし

$$\vec{v}_{ij} := (0, \ldots, \overbrace{s_{ij}(1, x)}^{(i)}, \ldots, \overbrace{-s_{ji}(1, x)}^{(j)}, \ldots, 0) - (q_{ij1}(1, x), \ldots, q_{ijs}(1, x))$$

とおいた.

証明: (3.4) と補題 2.3.2 から

$$\mathrm{lexp}(q_{ijk}(1, x)g_k(1, x)) \preceq \mathrm{lexp}(g_i(1, x)) \vee \mathrm{lexp}(g_j(1, x))$$

を得る. これと (3.3) の両辺に $x_0 = 1$ を代入した式に定理 2.1.22 を適用すればよい. □

例 2.3.7. $\delta=(1,1,1)$, $f_1:=x-y^2$, $f_2:=xy-z^2$ として f_1,f_2 が生成する $K[[x,y,z]]$ または $\mathbf{C}\{x,y,z\}$ のイデアル I のグレブナ基底を求めよう. (K は標数 0 とする.) $x_0=t$ と書くと,

$$(f_1)^h=tx-y^2, \qquad (f_2)^h=xy-z^2$$

で, これらが $K[t,x,y,z]$ で生成するイデアルの全次数-辞書式順序によるグレブナ基底を求めると, $\{(f_1)^h,(f_2)^h,g_3\}$, ただし $g_3:=tz^2-y^3$ となる. 従って $\mathbf{G}:=\{f_1,f_2,z^2-y^3\}$ は I のグレブナ基底 (標準基底) である. 特に $\mathrm{lexp}(\mathbf{G})=\{(1,0,0),(1,1,0),(0,0,2)\}$ であるから, $\{x-y^2,z^2-y^3\}$ が I の極小グレブナ基底である. 特に代数多様体 $f_1=f_2=0$ の原点における接錐の方程式は $x=z^2=0$ となる.

問題 1. 上の例を手計算で確かめよ.

例 2.3.8. 1 章の例 1.1.33 を巾級数環において計算してみよう: $x=x_1,y=x_2,z=x_3$ として

$$f_1:=x^3-y^2, \quad f_2:=y^3-z^2, \quad f_3:=z^3-x^2$$

とおく. $\delta=(1,1,1)$ の場合の $I:=Rf_1+Rf_2+Rf_3$ のグレブナ基底を定理2.3.5 を用いて計算すると $\{f_1,f_2,f_3\}$ が I の極小グレブナ基底であることがわかる. 特に $\dim_K R/I=8$ である.

問題 2. 1 章の問題 3 が巾級数環の場合にも拡張できることを示せ. またそれを用いて上の例の結果を証明せよ.

問題 3. 定理 2.3.5 を $K[x]^r$ の有限部分集合で生成される R^r の部分加群の場合に拡張せよ.

第3章　微分作用素環と線型偏微分方程式系

3.1　微分作用素環

この章では $x = (x_1, \dots, x_n)$ を変数, K を体として, 可換環 R として, 多項式環 $K[x]$, 有理関数体 $K(x)$, 形式巾級数環 $K[[x]]$, 収束巾級数環 $K\{x\}$, あるいは U を $\mathbf{C}^n$ の連結開集合として, U 上の正則関数のなす環 $\mathcal{O}(U)$, および U 上の代数的正則関数のなす環 $\mathcal{O}_{alg}(U) := \mathcal{O}(U) \cap \mathbf{C}(x)$, およびそれらの商体のうちのいずれかを考える.

R は K または $\mathbf{C}$ 上の代数 (多元環) でもある.

R には偏微分 $\partial_i := \partial/\partial x_i$ $(i = 1, \dots, n)$ が微分 (derivation) として作用している. すなわち $\partial_i : R \to R$ は K-線型かつ任意の $f, g \in R$ について $\partial_i(fg) = f(\partial_i g) + (\partial_i f)g$ をみたす. これによって R を微分環とみなすこともできるが, 我々はむしろ, これらの偏微分と R の元から生成される作用素のなす環, すなわち微分作用素環を考察の対象とする. 以下では簡単のため, 体 K は標数 0 であると仮定する.

問題 1. K が標数 $p > 0$ の体で $R = K[x]$ のとき, $m \geq p$ ならば任意の $f \in R$ に対して $\partial_i^m f = 0$ となることを示せ.

定義 3.1.1. R の K-自己準同型全体のなす (非可換)K-代数を $\mathrm{End}_K(R)$ で表わす. R-係数の n 変数**微分作用素環** (ring of differential operators) $R\langle\partial\rangle$ とは, R の元による掛け算と微分 $\partial_1, \dots, \partial_n$ で生成される $\mathrm{End}_K(R)$ の部分 K-代数のことである. $R\langle\partial\rangle$ の元を R-係数の微分作用素と呼ぶ.

特に, $A_n(K) := K[x]\langle\partial\rangle$ と書き, 体 K 上の Weyl 代数と呼ぶ. 更に $K = \mathbf{C}$ のときは単に Weyl 代数と呼び $A_n := A_n(\mathbf{C})$ と書く. また, 収束巾級数係数の微分作用素環を $\mathcal{D}_0 := \mathbf{C}\{x\}\langle\partial\rangle$ と書く (0 は $\mathbf{C}^n$ の原点を表わす).

定義によって R は自然に左 $R\langle\partial\rangle$-加群の構造を持つ. また $R\langle\partial\rangle$ における積 $\cdot$ は, $a \in R$ を $R\langle\partial\rangle$ の元とみたとき

$$\partial_i \cdot a = a \cdot \partial_i + \frac{\partial a}{\partial x_i} \quad (i = 1, \dots, n), \tag{1.1}$$

$$\partial_i \cdot \partial_j = \partial_j \cdot \partial_i \quad (i, j = 1, \dots, n) \tag{1.2}$$

という関係式を満たす. $R\langle\partial\rangle$ は R を部分 K-代数として含み, 従って乗法の単位元 1 を持つが (1.1) から $\partial_i \cdot x_i = x_i \cdot \partial_i + 1$ であるから, $R\langle\partial\rangle$ は 非可換環である. 以下では $R\langle\partial\rangle$ における積において $\cdot$ は誤解のおそれのない限り省略する.

$R\langle\partial\rangle$ の元 P は (1.1), (1.2) を用いて $\partial_1,\dots,\partial_n$ が R の元より右にくる形 (**正規形**と呼ぶ) にすると,

$$P = P(x,\partial) = \sum_{\beta\in\mathbf{N}^n} a_\beta\partial^\beta \qquad (a_\beta \in R) \tag{1.3}$$

という形の有限和で表わされる. ここで指数 $\beta = (\beta_1,\dots,\beta_n)$ に対して $\partial^\beta = {\partial_1}^{\beta_1}\cdots{\partial_n}^{\beta_n}$ とおいた.

補題 3.1.2. $P \in R\langle\partial\rangle$ を (1.3) の形に表示したとき, $P = 0$ であるための必要十分条件は, すべての β に対して $a_\beta = 0$ となることである.

証明: P が $\mathrm{End}_K(R)$ の元として 0 であるとする. $P \neq 0$ と仮定して $\ell := \min\{|\beta| \mid a_\beta \neq 0\}$ とおき, $\alpha \in \mathbf{N}^n$, $|\alpha| = \ell$ とする. $|\beta| > \ell$, または $|\beta| = \ell$ かつ $\alpha \neq \beta$ のとき, $\beta_i > \alpha_i$ となる i があるから, $\partial^\beta(x^\alpha) = 0$ である. よって

$$0 = Px^\alpha = \sum_{|\beta|\geq\ell} a_\beta\partial^\beta(x^\alpha) = \alpha_1!\cdots\alpha_n! a_\alpha$$

となり, ℓ の定義に反する. ゆえに $P = 0$ でなければならない. □

微分作用素を可換な式 (多項式または巾級数) で表示するため, 変数 $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)$ (x の**双対変数**と呼ぶ) を導入する.

定義 3.1.3. R-係数の微分作用素 P に対して P を正規形 (1.3) で表わしたとき

$$P(x,\xi) = \sum_{\beta\in\mathbf{N}^n} a_\beta(x)\xi^\beta$$

とおき, R-係数の多項式環 $R[\xi] = R[\xi_1,\dots,\xi_n]$ の元とみなす. (これを P の**全表象** (total symbol) と呼ぶことがある.) この対応によって, $R\langle\partial\rangle$ は K 上のベクトル空間としては $R[\xi]$ に同型である. 今後 P あるいは $P(x,\partial)$ と書いたときは $R\langle\partial\rangle$ の元, $P(x,\xi)$ と書いたときは $R[\xi]$ の元とみなすことにする.

また $m := \max\{|\beta| \mid a_\beta \neq 0\}$ のことを P の**階数** (order) と呼び $\mathrm{ord}(P)$ で表わす. このとき

$$\sigma(P) = \sigma_m(P) := \sum_{|\beta|=m} a_\beta\xi^\beta \in R[\xi]$$

のことを P の (階数 m の) **主表象** (principal symbol) と呼ぶ. $\ell > m$ のときは $\sigma_\ell(P) = 0$ と定義する.

命題 3.1.4. (Leibniz の公式) $P, Q \in R\langle\partial\rangle$ に対して, その積を $S = PQ$ とおくと,

$$S(x,\xi) = \sum_{\nu\in\mathbf{N}^n} \frac{1}{\nu!}\left(\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial\xi^\nu}P(x,\xi)\right)\left(\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x^\nu}Q(x,\xi)\right) \tag{1.4}$$

が成立する. ここで $\nu = (\nu_1,\dots,\nu_n)$ に対して $\nu! = \nu_1!\cdots\nu_n!$ とおいた. また $P(x,\xi)$ は ξ の多項式であるから, (1.4) の右辺は有限和である.

証明: (1) まず $P=\partial_i{}^k$, $Q=a\in R$ の場合に (1.4) が成立することを k に関する帰納法で証明しよう. まず $k=0$ のときは $P=1$ であるから明らか. $k-1$ で (1.4) が成立したとすると, $S_k:=\partial_i{}^k\cdot a$ とおくとき

$$S_{k-1}(x,\xi)=\sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{1}{\nu!}(k-1)\cdots(k-\nu)\xi_i{}^{k-1-\nu}\frac{\partial^\nu a}{\partial x_i{}^\nu}$$

であるから

$$\begin{aligned}S_k(x,\partial) &= \partial_i S_{k-1}(x,\partial)\\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(k-1)\cdots(k-\nu)}{\nu!}\partial_i\left(\frac{\partial^\nu a}{\partial x_i{}^\nu}\partial_i{}^{k-1-\nu}\right)\\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(k-1)\cdots(k-\nu)}{\nu!}\left(\frac{\partial^\nu a}{\partial x_i{}^\nu}\partial_i{}^{k-\nu}+\frac{\partial^{\nu+1}a}{\partial x_i{}^{\nu+1}}\partial_i{}^{k-1-\nu}\right)\end{aligned}$$

となり, 従って

$$\begin{aligned}S_k(x,\xi) &= \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(k-1)\cdots(k-\nu)}{\nu!}\left(\frac{\partial^\nu a}{\partial x_i{}^\nu}\xi_i{}^{k-\nu}+\frac{\partial^{\nu+1}a}{\partial x_i{}^{\nu+1}}\xi_i{}^{k-1-\nu}\right)\\ &= \sum_{\nu=0}^{k-1}\frac{(k-1)\cdots(k-\nu)}{\nu!}\frac{\partial^\nu a}{\partial x_i{}^\nu}\xi_i{}^{k-\nu}+\sum_{\nu=1}^{k}\frac{(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{(\nu-1)!}\frac{\partial^\nu a}{\partial x_i{}^\nu}\xi_i{}^{k-\nu}\\ &= a\xi_i{}^k+\sum_{\nu=1}^{k-1}\frac{k(k-1)\cdots(k-\nu+1)}{\nu!}\frac{\partial^\nu a}{\partial x_i{}^\nu}\xi_i{}^{k-\nu}+\frac{\partial^k a}{\partial x_i{}^k}\\ &= \sum_{\nu=0}^{k}\frac{1}{\nu!}\frac{\partial^\nu \xi_i{}^k}{\partial \xi_i{}^\nu}\frac{\partial^\nu a}{\partial x_i{}^\nu}\end{aligned}$$

を得るから, このとき (1.4) が示された.

(2) $P=\partial^\beta$, $Q=a\in R$ のときに, (1.4) が成立すること: $S_\beta:=\partial^\beta\cdot a$ とおくと (1) をくり返し用いて

$$\begin{aligned}S_\beta &= \partial_2{}^{\beta_2}\cdots\partial_n{}^{\beta_n}\left(\sum_{\nu_1=0}^{\beta_1}\frac{\beta_1(\beta_1-1)\cdots(\beta_1-\nu_1+1)}{\nu_1!}\frac{\partial^{\nu_1}a}{\partial x_1{}^{\nu_1}}\partial_1{}^{\beta_1-\nu_1}\right)\\ &= \partial_3{}^{\beta_3}\cdots\partial_n{}^{\beta_n}\left(\sum_{\nu_2=0}^{\beta_2}\sum_{\nu_1=0}^{\beta_1}\frac{\beta_2(\beta_2-1)\cdots(\beta_2-\nu_2+1)}{\nu_2!}\frac{\beta_1(\beta_1-1)\cdots(\beta_1-\nu_1+1)}{\nu_1!}\right.\\ &\quad\left.\cdot\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2}a}{\partial x_1{}^{\nu_1}\partial x_2{}^{\nu_2}}\partial_2{}^{\beta_2-\nu_2}\cdot\partial_1{}^{\beta_1-\nu_1}\right)\\ &= \cdots\\ &= \sum_{\nu=(\nu_1,\cdots,\nu_n)\le\beta}\frac{\beta_1(\beta_1-1)\cdots(\beta_1-\nu_1+1)\cdots\beta_n(\beta_n-1)\cdots(\beta_n-\nu_n+1)}{\nu!}\\ &\quad\cdot\partial_1{}^{\beta_1-\nu_1}\cdots\partial_n{}^{\beta_n-\nu_n}\end{aligned}$$

を得る. この式の total symbol を見れば, この場合も (1.4) が成立していることがわかる.

(3) 一般の場合

$$P = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n} a_\beta \partial^\beta, \qquad Q = \sum_{\beta \in \mathbf{N}^n} b_\beta \partial^\beta$$

とすると,

$$S = \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha \partial^\alpha \cdot b_\beta \cdot \partial^\beta$$

であり, $S_{\alpha\beta} := \partial^\alpha \cdot b_\beta$ とおけば (2) から

$$S_{\alpha\beta}(x,\xi) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial^{|\nu|}\xi^\alpha}{\partial \xi^\nu} \right) \left(\frac{\partial^{|\nu|} b_\beta}{\partial x^\nu} \right)$$

が成立するから

$$\begin{aligned} S(x,\xi) &= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha S_{\alpha\beta}(x,\xi)\xi^\beta \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_\alpha \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial^{|\nu|}\xi^\alpha}{\partial \xi^\nu} \right) \left(\frac{\partial^{|\nu|} b_\beta}{\partial x^\nu} \right) \xi^\beta \\ &= \sum_\nu \frac{1}{\nu!} \sum_{\alpha,\beta} \left(\frac{\partial^{|\nu|}(a_\alpha \xi^\alpha)}{\partial \xi^\nu} \right) \left(\frac{\partial^{|\nu|}(b_\beta \xi^\beta)}{\partial x^\nu} \right) \end{aligned}$$

となって (1.4) が証明された. □

命題 3.1.5. $P, Q \in R\langle\partial\rangle$ に対して $\mathrm{ord}(PQ) = \mathrm{ord}(P) + \mathrm{ord}(Q)$ かつ $\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$ が ($R[\xi]$ において) 成立する.

証明: $\mathrm{ord}(P) = m$, $\mathrm{ord}(Q) = \ell$ とすると, $\partial^{|\alpha|}P(x,\xi)/\partial\xi^\alpha$ は ξ について高々 $m - |\alpha|$ 次だから, $\mathrm{ord}(PQ) \le m + \ell$ で, (1.4) から

$$\sigma_{m+\ell}(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$$

であり, R が整域だからこの右辺は 0 でない. 従って $\mathrm{ord}(PQ) = m + \ell$ かつ $\sigma(PQ) = \sigma_{m+\ell}(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$ である. □

問題 2. 自然数 k と $i = 1, \dots, n$ に対して, $R\langle\partial\rangle$ において

$${x_i}^k {\partial_i}^k = x_i\partial_i(x_i\partial_i - 1)\cdots(x_i\partial_i - k + 1)$$

が成立することを示せ.

座標変換によって引き起こされる微分作用素の変換を考察しておこう. $x = (x_1, \dots, x_n)$ をもとの K^n の座標系として, $y = (y_1, \dots, y_n)$ という別の (局所) 座標系が x と

$$y_i = F_i(x) \quad (i = 1, \dots, n), \qquad x_j = G_j(y) \quad (j = 1, \dots, n)$$

という関係で互いに結びつけられているとしよう. ここで考えている関数の環 R に応じて次の条件を仮定する:

(1) $R = K[x], K(x)$ のときは $F_i, G_i \in R$ $(i = 1, \ldots, n)$;

(2) $R = K[[x]], K\{x\}$ のときは $F_i, G_i \in R$ かつ $F_i(0) = G_i(0) = 0$(すなわち定数項が 0) $(i = 1, \ldots, n)$;

(3) $R = \mathcal{O}(U)$ (または $R = \mathcal{O}_{alg}(U)$) のときは $F_i \in R$ かつある連結開集合 V に対して $G_i \in \mathcal{O}(V)$ (または $G_i \in \mathcal{O}_{alg}(V)$) $(i = 1, \ldots, n)$.

以下では (1),(2) の場合は $R' := R$ (正確には R における変数 x を y におきかえたもの), (3) の場合には $R' := \mathcal{O}(V)$ または $R' := \mathcal{O}_{alg}(V)$ とおこう. すると上記の仮定のもとで $F := (F_1, \ldots, F_n)$ と $G := (G_1, \ldots, G_n)$ は環同型

$$F^* : R' \ni g(y) \mapsto g(F(x)) \in R, \qquad G^* : R \ni f(x) \mapsto f(G(y)) \in R'$$

を引き起こし, これらは互いに逆写像になっている. $P \in R\langle\partial\rangle$ と $g(y) \in R'$ に対して $F_*(P) \in \mathrm{End}_K(R')$ を

$$F_*(P)g(y) := (F^*)^{-1}P(F^*(g)(x)) = G^*(P\, g(F(x))) \in R'$$

で定義しよう. $\partial' = (\partial'_1, \ldots, \partial'_n) = (\partial/\partial y_1, \ldots, \partial/\partial y_n)$ と書く.

補題 3.1.6. 上で定義した F_* は $R\langle\partial\rangle$ から $R'\langle\partial'\rangle$ への環同型を定義する.

証明: F_* が $R\langle\partial\rangle$ から $\mathrm{End}_K(R')$ への環準同型であることは定義から容易に確かめられる. まず像が $R'\langle\partial'\rangle$ に含まれることを示そう. $P = a(x) \in R$ のとき, $g(y) \in R'$ に対して

$$F_*(a)g(y) = G^*(a(x)g(F(x))) = a(G(y))g(y)$$

であるから $F_*(a) = a(G(y)) \in R' \subset R'\langle\partial'\rangle$ である.

次に $g(y) \in R'$ に対して合成関数の微分の公式から

$$\begin{aligned} F_*(\partial_i)g(y) &= G^*(\partial_i\, g(F(x))) \\ &= G^*\left(\sum_{j=1}^{n}(\partial'_j g)(F(x))\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(x)\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n}(\partial'_j g)(y)\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(G(y)) \end{aligned}$$

が成り立つから

$$F_*(\partial_i) = \sum_{j=1}^{n}\frac{\partial F_j}{\partial x_i}(G(y))\partial'_j \in R'\langle\partial'\rangle \tag{1.5}$$

を得る. $R\langle\partial\rangle$ は R と ∂ で生成される環であるから, 以上のことにより F_* の像は $R'\langle\partial'\rangle$ に含まれることがわかる. G_* についても同様であり, F_* と G_* が互いに逆写像になっていることも容易にわかるから, 補題の結論が得られた. □

$\eta = (\eta_1, \ldots, \eta_n)$ を y の双対変数としよう.

命題 3.1.7. 上の仮定のもとで $P \in R\langle\partial\rangle$ とすると

$$\sigma(F_*(P))(y,\eta) = \sigma(P)\left(G(y), \frac{\partial F}{\partial x}(G(y))\eta\right)$$

が成立する. ただし

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x)\eta := \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_1}(x)\eta_j, \ldots, \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_n}(x)\eta_j\right)$$

とおいた.

証明: $P \in R\langle\partial\rangle$ が (1.3) の形で与えられたとしよう. $m := \mathrm{ord}(P)$ とおくと命題3.1.5 と (1.5) から

$$\begin{aligned}
\sigma(F_*(P))(y,\eta) &= \sum_{|\beta|=m} F_*(a_\beta)\sigma(F_*(\partial^\beta)) \\
&= \sum_{|\beta|=m} a_\beta(G(y)) \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_1}(G(y))\eta_j\right)^{\beta_1} \cdots \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_j}{\partial x_n}(G(y))\eta_j\right)^{\beta_n} \\
&= \sigma(P)\left(G(y), \frac{\partial F}{\partial x}(G(y))\eta\right)
\end{aligned}$$

を得る. □

K^n の**余接束** (cotangent bundle) T^*K^n は

$$T^*K^n := \{(x, \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n) \mid x \in K^n,\ \xi_1, \ldots, \xi_n \in K\}$$

で定義される. ここで変数 x を上のように座標変換して y で書いたときは, dx_i を自然に $dy_1, \ldots, dy_n$ で書き直すものとする. ただし, R が巾級数環のときは $K = \mathbf{C}$ または $K = \mathbf{R}$ とする. 上の命題は微分作用素 $P \in R\langle\partial\rangle$ の主シンボル $\sigma(P)$ が余接束 T^*K^n 上の関数であることを意味している. しばしば, $(x, \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n) = (x, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ と略記する.

3.2 層

この節では以降の予備知識として, 層について復習しておく. 証明はほとんど省略するので, 適当な文献を参照されたい (例えば [HU], [Kaw] など). X を位相空間とするとき, $\mathcal{F}$ が X 上の可換群の**準層** (presheaf) とは, X のおのおのの開集合 U に対して可換群 $\mathcal{F}(U)$ が定義され ($\mathcal{F}(\emptyset) = \{0\}$ とする), また $U \supset V$ であるような 2 つの開集合 U, V に対して, 準同型 $\rho_{VU} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}(V)$ (制限写像と呼ぶ) が定義されていて, ρ_{UU} は恒等写像で, $U \supset V \supset W$ のとき, $\rho_{WV} \circ \rho_{VU}$ が成立していることである. $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して簡単のため $\rho_{VU}(f) = f\,|_V$ とも書く.

準層 $\mathcal{F}$ が**層** (sheaf) であるとは, $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を X の開集合の任意の族として $U := \bigcup_{\lambda\in\Lambda} U_\lambda$ とおくとき, 次の 2 条件 (S1), (S2) (局所性) が成り立つこと:

(S1) $f \in \mathcal{F}(U)$ がすべての $\lambda \in \Lambda$ について $f|_{U_\lambda} = 0$ をみたせば, $f = 0$;

(S2) 各 $\lambda \in \Lambda$ に対して $f_\lambda \in \mathcal{F}(U_\lambda)$ が与えられ, $U_\lambda \cap U_\mu \neq \emptyset$ ならば $f_\lambda|_{U_\lambda \cap U_\mu} = f_\mu|_{U_\lambda \cap U_\mu}$ が成り立っているとすると, すべての λ に対して $f|_{U_\lambda} = f_\lambda$ となるような $f \in \mathcal{F}(U)$ が存在する.

更に層 $\mathcal{F}$ において, 各 $\mathcal{F}(U)$ が環で, $U \supset V$ ならば ρ_{VU} が環準同型であるとき, $\mathcal{F}$ を環の層 (sheaf of rings) と呼ぶ. $\mathcal{R}$ を X 上の環の層とするとき, X 上の層 $\mathcal{F}$ が (左) $\mathcal{R}$-**加群の層** (sheaf of $\mathcal{R}$-modules) または単に (左) $\mathcal{R}$-**加群** ($\mathcal{R}$-module) であるとは, 各 $\mathcal{F}(U)$ が (左) $\mathcal{R}(U)$-加群であって, $U \supset V$ のとき任意の $f \in \mathcal{F}(U)$ と $a \in \mathcal{R}(U)$ に対して $\rho_{VU}(af) = \rho_{VU}(a)\rho_{VU}(f)$ が成り立つことである.

$\mathcal{F}(U)$ の元を層 $\mathcal{F}$ の U 上の**切断** (section) と呼ぶ. $f \in \mathcal{F}(U)$ がある開集合について成り立つことを, 単に $f \in \mathcal{F}$ と略記することがある.

例 3.2.1. $X := \mathbf{C}^n$ 上の正則関数 (holomorphic function) の層 $\mathcal{O} = \mathcal{O}_X$ は, 開集合 $U \subset X$ に対して, $\mathcal{O}(U)$ を U 上の正則関数の全体のなす環として定義される. (制限写像は通常の関数として定義域を制限したものとする.) $\mathcal{O}$ は $\mathbf{C}^n$ 上の環の層である.

一般に X 上の層 $\mathcal{F}$ と点 $p \in X$ に対して, $\mathcal{F}$ の p における**茎** (stalk) とは U が p の開近傍を動くときの帰納極限 (inductive limit)

$$\mathcal{F}_p := \varinjlim \mathcal{F}(U) = \bigcup_{U \ni p} \mathcal{F}(U)/\sim$$

のことである. ここで $f \in \mathcal{F}(U)$ と $g \in \mathcal{F}(V)$ が同値 ($f \sim g$) とは, ある p の開近傍 $W \subset U \cap V$ が存在して $f|_W = g|_W$ が成り立つことと定義する. p の開近傍 U に対して自然な準同型 $\rho_{p,U} : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{F}_p$ が定まる. $f \in \mathcal{F}(U)$ に対して $\rho_{p,U}(\mathcal{F}) = f|_p$ とも書き, f の p における芽 (germ) と呼ぶ.

例 3.2.2. 0 を $\mathbf{C}^n$ の原点とするとき, 巾級数展開から $\mathcal{O}_0 = \mathbf{C}\{x\}$ がわかる.

定義 3.2.3. X 上の層 $\mathcal{F}$ に対してその**台** (support) を

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{F}) := \{p \in X \mid \mathcal{F}_p \neq 0\}$$

で定義する (ここで 0 は加群 $\{0\}$ を表わす).

補題 3.2.4. $\mathcal{F}'$ を X 上の準層とするとき, X 上の層 $\mathcal{F}$ であって, 各点 $p \in X$ に対して

$$\varinjlim \mathcal{F}'(U) = \mathcal{F}_p$$

をみたすものが同型を除いて一意的に存在する (ここで帰納極限は p の開近傍の全体にわたるものとする). この $\mathcal{F}$ のことを準層 $\mathcal{F}$ の**層化** (sheafification) と呼ぶ. なお, X が局所連結の場合は, 上の帰納極限において U は連結としてよいので, 準層 $\mathcal{F}'$ は連結開集合 U についてのみ $\mathcal{F}'(U)$ が定義されていれば十分である.

例 3.2.5. (1) A が可換群, 環, 加群などで, X が局所連結な位相空間のとき準層 $U \mapsto A$ (U は連結開集合) の層化を定数層と呼び同じ文字 A で表わす. 開集合 U の連結成分への分解を $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ とすれば, $A(U) = \prod_\lambda A$ (直積) である. 実際この対応は (S1),(S2) を満たす. また $p \in X$ に対して $A_p = \varinjlim A = A$ (U は p の連結開集合の全体を動く) が成り立つことは定義から明らかである.

(2) $\mathbf{C}^n$ 上の解析的微分作用素の環の層 $\mathcal{D}$ は準層 $U \mapsto \mathcal{O}(U)\langle\partial\rangle$ (U は連結開集合) の層化として定義される. 開集合 U の連結成分への分解を $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ とすれば, $\mathcal{D}(U) = \prod_\lambda \mathcal{O}(U_\lambda)\langle\partial\rangle$ である. 特に $\mathcal{D}$ の原点における茎は $\mathcal{D}_0 = \mathbf{C}\{x\}\langle\partial\rangle$ となる. $\mathcal{O}$ は左 $\mathcal{D}$-加群の層である. また $\mathcal{D}$ は $\mathcal{O}$-加群の層ともみなせる.

(3) 自然数 m に対して $\mathcal{D}(m)$ を準層

$$U \longmapsto \{P \in \mathcal{O}(U)\langle\partial\rangle \mid \mathrm{ord}(P) \leq m\} \qquad (U \text{ は } \mathbf{C}^n \text{ の連結開集合})$$

の層化とする. $\mathcal{D}(m)$ は $\mathcal{D}$ の $\mathcal{O}$-部分加群であるが, $\mathcal{D}$-部分加群ではない.

(4) $\mathbf{C}^n$ 上の代数的正則関数 (regular function) の層 $\mathcal{O}_{alg}$ は, 準層 $U \mapsto \mathcal{O}(U) \cap \mathbf{C}(x)$ (U は連結開集合) の層化として定義される. 開集合 U の連結成分への分解を $U = \bigcup_\lambda U_\lambda$ とすれば, $\mathcal{O}_{alg}(U) = \prod_\lambda(\mathcal{O}(U_\lambda) \cap \mathbf{C}(x))$ である. また $p \in \mathbf{C}^n$ に対して

$$(\mathcal{O}_{alg})_p = \varinjlim(\mathcal{O}(U) \cap \mathbf{C}(x)) = \left\{ \frac{f}{g} \;\middle|\; f, g \in \mathbf{C}[x],\ g(0) \neq 0 \right\}$$

(U は p を含む連結開集合の全体を動く) が成り立つ.

(5) $\mathbf{C}^n$ 上の代数的微分作用素の層 $\mathcal{D}_{alg}$ は準層 $U \mapsto \mathcal{O}_{alg}(U)\langle\partial\rangle$ (U は連結開集合) の層化として定義される. このとき $\mathcal{O}_{alg}$ は左 $\mathcal{D}_{alg}$-加群の層である. また $\mathcal{D}_{alg}$ は $\mathcal{O}_{alg}$-加群の層ともみなせる.

問題 1. 上の例を確かめよ. また $\mathcal{O}_{alg}(\mathbf{C}^n) = \mathbf{C}[x]$, $\mathcal{D}_{alg}(\mathbf{C}^n) = A_n$ (Weyl 代数) であることを示せ.

$\mathcal{R}$ を X 上の環の層, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を X 上の $\mathcal{R}$-加群の層とする. $\mathcal{G}$ が $\mathcal{F}$ の ($\mathcal{R}$-加群の) **部分層** (subsheaf) とは, 各開集合 U に対して $\mathcal{G}(U)$ が $\mathcal{F}(U)$ の部分 ($\mathcal{R}(U)$-) 加群であることである ($\mathcal{G} \subset \mathcal{F}$ と書く). また, このとき, $U \mapsto \mathcal{F}(U)/\mathcal{G}(U)$ で定義される準層の層化 $\mathcal{H}$ のことを $\mathcal{F}$ の $\mathcal{G}$ による**商層** (quotient sheaf) と呼び $\mathcal{F}/\mathcal{G}$ で表わす. $\mathcal{H}$ も自然に $\mathcal{R}$-加群の層になる.

$\mathcal{R}$ を X 上の環の層, $\mathcal{F}, \mathcal{G}$ を $\mathcal{R}$-加群の層とする. $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ が X 上の $\mathcal{R}$-**準同型**であるとは, 各開集合 U に対して $\mathcal{R}(U)$-準同型 $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が定義されていて, $U \supset V$ のとき, $\varphi(V) \circ \rho_{VU} = \rho'_{VU} \circ \varphi(U)$ が成り立っていることである. ただしここで ρ'_{VU} は層 $\mathcal{G}$ に付随する制限写像を表わすものとする. このとき $p \in U$ に対して, 自然に $\mathcal{R}_p$-準同型 $\varphi_p : \mathcal{F}_p \to \mathcal{G}_p$ が誘導される. 誤解のおそれのないときには, $\varphi(U)$ や φ_p を単に φ で表わすことにする. また, このとき 2 つの $\mathcal{R}$-加群の層 $\mathcal{K}er\,\varphi$ と $\mathcal{I}m\,\varphi$ を次で定義して, それぞれ層準同型 φ の**核** (kernel), **像** (image) と呼ぶ:

$$\begin{aligned} (\mathcal{K}er\,\varphi)(U) &:= \{f \in \mathcal{F}(U) \mid \varphi(U)(f) = 0\}, \\ (\mathcal{I}m\,\varphi)(U) &:= \{g \in \mathcal{G}(U) \mid \forall p \in U, \exists f_p \in \mathcal{F}_p \text{ s.t. } g|_p = \varphi_p(f_p)\}. \end{aligned}$$

$\mathcal{I}m\,\varphi$ は準層 $U \mapsto \mathrm{Im}\,\varphi(U)$ の層化に他ならない.

定義 3.2.6. X, Y を位相空間, $f : X \to Y$ を連続写像とする.

(1) $\mathcal{F}$ を X 上の層とすると, 準層

$$V \longmapsto \mathcal{F}(f^{-1}(V)) \quad (V \text{ は } Y \text{ の開集合})$$

は Y 上の層を定義する. この層を $f_*\mathcal{F}$ で表わし, $\mathcal{F}$ の f による順像 (direct image) と呼ぶ.

(2) $\mathcal{G}$ を Y 上の層とするとき, X 上の準層

$$U \longmapsto \varinjlim \mathcal{G}(V) \quad (U \text{ は } X \text{ の開集合})$$

(帰納極限は $f(U)$ を含む Y の開集合 V についてとる) の層化を $f^{-1}\mathcal{G}$ で表わし, $\mathcal{G}$ の f による**逆像** (inverse image) と呼ぶ. 特に $p \in X$ に対して $(f^{-1}\mathcal{G})_p = \mathcal{G}_{f(p)}$ が成立する.

$\mathcal{R}$ を X 上の環の層, $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ を X 上の $\mathcal{R}$-加群の層とするとき, 図式

$$\mathcal{F} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{G} \xrightarrow{\psi} \mathcal{H}$$

が X 上の $\mathcal{R}$-加群の**完全系列** (exact sequence) であるとは, φ, ψ が X 上の $\mathcal{R}$-準同型であって $\mathcal{I}m\,\varphi = \mathcal{K}er\,\psi$ が成立することである. これは, 各 $p \in X$ に対して

$$\mathcal{F}_p \xrightarrow{\varphi_p} \mathcal{G}_p \xrightarrow{\psi_p} \mathcal{H}_p$$

が $\mathcal{R}_p$-加群の完全系列であることに他ならない. 特に

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

が $\mathcal{R}$-加群の層の完全系列ならば $\mathcal{F}$ は $\mathcal{G}$ の $\mathcal{R}$-部分加群の層で $\mathcal{H} = \mathcal{G}/\mathcal{F}$ とみなせる.

定義 3.2.7. $\mathcal{R}$ を位相空間 X 上の環の層, $\mathcal{F}$ を左 $\mathcal{R}$-加群の層とする.

(1) $\mathcal{F}$ が X 上**局所有限生成** (locally finitely generated) とは, X の各点 p に対して p の開近傍 U と自然数 r, および U 上の $\mathcal{R}$-準同型 φ が存在して

$$\mathcal{R}^r \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

が U 上の $\mathcal{R}$-加群の完全系列 (すなわち $\mathcal{I}m\,\varphi = \mathcal{F}$) となることである. ここで $\mathcal{R}^r$ は開集合 V に対して r 個の直和加群 $\mathcal{R}(V)^r$ を対応させる層を表わす.

(2) $\mathcal{F}$ が (左 $\mathcal{R}$-加群の) **連接層** (coherent sheaf), あるいは**連接** (左) $\mathcal{R}$-加群であるとは, $\mathcal{F}$ が局所有限生成であって, 任意の自然数 r, 任意の開集合 U と U 上の任意の $\mathcal{R}$-準同型 $\varphi : \mathcal{R}^r \to \mathcal{F}$ に対して $\mathcal{K}er\,\varphi$ も U 上局所有限生成になること. 特に環の層 $\mathcal{R}$ が環の (左) 連接層とは $\mathcal{R}$ が (左) $\mathcal{R}$-加群の層として連接的であることと定義する.

上の定義の (2) において $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ を r 次元単位ベクトルとして $\mathcal{R}(U)^r$ の元とみなして $g_i := \varphi(U)(\vec{e}_i) \in \mathcal{F}(U)$ とおけば, 任意の開集合 $V \subset U$ と $\vec{f} := (f_1, \ldots, f_r) \in \mathcal{R}(V)^r$ に対して

$$\varphi(V)(\vec{f}) = \varphi(V)(\sum_{i=1}^{r} f_i \vec{e}_i) = \sum_{i=1}^{r} f_i (g_i \mid_V) \in \mathcal{F}(V)$$

となるから

$$(\mathcal{K}er\, \varphi)(V) = \{(f_1, \ldots, f_r) \in \mathcal{R}(V)^r \mid \sum_{i=1}^{r} f_i (g_i \mid_V) = 0\}$$

である.

命題 3.2.8. $\mathcal{R}$ を位相空間 X 上の環の層, $\mathcal{F}$ を X 上局所有限生成の $\mathcal{R}$-加群とすると, $\mathcal{F}$ の台 $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ は X の閉集合である.

証明: $p \in X$ とする. $p \notin \mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ と仮定する. 定義から p の開近傍 U と U 上の $\mathcal{R}$-加群の完全系列

$$\mathcal{R}^r \xrightarrow{\varphi} \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

が存在する. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ を r 次元単位ベクトルとして $f_i := \varphi(\vec{e}_i) \in \mathcal{F}(U)$ とおけば, $\mathcal{F}_p = 0$ だから p の開近傍 $V \subset U$ があって $f_i \mid_V = 0$ $(i = 1, \ldots, r)$ が成立する. $q \in V$ のとき, 上の完全系列は $\mathcal{F}_q$ が $\mathcal{R}_q$-加群として $f_1, \ldots, f_r$ の q における芽で生成されることを意味するから $\mathcal{F}_q = 0$ である. 故に $\mathrm{Supp}(\mathcal{F})$ は閉集合である. □

命題 3.2.9. (Serre の定理) $\mathcal{R}$ を X 上の環の連接層とする.

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

が X 上の $\mathcal{R}$-加群の層の完全系列とする. $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{H}$ のうち 2 つが連接的ならばもう一つも連接的である.

この命題の証明は比較的容易である. 適当な参考書を参照されたい.

系 3.2.10. $\mathcal{R}$ を X 上の環の連接層とする. $\mathcal{F}$ が直和 $\mathcal{R}^r$ の部分 $\mathcal{R}$-加群の層で, X で局所有限生成とすると $\mathcal{F}$ は $\mathcal{R}$-加群の連接層である.

証明: $\mathcal{R}^s$ から $\mathcal{F}$ への $\mathcal{R}$-準同型 φ は $\mathcal{R}^s$ から $\mathcal{R}^r$ への $\mathcal{R}$-準同型とみなせるから, $\mathcal{R}^r$ が連接であることを示せば十分. 上の命題で $\mathcal{F} = \mathcal{H} = \mathcal{R}$, $\mathcal{G} = \mathcal{R}^2$ とすれば, $\mathcal{R}^2$ が連接であることがわかる. これを繰り返せば $\mathcal{R}^r$ も連接であることがわかる. □

ここでは証明しないが, 次の事実は基本的である:

定理 3.2.11. (1) $\mathcal{O}$ は $\mathbf{C}^n$ 上の環の連接層である (岡潔);

(2) $\mathcal{O}_{alg}$ は $\mathbf{C}^n$ 上の環の連接層である (J.P. Serre);

(3) $\mathcal{D}$ は $\mathbf{C}^n$ 上の環の連接層である (柏原正樹).

(1) の証明については多変数関数論の教科書を参照されたい ([HU],[Hi],[Hö] など). 証明に用いられる主な道具は 2 章で説明した古典的な Weierstrass の予備定理である. (3) の証明には (1) を用いる. たとえば [Kash1], [Bj1], [Bj2] 等を参照されたい.

特に連接 $\mathcal{O}$-加群のことを解析的連接層 (coherent analytic sheaf), 連接 $\mathcal{O}_{alg}$-加群のことを代数的連接層 (coherent algebraic sheaf) と呼ぶ.

問題 2. 多項式環のシジジーに関する定理 (定理 1.2.26) を用いて $\mathcal{O}_{alg}$ が $\mathbf{C}^n$ 上の環の連接層であることを証明せよ.

定義 3.2.12. $\mathcal{R}$ を X 上の環の層, $\mathcal{F},\mathcal{G}$ を X 上の左 $\mathcal{R}$-加群の層とする. $\mathcal{F}$ から $\mathcal{G}$ への **$\mathcal{R}$-準同型** $\varphi : \mathcal{F} \to \mathcal{G}$ とは, X の任意の開集合 U に対して $\mathcal{R}(U)$-準同型 $\varphi(U) : \mathcal{F}(U) \to \mathcal{G}(U)$ が定義されていて, 開集合 U, V が $U \supset V$ を満たすとき $\varphi(V) \circ \rho_{VU} = \rho'_{VU} \circ \varphi(U)$ が成立することである. ただし ρ_{VU} は層 $\mathcal{F}$ に対する制限写像, ρ'_{VU} は層 $\mathcal{G}$ に対する制限写像を表す.

X の開集合 U に対して, $\mathcal{F}|_U$ から $\mathcal{G}|_U$ への $\mathcal{R}|_U$-**準同型**の全体 $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})(U)$ を対応させて得られる（可換群の）準層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{G})$ は層をなす. これを $\mathcal{F}$ から $\mathcal{G}$ への **$\mathcal{R}$-準同型の層**と呼ぶ.

命題 3.2.13. $\mathcal{R}$ を X 上の環の層, $\mathcal{F},\mathcal{G},\mathcal{H},\mathcal{I}$ を X 上の左 $\mathcal{R}$-加群の層とする.

(1) $\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$ を X 上の左 $\mathcal{R}$-加群の層の完全系列とするとき,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{F},\mathcal{I}) \longleftarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{G},\mathcal{I}) \longleftarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{H},\mathcal{I}) \longleftarrow 0$$

は X 上の可換群の層の完全系列である.

(2) $0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H}$ を X 上の左 $\mathcal{R}$-加群の層の完全系列とするとき,

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{I},\mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{I},\mathcal{G}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{R}}(\mathcal{I},\mathcal{H})$$

は X 上の可換群の層の完全系列である.

これは加群の場合の対応する事実からすぐにわかる.

最後に加群の層の係数拡大について述べておこう. $\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}$ を位相空間 X 上の環の層で, $\mathcal{R}$ は $\tilde{\mathcal{R}}$ の部分環の層であるとする. $\mathcal{F}$ を X 上の $\mathcal{R}$-加群の層とする. このとき, **係数拡大の層** $\tilde{\mathcal{F}} := \tilde{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}$ は準層

$$U \longmapsto \tilde{\mathcal{R}}(U) \otimes_{\mathcal{R}(U)} \mathcal{F}(U)$$

の層化として定義される. このとき $\tilde{\mathcal{F}}$ は自然に $\tilde{\mathcal{R}}$-加群となる.

次の命題は加群に対する同様の事実からすぐにわかる.

命題 3.2.14. $\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}$ を上と同様として,

$$\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

を X 上の $\mathcal{R}$-加群の完全系列とすると

$$\tilde{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

は $\tilde{\mathcal{R}}$-加群の完全系列である.

系 3.2.15. $\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}$ を上と同様として, $\mathcal{F}$ を X 上局所有限生成の $\mathcal{R}$-加群とすると $\tilde{\mathcal{F}} := \tilde{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F}$ は X 上局所有限生成の $\tilde{\mathcal{R}}$-加群である.

証明: 定義によって, 各点 p に対して, p のある開近傍 U 上で $\mathcal{R}$-加群の完全系列

$$\mathcal{R}^r \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow 0$$

が存在する. これと上の命題から U 上の $\tilde{\mathcal{R}}$-加群の完全系列

$$\tilde{\mathcal{R}}^r \longrightarrow \tilde{\mathcal{F}} \longrightarrow 0$$

を得る. これは $\tilde{\mathcal{F}}$ が局所有限生成であることを意味する. □

定義 3.2.16. $\mathcal{R}, \tilde{\mathcal{R}}$ を上と同様とするとき, $\tilde{\mathcal{R}}$ が $\mathcal{R}$ 上 (右 $\mathcal{R}$-加群として) **平坦** (flat) とは X 上の $\mathcal{R}$-加群の任意の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{G} \longrightarrow \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

に対して

$$0 \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{F} \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{G} \longrightarrow \tilde{\mathcal{R}} \otimes_{\mathcal{R}} \mathcal{H} \longrightarrow 0$$

が X 上の $\tilde{\mathcal{R}}$-加群の完全系列となることである. これは 各点 $p \in X$ に対して $\tilde{\mathcal{R}}_p$ が $\mathcal{R}_p$ 上平坦であることと同値である.

定理 3.2.17. $\mathbf{C}^n$ 上の正則関数の層 $\mathcal{O}$ は $\mathcal{O}_{alg}$ 上, 及び定数層 $\mathbf{C}[x]$ 上平坦である. また $\mathcal{D}$ は $\mathcal{D}_{alg}$ 上, 及び定数層 A_n 上平坦である.

これは 7 章 (補遺) で証明する.

3.3 微分方程式系と D-加群

以下では X を $\mathbf{C}^n$ の連結開集合とする. $\mathcal{M}$ を X 上の $\mathcal{D}$-加群の連接層とする. 定義 3.2.7 の (1), (2) を合せると, 各 $p \in X$ に対して p のある開近傍 U 上で $\mathcal{D}$-加群の層の完全系列

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{\varphi} \mathcal{D}^r \xleftarrow{\psi} \mathcal{D}^s \tag{3.1}$$

が存在する. $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ を r-次元単位ベクトル, $\vec{e}_1{}', \ldots, \vec{e}_s{}'$ を s-次元単位ベクトルとして $u_j \in \mathcal{M}(U)$ と $P_{ij} \in \mathcal{D}(U)$ を

$$\begin{aligned} u_j &:= \varphi(U)(\vec{e}_j) \in \mathcal{M}(U) \qquad (j = 1, \ldots, r), \\ \psi(\vec{e}_i{}') &= \sum_{j=1}^r P_{ij}\vec{e}_j = (P_{i1}, \ldots, P_{ir}) \qquad (i = 1, \ldots, s) \end{aligned}$$

で定義する. すると $\varphi \circ \psi = 0$ であるから $u_1, \ldots, u_r$ は $\mathcal{M}(U)$ において関係式

$$\sum_{j=1}^r P_{ij}u_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{3.2}$$

を満たす.

さて $\mathcal{F}$ を左 $\mathcal{D}$-加群の層としよう (たとえば $\mathcal{O}, \mathcal{D}$ や実領域では無限回微分可能関数の層, Schwartz の distribution の層, 佐藤超関数 (hyperfunction) の層など). 命題 3.2.13 により

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^r, \mathcal{F}) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^s, \mathcal{F})$$

は完全系列であるが, $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^r, \mathcal{F})(V)$ に対して $(f(\vec{e}_1), \ldots, f(\vec{e}_r)) \in \mathcal{F}(V)^r$ を対応させることにより $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{D}^r, \mathcal{F})$ は $\mathcal{F}^r$ に同型であるから

$$0 \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F}) \xrightarrow{\varphi'} \mathcal{F}^r \xrightarrow{\psi'} \mathcal{F}^s \tag{3.3}$$

という完全系列を得る. ここで層準同型 ψ' は, 開集合 $V \subset U$ と $(f_1, \ldots, f_r) \in \mathcal{F}(V)^r$ に対して

$$\psi'(V)((f_1, \ldots, f_r)) = \left(\sum_{j=1}^{r} P_{1j} f_j, \cdots, \sum_{j=1}^{r} P_{sj} f_j \right) \in \mathcal{F}(V)^s$$

で定義されることがわかる. 従って (3.3) から

$$\begin{aligned} \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})(V) &\simeq (\mathcal{K}er\, \psi')(V) \\ &= \{(f_1, \ldots, f_r) \in \mathcal{F}(V)^r \mid \sum_{j=1}^{r} P_{ij} f_j = 0 \ (1 \leq \forall i \leq s)\} \end{aligned}$$

を得る. 言換えれば, $\mathcal{M}$ の $\mathcal{D}$-加群としての生成元 $u_1, \ldots, u_r$ は $\mathcal{M}$ において (3.2) という関係式を満たしていて, 従って f が $\mathcal{M}$ から $\mathcal{F}$ への $\mathcal{D}$-準同型ならば, $f_j := f(u_j)$ はすべての $i = 1, \ldots, s$ に対して "関数空間" $\mathcal{F}$ における微分方程式系

$$\sum_{j=1}^{r} P_{ij} f_j = f\left(\sum_{j=1}^{r} P_{ij} u_j \right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

を満たさなければならない. 逆にこの微分方程式系をみたすような $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}$ があれば, すべての j に対して $f(u_j) = f_j$ となるような $\mathcal{D}$-準同型 f が一意的に定まることになる.

そこで, 連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ は U 上では, "未知関数"(実際には $\mathcal{M}$ の生成元) $u_1, \ldots, u_r$ に対する**連立線型微分方程式系** (3.2) を表わし, $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ はその $\mathcal{F}$ における (すなわち $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{F}$ としたときの) 解の層を表わしていると考えることができる.

ただし $\mathcal{M}$ に対して, (3.1) のような完全系列はいろいろ取り得るから, それによって, 対応する具体的な微分方程式系 (3.2) の形は (未知関数の個数 r もこめて) 変わりうることになるが, $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{F})$ は (3.1) のような完全系列の選び方によらず, $\mathcal{M}$ と $\mathcal{F}$ の抽象的な $\mathcal{D}$-加群としての構造そのものから定まる. そこで我々は, 開集合 X 上の微分方程式系とは X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群のことと定義しよう. すると (3.1) の完全系列はその一つの U における具体的表示を与えていることになる.

逆に $P_{ij} \in \mathcal{D}(X) (i = 1, \ldots, s; j = 1, \ldots, r)$ が与えられたとしよう. X 上の $\mathcal{D}$-加群の層 $\mathcal{N}$ を $U \subset X$ に対して

$$\mathcal{N}(U) := \{\sum_{i=1}^{s} Q_i(P_{i1}, \ldots, P_{ir}) \mid Q_1, \ldots, Q_s \in \mathcal{D}(U)\} \subset \mathcal{D}(U)^r$$

で定義して $\mathcal{M} := \mathcal{D}^r/\mathcal{N}$ とおこう. このとき

$$\mathcal{N} = \mathcal{D}(P_{11}, \dots, P_{1r}) + \dots + \mathcal{D}(P_{s1}, \dots, P_{sr}) \subset \mathcal{D}^r$$

と書くことにする. 系 3.2.10 によって $\mathcal{N}$ は X 上の $\mathcal{D}$-加群の連接層である. 従って命題 3.2.9 から $\mathcal{M}$ は X 上で定義された $\mathcal{D}$-加群の連接層である. このとき X 上で (3.1) の形の完全系列があることがわかる. ここで $\vec{e_j}$ の $\mathcal{M}(X)$ における剰余類を u_j と書けば, φ, ψ は $U \subset X$ に対して

$$\varphi(U)(A_1, \dots, A_r) = \sum_{j=1}^{r} A_j u_j \mid_U \in \mathcal{M}(U) \qquad (A_1, \dots, A_r \in \mathcal{D}(U)),$$

$$\psi(U)(B_1, \dots, B_s) = \sum_{i=1}^{s} B_i(P_{i1}, \dots, P_{ir}) \in \mathcal{D}(U)^r \qquad (B_1, \dots, B_s \in \mathcal{D}(U))$$

で定義される. このようにして, 与えられた $P_{ij} \in \mathcal{D}(X)$ $(i = 1, \dots, r; j = 1, \dots, s)$ から X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ が定まる. このとき, $\mathcal{M}$ を微分方程式系と同一視して

$$\mathcal{M} \quad : \quad \sum_{j=1}^{r} P_{ij} u_j = 0 \qquad (i = 1, \dots, s)$$

と書こう.

もちろん一般には与えられた $\mathcal{D}$-加群の連接層 $\mathcal{M}$ に対して (3.1) のような完全系列は X 上で存在するとは限らないので, 上のようにして与えられた P_{ij} 達から定まる $\mathcal{M}$ は X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群としては特殊なものである. 例えば X 上のベクトル束に値をとるような未知関数に対する微分方程式系に対応する連接 $\mathcal{D}$-加群は, 一般には X 上で大域的には (3.1) のような表示を持たないであろう.

特に $P_{ij} \in A_n = \mathbf{C}[x]\langle\partial\rangle$ から上のようにして定まる $\mathbf{C}^n$ 上の連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ のことを**代数的線型微分方程式系**と呼ぼう. このとき $(A_n)^r$ の部分 A_n-加群 N を

$$N := \{\sum_{i=1}^{s} Q_i(P_{i1}, \dots, P_{ir}) \mid Q_1, \dots, Q_s \in A_n\}$$

で定義して $M := (A_n)^r/N$ とおけば M は左 A_n-加群であり, 上のように定めた $\mathcal{M}$ とは $\mathcal{M} = \mathcal{D} \otimes_{A_n} M$ という関係がある (ここでは A_n と M を $\mathbf{C}^n$ 上の定数層とみなしている). 実際, $\psi'((Q_1, \dots, Q_s)) := \sum_{i=1}^{s} Q_i(P_{i1}, \dots, P_{ir})$ とおくと

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow (A_n)^r \xleftarrow{\psi'} (A_n)^s$$

は A_n-加群の完全系列であるから, 命題 3.2.14 により

$$0 \longleftarrow \mathcal{D} \otimes_{A_n} M \longleftarrow \mathcal{D}^r \xleftarrow{\psi} \mathcal{D}^s$$

は $\mathcal{D}$-加群の完全系列である. 従って $\mathcal{D} \otimes_{A_n} M = \mathcal{D}^r/\mathcal{I}m\,\psi = \mathcal{M}$ である. すなわち, 代数的線型微分方程式系とは, 有限生成の左 A_n-加群 M の $\mathcal{D}$ への係数拡大となるような連接 $\mathcal{D}$-加群のことである. 更に特別な場合として, $P_{ij} \in \mathbf{C}[\partial]$ の場合はこの $\mathcal{M}$ のことを**定数係数線型微分方程式系**と呼ぶ (これは座標系の取り方に依存する).

次に未知関数の変換を考えよう. $\mathcal{M}$ を $\mathbf{C}^n$ の開集合 X 上の連接 $\mathcal{D}$ 加群であって, $p \in X$ の近傍 U で $P_{ij} \in \mathcal{D}(U)$ を用いて

$$\mathcal{M} \quad : \quad \sum_{j=1}^{r} P_{ij} u_j = 0 \quad (i = 1, \ldots, s)$$

と表わされるものとしよう. $v_1, \ldots, v_m \in \mathcal{M}(U)$ を任意にとると, p の開近傍 $V \subset U$ と $A_{ij} \in \mathcal{D}(V)$ が存在して

$$v_i|_V = \sum_{j=1}^{r} A_{ij} u_j|_V \quad (i = 1, \ldots, m)$$

と書ける. $v_1, \ldots, v_m$ の生成する $\mathcal{M}$ の部分 $\mathcal{D}$-加群の層を

$$\mathcal{M}' := \mathcal{D}v_1 + \cdots + \mathcal{D}v_m \subset \mathcal{M}$$

とする. すなわち $\mathcal{M}'$ は準層

$$W \longmapsto \{Q_1(v_1|_W) + \cdots + Q_m(v_m|_W) \mid Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{D}(W)\}$$

の層化である (W は V の開集合). このとき $\mathcal{M}'$ は V 上の連接 $\mathcal{D}$-加群であり, $\mathcal{M}$ の部分層でもある. 特に $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ のときは (V では) $\mathcal{M}'$ は $\mathcal{M}$ と同じ微分方程式系を表わしていることになる. 一方 $\mathcal{M}'$ の表わす ("未知関数" $v_1, \ldots, v_m$ に関する) 微分方程式系は p の近傍では

$$0 \longleftarrow \mathcal{M}' \xleftarrow{\varphi'} \mathcal{D}^m \longleftarrow \mathcal{D}^\ell$$

という形の完全系列から定まるものである. ここで φ' は

$$\varphi'(Q_1, \ldots, Q_m) = Q_1 v_1 + \cdots + Q_m v_m$$

で定義される $\mathcal{D}$-準同型である. 従って $\mathcal{M}$ の生成元をとりかえることで, 見掛け上は異なるが, $\mathcal{D}$-加群としては同型な微分方程式系が得られる.

例 3.3.1. $\mathbf{C}^n$ 上の層 $\mathcal{O}$ を左 $\mathcal{D}$-加群とみなそう. $\mathcal{D}$-準同型 $h : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{O}$ を $P \in \mathcal{D}$ に対して $h(P) = P1 \in \mathcal{O}$ で定義しよう (ここで $P1$ は関数 $1 \in \mathcal{O}$ への微分作用素 P の作用を表わす). P を ($a_\alpha \in \mathcal{O}(U)$ として) (1.3) の形で表わしたとき $P1 = a_0$ であるから, $P1 = 0$ ならば適当な $Q_1, \ldots, Q_n \in \mathcal{D}$ を用いて $P = Q_1\partial_1 + \cdots + Q_n\partial_n$ と書ける. 逆に P がこう書けるとき $P1 = 0$ であるから,

$$0 \longleftarrow \mathcal{O} \xleftarrow{h} \mathcal{D} \xleftarrow{\psi} \mathcal{D}^n$$

は $\mathbf{C}^n$ 上の $\mathcal{D}$-加群の完全系列である (ただし $\psi(Q_1, \ldots, Q_n) := Q_1\partial_1 + \cdots + Q_n\partial_n$). すなわち $\mathcal{O}$ は $\mathcal{D}$-加群としては $\mathbf{C}^n$ 上の (定数係数) 微分方程式系

$$\partial_1 u = \ldots = \partial_n u = 0$$

に対応している. U が $\mathbf{C}^n$ の連結開集合のとき

$$\{f \in \mathcal{O}(U) \mid \partial_1 f = \ldots = \partial_n f = 0\} = \mathbf{C}$$

であるから微分方程式系 $\mathcal{O}$ の正則関数解の層 $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{O}, \mathcal{O})$ は $\mathbf{C}^n$ 上の定数層 $\mathbf{C}$ である.

例 3.3.2. $n=1$ として, 複素数 λ に対して $\mathbf{C}$ 上の連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}_\lambda$ を

$$\mathcal{M}_\lambda := \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial - \lambda) = \mathcal{D}u_\lambda$$

で定義しよう (u_λ は $1 \in \mathcal{D}(\mathbf{C})$ の $\mathcal{M}_\lambda$ における剰余類を表わす). すなわち $\mathcal{M}_\lambda$ は $\mathbf{C}$ 上の微分方程式 $(x\partial - \lambda)u_\lambda = 0$ を表わしている.

さて $\mathcal{D}$-準同型 $F : \mathcal{M}_{\lambda+1} \longrightarrow \mathcal{M}_\lambda$ を

$$F(Au_{\lambda+1}) = Axu_\lambda \qquad (A \in \mathcal{D})$$

で定義しよう. F が well-defined であることを確かめるため, p を $\mathbf{C}$ の任意の点として F が $\mathcal{D}_p$-準同型

$$F : \mathcal{D}_p/\mathcal{D}_p(x\partial - \lambda - 1) \longrightarrow \mathcal{D}_p/\mathcal{D}_p(x\partial - \lambda)$$

を誘導することを見よう. 実際 $A \in \mathcal{D}_p(x\partial - \lambda - 1)$ のとき, $A = B(x\partial - \lambda - 1)$ となる $B \in \mathcal{D}_p$ が存在する. このとき

$$0 = F(Au_{\lambda+1}) = AF(u_{\lambda+1}) = Axu_\lambda$$

でなければばならないが, 一方 (1.1) から

$$Ax = B(x\partial - \lambda - 1)x = Bx(x\partial - \lambda) \in \mathcal{D}_p(x\partial - \lambda)$$

であるから, F が well-defined であることがわかった. ($A \mapsto Ax$ は $\mathcal{D}$ から $\mathcal{D}$ への $\mathcal{D}$-準同型であるから F が $\mathcal{D}$-準同型であることは明らか.)

次に $\lambda \neq -1$ と仮定して $\mathcal{D}$-準同型 $G : \mathcal{M}_\lambda \longrightarrow \mathcal{M}_{\lambda+1}$ を

$$G(Au_\lambda) = \frac{1}{\lambda+1}A\partial u_{\lambda+1} \qquad (A \in \mathcal{D})$$

で定義しよう. ある $B \in \mathcal{D}_p$ によって $A = B(x\partial - \lambda)$ と書けるとき,

$$A\partial = B(x\partial - \lambda)\partial = B\partial(x\partial - \lambda - 1)$$

であるから G は $\mathcal{D}$-準同型として well-defined である. 更に

$$\begin{aligned} F(G(u_\lambda)) &= \frac{1}{\lambda+1}F(\partial u_{\lambda+1}) \\ &= \frac{1}{\lambda+1}\partial x u_\lambda = \frac{1}{\lambda+1}(x\partial + 1)u_\lambda \\ &= \frac{1}{\lambda+1}(\lambda+1)u_\lambda = u_\lambda \end{aligned}$$

かつ

$$\begin{aligned} G(F(u_{\lambda+1})) &= G(xu_\lambda) = \frac{1}{\lambda+1}x\partial u_{\lambda+1} \\ &= \frac{1}{\lambda+1}(\lambda+1)u_{\lambda+1} = u_{\lambda+1} \end{aligned}$$

であるから, F, G は共に同型で互いに逆写像である. 以上により $\lambda \neq -1$ ならば $\mathcal{M}_\lambda$ と $\mathcal{M}_{\lambda+1}$ は $\mathcal{D}$-加群として $\mathbf{C}$ 上で同型であることがわかった. 特に $v_\lambda := F(u_{\lambda+1}) \in \mathcal{M}_\lambda(\mathbf{C})$ とおけば $\mathcal{M}_\lambda = \mathcal{D}u_\lambda = \mathcal{D}v_\lambda$ であり, $\mathcal{M}_\lambda$ の生成元を v_λ にとりかえると, $\mathcal{M}_\lambda$ は微分方程式 $(x\partial - \lambda - 1)v_\lambda = 0$ を表わすことになる.

なお巾級数展開からわかるように

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_0, \mathcal{O})_0 \simeq \mathbf{C}, \qquad \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}_{-1}, \mathcal{O})_0 = 0$$

であるから $\mathcal{M}_0$ と $\mathcal{M}_{-1}$ は $\mathcal{D}$-加群として同型でない.

問題 1. U を $\mathbf{C}$ の連結開集合, $a_1, \ldots, a_m \in \mathcal{O}(U)$ として

$$P := \partial^m + a_1\partial^{m-1} + \cdots + a_{m-1}\partial + a_m \in \mathcal{D}(U)$$

とおき, U 上の連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D}P = \mathcal{D}u$ で定義する (u は $1 \in \mathcal{D}$ の剰余類). 一方 $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_m \in \mathcal{D}(U)^m$ を

$$\begin{array}{rcl}
\vec{P}_1 & := & (\partial, -1, 0, \ldots, 0), \\
\vec{P}_2 & := & (0, \partial, -1, 0, \ldots, 0), \\
\cdots & & \\
\vec{P}_{m-1} & := & (0, \ldots, 0, \partial, -1), \\
\vec{P}_m & := & (a_m, a_{m-1}, \ldots, a_2, \partial + a_1)
\end{array}$$

で定義し, U 上の連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{L}$ を

$$\mathcal{L} := \mathcal{D}^m/\mathcal{D}\vec{P}_1 + \cdots + \mathcal{D}\vec{P}_m = \mathcal{D}v_1 + \cdots + \mathcal{D}v_m$$

で定義する (v_i は単位ベクトル $\vec{e}_i \in \mathcal{D}^m$ の剰余類). このとき, それぞれ $F(u) = v_1$,

$$G(Q_1v_1 + \cdots + Q_mv_m) = (Q_1 + Q_2\partial + \cdots + Q_m\partial^{m-1})u \qquad (Q_1, \ldots, Q_m \in \mathcal{D})$$

を満たすような U 上の $\mathcal{D}$-準同型

$$F : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L}, \qquad G : \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M}$$

が定義でき互いに逆写像になっていることを示せ.

$\mathcal{M}$ を $p \in \mathbf{C}^n$ の開近傍 U で (3.1) のような表示を持つ連接 $\mathcal{D}$-加群とする. $\mathcal{D}$ の連接性により p の開近傍 $V \subset U$ では

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{\varphi} \mathcal{D}^r \xleftarrow{\psi} \mathcal{D}^s \xleftarrow{\chi} \mathcal{D}^t$$

という $\mathcal{D}$-加群の完全系列が存在する. このとき $Q_{ij} \in \mathcal{D}(V)$ があって, 任意の $A_1, \ldots, A_t \in \mathcal{D}$ に対して

$$\chi(A_1, \ldots, A_t) = \left(\sum_{i=1}^t A_iQ_{i1}, \ldots, \sum_{i=1}^t A_iQ_{is}\right) = \sum_{i=1}^t A_i(Q_{i1}, \ldots, Q_{is})$$

となる. すると $\psi \circ \chi = 0$ より

$$\sum_{k=1}^{s} Q_{ik} P_{kj} = 0 \quad (i = 1, \ldots, t;\ j = 1, \ldots, r)$$

が成立する. 従って $\mathcal{F}$ を $\mathcal{D}$-加群として $f_j, g_i \in \mathcal{F}$ が非斉次線型偏微分方程式系

$$\sum_{j=1}^{r} P_{ij} f_j = g_i \qquad (i = 1, \ldots, s) \tag{3.4}$$

を満たしているとすると,

$$\sum_{i=1}^{s} Q_{ki} g_i = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{s} Q_{ki} P_{ij} f_j = 0 \qquad (k = 1, \ldots, t) \tag{3.5}$$

でなければならない. 従って (3.5) は与えられた $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{F}$ に対して (3.4) が解 $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}$ を持つための必要条件 (両立条件) を表わしている.

例 3.3.3. 例 3.3.1 において

$$0 \longleftarrow \mathcal{O} \xleftarrow{h} \mathcal{D} \xleftarrow{\psi} \mathcal{D}^n \xleftarrow{\chi} \bigoplus_{i<j} \mathcal{D} \tag{3.6}$$

は $\mathbf{C}^n$ 上の $\mathcal{D}$-加群の完全系列である. ここで

$$\begin{aligned} \bigoplus_{i<j} \mathcal{D} &= \{(P_{ij})_{1 \le i < j \le n}) \mid P_{ij} \in \mathcal{D}\}, \\ \chi((P_{ij})_{i<j}) &= \sum_{1 \le i < j \le n} P_{ij}(0, \ldots, \overset{(i)}{\partial_j}, \ldots, \overset{(j)}{-\partial_i}, \ldots, 0) \in \mathcal{D}^n \end{aligned}$$

である. 実際, $\{\partial_1, \ldots, \partial_n\}$ は多項式環 $\mathbf{C}[\partial] \simeq \mathbf{C}[\xi]$ において明らかにグレブナ基底になっているから, 定理 1.2.26 により

$$0 \longleftarrow \mathbf{C} \xleftarrow{h'} \mathbf{C}[\partial] \xleftarrow{\psi'} \mathbf{C}[\partial]^n \xleftarrow{\chi'} \bigoplus_{i<j} \mathbf{C}[\partial]$$

は $\mathbf{C}[\partial]$-加群の完全系列である. ただし h', ψ', χ' は h, ψ, χ を $\mathcal{D}$ から定数層 $\mathbf{C}[\partial]$ へ制限したものである. $\mathcal{D}$ は $\mathbf{C}[\partial]$ 上平坦であることがわかるので, この完全系列にテンソル積 $\mathcal{D} \otimes_{\mathbf{C}[\partial]}$ を施せば, (3.6) が完全系列であることがわかる. 従って, 非斉次方程式系

$$\partial_i f = g_i \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

が $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{F}$ において解 f を持つためには, 両立条件

$$\partial_j g_i = \partial_i g_j \qquad (1 \le i < j \le n)$$

が満たされていることが必要である.

3.4 特性多様体

$\mathcal{M}$ を $\mathbf{C}^n$ の連結開集合 X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群とする. $\mathcal{M}_0$ を $\mathcal{M}$ の局所有限生成の $\mathcal{O}$-部分加群であって X 上で $\mathcal{M} = \mathcal{D}\mathcal{M}_0$ となっているようなものとする (この右辺は準層 $U \mapsto \mathcal{D}(U)\mathcal{M}_0(U) = \{\sum_{i=1}^m P_i v_i \mid m \in \mathbf{N},\, P_i \in \mathcal{D}(U),\, v_i \in \mathcal{M}_0(U)\}$ の層化を表わす). 例えば, $\mathcal{M}$ が $U \subset X$ 上で (3.1) の表示を持てば,

$$\mathcal{M}_0 := \mathcal{O}u_1 + \cdots + \mathcal{O}u_r \subset \mathcal{M}$$

(右辺は準層 $U \mapsto \mathcal{O}(U)u_1|_U + \ldots + \mathcal{O}(U)u_r|_U$ の層化を表わす) は U 上では上記の条件を満たす. 従って上のような $\mathcal{M}_0$ は少なくとも局所的にはいつでも存在する.

さて, 上のような $\mathcal{M}_0$ を用いて $k \in \mathbf{Z}$ に対して $\mathcal{M}_k := \mathcal{D}(k)\mathcal{M}_0$ とおこう (ただし $k < 0$ のときは $\mathcal{M}_k = 0$ とする). $\mathcal{D}(k)$ は $\mathcal{O}$-加群としては $\mathcal{O}$ の有限個の直和だから, 各 $\mathcal{M}_k$ は $\mathcal{M}$ の局所有限生成の $\mathcal{O}$-部分加群である. このとき, $\mathcal{O}$-加群 $\mathrm{gr}(\mathcal{M})$ を直和

$$\mathrm{gr}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{k=0}^{\infty}(\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1})$$

で定義しよう. $\mathrm{gr}(\mathcal{M})$ には次のようにして, 自然に $\mathcal{O}[\xi]$-加群の構造が入る (ここで $\mathcal{O}[\xi] = \mathcal{O}[\xi_1, \ldots, \xi_n]$ は準層 $U \mapsto \mathcal{O}(U)[\xi]$ の層化である): $P \in \mathcal{D}(m)$ と $u \in \mathcal{M}_k$ に対して

$$Pu \in \mathcal{D}(m)\mathcal{M}_k = \mathcal{D}(m)\mathcal{D}(k)\mathcal{M}_0 = \mathcal{D}(m+k)\mathcal{M}_0 = \mathcal{M}_{m+k}$$

であるから, 同値類 $[Pu] \in \mathcal{M}_{m+k}/\mathcal{M}_{m+k-1}$ は P の主シンボル $\sigma(P) \in \mathcal{O}[\xi]$ のみによって定まる. これによって $\mathrm{gr}(\mathcal{M})$ には $\mathcal{O}[\xi]$ が作用しており, $\mathcal{O}[\xi]$-加群になる.

$$T^*X := \{(x,\xi) = (x, \xi_1 dx_1 + \cdots + \xi_n dx_n) \mid x \in X, \xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbf{C}^n\}$$

を X の余接束として, $\mathcal{O}_{T^*X}$ を T^*X 上の (x,ξ) の正則関数の環の層とする. 射影 $\pi : T^*X \longrightarrow X$ を $\pi(x,\xi) = x$ で定義すると $\pi^{-1}\mathcal{O}[\xi]$ は $\mathcal{O}_{T^*X}$ の部分環の層であり, 定理 3.2.17 から $\mathcal{O}_{T^*X}$ は $\pi^{-1}\mathcal{O}[\xi]$ 上平坦であることがわかる. 一般に X 上の $\mathcal{O}[\xi]$-加群 $\mathcal{F}$ に対して

$$\mu(\mathcal{F}) := \mathcal{O}_{T^*X} \otimes_{\pi^{-1}\mathcal{O}[\xi]} \pi^{-1}\mathcal{F}$$

とおく. これは T^*X 上の $\mathcal{O}_{T^*X}$-加群である.

定義 3.4.1. 上の仮定のもとで T^*X 上の層 $\mu(\mathrm{gr}(\mathcal{M}))$ の台のことを $\mathcal{M}$ の**特性多様体** (characteristic variety) と呼び $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ で表わす.

$\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ が 上のような $\mathcal{M}_0$ のとり方によらないことを示すのが次の目標である. そのために上のような状況を少し一般化しておこう.

定義 3.4.2. $\mathcal{M}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群とする. $\{\mathcal{M}_k\}_{k\in\mathbf{Z}}$ が $\mathcal{M}$ の (X 上の) **good filtration** とは,

(1) 各 $\mathcal{M}_k$ は $\mathcal{M}$ の局所有限生成 $\mathcal{O}$-部分加群;

(2) すべての $k\in\mathbf{Z}$ について $\mathcal{M}_k\subset\mathcal{M}_{k+1}$ かつある $\ell\in\mathbf{Z}$ に対して $\mathcal{M}_\ell=0$;

(3) すべての $k,\ell\in\mathbf{Z}$ に対して $\mathcal{D}(\ell)\mathcal{M}_k\subset\mathcal{M}_{k+\ell}$;

(4) $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}\mathcal{M}_k=\mathcal{M}$ すなわち, すべての $p\in X$ に対して $\bigcup_{k\in\mathbf{Z}}(\mathcal{M}_k)_p=\mathcal{M}_p$;

(5) ある $k_0\in\mathbf{Z}$ があって, すべての $k\geq k_0$ に対して $\mathcal{M}_k=\mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}_{k_0}$.

このとき各 $\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$ は自然に $\mathcal{O}$-加群の構造を持つ. $\mathrm{gr}(\mathcal{M})$ を直和

$$\mathrm{gr}(\mathcal{M}):=\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}}\mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$$

で定義すると, $\mathrm{gr}(\mathcal{M})$ は $\mathcal{D}$ の $\mathcal{M}$ への作用から導かれる $\mathcal{O}[\xi]\simeq\bigoplus_{k\geq0}\mathcal{D}(k)/\mathcal{D}(k-1)$ の作用で $\mathcal{O}[\xi]$-加群となる. こうして定義される $\mathcal{O}[\xi]$-加群 $\mathrm{gr}(\mathcal{M})$ のことを $\mathcal{M}$ の filtration $\{\mathcal{M}_k\}$ に付随する **graded module** と呼ぶ.

$\mathcal{M}_0$ を $\mathcal{M}=\mathcal{D}\mathcal{M}_0$ を満たすような $\mathcal{M}$ の局所有限生成 $\mathcal{O}$-部分加群とすると, $\mathcal{M}_k:=\mathcal{D}(k)\mathcal{M}_0$ とおけば $\{\mathcal{M}_k\}$ が good filtration であることは明らかであろう. なお, 上の条件 (5) において $k_1\geq k_0$ ならば $k\geq k_1$ のとき

$$\mathcal{M}_k=\mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}_{k_0}=\mathcal{D}(k-k_1)\mathcal{D}(k_1-k_0)\mathcal{M}_{k_0}=\mathcal{D}(k-k_1)\mathcal{M}_{k_1}$$

であるから k_0 を k_1 にとりかえても (5) が成り立つことに注意しておく.

補題 3.4.3. $\{\mathcal{M}_k\}$ と $\{\mathcal{M}'_k\}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ の 2 つの good filtration とすると, 任意の $p\in X$ に対して, p のある開近傍 U とある $\ell\in\mathbf{N}$ が存在して, すべての $k\in\mathbf{Z}$ に対して U 上で

$$\mathcal{M}_{k-\ell}\subset\mathcal{M}'_k\subset\mathcal{M}_{k+\ell}$$

が成立する.

証明: 定義 3.4.2 の (5) から, すべての $k\geq k_0$ に対して $\mathcal{M}_k=\mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}_{k_0}$ かつ $\mathcal{M}'_k=\mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}'_{k_0}$ が成り立つような $k_0\in\mathbf{N}$ をとれる. 任意の $p\in X$ に対して, p の近傍 U と $u_1,\dots,u_r\in\mathcal{M}_{k_0}(U)$ が存在して U 上で

$$\mathcal{M}_{k_0}=\mathcal{O}u_1+\cdots+\mathcal{O}u_r$$

が成立する. 同様にして $v_1,\dots,v_s\in\mathcal{M}'_{k_0}(U)$ が存在して U 上で

$$\mathcal{M}'_{k_0}=\mathcal{O}v_1+\cdots+\mathcal{O}v_s$$

が成立しているとしてよい.

$$\mathcal{M}'_{k_0}\subset\mathcal{M}=\bigcup_{k\geq k_0}\mathcal{M}_k=\bigcup_{k\geq k_0}\mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}_{k_0}=\mathcal{D}u_1+\cdots+\mathcal{D}u_r$$

であるから, 必要なら p の開近傍 U を小さく取り直すことにより, $P_{ij}\in\mathcal{D}(U)$ が存在して

$$v_i=\sum_{j=1}^r P_{ij}u_j\qquad(i=1,\dots,s)$$

が成立する. 従って P_{ij} 達の階数の最大値を ℓ とおけば

$$\mathcal{M}'_{k_0} \subset \mathcal{D}(\ell)\mathcal{M}_{k_0} = \mathcal{M}_{k_0+\ell}$$

である. 定義によって $\mathcal{M}'_{k_1} = 0$ なる $k_1 \leq k_0$ がある. このときすべての $k \in \mathbf{Z}$ に対して $\mathcal{M}'_k \subset \mathcal{M}_{\ell+k_0-k_1+k}$ が成立する. 実際, $k \geq k_0$ のときは

$$\mathcal{M}'_k = \mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}'_{k_0} \subset \mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}_{\ell+k_0} = \mathcal{M}_{\ell+k} \subset \mathcal{M}_{\ell+k_0-k_1+k},$$

$k_1 < k < k_0$ のときは

$$\mathcal{M}'_k \subset \mathcal{M}'_{k_0} \subset \mathcal{M}_{\ell+k_0} \subset \mathcal{M}_{\ell+k_0-k_1+k},$$

$k \leq k_1$ のときは $\mathcal{M}'_k = 0$ であるから明らか. 従って $\ell + k_0 - k_1$ を改めて ℓ とすればよい. $\mathcal{M}_k$ と $\mathcal{M}'_k$ を取り替えて同じ議論をすれば補題の主張が示される. □

定理 3.4.4. $\mathcal{M}$ を X 上定義された連接 $\mathcal{D}$-加群, $\{\mathcal{M}_k\}$ と $\{\mathcal{M}'_k\}$ を $\mathcal{M}$ の 2 つの good filtration として

$$\mathrm{gr}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}, \qquad \mathrm{gr}'(\mathcal{M}) := \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathcal{M}'_k/\mathcal{M}'_{k-1}$$

とおくと,

$$\mathrm{Supp}(\mu(\mathrm{gr}(\mathcal{M}))) = \mathrm{Supp}(\mu(\mathrm{gr}'(\mathcal{M}))) = \mathrm{Char}(\mathcal{M})$$

が成立する.

証明: 補題 3.4.3 によりある $\ell \in \mathbf{N}$ があって, すべての $k \in \mathbf{Z}$ に対して

$$\mathcal{M}_{k-\ell} \subset \mathcal{M}'_k \subset \mathcal{M}_{k+\ell}$$

が成立するとしてよい. $\bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathcal{M}_{k+\ell}/\mathcal{M}_{k+\ell-1} = \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$ であるから, $\{\mathcal{M}_k\}$ の添字をずらすことにより, すべての $k \in \mathbf{Z}$ について

$$\mathcal{M}_{k-\ell} \subset \mathcal{M}'_k \subset \mathcal{M}_k$$

が成立すると仮定しても一般性を失わない. このとき, 定理の主張を ℓ に関する帰納法で証明しよう.

(1) $\ell = 1$ のとき: 各 $k \in \mathbf{Z}$ について, $\mathcal{O}$-加群の 2 つの完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{M}'_k/\mathcal{M}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1} \longrightarrow \mathcal{M}_k/\mathcal{M}'_k \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{M}_{k-1}/\mathcal{M}'_{k-1} \longrightarrow \mathcal{M}'_k/\mathcal{M}'_{k-1} \longrightarrow \mathcal{M}'_k/\mathcal{M}_{k-1} \longrightarrow 0$$

が自然に定義される. ここで

$$\mathcal{L} := \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathcal{M}'_k/\mathcal{M}_{k-1}, \qquad \mathcal{N} := \bigoplus_{k\in\mathbf{Z}} \mathcal{M}_k/\mathcal{M}'_k$$

とおくと, $\mathcal{M}'_{k-1} \subset \mathcal{M}_{k-1}$ かつ $\mathcal{M}_{k-1} \subset \mathcal{M}'_k$ だから $\mathcal{L}, \mathcal{N}$ は自然な $\mathcal{O}[\xi]$-加群の構造を持つ. 従って上の完全系列から $\mathcal{O}[\xi]$-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathrm{gr}'(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

を得る. $\mathcal{O}_{T^*X}$ は $\pi^{-1}\mathcal{O}[\xi]$ 上平坦であるから,

$$0 \longrightarrow \mu(\mathcal{L}) \longrightarrow \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{M})) \longrightarrow \mu(\mathcal{N}) \longrightarrow 0,$$
$$0 \longrightarrow \mu(\mathcal{N}) \longrightarrow \mu(\mathrm{gr}'(\mathcal{M})) \longrightarrow \mu(\mathcal{L}) \longrightarrow 0$$

は $\mathcal{O}_{T^*X}$-加群の完全系列である. これから

$$\mathrm{Supp}(\mu(\mathrm{gr}(\mathcal{M}))) = \mathrm{Supp}(\mu(\mathcal{L})) \cup \mathrm{Supp}(\mu(\mathcal{N})) = \mathrm{Supp}(\mu(\mathrm{gr}'(\mathcal{M})))$$

を得る.

(2) $\ell \geq 2$ のとき: $\mathcal{M}''_k := \mathcal{M}_{k-1} + \mathcal{M}'_k$ とおくと $\{\mathcal{M}''_k\}$ は $\mathcal{M}$ の good filtration である. 定義からすべての整数 k に対して

$$\mathcal{M}_{k-1} \subset \mathcal{M}''_k \subset \mathcal{M}_k, \qquad \mathcal{M}''_{k-\ell+1} \subset \mathcal{M}'_k \subset \mathcal{M}''_k$$

が成り立つことがわかる. $\mathrm{gr}''(\mathcal{M}) := \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{M}''_k/\mathcal{M}''_{k-1}$ とおくと, 帰納法の仮定から

$$\mathrm{Supp}(\mu(\mathrm{gr}(\mathcal{M}))) = \mathrm{Supp}(\mu(\mathrm{gr}''(\mathcal{M}))) = \mathrm{Supp}(\mu(\mathrm{gr}'(\mathcal{M})))$$

を得る. □

例 3.4.5. $\mathcal{O}$ を $\mathbf{C}^n$ 上の $\mathcal{D}$-加群とみなす. $\mathcal{M}_0 := \mathcal{O}$ とすれば $\mathcal{M}_k := \mathcal{D}(k)\mathcal{O} = \mathcal{O}$ であるから $\{\mathcal{M}_k\}$ は $\mathcal{O}$ の good filtration で, この filtration に付随する graded module は

$$\mathrm{gr}(\mathcal{O}) = \mathcal{O} = \mathcal{O}[\xi]/(\mathcal{O}[\xi]\xi_1 + \cdots + \mathcal{O}[\xi]\xi_n)$$

であるから

$$\mu(\mathrm{gr}(\mathcal{O})) = \mathcal{O}_{T^*X}/(\mathcal{O}_{T^*X}\xi_1 + \cdots + \mathcal{O}_{T^*X}\xi_n)$$

となり, 従って

$$\mathrm{Char}(\mathcal{O}) = \mathrm{Supp}(\mu(\mathcal{O})) = \{(x,\xi) \in T^*X \mid \xi_1 = \ldots = \xi_n = 0\}$$

である.

次の２つの補題の証明は省略する. 例えば, [Kash1] を参照のこと.

補題 3.4.6. $\mathcal{M}_0$ を連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ の局所有限生成の $\mathcal{O}$-部分加群とすると, $\mathcal{M}_0$ は連接 $\mathcal{O}$-加群である.

補題 3.4.7. $\mathcal{M}$ を連接 $\mathcal{D}$-加群で $\{\mathcal{M}_k\}$ は定義 3.4.2 の (1)—(4) をみたすものとして $\mathrm{gr}(\mathcal{M}) := \bigoplus_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1}$ とおくと, $\mathrm{gr}(\mathcal{M})$ が連接 $\mathcal{O}[\xi]$-加群であるための必要十分条件は $\{\mathcal{M}_k\}$ が定義 3.4.2 の (5) も満たすことである.

定理 3.4.8.

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{M} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N} \longrightarrow 0$$

を連接 $\mathcal{D}$-加群の完全系列とすると $\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \mathrm{Char}(\mathcal{L}) \cup \mathrm{Char}(\mathcal{N})$ が成立する.

証明: $\mathcal{L}$ は $\mathcal{M}$ の $\mathcal{D}$-部分加群とみなせる. $\{\mathcal{M}_k\}$ を $\mathcal{M}$ の good filtration として

$$\mathcal{L}_k := \mathcal{M}_k \cap \mathcal{L}, \qquad \mathcal{N}_k := \varphi(\mathcal{M}_k)$$

とおくと, $\mathcal{M}_k = \mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}_{k_0}$ ならば $\mathcal{N}_k = \varphi(\mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{M}_{k_0}) = \mathcal{D}(k-k_0)\mathcal{N}_{k_0}$ が成り立つから, $\{\mathcal{N}_k\}$ は $\mathcal{N}$ の good filtration である. 各整数 k について定義から

$$0 \longrightarrow \mathcal{L}_k \longrightarrow \mathcal{M}_k \xrightarrow{\varphi} \mathcal{N}_k \longrightarrow 0 \tag{4.1}$$

は $\mathcal{O}$-加群の完全系列である. 従って補題3.4.6 により $\mathcal{M}_k$ と $\mathcal{N}_k$ は連接 $\mathcal{O}$-加群だから, 命題3.2.9 により $\mathcal{L}_k$ も連接 $\mathcal{O}$-加群, 特に局所有限生成である. (4.1) からそれぞれの filtration に付随する graded module をとって, $\mathcal{O}[\xi]$-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{L}) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{M}) \longrightarrow \mathrm{gr}(\mathcal{N}) \longrightarrow 0$$

を得る. $\{\mathcal{M}_k\}$, $\{\mathcal{N}_k\}$ は good filtration だから, 補題 3.4.7 と命題3.2.9 により $\{\mathcal{L}_k\}$ も good filtration であることがわかる. 従って $\mathcal{O}_{T^*X}$-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{L})) \longrightarrow \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{M})) \longrightarrow \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N})) \longrightarrow 0$$

と定理 3.4.4 から結論を得る. □

次に, 特性多様体のもう少し具体的な表示を導こう. $\mathcal{M}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群とすると, $p \in X$ の開近傍 U で $\mathcal{D}$-加群の完全系列

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{\varphi} \mathcal{D}^r$$

が存在する. このとき $\mathcal{M}_k := \varphi(\mathcal{D}(k)^r)$ とおくと $\{\mathcal{M}_k\}$ は $\mathcal{M}$ の good filtration である.

$$\mathcal{N} := \mathcal{K}er\,\varphi, \qquad \mathcal{N}_k := \mathcal{K}er\,\varphi \cap \mathcal{D}(k)^r$$

とおくと,

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{\varphi} \mathcal{D}^r \longleftarrow \mathcal{N} \longleftarrow 0$$

は $\mathcal{D}$-加群の完全系列だから $\mathcal{N}$ は U 上の連接 $\mathcal{D}$-加群であって, 定理3.4.8 の証明からわかるように $\{\mathcal{N}_k\}$ は $\mathcal{N}$ の good filtration である. これらの filtration に付随する graded module をとれば $\mathcal{O}_{T^*X}$-加群の完全系列

$$0 \longleftarrow \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{M})) \longleftarrow (\mathcal{O}_{T^*X})^r \longleftarrow \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N})) \longleftarrow 0$$

を得る. 従って $\mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N}))$ を $(\mathcal{O}_{T^*X})^r$ の部分加群とみなしたとき,

$$\mathrm{Char}(\mathcal{M}) \cap T^*U = \{p^* = (x,\xi) \in T^*U \mid \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N}))_{p^*} \neq (\mathcal{O}_{T^*U})^r_{p^*}\}$$

を得る. 特に $r = 1$ のときは

$$\begin{aligned} \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N}))_{p^*} \neq (\mathcal{O}_{T^*U})_{p^*} \quad &\Longleftrightarrow \quad \forall f \in \mathrm{gr}(\mathcal{N})_{p^*},\ f(x,\xi) = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \forall P \in \mathcal{N}_{p^*},\ \sigma(P)(x,\xi) = 0 \end{aligned}$$

であるから, 次の命題が証明できた.

命題 3.4.9. $\mathcal{M}$ をある $u \in \mathcal{M}(X)$ によって $\mathcal{M} = \mathcal{D}u$ となっているような連接 $\mathcal{D}$-加群として, $\mathcal{D}$ の左イデアルの層 $\mathcal{I}$ を $\mathcal{I}(U) := \{P \in \mathcal{D}(U) \mid Pu = 0\}$ で定義すると,

$$\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \{(x,\xi) \in T^*X \mid 任意の\ P \in \mathcal{I}_x\ に対して\ \sigma(P)(x,\xi) = 0\}$$

が成立する.

定理 3.4.10. $\mathcal{M}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群とすると, その特性多様体 $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ は T^*X の斉次な解析的部分集合である. すなわち $(x,\xi) \in \mathrm{Char}(\mathcal{M})$ ならば, すべての $c \in \mathbf{C} \setminus \{0\}$ に対して $(x, c\xi) \in \mathrm{Char}(\mathcal{M})$ であり, $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ は局所的には (x,ξ) の有限個の正則関数の共通零点である.

証明: $\mathcal{M}$ の生成元の個数 r についての帰納法で証明しよう. まず $r = 1$ とする. $\mathcal{M} = \mathcal{D}u$ なる $u \in \mathcal{M}$ をとって

$$\mathcal{I} := \{P \in \mathcal{D} \mid Pu = 0\}, \qquad \mathcal{I}_k := \mathcal{I} \cap \mathcal{D}(k)$$

とおけば, 前の議論からわかるように $\{\mathcal{I}_k\}$ は $\mathcal{I}$ の good filtration であって, graded ideal $\mathrm{gr}(\mathcal{I})$ は局所有限生成だから, 有限個の $P_1, \dots, P_s \in \mathcal{I}$ が存在して, $\mathrm{gr}(\mathcal{I})$ は $\mathcal{O}[\xi]$ 上 $\sigma(P_1), \dots, \sigma(P_s)$ で生成される. 従って命題 3.4.9 により

$$\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \{(x,\xi) \mid \sigma(P_1)(x,\xi) = \ldots = \sigma(P_s)(x,\xi) = 0\}$$

が成り立つから, $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ は T^*X の斉次な解析的部分集合である.

$r > 1$ のときは, $\mathcal{M}$ の U における生成元 $u_1, \dots, u_r$ をとって,

$$\mathcal{N} := \mathcal{D}u_1 + \cdots + \mathcal{D}u_{r-1} \subset \mathcal{M}$$

とおくと, $\mathcal{N}$ は連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ の $\mathcal{D}$-部分加群だから連接である. そこで $\mathcal{L} := \mathcal{M}/\mathcal{N}$ とおけば,

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{L} \longrightarrow 0$$

は連接 $\mathcal{D}$-加群の完全系列である. $\mathcal{L} = \mathcal{D}[u_r]$ ($[u_r]$ は u_r の $\mathcal{M}/\mathcal{N}$ における剰余類を表わす) であるから, $\mathcal{L}$ と $\mathcal{N}$ に対しては帰納法の仮定が使えて, 定理 3.4.8 によって $\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \mathrm{Char}(\mathcal{L}) \cup \mathrm{Char}(\mathcal{N})$ も斉次な解析的部分集合であることがわかる. □

3.5 Cauchy 問題

X を $\mathbf{C}^n$ の連結開集合として, Y を X の複素 (解析的) 部分多様体とする. 従って各点 $p \in Y$ の X における開近傍 U では, 微分が一次独立な正則関数 $\varphi_1, \dots, \varphi_d \in \mathcal{O}(U)$ があって

$$Y \cap U = \{x \in U \mid \varphi_1(x) = \ldots = \varphi_d(x) = 0\}$$

となる. 自然な埋め込み写像を $\iota : Y \longrightarrow X$ とする. 一般に X 上の層 $\mathcal{F}$ に対して, $\mathcal{F}|_Y := \iota^{-1}\mathcal{F}$ と略記しよう. $\mathcal{F}|_Y$ は Y の各点 p に対して 茎が $\mathcal{F}_p$ と一致するような Y 上の層である.

Y 上の正則関数の層を $\mathcal{O}_Y$ で表わそう. $a \in \mathcal{O}|_Y$ の $f \in \mathcal{O}_Y$ への作用を $(a|_Y)f \in \mathcal{O}_Y$ で定義すれば, $\mathcal{O}_Y$ は $\mathcal{O}|_Y$-加群となる. ここで $a|_Y$ は関数 a の Y への制限を表わす.

さて, 上記のような U と $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ をとるとき

$$0 \longleftarrow \mathcal{O}_Y \xleftarrow{\iota^*} \mathcal{O}|_Y \xleftarrow{\varphi} (\mathcal{O}|_Y)^d \tag{5.1}$$

は $\mathcal{O}_Y$-加群の完全系列である. ここで ι^*, φ はそれぞれ

$$\iota^*(f) := f|_Y, \qquad \varphi(f_1, \ldots, f_d) := \sum_{i=1}^{d} \varphi_i f_i$$

で定義される. これは, 正則な座標変換によって, 局所的には $\varphi_i = x_i$ $(i = 1, \ldots, d)$ とできることからすぐにわかる.

Y 上には解析的微分作用素の層 $\mathcal{D}_Y$ が定義される. 実際, $Y \cap U = \{x \in U \mid x_1 = \ldots = x_d = 0\}$ となるような正則な局所座標系 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ をとれば, $\mathcal{D}_Y(Y \cap U)$ は $Y \cap U$ では $(x_{d+1}, \ldots, x_n)$ を変数として 3 章 1 節で定義した $\mathcal{D}(Y \cap U)$ に他ならない. Y 全体では, 座標変換による変換で貼り合わせたものが $\mathcal{D}_Y$ である. より正確に言えば, $\mathcal{D}_Y$ は Y 上の環の層 $V \longmapsto \mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathcal{O}_Y(V))$ の部分環の層であって局所的には上記のように表わされるものである. 従って $\mathcal{O}_Y$ は, 微分作用素の正則関数への作用によって $\mathcal{D}_Y$-加群である.

定義 3.5.1. Y 上の層 $\mathcal{D}_{Y\to X}$ を $\mathcal{D}_{Y\to X} := \mathcal{O}_Y \otimes_{\mathcal{O}|_Y} (\mathcal{D}|_Y)$ で定義する. ここで $\mathcal{D}|_Y$ は左 $\mathcal{O}|_Y$-加群, $\mathcal{O}_Y$ は右 $\mathcal{O}|_Y$-加群とみなしている. $\mathcal{D}_Y$ の $\mathcal{O}_Y$ への左からの作用と $\mathcal{D}|_Y$ の $\mathcal{D}|_Y$ への右からの作用によって $\mathcal{D}_{Y\to X}$ は左 $\mathcal{D}_Y$-加群かつ右 $\mathcal{D}|_Y$-加群であって, $L \in \mathcal{D}_Y, R \in \mathcal{D}|_Y, P \in \mathcal{D}_{Y\to X}$ に対して $L(PR) = (LP)R$ が成り立つ. 実際, テンソル積の定義から, $\mathcal{D}_{Y\to X}$ の元 (切断) P は $f_i \in \mathcal{O}_Y$ と $P_i \in \mathcal{D}|_Y$ によって $P = \sum_i f_i \otimes P_i$ と表わされて,

$$(LP)R = (\sum_i (Lf_i) \otimes P_i)R = \sum_i (Lf_i) \otimes (P_i R) = L(\sum_i f_i \otimes (P_i R)) = L(PR).$$

上記のように $Y \cap U = \{x \in U \mid x_1 = \ldots = x_d = 0\}$ なる U 上の局所座標 $x = (x_1, \ldots, x_n)$ をとれば, (5.1) で $\varphi_i = x_i$ とした完全系列と命題 3.2.14 から $\mathcal{O}_Y$-加群の完全系列

$$0 \longleftarrow \mathcal{D}_{Y\to X} \xleftarrow{\iota^*} \mathcal{D}|_Y \xleftarrow{\varphi} (\mathcal{D}|_Y)^d \tag{5.2}$$

を得る. ここで $\mathcal{D}|_Y = (\mathcal{O}|_Y) \otimes_{\mathcal{O}|_Y} (\mathcal{D}|_Y)$ という同一視によって, $P_1, \ldots, P_d \in \mathcal{D}|_Y$ に対して

$$\begin{aligned}
\varphi(P_1, \ldots, P_d) &= \varphi(1 \otimes P_1, \ldots, 1 \otimes P_d) \\
&= \varphi(1, 0, \ldots, 0) \otimes P_1 + \cdots + \varphi(0, \ldots, 0, 1) \otimes P_d \\
&= x_1 \otimes P_1 + \cdots + x_d \otimes P_d \\
&= 1 \otimes (x_1 P_1 + \cdots + x_d P_d) = x_1 P_1 + \cdots + x_d P_d
\end{aligned}$$

であるから, 局所的には

$$\mathcal{D}_{Y\to X} = (\mathcal{D}|_Y)/(x_1(\mathcal{D}|_Y) + \cdots + x_d(\mathcal{D}|_Y))$$

とみなして良い.

定義 3.5.2. $\mathcal{M}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群とする.

$$\iota^*(\mathcal{M}) = \mathcal{M}_Y := (\mathcal{D}_{Y\to X}) \otimes_{\mathcal{D}|_Y} (\mathcal{M}|_Y)$$

と定義し, これを $\mathcal{M}$ の Y への**接方程式系** (tangential system または induced system) と呼ぶ. $\mathcal{D}_{Y\to X}$ は左 $\mathcal{D}_Y$-加群であるから, $\mathcal{M}_Y$ には自然に左 $\mathcal{D}_Y$-加群の構造が入る.

x を上のような局所座標系とするとき, 完全系列 (5.2) と命題 3.2.14 から完全系列

$$0 \longleftarrow \mathcal{M}_Y \xleftarrow{\iota^*} \mathcal{M}|_Y \xleftarrow{\varphi} (\mathcal{M}|_Y)^d$$

を得る. ただし $u_1, \ldots, u_d \in \mathcal{M}|_Y$ に対して

$$\varphi(u_1, \ldots, u_d) = x_1 u_1 + \ldots + x_d u_d$$

である. 従って局所的には

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_Y &= (\mathcal{M}|_Y)/(x_1(\mathcal{M}|_Y) + \cdots + x_d(\mathcal{M}|_Y)) \\ &= \mathcal{M}/x_1\mathcal{M} + \cdots + x_d\mathcal{M} \end{aligned} \tag{5.3}$$

である.
更に Z が Y の複素部分多様体ならば２つの $\mathcal{D}_Z$-加群 $(\mathcal{M}_Y)_Z$ と $\mathcal{M}_Z$ が定義できる.

命題 3.5.3. このとき, $(\mathcal{M}_Y)_Z$ と $\mathcal{M}_Z$ は $\mathcal{D}_Z$-加群として同型である.

証明: 局所的に同型であることを示せば十分だから,

$$\begin{aligned} Y &= \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \mid x_1 = \ldots = x_d = 0\}, \\ Z &= \{x \in X \mid x_1 = \ldots = x_d = x_{d+1} = \ldots = x_\ell = 0\} \end{aligned}$$

と仮定してよい. このとき (5.3) から

$$\begin{aligned} (\mathcal{M}_Y)_Z &= \mathcal{M}_Y/(x_{d+1}\mathcal{M}_Y + \cdots + x_\ell\mathcal{M}_Y), \\ \mathcal{M}_Z &= \mathcal{M}/(x_1\mathcal{M} + \cdots + x_d\mathcal{M} + x_{d+1}\mathcal{M} + \cdots + x_\ell\mathcal{M}) \end{aligned}$$

だから $(\mathcal{M}_Y)_Z$ と $\mathcal{M}_Z$ は $\mathcal{D}_Y$-加群として同型である. □

命題 3.5.4. $\mathcal{M}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群, Y を X の複素部分多様体とすると, ベクトル空間の層としての準同型

$$\iota^* : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_Y \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$$

が自然に定義される.

証明: $f \in \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_Y$ とすると, $f : \mathcal{M}|_Y \longrightarrow \mathcal{O}|_Y$ と制限写像 $\mathcal{O}|_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ との合成として, 準同型 $\iota^*(f) : \mathcal{M}|_Y \longrightarrow \mathcal{O}_Y$ が定まる. $Y = \{x \in X \mid x_1 = \ldots = x_d = 0\}$ となるような座標系を固定すれば, $\mathcal{O}_Y$ は $\mathcal{O}|_Y$ の部分環の層, $\mathcal{D}_Y$ は $\mathcal{D}|_Y$ の部分環の層とみなせて, $u \in \mathcal{M}|_Y$ と $P \in \mathcal{D}_Y$ に対して

$$\iota^*(f)(Pu) = f(Pu)|_Y = (Pf(u))|_Y = P(f(u)|_Y) = P\iota^*(f)(u)$$

が成り立っている. また, $u_1, \ldots, u_d \in \mathcal{M}|_Y$ に対して

$$\iota^*(f)(x_1u_1 + \cdots + x_du_d) = (x_1f(u_1) + \cdots + x_df(u_d))|_Y = 0$$

であるから, $\iota^*(f)$ は $\mathcal{M}_Y$ から $\mathcal{O}_Y$ への $\mathcal{D}_Y$-準同型を誘導する. □

この写像 ι^* が同型になるための十分条件を与えることが, この節の目標である.

定義 3.5.5. Y を $\mathbf{C}^n$ の開集合 X の複素部分多様体とする.

(1) $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ を微分が一次独立な X 上の正則関数で

$$Y = \{x \mid \varphi_1(x) = \ldots = \varphi_d(x) = 0\}$$

なるものとするとき, Y の余法束 (conormal bundle) T^*_YX を

$$T^*_YX := \{(x, \eta_1 d\varphi_1 + \cdots + \eta_d d\varphi_d) \mid x \in Y,\ \eta_1, \ldots, \eta_d \in \mathbf{C}\} \subset T^*X$$

で定義する. これは $\varphi_1, \ldots, \varphi_d$ の取り方によらないことがわかるので, 一般には, 上の X を各点 $p \in Y$ の (X における) 開近傍に置き換えて, 局所的に定義していけばよい. 特に

$$T^*_XX := \{(x, 0) \mid x \in X\} \subset T^*X$$

とおく (これは T^*X の零切断 (zero section) とも呼ばれ, 0 または X で表わされることもある).

(2) $\mathcal{M}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群とするとき, Y が $\mathcal{M}$ に関して**非特性的** (non-characteristic) とは,

$$T^*_YX \cap \mathrm{Char}(\mathcal{M}) \subset T^*_XX$$

が成立することと定義する.

命題 3.5.6. X を $\mathbf{C}^n$ の開集合, $Y := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \in X \mid x_1 = 0\}$ とする. $\partial' = (\partial_2, \ldots, \partial_n)$ と書いて, $A_j = A_j(x, \partial') \in \mathcal{D}(X)$ は階数が高々 j で ∂_1 を含まないとして

$$P = \partial_1^m + \sum_{j=1}^{m} A_j {\partial_1}^{m-j} \in \mathcal{D}(X)$$

とおき, X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D}P$ で定義すると

(1) $\mathcal{D}_Y$-加群として $\mathcal{M}_Y \simeq (\mathcal{D}_Y)^m$ である.

(2) 命題 3.5.4 で定義された層準同型

$$\iota^* : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_Y \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$$

は同型である.

証明: (1) 以下 $x' = (x_2, \ldots, x_n), \xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$ と書く. $1 \in \mathcal{D}$ の $\mathcal{M}$ における同値類を u とする. $\mathcal{M}_Y = \mathcal{M}/x_1\mathcal{M}$ であるから, $\mathcal{M}$ の元は, 適当な $A \in \mathcal{D}$ をとれば $Au \in \mathcal{M}$ の $\mathcal{M}/x_1\mathcal{M}$ における同値類 $[Au]$ で表わされる. まず, $\mathcal{D}_Y$-加群として $\mathcal{M}_Y$ は $[u], [\partial_1 u], \ldots, [{\partial_1}^{m-1}u]$ で生成されることを示そう. 以下 $p \in Y$ を固定する. 任意の $A \in \mathcal{D}_p$ に対して $A = QP + R$ をみたす $Q, R \in \mathcal{D}_p$ で

$$R = \sum_{j=0}^{m-1} R_j(x, \partial'){\partial_1}^j$$

という形のものが存在する (cf. 定理 4.2.10). このとき $R'_j \in (\mathcal{D}_Y)_p$ を $R'_j(x', \xi') = R_j(0, x', \xi')$ で定義すれば, $R_j - R'_j = x_1 S_j$ となる $S_j \in \mathcal{D}_p$ が存在して,

$$\begin{aligned} [Au] &= [QPu + Ru] = [Ru] = [\sum_{j=0}^{m-1} R_j {\partial_1}^j u] \\ &= [\sum_{j=0}^{m-1} (R'_j + x_1 S_j){\partial_1}^j u] = \sum_{j=0}^{m-1} R'_j [{\partial_1}^j u] \end{aligned}$$

であるから $[{\partial_1}^j u]$ $(j = 0, \ldots, m-1)$ は $\mathcal{M}_Y$ の生成元である.

次に, これらが $\mathcal{D}_Y$ 上一次独立であることを示そう. $A_0, \ldots, A_{m-1} \in (\mathcal{D}_Y)_p$ として

$$\sum_{j=0}^{m-1} A_j [{\partial_1}^j u] = 0$$

と仮定しよう. $A := \sum_{j=0}^{m-1} A_j {\partial_1}^j \in \mathcal{D}_p$ とおこう. $\mathcal{M}_Y = \mathcal{M}/x_1\mathcal{M}$ かつ $\mathcal{M} = \mathcal{D}u$ だから, ある $S \in \mathcal{D}_p$ が存在して, $Au = x_1 Su$ が $\mathcal{M}_p$ において成立する. 従ってある $Q \in \mathcal{D}_p$ が存在して $\mathcal{D}_p$ において

$$A - x_1 S = QP \tag{5.4}$$

が成り立つ. ここで Q の total symbol $Q(x, \xi)$ は x_1 によらないと仮定してよい. 実際, $Q(x, \xi) = Q'(x', \xi) + x_1 R(x, \xi)$ と分解して S を $S + R(x, \partial)P$ で, Q を $Q'(x', \partial')$ で置き換えればよい. さて, このとき total symbol $Q(x', \xi)$ の ξ_1 に関する次数を ℓ として, $R := QP$ とおくと, Leibniz の公式から

$$R(x, \xi) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{\nu!} \frac{\partial^{|\nu|} Q(x', \xi)}{\partial \xi^\nu} \frac{\partial^{|\nu|} P(x, \xi)}{\partial x^\nu}$$

であるから, P の形に注意すると, $R(x, \xi)$ の ξ_1 について最高次の項は $q(x', \xi'){\xi_1}^{m+\ell}$ であることがわかる. ただし, ここで $Q(x', \xi)$ の ξ_1 に関する最高次の項を $q(x', \xi'){\xi_1}^{\ell}$ とおいた. 一方 $A - x_1 S$ の total symbol に $x_1 = 0$ を代入したものは $A(x', \xi)$ に等しく, その ξ_1 に関する次数は高々 $m - 1$ であるから, (5.4) によって, $q(x', \xi) = 0$ すなわち $Q = 0$ でな

ければならない. 従って再び (5.4) から $A-x_1S=0$ となる. この左辺の total symbol に $x_1=0$ を代入すれば, $A(x',\xi)=0$ すなわち $A_0=\ldots=A_{m-1}=0$ を得る. 以上によって $\mathcal{D}_Y$-加群として $\mathcal{M}_Y\simeq(\mathcal{D}_Y)^m$ が示された.

(2) 3.3 節で説明したように

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M},\mathcal{O})\simeq\{f\in\mathcal{O}|Pf=0\} \tag{5.5}$$

であり, また (1) から

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y,\mathcal{O}_Y)\simeq\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}((\mathcal{D}_Y)^m,\mathcal{O}_Y)\simeq(\mathcal{O}_Y)^m \tag{5.6}$$

である. さて, $\tilde{f}\in\mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M},\mathcal{O})$ とする. $f:=\tilde{f}(u)\in\mathcal{O}$ とおこう. このとき $\iota^*(\tilde{f}):\mathcal{M}_Y\longrightarrow\mathcal{O}_Y$ は, 準同型

$$\mathcal{M}|_Y\ni Au\longmapsto Af|_Y$$

から誘導されるものであった. $\mathcal{M}_Y$ と $(\mathcal{D}_Y)^m$ の同型は (1) から

$$(\mathcal{D}_Y)^m\ni(A_0,\ldots,A_{m-1})\longmapsto[\sum_{j=0}^{m-1}A_j{\partial_1}^ju]\in\mathcal{M}_Y$$

で与えられるから,

$$\iota^*(\tilde{f})([\sum_{j=0}^{m-1}A_j{\partial_1}^ju])=\sum_{j=0}^{m-1}A_j{\partial_1}^jf|_Y$$

である. 従って, 同型 (5.5) と (5.6) を用いて, 写像 ι^* は

$$\{f\in\mathcal{O}|_Y\mid Pf=0\}\ni f\longmapsto(f|_Y,\partial_1f|_Y,\ldots,{\partial_1}^{m-1}f|_Y)\in(\mathcal{O}_Y)^m$$

で表現されることがわかった. ところがこれは, 古典的な Cauchy-Kovalevskaja の定理 (例えば [Osh1] を参照) によって層同型であるから, (2) が証明された. □

Y を X の複素部分多様体とするとき,

$$\Xi:=T^*X|_Y=\{(x,\xi)\in T^*X\mid x\in Y\}$$

とおいて, 写像 $\rho:\Xi\longrightarrow T^*Y$ を

$$\rho((0,\ldots,0,x_{d+1},\ldots,x_n,\xi_1dx_1+\cdots+\xi_ndx_n))=(x_{d+1},\ldots,x_n,\xi_1dx_1+\cdots+\xi_ddx_d)$$

で定義しよう. ここで $x=(x_1,\ldots,x_n)$ は $Y=\{x\mid x_1=\ldots=x_d=0\}$ となるような局所座標系とする. ρ はこのような局所座標系の取り方によらず well-defined であることがわかる.

補題 3.5.7. $\mathcal{M}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群とする. $(x_0,\xi_0)\in T^*X\setminus\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ とすると, すべての $u\in\mathcal{M}_{x_0}$ に対して $Pu=0$ なる $P\in\mathcal{D}_{x_0}$ で $\sigma(P)(x_0,\xi_0)\neq0$ なるものが存在する.

証明: $\mathcal{N}:=\mathcal{D}u\subset\mathcal{M}$ とおくと, 命題 3.4.9 を $\mathcal{N}$ に適用すれば, $Pu=0$ かつ $\sigma(P)(x_0,\xi_0)\neq0$ なる $P\in\mathcal{D}$ が x_0 の近傍で存在することがわかる. □

補題 3.5.8. $P \in \mathcal{D}$ が m 階で, $x_0 \in \mathbf{C}^n$ に対して $\sigma(P)(x_0, 1, 0, \ldots, 0) \neq 0$ を満たせば, $a(x_0) \neq 0$ なる正則関数 $a \in \mathcal{O}_{x_0}$ と高々 j 階で ∂_1 を含まない作用素 $A_j \in \mathcal{D}_{x_0}$ が存在して

$$P = a(x)\left({\partial_1}^m + A_1(x, \partial'){\partial_1}^{m-1} + \cdots + A_{m-1}(x, \partial')\partial_1 + A_m(x, \partial')\right) \tag{5.7}$$

と書ける.

証明: $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ を多重指数として

$$P = \sum_{|\beta| \leq m} a_\beta(x) \partial^\beta$$

と表わすと補題の仮定から

$$\sigma(P)(x_0, 1, 0, \ldots, 0) = a_{(m,0,\ldots,0)}(x_0) \neq 0$$

であるから, $a := a_{(m,0,\ldots,0)}$ とおけば, P は (5.7) の形に書けることがわかる. □

定理 3.5.9. Y を $\mathbf{C}^n$ の開集合 X の複素部分多様体, $\mathcal{M}$ を X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群として, Y は $\mathcal{M}$ に関して非特性的と仮定すると次が成り立つ:

(1) $\mathcal{M}_Y$ は連接 $\mathcal{D}_Y$-加群である.

(2) $\mathrm{Char}(\mathcal{M}_Y) \subset \rho(\mathrm{Char}(\mathcal{M}) \cap \Xi)$.

証明: まず Y の余次元が 1 と仮定して (1) を証明しよう. 連接性は局所的な性質だから, $Y = \{x = (x_1, x') \in X \mid x_1 = 0\}$ としてよい. 以下 $0 \in X$ の近傍で考える. まず

$$0 \longleftarrow \mathcal{M}_Y \longleftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{x_1} \mathcal{M} \longleftarrow 0 \tag{5.8}$$

が完全系列であることを示そう. そのためには $x_1 : \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M}$ が単射であることを示せば十分である. $u \in \mathcal{M}$ が $x_1 u = 0$ を満たしたとする. 一般に $P, Q \in \mathcal{D}$ に対して $[P, Q] := PQ - QP \in \mathcal{D}$ と書いて, P と Q の交換子 (commutator) と呼ぶ. さて補題 3.5.7 によって $Pu = 0$ かつ $\sigma(P)(0; 1, 0, \ldots, 0) \neq 0$ なる $P \in \mathcal{D}$ が存在する. このとき仮定によって $[x_1, P]u = x_1 Pu - Px_1 u = 0$ である. 従って

$$[x_1, [x_1, P]]u = x_1[x_1, P]u - [x_1, P]x_1 u = 0$$

である. 同様にして

$$\underbrace{[x_1, [x_1, \ldots, [x_1}_{m}, P] \cdots]]u = 0 \tag{5.9}$$

を得る. 一方 Leibniz の公式から $[x_1, P]$ の total symbol は $-\partial P(x, \xi)/\partial \xi_1$ であることがわかる. P は (5.7) の形であるとしてよいから,

$$\frac{\partial^m P(x, \xi)}{\partial {\xi_1}^m} = (-1)^m m! a(x)$$

となる．これと (5.9) から $a(x)u = 0$ が成立することになるが $a(x_0) \neq 0$ であるからこれは 0 の近傍で $u = 0$ であることを意味する．これで (5.8) が完全系列であることが証明された．

0 の近傍で $\mathcal{M} = \mathcal{D}u_1 + \cdots + \mathcal{D}u_r$ と書けるような $u_1, \ldots, u_r \in \mathcal{M}$ をとろう．補題 3.5.7 により，$P_j u_j = 0$ かつ $\sigma(P_j)(0; 1, 0, \ldots, 0) \neq 0$ なる $P_j \in \mathcal{D}$ が 0 の近傍で存在する．そこで $\mathcal{L}_j := \mathcal{D}/\mathcal{D}P_j = \mathcal{D}v_j$ (v_j は 1 の $\mathcal{L}_j$ における剰余類)，$\mathcal{L} := \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{L}_j$ と定義しよう．$\mathcal{L}$ から $\mathcal{M}$ への $\mathcal{D}$-準同型 φ を

$$\varphi(A_1 v_1, \ldots, A_r v_r) = A_1 u_1 + \ldots + A_r u_r$$

で定義して $\mathcal{N} := \mathcal{K}er\,\varphi$ とおく ($P_j u_j = 0$ からこれは well-defined)．すると

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

は連接 $\mathcal{D}$-加群の完全系列である．これと完全系列 (5.8) を合せて次の層準同型の可換図式ができる:

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d, "x_1"] & \mathcal{L} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "x_1"] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d, "x_1"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N} \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L} \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d] & \mathcal{M} \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathcal{N}_Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{L}_Y \arrow[r] \arrow[d] & \mathcal{M}_Y \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

ここで

$$\mathrm{Char}(\mathcal{N}) \subset \mathrm{Char}(\mathcal{L}) = \bigcup_{j=1}^{r} \{(x, \xi) \mid \sigma(P_j)(x, \xi) = 0\}$$

より Y は $\mathcal{L}$ と $\mathcal{N}$ に関しても非特性的となることに注意しよう．さて，上の図式において，縦の列は (5.8) によって 3 つとも完全系列であり，横の列のうち上の 2 つは定義から完全系列であるから，ホモロジー代数の 9-lemma によって，横の一番下の列も完全系列であることがわかる．また命題 3.5.6 によって $\mathcal{L}_Y$ は $\mathcal{D}_Y$ の有限個の直和に同型であるから，まず $\mathcal{M}_Y$ は局所有限生成の $\mathcal{D}_Y$-加群であることがわかる．$\mathcal{M}$ のかわりに $\mathcal{N}$ についてもこの論法が使えて，$\mathcal{N}_Y$ も局所有限生成の $\mathcal{D}_Y$-加群であることがわかる．ところが $\mathcal{N}_Y$ は連接 $\mathcal{D}_Y$-加群 $\mathcal{L}_Y$ の $\mathcal{D}_Y$-部分加群であるから，結局 $\mathcal{N}_Y$ は連接 $\mathcal{D}_Y$-加群である．故に Serre の定理から，$\mathcal{M}_Y$ も連接 $\mathcal{D}_Y$-加群である．

(2) の証明は 7 章 (7.2 節) を参照のこと．さて (2) を仮定して，一般の場合に (1) を Y の余次元 d に関する帰納法で示しておこう．Y を Z と書き直せば，$Z = \{x \in X \mid x_1 = \ldots = x_d = 0\}$ と仮定してよい．このとき $Y := \{x \in X \mid x_1 = 0\}$ とおけば，(1) から $\mathcal{M}_Y$ は連接 $\mathcal{D}_Y$-加群であり，しかも (2) から Z は $\mathcal{M}_Y$ に関して非特性的であることがわかるので，帰納法の仮定と命題 3.5.3 によって $\mathcal{M}_Z = (\mathcal{M}_Y)_Z$ は連接 $\mathcal{D}_Z$-加群である．□

定理 3.5.10. (Cauchy-Kovalevskaja-柏原の定理) 定理 3.5.9 と同じ仮定の下で, 命題 3.5.4 で定義された層準同型

$$\iota^* : \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_Y \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)$$

は同型である.

証明: Z を Y の複素多様体とすると, 命題 3.5.4 によって 3 つの層準同型

$$\begin{aligned}
\iota^* &: \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_Y \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y), \\
\iota'^* &: \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_Z \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{M}_Z, \mathcal{O}_Z), \\
\iota''^* &: \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y)|_Z \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Z}(\mathcal{M}_Z, \mathcal{O}_Z)
\end{aligned}$$

が定義され, $\iota'^* = \iota''^* \circ \iota^*$ となることは定義から容易に確かめれられる. また定理 3.5.9 により Y を Z に, $\mathcal{M}$ を $\mathcal{M}_Y$ に置き換えても定理の仮定は満たされるから, Y の余次元に関する帰納法を用いれば, 結局 Y の余次元が 1 のときに ι^* が同型であることを示せばよい. 以下, 定理 3.5.9 の (1) の証明と同じ記号を用いよう. 完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{L} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M} \longrightarrow 0$$

およびこれから導かれる完全系列 (定理 3.5.9 の証明を参照のこと)

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}_Y \longrightarrow \mathcal{L}_Y \xrightarrow{\varphi} \mathcal{M}_Y \longrightarrow 0$$

から次の層準同型の可換図式を得る:

$$\begin{array}{ccccccc}
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_Y & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{L}, \mathcal{O})|_Y & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{N}, \mathcal{O})|_Y \\
 & & \downarrow{\scriptstyle \iota^*} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_1^*} & & \downarrow{\scriptstyle \iota_2^*} \\
0 & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{L}_Y, \mathcal{O}_Y) & \longrightarrow & \mathcal{H}om_{\mathcal{D}_Y}(\mathcal{N}_Y, \mathcal{O}_Y)
\end{array}$$

ここで横の 2 つの列は完全系列である. さて $\mathcal{L} = \bigoplus_{j=1}^r \mathcal{D}/\mathcal{D}P_j$ であったから, 命題 3.5.6 の (2) によって ι_1^* は同型である. これと上の図式から ι^* は単射であることがわかる. Y は $\mathcal{N}$ に関しても非特性的だから, これは ι_2^* も単射であることを意味する. 以上のことと上の図式から ι^* は同型であることがわかる (例えば [Kaw] を参照). □

3.6 ホロノミー系

$\mathbf{C}^n$ の開集合 X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{M}$ が**ホロノミー系** (holonomic system) または極大過剰決定系 (maximally overdetermined system) とは, 特性多様体 $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ の複素解析的集合としての次元が n であることである. 一般に連接 $\mathcal{D}$-加群の特性多様体の次元は X の次元以上であることが知られている (特性多様体の包合性による. [SKK] を参照) ので, ホロノミー系とは, 特性多様体が最小次元であるような連接 $\mathcal{D}$-加群のことである. $\mathcal{D}$ を X 上のホロノミー系,

$$\pi : T^*X \ni (x, \xi) \longmapsto x \in X$$

を射影として,

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{M}) := \pi(\mathrm{Char}(\mathcal{M}) \setminus T_X^*X)$$

で定義される集合を $\mathcal{M}$ の特異点集合 (singular locus) と呼ぶ. $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ が斉次であることと Grauert の順像定理 (direct image theorem) から $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ は X の複素解析的部分集合であることがわかる.

定理 3.6.1. (柏原) $\mathcal{M}$ を $\mathbf{C}^n$ の連結開集合 X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群とすると, 自然数 m が定まって, すべての $p \in X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ に対して,

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})_p = \mathbf{C}^m$$

となる (この m を $\mathcal{M}$ の **ランク** (rank) と呼ぶ). また $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})_p$ の元は $X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ の普遍被覆面 (universal covering space) 上の正則関数に解析接続される. 従って, 特に U を $X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ の単連結領域とすれば

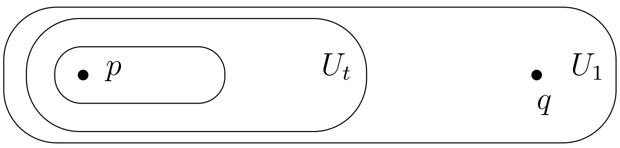
$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})(U) = \mathbf{C}^m$$

である. (実は $p \in \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ のときも $\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})_p$ は有限次元である (cf. [Kash2]).)

証明: $p \notin \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ より, p の近傍では $\mathrm{Char}(\mathcal{M}) \subset T_X^*X$ であるから, $Y := \{p\}$ は $\mathcal{M}$ に関して非特性的である. 定理 3.5.9 の (1) によって, $\mathcal{M}_Y$ は連接 $\mathcal{D}_Y$-加群であるが, $\mathcal{D}_Y = \mathbf{C}$ であるから, ある $m \in \mathbf{N}$ によって $\mathcal{M}_Y = \mathbf{C}^m$ と書ける. 従って Cauchy-Kovalevskaja-柏原の定理によって ($\mathcal{O}_Y = \mathbf{C}$ に注意)

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})_p = \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}^m, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^m$$

を得る. $p, q \in X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ とすると, $W := X \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ は連結だから, p, q を含む連結開集合 $U \subset W$ と, $(x, t) \in U \times [0, 1]$ の実数値 C^1-級関数 $\varphi(x, t)$ が存在して, $U_t := \{x \in U \mid \varphi(x, t) < 0\}$ とおくと, 各 U_t は連結開集合で $0 \le s \le t$ のとき $U_s \subset U_t$ で, $p, q \in U_1$ かつ $\{U_t \mid 0 < t \le 1\}$ は p の基本近傍系になっているようなものが存在する.



あとの命題 3.6.2 によって, $0 < s \le t \le 1$ のとき制限写像

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})(U_t) \longrightarrow \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})(U_s)$$

は同型であることがわかる. 従って

$$\mathbf{C}^m = \mathcal{H}om\,(\mathcal{M}, \mathcal{O})_p = \varinjlim \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})(U_t) = \mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})(U_1)$$

を得る (ここで帰納極限は $t > 0$ なる t についてとる). p と q をとりかえて同じ議論を行なえば, m は点 $p \in W$ によらず一定であることがわかる. 以上のことから定理の主張が導かれる. $\square$

命題 3.6.2. (Zerner の定理) $\mathcal{M}$ を $\mathbf{C}^n$ の連結開集合 X 上の連接 $\mathcal{D}$-加群, φ を X 上の実数値 C^1 級関数であって, X 上で $d\varphi := \sum_{i=1}^n (\partial\varphi/\partial x_i) dx_i \neq 0$ なるものとする. $(p, d\varphi) \notin \mathrm{Char}(\mathcal{M})$ と仮定する. このとき f を $U_- := \{x \in X \mid \varphi(x) < 0\}$ における $\mathcal{M}$ の正則関数解とすると, f は $\{x \in X \mid \varphi(x) \leq 0\}$ における $\mathcal{M}$ の正則関数解に解析接続される.

証明: $\varphi(p) = 0$ なる $p \in X$ を固定する. $u \in \mathcal{M}_p$ とすると, 仮定から $Pu = 0$ かつ $\sigma(P)(p, d\varphi(p)) \neq 0$ なる $P \in \mathcal{D}_p$ が存在することがわかる. P に対して存在域の評価付の Cauchy-Kovalevskaja の定理 (cf. [Osh1]) を適用すれば, U_- 上の正則関数 f が $Pf = 0$ を満たせば, f は p の近傍まで解析接続されることがわかる. 一致の定理から f が U_- における $\mathcal{M}$ の解ならば, その p の近傍への解析接続も $\mathcal{M}$ の解であることがわかる. $\square$

第4章　微分作用素環のグレブナ基底

4.1　非可換多項式環のグレブナ基底

1 章の多項式環のグレブナ基底の理論とアルゴリズムを, 3.1 節で定義した種々の微分作用素環に拡張することがこの章の目標である. まずこの節では, Weyl 代数 $A_n(K)$ や $K(x)\langle\partial\rangle$ などに拡張する. 統一的に議論するため, 微分作用素環と多項式環の双方を含むような, 多少一般的な枠組みで 1 章の議論が拡張できることを示す.

以下では K を標数 0 の体, $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$ を不定元として, 次の性質を満たす環 $\mathcal{R}$ を考察しよう. (以下では多項式の場合と同じように $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ として $\xi^\alpha = {\xi_1}^{\alpha_1} \cdots {\xi_n}^{\alpha_n}$ とおいたが, ここでは掛け算の順番も指定していることに注意せよ.)

(1) $\mathcal{R}$ は K 上のベクトル空間として直和 $\mathcal{R} \simeq \bigoplus_{\alpha\in\mathbf{N}^n} K\xi^\alpha$ に同型, すなわち $\mathcal{R}$ の元 f は

$$f = \sum_\alpha a_\alpha \xi^\alpha \qquad (a_\alpha \in K) \tag{1.1}$$

という有限和で一意的に表わされる;

(2) $\mathcal{R}$ は K を部分体として含む;

(3) $c_{ij} := \xi_i\xi_j - \xi_j\xi_i \in K$ かつ $\delta_i(a) := \xi_i a - a\xi_i \in K$ がすべての $i, j = 1, \ldots, n$ と $a \in K$ について成立する.

例 4.1.1. (1) K を標数 0 の体として Weyl 代数 $A_n(K)$ を考えよう. n を $2n$ として, $\xi_i = x_i$, $\xi_{n+i} = \partial_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ とおいて, $i - j = \pm n$ のときのみ $\xi_i\xi_j - \xi_j\xi_i = \pm 1$ (複号同順), その他の場合は $\xi_i\xi_j - \xi_j\xi_i = 0$, また $a \in K$ と $i = 1, \ldots, n$ に対して $\delta_i(a) = 0$, $i = n+1, \ldots, 2n$ に対して $\delta_i(a) = \partial a/\partial x_i$ とすれば, $\mathcal{R} = A_n(K)$ は上記の条件 (1)–(3) を満たす.

(2) K を標数 0 の体とするとき, 微分作用素環 $K(x)\langle\partial\rangle$ を考えよう. $K(x)$ をあらためて上記の K として, $\xi_i := \partial_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\xi_i\xi_j = \xi_j\xi_i$ $(1 \le i, j \le n)$, $\delta_i(a) = \partial a/\partial x_i$ $(a \in K(x), i = 1, \ldots, n)$ とすれば $\mathcal{R} = K(x)\langle\partial\rangle$ は (1)–(3) を満たす.

(3) K を, 収束巾級数環 $\mathcal{O}_0 = \mathbf{C}\{x\}$ の商体 $\mathcal{K}_0$, または $\mathbf{C}^n$ の領域 X 上の正則関数の環 $\mathcal{O}(X)$ の商体 $\mathcal{K}(X)$ (X が正則領域ならば X 上の有理形関数の体と一致) とする. $\mathcal{R} = K\langle\partial\rangle$ は $\xi_i := \partial_i$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\xi_i\xi_j = \xi_j\xi_i$ $(1 \le i, j \le n)$, $\delta_i(a) = \partial a/\partial x_i$ $(a \in K, i = 1, \ldots, n)$ として条件 (1)–(3) を満たす.

以後始めに述べた条件 (1)–(3) を満たす $\mathcal{R}$ と $\mathbf{N}^n$ の任意の項順序 (cf. 1.1 節) $\prec$ を固定して議論を行なう.

定義 4.1.2. (1.1) の $f \in \mathcal{R} \setminus \{0\}$ に対して有限集合 $\{\alpha \mid a_\alpha \neq 0\}$ の全順序 $\prec$ に関する最大元を β とするとき,

$$\mathrm{lexp}(f) := \beta \in \mathbf{N}^n, \quad \mathrm{lcoef}(f) := a_\beta \in K, \quad \mathrm{lterm}(f) := c_\beta \xi^\beta \in \mathcal{R}$$

とおき, それぞれ f の **leading exponent**, **leading coefficient**, **leading term** と呼ぶ.

一般に $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbf{N}^n$ と $\beta = (\beta_1, \ldots, \beta_n) \in \mathbf{N}^n$ に対して, $\alpha_i \leq \beta_i$ が各 $i = 1, \ldots, n$ について成り立って $\alpha \neq \beta$ のとき, $\alpha < \beta$ と書くことにする. 次の補題は定義 4.1.2 から明らかであろう.

補題 4.1.3. 任意の $\alpha, \beta \in \mathbf{N}$ と $a \in K$ に対して, 適当な $a_\gamma \in K$ によって

$$\xi^\alpha a \xi^\beta = a\xi^{\alpha+\beta} + \sum_{\gamma < \alpha+\beta} a_\gamma \xi^\gamma$$

と書ける.

以下では, 1 章と同様にして証明できる事実については証明を略す.

補題 4.1.4. $f, g \in \mathcal{R}$ に対して,

$$\mathrm{lexp}(fg) = \mathrm{lexp}(f) + \mathrm{lexp}(g), \quad \mathrm{lcoef}(fg) = \mathrm{lcoef}(f)\mathrm{lcoef}(g).$$

補題 4.1.5. $f, g \in \mathcal{R}$ に対して, $\mathrm{lexp}(f+g) \preceq \max_\prec\{\mathrm{lexp}(f), \mathrm{lexp}(g)\}$ が成立する. ($\max_\prec$ は $\prec$ に関する最大元を表わす.)

一般に $\mathcal{R}$ の部分集合 S に対して $E(S) := \{\mathrm{lexp}(f) \mid f \in S,\ f \neq 0\}$ とおく.

補題 4.1.6. I を $\mathcal{R}$ の左イデアルとすると, $E(I)$ は $\mathbf{N}^n$ のモノイデアルである.

定義 4.1.7. (グレブナ基底) I を $\mathcal{R}$ の左イデアルとする. I の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が I の (順序 $\prec$ に関する) **グレブナ基底** (Gröbner basis) とは, 次の 2 条件が成り立つこと:

(1) I は $\mathbf{G}$ で生成されるイデアル;

(2) $E(I) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$.

さらに, $E(\mathbf{G})$ が $E(I)$ を生成する最小の集合であるとき, $\mathbf{G}$ を**極小グレブナ基底** (minimal Gröbner basis) と呼ぶ.

次に $\mathcal{R}$ 上の階数 r の有限生成自由加群 $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群 N を扱おう. 単位ベクトル $\vec{e}_i := (0, \ldots, \overset{(i)}{1}, \ldots, 0)$ を用いると, $\mathcal{R}^r$ の任意の元 $\vec{f}$ は

$$\vec{f} = (f_1, \ldots, f_r) = \sum_{i=1}^r f_i \vec{e}_i = \sum_{i=1}^r \sum_\alpha c_{\alpha i} \xi^\alpha \vec{e}_i \qquad (c_{\alpha i} \in K) \tag{1.2}$$

と書ける.

$\prec$ を $\mathbf{N}^n$ の一つの項順序として, 1.2 節の条件 (r-1), (r-2) を満たす集合 $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, r\}$ の順序 $\prec_r$ を固定する. (1.2) の $\vec{f} \in R^r$ に対して, その **leading exponent** を

$$\mathrm{lexp}(\vec{f}) := \max_{\prec_r}\{(\alpha, i) \mid c_{\alpha i} \neq 0\}$$

で定義し $(\alpha, i) := \mathrm{lexp}(\vec{f})$ とするとき, $\vec{f}$ の **leading point**, **leading term**, **leading coefficient** を

$$\mathrm{lp}(\vec{f}) := i, \quad \mathrm{lterm}(\vec{f}) := c_{\alpha i}\xi^{\alpha}, \quad \mathrm{lcoef}(\vec{f}) = c_{\alpha i}$$

で定義する.

補題 4.1.8. $\vec{f} \in \mathcal{R}^r$ と $a \in \mathcal{R}$ に対して ($\vec{f} \neq 0, a \neq 0$ とする)

$$\mathrm{lexp}(a\vec{f}) = \mathrm{lexp}(\vec{f}) + \mathrm{lexp}(a), \quad \mathrm{lcoef}(a\vec{f}) = \mathrm{lcoef}(a)\mathrm{lcoef}(\vec{f}).$$

補題 4.1.9. $\vec{f}, \vec{g} \in \mathcal{R}^r$ に対して,

$$\mathrm{lexp}(\vec{f} + \vec{g}) \preceq_r \max_{\prec_r}\{\mathrm{lexp}(\vec{f}), \mathrm{lexp}(\vec{g})\}$$

が成立する.

一般に $\mathcal{R}^r$ の部分集合 S に対して $E(S) := \{\mathrm{lexp}(\vec{f}) \mid \vec{f} \in S,\ \vec{f} \neq 0\}$ とおく.

補題 4.1.10. N を $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群とすると, $E(N)$ は $\mathbf{N}^n \times \{1, \dots, r\}$ のモノイデアルである.

定義 4.1.11. (グレブナ基底) N を $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群とする. N の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が N の (順序 $\prec_r$ に関する) **グレブナ基底**とは, 次の２条件が成り立つこと:

(1) N は $\mathcal{R}$ 上 $\mathbf{G}$ で生成される;

(2) $E(N) = \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$.

さらに, $E(\mathbf{G})$ が $E(N)$ を生成する最小の集合であるとき, $\mathbf{G}$ を**極小グレブナ基底**と呼ぶ.

$\mathbf{G}$ を $\mathcal{R}^r$ の有限部分集合, $\vec{f} \neq 0$ を $\mathcal{R}^r$ の任意の元とするとき, $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による簡約操作を次のアルゴリズムで定義しよう (但し $(\alpha, i) \geq (\beta, j) \Leftrightarrow (\alpha \geq \beta,\ i = j)$ とする):

アルゴリズム 4.1.12. (簡約操作)
Input: $\vec{f} \in \mathcal{R}^r$ and a finite set $\mathbf{G} \subset \mathcal{R}^r$;
while ($\vec{f} \neq 0$ and $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$) {
    Choose $\vec{g} \in \mathbf{G}$ such that $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \geq \mathrm{lexp}(\vec{g})$;
    $\vec{f} := \vec{f} - (\mathrm{lterm}(\vec{f})/\mathrm{lterm}(\vec{g}))\vec{g}$;
}
Output: $\vec{f}$;

命題 4.1.13. 上のアルゴリズムは停止して, その output $\vec{f}$ は $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ をみたす.

証明: $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \geq \mathrm{lexp}(\vec{g})$ のとき $\vec{f_1} := \vec{f} - (\mathrm{lterm}(\vec{f})/\mathrm{lterm}(\vec{g}))\vec{g}$ とおけば (r-1), (r-2), 補題 4.1.8, 4.1.9 から $\mathrm{lexp}(\vec{f_1}) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$ が成立する. もし上のアルゴリズムが停止しないと仮定すると, $\mathcal{R}^r$ の元の列 $\vec{f}, \vec{f_1}, \vec{f_2}, \ldots$ で $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \succ_r \mathrm{lexp}(\vec{f_1}) \succ_r \mathrm{lexp}(\vec{f_2}) \succ_r \ldots$ となるものが存在することになるが, これは $\prec_r$ が整列順序であることに反する. □

定義 4.1.14. アルゴリズム 4.1.12 の output を $\mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G})$ で表わし, $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による**簡約**と呼ぶ.

なお, $\vec{f}$ と $\mathbf{G}$ を上記のようにとるとき, $\vec{f} \neq 0$ かつ $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ ならば $\vec{f}$ は $\mathbf{G}$ に関して可約, そうでなければ既約という.

命題 4.1.15. 任意の $\vec{f} \in \mathcal{R}^r$ と $\mathcal{R}^r$ の任意の有限集合 $\mathbf{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s\}$ に対して, ある簡約操作により, $\vec{r} = \mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G})$ とすると,

(1) $\vec{f} - \vec{r}$ は $\mathbf{G}$ の生成する左加群 N に含まれる;

(2) $\vec{r} = 0$ または $\mathrm{lexp}(\vec{r}) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$;

(3) ある $q_1, \ldots, q_s \in \mathcal{R}$ が存在して, $\vec{f} = \sum_{i=1}^{s} q_i \vec{g}_i + \vec{r}$ かつ各 i について $q_i = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_i \vec{g}_i) \preceq_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$ (従って $\vec{r} = 0$ または $\mathrm{lexp}(\vec{r}) \preceq_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$).

命題 4.1.16. N を $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群, $\mathbf{G}$ を N の有限部分集合で $\mathrm{mono}(E(\mathbf{G})) = E(N)$ をみたすものとすると, $\mathbf{G}$ は N のグレブナ基底である.

命題 4.1.17. N を $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群とすると N のグレブナ基底は存在する. 特に, N は有限生成 $\mathcal{R}$-加群である.

命題 4.1.18. N, M が $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群で, $N \subset M$ かつ $E(N) = E(M)$ とすると, $N = M$ である.

定義 4.1.19. (S-多項式) $\vec{f}, \vec{g} \in \mathcal{R}^r \setminus \{0\}$ に対して, $\mathrm{lexp}(\vec{f}) = (\alpha, i)$, $\mathrm{lexp}(\vec{g}) = (\beta, j)$ とおいて, $\vec{f}, \vec{g}$ の **S-多項式 (ベクトル)** $\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g})$ を, $i = j$ のとき

$$\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g}) = \mathrm{lcoef}(g)\xi^{\alpha \vee \beta - \alpha}\vec{f} - \mathrm{lcoef}(f)\xi^{\alpha \vee \beta - \beta}\vec{g};$$

$i \neq j$ のとき $\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g}) = 0$ で定義する.

定義と補題 4.1.8 から $\mathrm{lp}(\vec{f}) = \mathrm{lp}(\vec{g})$ のとき $\mathrm{lexp}(\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g})) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{f}) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g})$ が従う.

定理 4.1.20. $\mathbf{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s\}$ を $\mathcal{R}^r$ の有限部分集合, N を $\mathbf{G}$ の生成する $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群とするとき, 次の条件 (1)–(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は N のグレブナ基底;

(2) $\vec{f} \in N$ のとき $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による任意の簡約操作により $\mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G}) = 0$ となる.

(3) 任意の $\vec{g}_i, \vec{g}_j \in \mathbf{G}$ に対して, $\mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)$ ならば, ある $q_{ij1}, \ldots, q_{ijs} \in \mathcal{R}$ が存在して

$$\mathrm{sp}(\vec{g}_i, \vec{g}_j) = q_{ij1}\vec{g}_1 + \cdots + q_{ijs}\vec{g}_s$$

かつすべての $k = 1, \ldots, s$ について, $q_{ijk} = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_{ijk}\vec{g}_k) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{g}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g}_j)$ が成立する.

証明: (1) $\Rightarrow$ (2) と (2) $\Rightarrow$ (3) は 定理 1.1.20 の証明と同様.

(3) $\Rightarrow$ (1) は定理 1.2.16 の証明とほとんど同様であるが, 非可換性のため, 式の変形が少しだけ異なる. まず $\mathrm{lcoef}(\vec{g}_k) = 1$ $(k = 1, \ldots, s)$ と仮定しておいても一般性を失わない. (3) を仮定すると, $i \neq j$ かつ $\mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)$ なる $\{1, \ldots, s\}$ の各々の組 (i, j) に対して, 多項式 $q_{ij1}, \ldots, q_{ijs}$ が存在して,

$$\mathrm{sp}(\vec{g}_i, \vec{g}_j) = \sum_{k=1}^{s} q_{ijk}\vec{g}_k, \tag{1.3}$$

かつ $q_{ijk} \neq 0$ ならば $\mathrm{lexp}(q_{ijk}\vec{g}_k) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{g}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g}_j)$ が成り立つ.

さて $\vec{f} \in N$ とする. このとき $\mathrm{lexp}(\vec{f}) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を示せばよい. そのためには, ある $q_1, \ldots, q_s \in \mathcal{R}$ が存在して $f = \sum_{k=1}^{s} q_k g_k$ かつ各 k について $q_k = 0$ または $\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \preceq_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$ とできることを示せば十分である. 実際このとき, ある k について $\mathrm{lexp}(\vec{f}) = \mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ を得る.

上記の証明のため, $\vec{f}$ に対して

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^{s} q_k\vec{g}_k, \quad (q_1, \ldots, q_s \in \mathcal{R}) \tag{1.4}$$

という形の表示の全体を考え, その中で, $\max_{\prec_r}\{\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \mid 1 \leq k \leq s,\, q_k \neq 0\}$ が順序 $\prec_r$ について最小になるものを一つとり, それを改めて (1.4) とみなすことにする. ($\vec{f} \in N$ よりこのような表示は少なくとも一つ存在し, また $\prec_r$ が整列順序であるから, 上の意味で最小な表示を一つ選べる.) このような最小性をもつ表示 (1.4) を一つ固定する.

$$(\alpha, i) = \max_{\prec_r}\{\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \mid 1 \leq k \leq s,\, q_k \neq 0\}$$

とおく. 上の注意により $(\alpha, i) = \mathrm{lexp}(\vec{f})$ ならば (1) が証明できたことになる.

そのため以下では $(\alpha, i) \neq \mathrm{lexp}(\vec{f})$ (従って $(\alpha, i) \succ_r \mathrm{lexp}(\vec{f})$) と仮定しよう. $\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s$ を並べ替えて, $1 \leq k \leq \ell$ のとき $\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) = (\alpha, i)$, $\ell < k \leq s$ のとき $\mathrm{lexp}(q_k\vec{g}_k) \prec_r (\alpha, i)$ または $q_k = 0$ が成立するとしてよい. $q'_k := q_k - \mathrm{lterm}(q_k)$, $\mathrm{lterm}(q_k) = c_k\xi^{\beta^{(k)}}$, $(\alpha^{(k)}, i) = \mathrm{lexp}(\vec{g}_k)$ とおくと,

$$\vec{f} = \sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k)\vec{g}_k + \sum_{k=1}^{\ell} q'_k\vec{g}_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} q_k\vec{g}_k. \tag{1.5}$$

ここでこの第一項を次のように変形する:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k)\vec{g}_k = \sum_{k=1}^{\ell} c_k\xi^{\beta^{(k)}}\vec{g}_k \\ = \;&\sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)(\xi^{\beta^{(k)}}\vec{g}_k - \xi^{\beta^{(k+1)}}\vec{g}_{k+1}) + (c_1 + \cdots + c_\ell)\xi^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell. \end{aligned} \tag{1.6}$$

ここで $1 \le k \le \ell$ のとき $\alpha^{(k)} + \beta^{(k)} = \alpha$ が成り立つことから, $\alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} \le \alpha$ となり, $\gamma^{(k)} := \alpha - \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)}$ とおけば, 補題 4.1.3 から適当な $a_{k\beta}, b_{k\beta} \in K$ によって

$$
\begin{aligned}
\xi^{\beta^{(k)}}\vec{g}_k - \xi^{\beta^{(k+1)}}\vec{g}_{k+1} &= \xi^{\gamma^{(k)}}\xi^{\beta^{(k)}-\gamma^{(k)}}\vec{g}_k - \xi^{\gamma^{(k)}}\xi^{\beta^{(k+1)}-\gamma^{(k)}}\vec{g}_{k+1} \\
&\quad + \sum_{\beta<\beta^{(k)}} a_{k\beta}\xi^{\beta}\vec{g}_k - \sum_{\beta<\beta^{(k+1)}} b_{k+1,\beta}\xi^{\beta}\vec{g}_{k+1}
\end{aligned}
$$

と書けて $\beta^{(k)} - \gamma^{(k)} = \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} - \alpha^{(k)}$ であるから,

$$
c_{k\beta} := \begin{cases} (c_1 + \cdots + c_k)a_{k\beta} - (c_1 + \cdots + c_{k-1})b_{k\beta} & (1 \le k \le \ell - 1) \\ -(c_1 + \cdots + c_{\ell-1})b_{k\beta} & (k = \ell) \end{cases}
$$

とおけば (1.6) から

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{\ell} \mathrm{lterm}(q_k)\vec{g}_k &= \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)\xi^{\gamma^{(k)}}\mathrm{sp}(\vec{g}_k, \vec{g}_{k+1}) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\beta<\beta^{(k)}} c_{k\beta}\xi^{\beta}\vec{g}_k + (c_1 + \cdots + c_\ell)\xi^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell \\
&= \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)\xi^{\gamma^{(k)}}\sum_{\nu=1}^{s} q_{k,k+1,\nu}\vec{g}_\nu \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\beta<\beta^{(k)}} c_{k\beta}\xi^{\beta}\vec{g}_k + (c_1 + \cdots + c_\ell)\xi^{\beta^{(\ell)}}\vec{g}_\ell. \qquad (1.7)
\end{aligned}
$$

$\gamma^{(k)} + \mathrm{lexp}(q_{k,k+1,\nu}g_\nu) \prec \gamma^{(k)} + \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)} = \alpha$ だから, もし $c_1 + \cdots + c_\ell \neq 0$ ならば, (1.6) と (1.7) から $\mathrm{lexp}(\vec{f}) = (\alpha, i)$ となり, 仮定に反する. 従って $c_1 + \cdots + c_\ell = 0$ である. このことと (1.5), (1.7) から

$$
\begin{aligned}
\vec{f} &= \sum_{k=1}^{\ell-1}(c_1 + \cdots + c_k)\xi^{\gamma^{(k)}}\sum_{\nu=1}^{s} q_{k,k+1,\nu}\vec{g}_\nu \\
&\quad + \sum_{k=1}^{\ell}\sum_{\beta<\beta^{(k)}} c_{k\beta}\xi^{\beta}\vec{g}_k + \sum_{k=1}^{\ell} q'_k\vec{g}_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} q_k\vec{g}_k
\end{aligned}
$$

を得る. この右辺の各項の leading exponent は $\prec_r$ に関して (α, i) より小さいから, これは (1.4) の最小性に矛盾する. 以上により (1.4) において $(\alpha, i) = \mathrm{lexp}(\vec{f})$ とできることが示された. □

アルゴリズム 4.1.21. (非可換多項式環上の加群のグレブナ基底)
Input: a finite set $\mathbf{G} \subset \mathcal{R}^r$;
while $(\exists(\vec{f}, \vec{g}) \in \mathbf{G} \times \mathbf{G}$ such that $\mathrm{lp}(\vec{f}) = \mathrm{lp}(\vec{g})$ and $\vec{r} := \mathrm{red}(\mathrm{sp}(\vec{f}, \vec{g}), \mathbf{G}) \neq 0)$
    $\mathbf{G} := \mathbf{G} \cup \{\vec{r}\}$;
Output: $\mathbf{G}$;

命題 4.1.22. 上のアルゴリズムは停止して, その output $\mathbf{G}$ は $\mathbf{G}$ の生成する $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群 N のグレブナ基底である.

命題 4.1.23. $\mathcal{R}^r$ の元 $\vec{f}$ と $\mathcal{R}^r$ の左部分加群 N が与えられたとする. N のグレブナ基底を $\mathbf{G}$ とするとき, 次の 3 つの条件は同値である:

(1) $\vec{f} \in N$;

(2) 任意の簡約操作により $\mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G}) = 0$;

(3) ある簡約操作により $\mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G}) = 0$.

従って, 勝手な簡約操作により $\vec{r} := \mathrm{red}(\vec{f}, \mathbf{G})$ となったとき, $\vec{r} = 0$ ならば $\vec{f} \in N$; $\vec{f} \neq 0$ ならば $\vec{f} \notin N$ である.

定義 4.1.24. $\mathbf{G}$ を $\mathcal{R}^r$ の有限部分集合とする. $\mathcal{R}^r$ の元 $\vec{f} = \sum_{i=1}^r \sum_\alpha c_{\alpha i} \xi^\alpha \vec{e}_i$ が $\mathbf{G}$ に関して**完全既約** (completely irreducible) とは, $c_{\alpha i} \neq 0$ ならば $(\alpha, i) \notin \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))$ となることである. $\vec{f}$ が $\mathbf{G}$ に関して完全既約でないとき,

$$\begin{aligned} \mathrm{redlexp}(\vec{f}) &:= \max{}_{\prec_r}\{(\alpha, i) \mid c_{\alpha i} \neq 0,\, (\alpha, i) \in \mathrm{mono}(E(\mathbf{G}))\}, \\ \mathrm{redlterm}(\vec{f}) &:= c_{\alpha i}\xi^\alpha \quad ((\alpha, i) := \mathrm{redlexp}(\vec{f})) \end{aligned}$$

とおく.

アルゴリズム 4.1.25. (完全簡約操作)
Input: $\vec{f} \in \mathcal{R}^r$ and a finite set $\mathbf{G} \subset \mathcal{R}^r$;
while ($\vec{f}$ is not completely irreducible with respect to $\mathbf{G}$){
  Choose $\vec{g} \in \mathbf{G}$ such that $\mathrm{redlexp}(\vec{f}) \geq \mathrm{lexp}(\vec{g})$;
  $\vec{f} := \vec{f} - (\mathrm{redlterm}(\vec{f})/\mathrm{lterm}(\vec{g}))\vec{g}$;
}
Output: $\vec{f}$;

命題 4.1.26. 上のアルゴリズムは停止して, その output $\vec{f}$ は $\mathbf{G}$ に関して完全既約である.

命題 4.1.27. $\mathbf{G}$ を $\mathcal{R}^r$ の左部分加群のグレブナ基底, $\vec{f} \in \mathcal{R}^r$ とするとき, $\vec{f}$ の $\mathbf{G}$ による完全簡約操作の結果は (アルゴリズム中の $\vec{g}$ の選び方によらず) 一意的に定まる。

定理 4.1.28. N を $\mathcal{R}^r$ の $\mathcal{R}$-左部分加群として $S(N) := \mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\} \setminus E(N)$ とおくと, 剰余加群 $\mathcal{R}^r/N$ は K 上のベクトル空間として, 直和 $K(S(N)) := \bigoplus_{(\alpha,i)\in S(N)} K\xi^\alpha \vec{e}_i$ に同型である.

定義 4.1.29. $\mathcal{R}^r$ の有限集合 $\mathbf{G} := \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s\}$ に対して, $\mathcal{R}^s$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群

$$S(\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s) := \{(f_1, \ldots, f_s) \in \mathcal{R}^s \mid \sum_{k=1}^s f_k \vec{g}_k = 0\}$$

を $\mathbf{G}$ の (1 次) **シジジー加群**と呼ぶ.

定理 4.1.30. $\mathbf{G} = \{\vec{g}_1, \ldots, \vec{g}_s\}$ を $\mathcal{R}^r$ の左 $\mathcal{R}$-部分加群 N のグレブナ基底とする. $\mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)$ かつ $i \neq j$ をみたす $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ に対して,

$$\mathrm{sp}(\vec{g}_i, \vec{g}_j) = \sum_{k=1}^s q_{ijk}\vec{g}_k$$

かつ $\mathrm{lexp}(q_{ijk}\vec{g}_k) \prec_r \mathrm{lexp}(\vec{g}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{g}_j)$ (または $q_{ijk}=0$) をみたす $q_{ijk} \in \mathcal{R}$ を任意にとる (cf. 定理 4.1.20). このとき $\mathrm{lexp}(\vec{g}_i) = (\alpha^{(i)}, \nu_i)$ として,

$$\begin{aligned} s_{ij} &:= \mathrm{lcoef}(\vec{g}_j)\xi^{\alpha^{(i)}\vee\alpha^{(j)}-\alpha^{(i)}}, \\ \vec{v}_{ij} &:= (0,\dots,\overset{(i)}{s_{ij}},\dots,\overset{(j)}{-s_{ji}},\dots,0) - (q_{ij1},\dots,q_{ijs}) \in \mathcal{R}^s \end{aligned}$$

とおけば, シジジー加群 $S(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_s)$ は $\mathcal{R}$ 上 $V := \{\vec{v}_{ij} \mid i<j,\ \mathrm{lp}(\vec{g}_i) = \mathrm{lp}(\vec{g}_j)\}$ で生成される.

証明: $\vec{v}_{ij} \in S(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_s)$ は定義から明らか. 多項式環の場合と同様に $\mathrm{lcoef}(\vec{g}_i)=1$ と仮定してよい. さて, $S(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_s)$ が V で生成されないと仮定して矛盾を導こう. このとき, シジジー加群の元 $(f_1,\dots,f_s) \in S(\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_s)$ で, V の ($\mathcal{R}$-係数の) 一次結合で表わせないもののうち

$$(\alpha, i) := \max_{\prec_r}\{\mathrm{lexp}(f_k\vec{g}_k) \mid 1 \le k \le s,\ f_k \neq 0\}$$

が整列順序 $\prec_r$ に関して最小になるものを一つとる. 以下, $(f_1,\dots,f_s)$ はこの最小性をもつものとして, (α,i) を上のようにとる.

$\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_s$ を並べ替えて, $1 \le k \le \ell$ のとき $\mathrm{lexp}(f_k\vec{g}_k) = (\alpha,i)$, $\ell < k \le s$ のとき $\mathrm{lexp}(f_k\vec{g}_k) \prec_r (\alpha,i)$ (または $f_k=0$) が成立するとしてよい. $\mathrm{lterm}(f_k) = c_k\xi^{\beta^{(k)}}$, $f'_k := f_k - \mathrm{lterm}(f_k)$, $(\alpha^{(k)}, i) = \mathrm{lexp}(\vec{g}_k)$ $(1 \le k \le \ell)$ とおくと,

$$0 = \sum_{k=1}^{s} f_k\vec{g}_k = \sum_{k=1}^{\ell}\mathrm{lterm}(f_k)\vec{g}_k + \sum_{k=1}^{\ell} f'_k\vec{g}_k + \sum_{k=\ell+1}^{s} f_k\vec{g}_k.$$

ここで, $\gamma^{(k)} := \alpha - \alpha^{(k)} \vee \alpha^{(k+1)}$ として

$$\vec{h} = (h_1,\dots,h_s) := \sum_{\nu=1}^{\ell-1}(c_1+\cdots+c_\nu)\xi^{\gamma^{(\nu)}}\vec{v}_{\nu,\nu+1}$$

とおくと, $1 \le k \le \ell$ のとき

$$\begin{aligned} h_k &= (c_1+\cdots+c_k)\xi^{\gamma^{(k)}}\xi^{\alpha^{(k)}\vee\alpha^{(k+1)}-\alpha^{(k)}} - (c_1+\cdots+c_{k-1})\xi^{\gamma^{(k-1)}}\xi^{\alpha^{(k-1)}\vee\alpha^{(k)}-\alpha^{(k)}} \\ &\quad + \sum_{\nu=1}^{\ell-1}(c_1+\cdots+c_\nu)\xi^{\gamma^{(\nu)}}q_{\nu,\nu+1,k} \\ &= c_k\xi^{\beta^{(k)}} + \sum_{\beta<\beta^{(k)}} c_{k\beta}\xi^{\beta} + \sum_{\nu=1}^{\ell-1}(c_1+\cdots+c_\nu)\xi^{\gamma^{(\nu)}}q_{\nu,\nu+1,k} \end{aligned}$$

となるような $c_{k\beta} \in K$ が存在し, $\ell < k \le s$ のときは

$$h_k = \sum_{\nu=1}^{\ell-1}(c_1+\cdots+c_\nu)\xi^{\gamma^{(\nu)}}q_{\nu,\nu+1,k}$$

となるから, すべての k について $\mathrm{lexp}((f_k-h_k)\vec{g}_k) \prec_r (\alpha,i)$ がわかる. 従って最初の仮定から $(f_1-h_1,\dots,f_s-h_s)$ は V の元の $\mathcal{R}$-係数の一次結合で表わせるから, 結局 $(f_1,\dots,f_s)$ も V の元の一次結合で表わされることになって矛盾である. □

グレブナ基底とは限らない一般の生成元に関する シジジー について考察しておこう.

定理 4.1.31. $\vec{f_1},\dots,\vec{f_m}\in\mathcal{R}^r$ として, $\vec{f_1},\dots,\vec{f_m}$ の生成する $\mathcal{R}^r$ の左部分 $\mathcal{R}$-加群を N とおく. $\mathbf{G}:=\{\vec{g}_1,\dots,\vec{g}_s\}$ を N の順序 $\prec_r$ に関するグレブナ基底として, $\vec{v}_{ij}$ を定理 4.1.30 のように定める. このとき

$$\begin{aligned}\vec{g}_i &= \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\vec{f_j} \qquad (i=1,\dots,s),\\ \vec{f_j} &= \sum_{i=1}^{s} d_{ji}\vec{g}_i \qquad (j=1,\dots,m)\end{aligned}$$

を満たす $c_{ij},d_{ji}\in\mathcal{R}$ が求まる. 実際 c_{ij} はグレブナ基底アルゴリズムの計算過程を記憶しておき, 最後にまとめれば得られる. また, d_{ji} は, $\vec{f_j}$ を $\mathbf{G}$ で簡約することにより (やはり途中の計算を記憶しておけば) 得られる. さて, このとき $C:=(c_{ij})$ を $s\times m$ 行列, $D:=(d_{ji})$ を $m\times s$ 行列として,

$$\vec{w}_{\mu\nu}:=\vec{v}_{\mu\nu}C\in\mathcal{R}^m \qquad (1\le\mu<\nu\le s)$$

とおく. また I_m を m 次単位行列として I_m-DC の第 i 行を $\vec{u}_i\in\mathcal{R}^m$ とおくと, シジジー加群 $S(\vec{f_1},\dots,\vec{f_m})$ は $\mathcal{R}$ 上

$$W:=\{\vec{w}_{\mu\nu}\mid 1\le\mu<\nu\le s\}\cup\{\vec{u}_i\mid 1\le i\le m\}$$

で生成される.

証明: 横ベクトル $\vec{f_1},\dots,\vec{f_m}$ を縦に並べた $m\times r$ 行列を F; $\vec{g}_1,\dots\vec{g}_s$ を縦に並べた $s\times r$ 行列を G とおこう.

$$\vec{w}_{\mu\nu}F=\vec{v}_{\mu\nu}CF=\vec{v}_{\mu\nu}G=0,$$

また, $(I_m-DC)F=F-DCF=F-DG=0$ だから, まず $W\subset S(\vec{f_1},\dots,\vec{f_m})$ がわかる. 次に, $(a_1,\dots,a_m)\in S(\vec{f_1},\dots,\vec{f_m})$ とする.

$$(a_1,\dots,a_m)DG=(a_1,\dots,a_m)F=0$$

であるから, 定理 4.1.30 によって, 適当な $q_{\mu\nu}\in\mathcal{R}$ によって

$$(a_1,\dots,a_m)D=\sum_{\mu<\nu}q_{\mu\nu}\vec{v}_{\mu\nu}$$

が成立する. 従って

$$\begin{aligned}(a_1,\dots,a_m) &= (a_1,\dots,a_m)DC+(a_1,\dots,a_m)(I_m-DC)\\ &= \sum_{\mu<\nu}q_{\mu\nu}\vec{v}_{\mu\nu}C+\sum_{i=1}^{m}a_i\vec{u}_i\\ &= \sum_{\mu<\nu}q_{\mu\nu}\vec{w}_{\mu\nu}+\sum_{i=1}^{m}a_i\vec{u}_i\end{aligned}$$

であるから, $(a_1,\dots,a_m)$ は W の元の $\mathcal{R}$-係数の一次結合で表わされる. □

問題 1. この節で考察したグレブナ基底に関しても, 1.2 節の問題 8 と同様の判定法が適用できることを示せ.

4.2 解析的微分作用素環のグレブナ基底 (理論的方法)

この節では収束巾級数係数の微分作用素環 $\mathcal{D}_0$ に対してグレブナ基底の理論を構成するのが目的である. ここでは $\mathcal{D}_0 := \mathbf{C}\{x\}\langle\partial\rangle$ を考えるが, $\mathbf{C}\{x\}$ の代わりに, K を標数 0 の体として $K[[x]]$ または $K\{x\}$ としても以下の議論は通用する.

$\prec_L$ と $\prec_{L'}$ を $\mathbf{N}^n$ の適当な変数の順序による辞書式順序 (または逆辞書式順序) として $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbf{N}^n$ とするとき, $\mathbf{N}^{2n}$ の全順序 $\prec_D$ を次で定義する:

$$\begin{aligned}(\alpha,\beta) \prec_D (\alpha',\beta') \iff\ & |\beta| < |\beta'| \\ \text{or}\ \ & (|\beta| = |\beta'|,\ |\alpha| > |\alpha'|) \\ \text{or}\ \ & (|\beta| = |\beta'|,\ |\alpha| = |\alpha'|,\ \beta \prec_L \beta') \\ \text{or}\ \ & (\beta = \beta',\ |\alpha| = |\alpha'|,\ \alpha \prec_{L'} \alpha').\end{aligned}$$

D-順序は整列順序でないから前節の議論は適用できない. 従って 2 章の巾級数環の場合と同様に, ある意味で超越的な議論が必要になる.

定義 4.2.1. $\mathcal{D}_0$ の元 $P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta \neq 0$ $(a_{\alpha\beta} \in \mathbf{C})$ に対して, 集合 $\{(\alpha,\beta) \mid a_{\alpha\beta} \neq 0\}$ の順序 $\prec_D$ に関する最大元を (α',β') とするとき (β は有限集合を動くので最大元は存在する),

$$\mathrm{lexp}_D(P) := (\alpha',\beta') \in \mathbf{N}^{2n}, \quad \mathrm{lcoef}_D(P) := a_{\alpha'\beta'} \in \mathbf{C}, \quad \mathrm{lterm}_D(P) := a_{\alpha'\beta'} x^{\alpha'} \partial^{\beta'}$$

とおき, それぞれ P の **leading exponent**, **leading coefficient**, **leading term** と呼ぶ.

次の補題は $\sigma(PQ) = \sigma(P)\sigma(Q)$ から明らか:

補題 4.2.2. $P, Q \in \mathcal{D}_0$ に対して,

$$\mathrm{lexp}_D(PQ) = \mathrm{lexp}_D(P) + \mathrm{lexp}_D(Q), \quad \mathrm{lcoef}_D(PQ) = \mathrm{lcoef}_D(P)\mathrm{lcoef}_D(Q).$$

補題 4.2.3. $P, Q \in \mathcal{D}_0$ に対して, $\mathrm{lexp}_D(P+Q) \preceq_D \max{}_D\{\mathrm{lexp}_D(P), \mathrm{lexp}_D(Q)\}$ が成立する. ($\max{}_D$ は D-順序に関する最大元を表わす.)

一般に $\mathcal{D}_0$ の部分集合 S に対して $E_D(S) := \{\mathrm{lexp}_D(P) \mid P \in S,\ P \neq 0\}$ とおく.

補題 4.2.4. $\mathcal{I}$ を $\mathcal{D}_0$ の左イデアルとすると, $E_D(\mathcal{I})$ は $\mathbf{N}^{2n}$ のモノイデアルである.

定義 4.2.5. (グレブナ基底) $\mathcal{I}$ を $\mathcal{D}_0$ の左イデアルとする. $\mathcal{I}$ の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が $\mathcal{I}$ の D-順序に関する**グレブナ基底** (D-グレブナ基底) とは, 次の 2 条件が成り立つこと:

(1) $\mathcal{I}$ は $\mathbf{G}$ で生成されるイデアル.

(2) $E_D(\mathcal{I}) = \mathrm{mono}(E_D(\mathbf{G}))$.

さらに, $E_D(\mathbf{G})$ が $E_D(\mathcal{I})$ を生成する最小の集合であるとき, $\mathbf{G}$ を**極小グレブナ基底**と呼ぶ.

次に $\mathcal{D}_0$ 上の階数 r の有限生成自由加群 $(\mathcal{D}_0)^r$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群 $\mathcal{N}$ を扱おう．$\mathbf{N}^{2n} \times \{1,\dots,r\}$ の全順序 $\prec_D$ (これも D-順序と呼ぶ) を, $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in \mathbf{N}^n$ と $i, j \in \{1,\dots,r\}$ に対して

$$
\begin{aligned}
(\alpha,\beta,i) \prec_D (\alpha',\beta',j) \iff & |\beta| < |\beta'| \\
\text{or} \ & (|\beta| = |\beta'|,\ |\alpha| > |\alpha'|) \\
\text{or} \ & (|\beta| = |\beta'|,\ |\alpha| = |\alpha'|,\ i < j) \\
\text{or} \ & (|\beta| = |\beta'|,\ |\alpha| = |\alpha'|,\ i = j,\ (\alpha,\beta) \prec_D (\alpha',\beta'))
\end{aligned}
$$

で定義する．

$\vec{P} = (P_1,\dots,P_r) = \sum_{\alpha,\beta,i} a_{\alpha\beta i} x^\alpha \partial^\beta \vec{e}_i \in (\mathcal{D}_0)^r$ に対して ($\vec{e}_1,\dots,\vec{e}_r$ は r 次元単位ベクトル), $\vec{P}$ の階数を $\mathrm{ord}(\vec{P}) := \max\{\mathrm{ord}(P_i) \mid i = 1,\dots,r\}$ で定義する．また $\mathrm{ord}(\vec{P}) = m$ のとき

$$\sigma(\vec{P}) = (\sigma_m(P_1),\dots,\sigma_m(P_r))$$

で $\vec{P}$ の主シンボルを定義する．また集合 $\mathrm{exps}(\vec{P})$ を

$$\mathrm{exps}(\vec{P}) := \{(\alpha,\beta,i) \mid a_{\alpha\beta i} \neq 0\} \subset \mathbf{N}^{2n} \times \{1,\dots,r\}$$

で定義して,

$$\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) := \max{}_D \mathrm{exps}(\vec{P})$$

を $\vec{P}$ の leading exponent と呼ぶ ($\max{}_D$ は順序 $\prec_D$ に関する最大元を表わす)．$\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) = (\alpha,\beta,i)$ とするとき, $\vec{P}$ の leading point, leading coefficient, leading term を

$$\mathrm{lp}_D(\vec{P}) = i, \qquad \mathrm{lcoef}_D(\vec{P}) = a_{\alpha\beta i}, \qquad \mathrm{lterm}_D(\vec{P}) = a_{\alpha\beta i} x^\alpha \partial^\beta$$

で定義する．

補題 4.2.6. $\vec{P} \in (\mathcal{D}_0)^r$ と $Q \in \mathcal{D}_0$ に対して ($\vec{P} \neq 0, Q \neq 0$ とする)

$$\mathrm{lexp}_D(Q\vec{P}) = \mathrm{lexp}_D(\vec{P}) + \mathrm{lexp}_D(Q), \quad \mathrm{lcoef}_D(Q\vec{P}) = \mathrm{lcoef}_D(Q)\mathrm{lcoef}_D(\vec{P}).$$

補題 4.2.7. $\vec{P}, \vec{Q} \in (\mathcal{D}_0)^r$ に対して,

$$\mathrm{lexp}_D(\vec{P} + \vec{Q}) \preceq_D \max{}_D\{\mathrm{lexp}_D(\vec{P}), \mathrm{lexp}_D(\vec{Q})\}$$

が成立する．

一般に $(\mathcal{D}_0)^r$ の部分集合 S に対して $E_D(S) := \{\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) \mid \vec{P} \in S \setminus \{0\}\}$ とおく．

補題 4.2.8. $\mathcal{N}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群とすると, $E_D(\mathcal{N})$ は $\mathbf{N}^{2n} \times \{1,\dots,r\}$ のモノイデアルである．

定義 4.2.9. (グレブナ基底) $\mathcal{N}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群とする．$\mathcal{N}$ の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が $\mathcal{N}$ の (順序 $\prec_D$ に関する) **グレブナ基底** (または D-グレブナ基底) とは, 次の２条件が成り立つこと:

(1) $\mathcal{N}$ は $\mathcal{D}_0$ 上 $\mathbf{G}$ で生成される.

(2) $E_D(\mathcal{N}) = \mathrm{mono}(E_D(\mathbf{G}))$.

さらに, $E_D(\mathbf{G})$ が $E_D(\mathcal{N})$ を生成する最小の集合であるとき, $\mathbf{G}$ を**極小グレブナ基底**と呼ぶ.

定理 4.2.10. (割算定理 (Castro)) $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s \in (\mathcal{D}_0)^r$ と $\vec{P} \in (\mathcal{D}_0)^r$ に対して,

$$\vec{P} = Q_1\vec{P}_1 + \cdots + Q_s\vec{P}_s + \vec{R}, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{exps}(\vec{R}) \cap \mathrm{mono}(\{\mathrm{lexp}_D(\vec{P}_1), \ldots, \mathrm{lexp}_D(\vec{P}_s)\}) = \emptyset, \tag{2.2}$$

$$\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) \succeq_D \mathrm{lexp}_D(Q_k\vec{P}_k) \quad (\text{または } Q_k = 0) \quad (k = 1, \ldots, s) \tag{2.3}$$

をみたす $Q_1, \ldots, Q_s \in \mathcal{D}_0$ と $\vec{R} \in (\mathcal{D}_0)^r$ が存在する. この $\vec{R}$ のことを $\vec{P}$ の $\mathbf{G} := \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s\}$ による **C-簡約**と呼ぼう (必ずしも一意的ではない).

証明: (2.1)–(2.3) をみたす $\vec{R}$ と $Q_1, \ldots, Q_s$ が存在しないと仮定して矛盾を導く. 一般に, $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \ldots, r\}$ の部分集合 S に対して

$$\mathrm{ord}\, S := \max\{|\beta| \mid (\alpha, \beta, i) \in S\}$$

と定義し, また

$$E := \mathrm{mono}(\{\mathrm{lexp}_D(\vec{P}_1), \ldots, \mathrm{lexp}_D(\vec{P}_s)\})$$

とおく. (2.1) と (2.3) をみたす $Q_1, \ldots, Q_s \in \mathcal{D}_0$ と $\vec{R} \in (\mathcal{D}_0)^r$ のうちで $\mathrm{ord}(\mathrm{exps}(\vec{R}) \cap E)$ を最小にするものをとろう. ($Q_1 = \ldots = Q_s = 0$ かつ $\vec{R} = \vec{P}$ のとき (2.1) と (2.3) は満たされるから, このようなものは少なくとも一組存在し, 仮定によりこの右辺の集合は空ではないから, 最小のものがとれる.) 以下では, この $\mathrm{ord}(\mathrm{exps}(\vec{R}) \cap E)$ の最小値を m とおこう.

ここで $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \ldots, r\}$ の順序 $\prec_r$ を

$$\begin{aligned}
(\alpha, \beta, i) \prec_r (\alpha', \beta', j) \quad \Longleftrightarrow \quad & (|\alpha| + |\beta| > |\alpha'| + |\beta'|) \\
\text{or} \quad & (|\alpha| + |\beta| = |\alpha'| + |\beta'|,\ i < j) \\
\text{or} \quad & (|\alpha| + |\beta| = |\alpha'| + |\beta'|,\ i = j,\ \beta \prec_L \beta') \\
\text{or} \quad & (|\alpha| = |\alpha'|,\ \beta = \beta',\ i = j,\ \alpha \prec'_L \alpha')
\end{aligned}$$

で定義しよう. これは $\mathbf{N}^{2n}$ の辞書式順序を $\prec_L$ と $\prec'_L$ から決まるものとして, $\delta = (1, \ldots, 1)$ としたときの 2.2 節の順序 $\prec_{\delta r}$ と同じである. $|\beta| = |\beta'|$ のとき $(\alpha, \beta, i) \prec_r (\alpha', \beta', j)$ と $(\alpha, \beta, i) \prec_D (\alpha', \beta', j)$ が同値であることに注意すれば, 一般に $\vec{P} \in (\mathcal{D}_0)^r$ に対して

$$\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) = \mathrm{lexp}_r(\sigma(\vec{P}))$$

が成立することがわかる (lexp_r は順序 $\prec_r$ に関する leading exponent を表わす).

$$\vec{R} = (R_1, \ldots, R_r) = \sum_{i=1}^{r} \sum_{\alpha,\beta} r_{\alpha\beta i} x^\alpha \partial^\beta \vec{e}_i$$

と書いて

$$\vec{r}(x,\xi) := \sum_{i=1}^{r} \sum_{|\beta|=m} \sum_{\alpha} r_{\alpha\beta i} x^\alpha \xi^\beta \vec{e}_i$$

とおく．このとき Weierstrass-広中の割算定理 (命題 2.2.4) によって

$$\begin{aligned}
&\vec{r}(x,\xi) = \sum_{k=1}^{s} q'_k(x,\xi)\sigma(P_k)(x,\xi) + \vec{r}\,'(x,\xi),\\
&\mathrm{lexp}_r(q'_k\sigma(P_k)) \preceq_r \mathrm{lexp}_r(\vec{r}),\\
&\mathrm{exps}(\vec{r}\,') \cap E = \emptyset
\end{aligned}$$

をみたす $q'_1,\dots,q'_s \in \mathbf{C}\{x,\xi\}$ と $\vec{r}\,' \in (\mathbf{C}\{x,\xi\})^r$ が存在する．ここで, $\sigma(P_k)$ $(k=1,\dots,r)$ が ξ について斉次であることと, 命題 2.2.4(および定理 2.1.9) の証明から, q'_k と $\vec{r}\,'$ も ξ について斉次であることがわかる．そこで $\sigma(Q'_k) = q'_k(x,\xi)$ であるような $Q'_1,\dots,Q'_s \in \mathcal{D}_0$ をとって,

$$\vec{R}\,' = \sum_{\alpha,\beta,i} r'_{\alpha\beta i} x^\alpha \partial^\beta \vec{e}_i := \vec{R} - \sum_{k=1}^{s} Q'_k \vec{P}_k$$

とおくと, $|\beta| > m$ のときは $r'_{\alpha\beta i} = r_{\alpha\beta i}$ であり, また

$$\sum_{|\beta|=m} r'_{\alpha\beta i} x^\alpha \xi^\beta \vec{e}_i \;=\; \sum_{|\beta|=m} r_{\alpha\beta i} x^\alpha \xi^\beta \vec{e}_i - \sum_{k=1}^{s} q'_k \sigma(\vec{P}_k) = \vec{r}\,'(x,\xi)$$

であるから, $\mathrm{ord}(\mathrm{exps}(\vec{R}\,') \cap E) < m$ であり, また

$$\mathrm{lexp}_D(Q'_k\vec{P}_k) = \mathrm{lexp}_r(q'_k\sigma(P_k)) \preceq_D \mathrm{lexp}_D(\vec{R}) \preceq_D \mathrm{lexp}_D(\vec{P})$$

が成立するから, これは m のとりかたに反する．□

命題 4.2.11. $\mathcal{N}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群, $\mathbf{G}$ を $\mathcal{N}$ の有限部分集合で $\mathrm{mono}(E_D(\mathbf{G})) = E_D(\mathcal{N})$ をみたすものとすると, $\mathbf{G}$ は $\mathcal{N}$ のグレブナ基底である．

証明: $\mathbf{G}$ が $\mathcal{N}$ を生成することを示せばよい．$\mathbf{G} = \{\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_s\}$ として, $\vec{P} \in \mathcal{N}$ とすると, 前の定理によって, (2.1)–(2.3) をみたす $Q_1,\dots,Q_s,\vec{R}$ が存在する．特に (2.2) から $\vec{R} \neq 0$ ならば $\mathrm{lexp}_D(\vec{R}) \notin \mathrm{mono}(E_D(\mathbf{G})) = E_D(\mathcal{N})$ であるが, $\vec{R} \in \mathcal{N}$ だから, これは $E_D(\mathcal{N})$ の定義に反する．従って $\vec{R} = 0$ でなければならない．故に $\mathcal{N}$ は $\mathbf{G}$ で生成される．□

次の 2 つの命題はこれから直ちにわかる:

命題 4.2.12. $\mathcal{N}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群とすると $\mathcal{N}$ のグレブナ基底は存在する．従って, $\mathcal{N}$ は有限生成 $\mathcal{D}_0$-加群である．特に, $\mathcal{D}_0$ は左 Noether 環である．

命題 4.2.13. $\mathcal{N},\mathcal{L}$ が $(\mathcal{D}_0)^r$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群で, $\mathcal{N} \subset \mathcal{L}$ かつ $E_D(\mathcal{N}) = E_D(\mathcal{L})$ とすると, $\mathcal{N} = \mathcal{L}$ である．

定義 4.2.14. (S-作用素) $\vec{P}, \vec{Q} \in (\mathcal{D}_0)^r$ に対して, $\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) = (\alpha, \beta, i)$, $\mathrm{lexp}_D(\vec{Q}) = (\alpha', \beta', j)$ とおいて, $\vec{P}, \vec{Q}$ の **S-作用素 (ベクトル)** $\mathrm{sp}_D(\vec{P}, \vec{Q})$ を,

$$\mathrm{sp}_D(\vec{P}, \vec{Q}) = \begin{cases} \mathrm{lcoef}_D(\vec{Q}) x^{\alpha \vee \alpha' - \alpha} \partial^{\beta \vee \beta' - \beta} \vec{P} - \mathrm{lcoef}_D(\vec{P}) x^{\alpha \vee \alpha' - \alpha'} \partial^{\beta \vee \beta' - \beta'} \vec{Q} & \text{if } i = j \\ 0 \in (\mathcal{D}_0)^r & \text{if } i \neq j \end{cases}$$

で定義する.

定義と補題 4.2.6, 4.2.7 から $\mathrm{lp}_D(\vec{P}) = \mathrm{lp}_D(\vec{Q})$ のとき $\mathrm{lexp}_D(\mathrm{sp}_D(\vec{P}, \vec{Q})) \prec_D \mathrm{lexp}_D(\vec{P}) \vee \mathrm{lexp}_D(\vec{Q})$ が従う.

定理 4.2.15. (Castro) $\mathbf{G} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s\}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の有限部分集合, $\mathcal{N}$ を $\mathbf{G}$ の生成する $(\mathcal{D}_0)^r$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群とするとき, 次の条件 (1)–(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は $\mathcal{N}$ のグレブナ基底.

(2) $\vec{P} \in \mathcal{N}$ のとき $\vec{P}$ の $\mathbf{G}$ による任意の C-簡約は 0 となる.

(3) 任意の $\vec{P}_i, \vec{P}_j \in \mathbf{G}$ に対して, $\mathrm{lp}_D(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}(\vec{P}_j)$ ならば, ある $Q_{ij1}, \ldots, Q_{ijs} \in \mathcal{D}_0$ が存在して

$$\mathrm{sp}_D(\vec{P}_i, \vec{P}_j) = Q_{ij1}\vec{P}_1 + \cdots + Q_{ijs}\vec{P}_s$$

かつすべての $k = 1, \ldots, s$ について, $Q_{ijk} = 0$ または $\mathrm{lexp}_D(Q_{ijk}\vec{P}_k) \prec_D \mathrm{lexp}_D(\vec{P}_i) \vee \mathrm{lexp}_D(\vec{P}_j)$ が成立する.

証明: (1) $\Rightarrow$ (2) と (2) $\Rightarrow$ (3) は例によって簡単に示せるので, (3) $\Rightarrow$ (1) を証明しよう. 以下では $\mathcal{D}_0$ 拡大環 $\hat{\mathcal{D}}_0 := \mathbf{C}[[x]]\langle \partial \rangle$ を用いる. $\vec{P} \in \mathcal{N}$ とするとき,

$$\vec{P} = Q_1\vec{P}_1 + \cdots + Q_s\vec{P}_s \tag{2.4}$$

かつ $\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) \succeq_D \mathrm{lexp}_D(Q_k\vec{P}_k)$ をみたす $Q_1, \ldots, Q_s \in \hat{\mathcal{D}}_0$ が存在することを示せばよい. 実際, このときある k について $\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) = \mathrm{lexp}_D(Q_k\vec{P}_k) \in \mathrm{mono}(E_D(\mathbf{G}))$ が成り立つので, (1) が示されたことになる. さて $\mathrm{lexp}_D(\vec{P}_k) = (\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, i_k)$ とおこう. 上記のような $Q_1, \ldots, Q_s \in \hat{\mathcal{D}}_0$ が存在することを 2 段階に分けて証明しよう.

(第 1 段階) (2.4) において $\mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k) \le \mathrm{ord}(\vec{P})$ がすべての k について成り立つようにできることを示す. (2.4) が成立するような $Q_1, \ldots, Q_s \in \hat{\mathcal{D}}_0$ を一組とって, $\ell := \max\{\mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k) \mid k = 1, \ldots, s\}$, $m := \mathrm{ord}(\vec{P})$ とおこう. $\ell > m$ と仮定する.

$$q_k := \begin{cases} \sigma(Q_k) & \text{if } \mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k) = \ell \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと (2.4) の両辺の主シンボルをとって

$$0 = \sum_{k=1}^{s} q_k \sigma(\vec{P}_k)$$

が成立する. 条件 (3) から, $\{\sigma(\vec{P}_k) \mid k=1,\dots,s\}$ は形式巾級数環 $\mathbf{C}[[x,\xi]]$ において, 定理 4.2.10 の証明で定義した順序 $\prec_r$ に関してグレブナ基底になっていることがわかる. そこで

$$q_{ijk} := \begin{cases} \sigma(Q_{ijk}) & \text{if } \mathrm{ord}(Q_{ijk}\vec{P}_k) = |\beta^{(i)} \vee \beta^{(j)}| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおいて,

$$\begin{aligned} s_{ij} &:= \mathrm{lcoef}_D(\vec{P}_j) x^{\alpha^{(i)}\vee\alpha^{(j)}-\alpha^{(i)}} \xi^{\beta^{(i)}\vee\beta^{(j)}-\beta^{(i)}}, \\ \vec{v}_{ij} &:= \begin{cases} (0,\dots,\overset{(i)}{s_{ij}},\dots,\overset{(j)}{-s_{ji}},\dots,0) - (q_{ij1},\dots,q_{ijs}) & \text{if } \mathrm{lp}_D(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}_D(\vec{P}_j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

と定義すると, 定理 2.2.11 によって, ある $w_{ij} \in \mathbf{C}[[x,\xi]]$ が存在して

$$(q_1,\dots,q_s) = \sum_{i<j} w_{ij}\vec{v}_{ij}$$

が成立する. ここで, q_k は ξ について $\ell - |\beta^{(k)}|$ 次斉次, $\vec{v}_{ij}$ の第 k 成分は $|\beta^{(i)} \vee \beta^{(j)}| - |\beta^{(k)}|$ 次斉次だから, w_{ij} は ξ について $\ell - |\beta^{(i)} \vee \beta^{(j)}|$ 次斉次としてよい. そこで $\sigma(W_{ij}) = w_{ij}$ なる $W_{ij} \in \hat{\mathcal{D}}_0$ をとって,

$$\begin{aligned} S_{ij} &:= \mathrm{lcoef}_D(\vec{P}_j) x^{\alpha^{(i)}\vee\alpha^{(j)}-\alpha^{(i)}} \partial^{\beta^{(i)}\vee\beta^{(j)}-\beta^{(i)}}, \\ \vec{V}_{ij} &:= \begin{cases} (0,\dots,\overset{(i)}{S_{ij}},\dots,\overset{(j)}{-S_{ji}},\dots,0) - (Q_{ij1},\dots,Q_{ijs}) & \text{if } \mathrm{lp}_D(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}_D(\vec{P}_j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \end{aligned}$$

とおき,

$$(Q'_1,\dots,Q'_s) := (Q_1,\dots,Q_s) - \sum_{i<j} W_{ij}\vec{V}_{ij}$$

と定義すると, 上の議論から $\mathrm{ord}(Q'_k\vec{P}_k) < \ell$ で

$$\vec{P} = Q'_1\vec{P}_1 + \cdots + Q'_s\vec{P}_s$$

となる. これを繰り返せば,

$$\vec{P} = Q_1\vec{P}_1 + \cdots + Q_s\vec{P}_s, \qquad \mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k) \le \mathrm{ord}(\vec{P}) \quad (k=1,\dots,s) \tag{2.5}$$

なる $Q_1,\dots,Q_s \in \hat{\mathcal{D}}_0$ が存在することがわかる.

(第 2 段階) (2.5) により $\sigma(\vec{P})$ は $\sigma(\mathbf{G}) := \{\sigma(\vec{P}_1),\dots,\sigma(\vec{P}_s)\}$ の生成する $\mathbf{C}[[x,\xi]]^r$ の部分加群 $\sigma(\mathcal{N})$ に含まれることがわかる. また第 1 段階で注意したように $\sigma(\mathbf{G})$ は $\sigma(\mathcal{N})$ のグレブナ基底であるから, 命題 2.2.4 と定理 2.2.8 より

$$\begin{aligned} &\sigma(\vec{P}) = q_1\sigma(\vec{P}_1) + \cdots + q_s\sigma(\vec{P}_s), \\ &\mathrm{lexp}_r(q_k\sigma(\vec{P}_k)) \preceq_r \mathrm{lexp}_r(\sigma(\vec{P})) \end{aligned}$$

を満たす $q_1,\dots,q_s \in \mathbf{C}[[x,\xi]]$ が存在する. ここで各 q_k は ξ について斉次としてよい. そこで $\sigma(Q_k) = q_k$ なる $Q_k \in \hat{\mathcal{D}}_0$ をとれば

$$\vec{P}' := \vec{P} - Q_1\vec{P}_1 - \ldots - Q_s\vec{P}_s \in \mathcal{N}$$

は $\mathrm{ord}(\vec{P}') < \mathrm{ord}(\vec{P})$ を満たす．このとき

$$\vec{P} = Q_1\vec{P}_1 + \cdots + Q_s\vec{P}_s + \vec{P}'$$

であり, また, 各 k について $\mathrm{lexp}_D(Q_k\vec{P}_k) \preceq_D \mathrm{lexp}_D(\vec{P})$ が成り立つ．第 1 段階の議論を $\vec{P}'$ に適用すれば

$$\vec{P}' = Q'_1\vec{P}_1 + \cdots + Q'_s\vec{P}_s, \qquad \mathrm{ord}(Q'_k\vec{P}_k) \leq \mathrm{ord}(\vec{P}')$$

なる $Q'_1, \ldots, Q'_s \in \hat{\mathcal{D}}_0$ が存在することがわかる．$Q''_k := Q_k + Q'_k$ とおけば,

$$\vec{P} = Q''_1\vec{P}_1 + \cdots + Q''_s\vec{P}_s$$

かつ $\mathrm{lexp}_D(Q''_k\vec{P}_k) \preceq_D \mathrm{lexp}_D(\vec{P})$ が成立するので, 結局 (1) が成立することが証明できた．
□

次の命題は上の定理から直ちに従う．

命題 4.2.16. $\mathbf{G}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の左部分加群のグレブナ基底, $\vec{P} \in (\mathcal{D}_0)^r$ とするとき, $\vec{P}$ の $\mathbf{G}$ による C-簡約操作の結果は一意的に定まる。

定義 4.2.17. $(\mathcal{D}_0)^r$ の有限集合 $\mathbf{G} := \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s\}$ に対して, $(\mathcal{D}_0)^s$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群

$$S(\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s) := \{(Q_1, \ldots, Q_s) \in \mathcal{D}_0^s \mid \sum_{k=1}^{s} Q_k\vec{P}_k = 0\}$$

を $\mathbf{G}$ の (1 次) **シジジー加群**と呼ぶ．

定理 4.2.18. $\mathbf{G} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s\}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の左 $\mathcal{D}_0$-部分加群 $\mathcal{N}$ のグレブナ基底とする．$\mathrm{lp}_D(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}(\vec{P}_j)$ かつ $i \neq j$ をみたす $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ に対して,

$$\mathrm{sp}_D(\vec{P}_i, \vec{P}_j) = \sum_{k=1}^{s} Q_{ijk}\vec{P}_k$$

かつ $\mathrm{lexp}_D(Q_{ijk}\vec{P}_k) \prec_D \mathrm{lexp}_D(\vec{P}_i) \vee \mathrm{lexp}_D(\vec{P}_j)$ (または $Q_{ijk} = 0$) をみたす $Q_{ijk} \in \mathcal{D}_0$ を任意にとる．このとき

$$\begin{aligned}
S_{ij} &:= \mathrm{lcoef}_D(\vec{P}_j)x^{\alpha^{(i)}\vee\alpha^{(j)}-\alpha^{(i)}}\partial^{\beta^{(i)}\vee\beta^{(j)}-\beta^{(i)}}, \\
\vec{V}_{ij} &:= \begin{cases} (0, \ldots, \overset{(i)}{S_{ij}}, \ldots, -\overset{(j)}{S_{ji}}, \ldots, 0) - (Q_{ij1}, \ldots, Q_{ijs}) & \text{if } \mathrm{lp}_D(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}_D(\vec{P}_j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}
\end{aligned}$$

とおけば, シジジー加群 $S(\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s)$ は $\mathcal{D}_0$ 上 $V := \{\vec{V}_{ij} \mid i < j,\ \mathrm{lp}_D(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}_D(\vec{P}_j)\}$ で生成される．

証明: V の生成する $\mathcal{D}_0$-加群 $\mathcal{L}$ が $S(\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s)$ と一致しないと仮定して矛盾を導く．仮定から $\mathcal{L}$ に含まれない $(Q_1, \ldots, Q_s) \in S(\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s)$ のうちで $\ell := \max\{\mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k) \mid k = 1, \ldots, s\}$ が最小となるものがとれる．このとき

$$q_k := \begin{cases} \sigma(Q_k) & \text{if } \mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k) = \ell \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると, $q_1\sigma(\vec{P}_1)+\cdots+q_s\sigma(\vec{P}_s)=0$ である. 以下では定理 4.2.15 の証明中の記号を用いよう. 定理 2.2.11 を $\mathbf{C}\{x,\xi\}$ に適用すれば (そこでは形式巾級数環に対してしか証明していないが, 収束巾級数環についても定理 2.2.11 は正しいことが証明できる (cf. 7.1 節)), 適当な $w_{ij}\in\mathbf{C}\{x,\xi\}$ によって

$$(q_1,\ldots,q_s)=\sum_{i<j}w_{ij}\vec{v}_{ij}$$

が成立する. 例によって w_{ij} は ξ について斉次としてよい. $\sigma(W_{ij})=w_{ij}$ なる $W_{ij}\in\mathcal{D}_0$ をとって,

$$(Q_1',\ldots,Q_s'):=(Q_1,\ldots,Q_s)-\sum_{i<j}W_{ij}\vec{V}_{ij}$$

とおけば, $(Q_1',\ldots,Q_s')\in S(\vec{P}_1,\ldots,\vec{P}_s)$ かつ $\mathrm{ord}(Q_k'\vec{P}_k)<\ell$ となる. また $(Q_1,\ldots,Q_s)\notin\mathcal{L}$ より $(Q_1',\ldots,Q_s')\notin\mathcal{L}$ でなければならないが, これは ℓ のとり方に反する. □

4.3 代数的微分作用素環と解析的微分作用素環

この節では, あとで必要になるので, Weyl 代数などの 4.1 節の枠組みで扱えるグレブナ基底の性質をもう少し詳しく調べる. 特に解析的微分作用素環との関連に重点を置く.

最初の目標は Weyl 代数の適当な項順序に関するグレブナ基底は, いわゆる involutive basis になっていることを示すことである.

定義 4.3.1. (involutive basis) $\mathcal{N}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の左部分 $\mathcal{D}_0$-加群とする. $\{\vec{P}_1,\ldots,\vec{P}_s\}\subset\mathcal{N}$ が $\mathcal{N}$ の **involutive basis** とは, $\{\sigma(\vec{P})\mid\vec{P}\in\mathcal{N}\setminus\{0\}\}$ が生成する $(\mathbf{C}\{x\}[\xi])^r$ の部分 $\mathbf{C}\{x\}[\xi]$-加群 $\mathrm{gr}(\mathcal{N})$ が $\sigma(\vec{P}_1),\ldots,\sigma(\vec{P}_s)$ で生成されることである.

involutive basis は次の章で明らかになるように, 線型偏微分方程式系に対して重要な意味を持つ.

命題 4.3.2. $\mathcal{N}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の左部分 $\mathcal{D}_0$-加群とする. $\mathbf{G}:=\{\vec{P}_1,\ldots,\vec{P}_s\}\subset\mathcal{N}$ が $\mathcal{N}$ の順序 $\prec_D$ に関するグレブナ基底ならば, $\mathbf{G}$ は $\mathcal{N}$ の involutive basis である.

証明: $\vec{P}\in\mathcal{N}$ とすると仮定によって

$$\vec{P}=Q_1\vec{P}_1+\cdots+Q_s\vec{P}_s$$

かつ $\mathrm{lexp}_D(Q_k\vec{P}_k)\preceq_D\mathrm{lexp}_D(\vec{P})$ $(k=1,\ldots,s)$ なる $Q_1,\ldots,Q_s\in\mathcal{D}_0$ が存在する. このとき $\prec_D$ の定義によって各 k について $\mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k)\le\mathrm{ord}(\vec{P})$ が成立するから, $S:=\{k\in\{1,\ldots,r\}\mid\mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k)=\mathrm{ord}(\vec{P})\}$ とおけば

$$\sigma(\vec{P})=\sum_{k\in S}\sigma(Q_k)\sigma(\vec{P}_k)$$

が成り立つから $\sigma(\vec{P})$ は $\sigma(\vec{P}_1),\ldots,\sigma(\vec{P}_s)$ の生成する部分加群に含まれる. □

以下では $\mathbf{N}^{2n}$ の項順序 $\prec_W$ であって,

$$(\alpha, \beta) \prec_W (\alpha', \beta') \quad \Longrightarrow \quad |\beta| \leq |\beta'|$$

を満たすものを一つ固定する. このとき更に $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \ldots, r\}$ の全順序 $\prec_W$ を

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, i) \prec_W (\alpha', \beta', j) \iff & (|\beta| < |\beta'|) \\ \text{or} \quad & (|\beta| = |\beta'|,\ i < j) \\ \text{or} \quad & (|\beta| = |\beta'|,\ i = j,\ (\alpha, \beta) \prec_W (\alpha', \beta'))\end{aligned}$$

で定義して **W-順序**と呼ぶことにする. $\vec{P} = \sum_{\alpha,\beta,i} a_{\alpha\beta i} x^\alpha \partial^\beta \vec{e}_i \in (A_n)^r$ に対して,

$$\mathrm{lexp}_W(\vec{P}) = \max{}_W\{(\alpha, \beta, i) \mid a_{\alpha\beta i} \neq 0\}$$

で $\vec{P}$ の leading exponent を定義し, $(\alpha, \beta, i) := \mathrm{lexp}(\vec{P})$ とするとき

$$\mathrm{lp}(\vec{P}) := i, \qquad \mathrm{lcoef}_W(\vec{P}) := a_{\alpha\beta i}$$

によって $\vec{P}$ の leading point と leading coefficient を定義する. また $(A_n)^r$ の部分集合 S に対して

$$E_W(S) := \{\mathrm{lexp}_W(\vec{P}) \mid \vec{P} \in S \setminus \{0\}\}$$

とおく. 以上の定義によって 4.1 節の議論が A_n に対して適用できる. 特に, $(A_n)^r$ の左部分 A_n-加群 N の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が, 順序 $\prec_W$ に関する**グレブナ基底** (**W-グレブナ基底**) とは, $E_W(N) = \mathrm{mono}(E_W(\mathbf{G}))$ が成り立つことである.

定理 4.3.3. $\mathbf{G}$ を $(A_n)^r$ の左部分 A_n-加群 N の W-グレブナ基底とする. $\mathcal{N}$ を $\mathbf{G}$ の生成する $(\mathcal{D}_0)^r$ の左部分 $\mathcal{D}_0$-加群とすると, $\mathbf{G}$ は $\mathcal{N}$ の involutive basis である.

証明: $\mathbf{G} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s\}$ とおいて $\mathrm{lexp}_W(\vec{P}_k) = (\alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, i_k)$ とおこう. すべての k について $\mathrm{lcoef}_W(\vec{P}) = 1$ としても一般性を失わない. 異なる $i, j \in \{1, \ldots, s\}$ に対して

$$\alpha^{(ij)} := \alpha^{(i)} \vee \alpha^{(j)} - \alpha^{(i)}, \qquad \beta^{(ij)} := \beta^{(i)} \vee \beta^{(j)} - \beta^{(i)}$$

とおいて

$$S_{ij} := \begin{cases} x^{\alpha^{(ij)}} \partial^{\beta^{(ij)}} & \text{if } \mathrm{lp}(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}(\vec{P}_j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

と定義すると, 定理 4.1.20 によって $\mathrm{lp}(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}(\vec{P}_j)$ のとき

$$S_{ij}\vec{P}_i - S_{ji}\vec{P}_j = \sum_{k=1}^{s} Q_{ijk}\vec{P}_k, \qquad \mathrm{lexp}_W(Q_{ijk}\vec{P}_k) \prec_W \mathrm{lexp}_W(\vec{P}_i) \vee \mathrm{lexp}_W(\vec{P}_j)$$

を満たす $Q_{ijk} \in A_n$ をとれる.

$$q_{ijk} := \begin{cases} \sigma(Q_{ijk}) & \text{if } \mathrm{lp}(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}(\vec{P}_j) \text{ and } \mathrm{ord}(Q_{ijk}\vec{P}_k) = |\alpha^{(i)} \vee \alpha^{(j)}| \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおくと,

$$\sigma(S_{ij})\sigma(\vec{P}_i)-\sigma(S_{ji})\sigma(\vec{P}_j)=\sum_{k=1}^{s} q_{ijk}\sigma(\vec{P}_k),$$
$$\mathrm{lexp}_W(q_{ijk}\sigma(\vec{P}_k)) \prec_W \mathrm{lexp}_W(\vec{P}_i)\vee \mathrm{lexp}_W(\vec{P}_j)=\mathrm{lexp}_W(\sigma(\vec{P}_i))\vee \mathrm{lexp}_W(\sigma(\vec{P}_j))$$

が成り立つので定理1.2.16によって $\sigma(\mathbf{G}):=\{\sigma(\vec{P}) \mid \vec{P}\in \mathbf{G}\}$ は $(\mathbf{C}[x,\xi])^r$ の部分 $\mathbf{C}[x,\xi]$-加群

$$\overline{N}:=\mathbf{C}[x,\xi]\sigma(\vec{P}_1)+\cdots+\mathbf{C}[x,\xi]\sigma(\vec{P}_s)$$

の順序 $\prec_W$ に関するグレブナ基底である. 更に定理1.2.26によってシジジー加群

$$S(\sigma(\vec{P}_1),\ldots,\sigma(\vec{P}_s)):=\left\{(f_1,\ldots,f_s)\in(\mathbf{C}[x,\xi])^s \;\middle|\; \sum_{k=1}^{s} f_k\sigma(\vec{P}_k)=0\right\}$$

は $\mathbf{C}[x,\xi]$ 上 $\{\vec{v}_{ij} \mid 1\le i<j\le s\}$ で生成される; ただし

$$\vec{v}_{ij}:=\begin{cases} (0,\ldots,\overset{(i)}{\sigma(S_{ij})},\ldots,-\overset{(i)}{\sigma(S_{ji})},\ldots,0)-(q_{ij1},\ldots,q_{ijs}) & \text{if } \mathrm{lp}(\vec{P}_i)=\mathrm{lp}(\vec{P}_j) \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases}$$

とおいた. このことから $\mathbf{C}[x,\xi]$-加群の完全系列

$$0\longrightarrow(\mathbf{C}[x,\xi])^{s(s-1)/2}\xrightarrow{\psi}(\mathbf{C}[x,\xi])^s\xrightarrow{\varphi}(\mathbf{C}[x,\xi])^r \tag{3.1}$$

を得る. ここで準同型 φ と ψ は $f_k, f_{ij}\in\mathbf{C}[x,\xi]$ に対して

$$\varphi((f_1,\ldots,f_s))=\sum_{k=1}^{s} f_k\sigma(\vec{P}_k),\qquad \psi((f_{ij})_{i<j})=\sum_{i<j} f_{ij}\vec{v}_{ij}$$

で定義される. ここで $\mathbf{C}\{x\}$ が $\mathbf{C}[x]$ 上平坦であること (定理3.2.17, 命題7.1.4) と,

$$\mathbf{C}\{x\}\otimes_{\mathbf{C}[x]}\mathbf{C}[x,\xi]=\mathbf{C}\{x\}[\xi]$$

であることに注意すれば (3.1) から $\mathbf{C}\{x\}[\xi]$-加群の完全系列

$$0\longrightarrow(\mathbf{C}\{x\}[\xi])^{s(s-1)/2}\xrightarrow{\tilde{\psi}}(\mathbf{C}\{x\}[\xi])^s\xrightarrow{\tilde{\varphi}}(\mathbf{C}\{x\}[\xi])^r \tag{3.2}$$

を得る. ここで準同型 $\tilde{\varphi}$ と $\tilde{\psi}$ は $f_k, f_{ij}\in\mathbf{C}\{x\}[\xi]$ に対して

$$\tilde{\varphi}((f_1,\ldots,f_s))=\sum_{k=1}^{s} f_k\sigma(\vec{P}_k),\qquad \tilde{\psi}((f_{ij})_{i<j})=\sum_{i<j} f_{ij}\vec{v}_{ij}$$

で定義される.

さて $\vec{P}$ を $\mathcal{N}$ の任意の元としよう. 我々の目標は

$$\vec{P}=Q_1\vec{P}_1+\cdots+Q_s\vec{P}_s \tag{3.3}$$

と

$$\mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k)\le\mathrm{ord}(\vec{P})\qquad(k=1,\ldots,s)$$

を満たす $Q_1,\dots,Q_s\in\mathcal{D}_0$ が存在することを示すことである．そのために (3.3) をみたす $Q_1,\dots,Q_s\in\mathcal{D}_0$ のうちで

$$m := \max\{\mathrm{ord}(Q_k\vec{P}_k) \mid k=1,\dots,s\}.$$

を最小にするものをとって $m>\mathrm{ord}(\vec{P})$ と仮定しよう．すると (3.3) の両辺の主シンボルをとって

$$\sum_{k=1}^{s}\sigma_{m'_k}(Q_k)\sigma_{m_k}(\vec{P}_k)=0$$

を得る．ただし $m_k:=\mathrm{ord}(\vec{P}_k)$, $m'_k:=m-m_k$ とおいた．$m_{ij}:=|\beta^{(ij)}|$ とおくと, 完全系列 (3.2) から

$$(\sigma_{m'_1}(Q_1),\dots,\sigma_{m'_s}(Q_s))=\sum_{i<j}f_{ij}\vec{v}_{ij}.$$

をみたす $f_{ij}\in\mathbf{C}\{x\}[\xi]$ で ξ について $m-m_{ij}$ 次斉次なものがとれる．

$$\vec{V}_{ij} := (0,\dots,\overbrace{S_{ij}}^{(i)},\dots,\overbrace{-S_{ji}}^{(j)},\dots,0)-(Q_{ij1},\dots,Q_{ijs})\in(A_n)^s.$$

とおいて, $\sigma(F_{ij})=f_{ij}$ なる $F_{ij}\in\mathcal{D}_0$ をとって, $Q'_1,\dots,Q'_s\in(\mathcal{D}_0)^r$ を

$$(Q'_1,\dots.Q'_s)=(Q_1,\dots,Q_s)-\sum_{i<j}F_{ij}\vec{V}_{ij}.$$

で定義する．すると

$$\vec{P}=\sum_{k=1}^{s}Q'_k\vec{P}_k+\sum_{i<j}F_{ij}\vec{V}_{ij}\mathrm{mat}(\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_s)=\sum_{k=1}^{s}Q'_k\vec{P}_k$$

が成立する．ただし $\mathrm{mat}(\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_s)$ は横ベクトル $\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_s$ を縦に並べてできる $s\times r$ 行列を表わす．ところが $\mathrm{ord}(Q'_k\vec{P}_k)<m$ であるから, これは m の取り方に反する．従って $m=\mathrm{ord}(\vec{P})$ とできることが示された．このとき,

$$\sigma(\vec{P})\in\mathbf{C}\{x\}[\xi]\sigma(\vec{P}_1)+\cdots+\mathbf{C}\{x\}[\xi]\sigma(\vec{P}_s)$$

となるから定理の主張が示された．□

次に有理関数 (または有理形関数) 係数の微分作用素環のグレブナ基底を考察しよう．以下では K を有理関数体 $\mathbf{C}(x)$, あるいは $\mathbf{C}\{x\}$ の商体 $\mathcal{K}_0$ として, K-係数の微分作用素環 $\mathcal{R}:=K\langle\partial\rangle$ を考察する．$\mathbf{N}^n$ の全順序 $\prec_R$ を

$$\beta\prec_R\beta' \iff |\beta|<|\beta'| \text{ or } (|\beta|=|\beta'|,\ \beta\prec_L\beta')$$

で定義し, $\mathbf{N}^n\times\{1,\dots,r\}$ の全順序 $\prec_R$ を

$$\begin{aligned}(\beta,i)\prec_R(\beta',j) \iff\ & |\beta|<|\beta'|\\ &\text{or } (|\beta|=|\beta'|,\ i<j)\\ &\text{or } (|\beta|=|\beta'|,\ i=j,\ \beta\prec_R\beta')\end{aligned}$$

で定義して **R-順序**と呼ぼう．この順序によって, $\mathcal{R} = \mathbf{C}(x)\langle\partial\rangle$ と $\mathcal{R} = \mathcal{K}_0\langle\partial\rangle$ に対して 4.1 節の議論が適用できる．特にこの順序に関する $\vec{P} \in \mathcal{R}^r$ の leading exponent, leading coefficient, leading term をそれぞれ $\mathrm{lexp}_R(\vec{P})$, $\mathrm{lcoef}_R(\vec{P})$, $\mathrm{lterm}_R(\vec{P})$ と書こう． また $S \subset \mathcal{R}^r$ に対して $E_R(S)$ も通常通り定義される．

我々の目的は, $A_n, \mathcal{D}_0, \mathbf{C}(x)\langle\partial\rangle, \mathcal{K}_0\langle\partial\rangle$ のグレブナ基底の間の関係を考察することである．これらの微分作用素環の包含関係は次のようになっている:

$$\begin{array}{ccc} A_n & \subset & \mathcal{D}_0 \\ \cap & & \cap \\ \mathbf{C}(x)\langle\partial\rangle & \subset & \mathcal{K}_0\langle\partial\rangle \end{array}$$

写像 $\varpi : \mathbf{N}^{2n} \times \{1, \ldots, r\} \longrightarrow \mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ を $\varpi(\alpha, \beta, i) = (\beta, i)$ で定義しておく．

命題 4.3.4. (高山) $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \ldots, r\}$ の順序 $\prec_W$ を

$$\begin{aligned} (\alpha, \beta, i) \prec_W (\alpha', \beta', j) \iff & |\beta| < |\beta'| \\ \text{or} \ & (|\beta| = |\beta'|,\ i < j) \\ \text{or} \ & (|\beta| = |\beta'|,\ i = j,\ \beta \prec_L \beta') \\ \text{or} \ & (\beta = \beta',\ i = j,\ |\alpha| < |\alpha'|) \\ \text{or} \ & (\beta = \beta',\ i = j,\ |\alpha| = |\alpha'|,\ \alpha \prec_{L'} \alpha') \end{aligned}$$

で定義する ($\prec_L$, $\prec_{L'}$ は成分を適当に置換したときの辞書式順序). これはこの節の始めに定義した W-順序の特別な場合である．N を $(A_n)^r$ の有限部分集合 $\mathbf{G}$ の生成する $(A_n)^r$ の左部分 A_n-加群とする．$\hat{N}$ を $\mathbf{G}$ の生成する $(\mathbf{C}(x)\langle\partial\rangle)^r$ の左部分 $\mathbf{C}(x)\langle\partial\rangle$-加群とする．$\mathbf{G}$ が N の W-順序に関するグレブナ基底ならば, $\mathbf{G}$ は $\hat{N}$ の R-順序に関するグレブナ基底でもある．

証明:

$$E_R(\hat{N}) := \{\mathrm{lexp}_R(\vec{P}) \mid \vec{P} \in \hat{N} \setminus \{0\}\} = \mathrm{mono}(E_R(\mathbf{G}))$$

を示せばよい．$\vec{P} \in \hat{N} \setminus \{0\}$ とする．適当な多項式 $a \in \mathbf{C}[x]$ によって $a\vec{P} \in N$ とできる．このとき定義から

$$\mathrm{lexp}_R(\vec{P}) = \mathrm{lexp}_R(a\vec{P}) = \varpi(\mathrm{lexp}_W(a\vec{P})) \in \varpi(\mathrm{mono}(E_W(\mathbf{G}))) = \mathrm{mono}(E_R(\mathbf{G}))$$

を得る．□

命題 4.3.5. $\hat{N}$ を $(\mathbf{C}(x)\langle\partial\rangle)^r$ の有限部分集合 $\mathbf{G}$ の生成する $(\mathbf{C}(x)\langle\partial\rangle)^r$ の左部分 $\mathbf{C}(x)\langle\partial\rangle$-加群とする．$\hat{\mathcal{N}}$ を $\mathbf{G}$ の生成する $(\mathcal{K}_0\langle\partial\rangle)^r$ の左部分 $\mathcal{K}_0\langle\partial\rangle$-加群とする．$\mathbf{G}$ が $\hat{N}$ の R-順序に関するグレブナ基底ならば, $\mathbf{G}$ は $\hat{\mathcal{N}}$ の R-順序に関するグレブナ基底でもある．

証明: $\mathbf{G} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s\}$ とおく．$\mathbf{G}$ は $\hat{N}$ のグレブナ基底だから, $\mathrm{lp}(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}(\vec{P}_j)$ のとき

$$\mathrm{sp}(\vec{P}_i, \vec{P}_j) = \sum_{k=1}^{s} Q_{ijk}\vec{P}_k, \qquad \mathrm{lexp}_R(Q_{ijk}) \prec_R \mathrm{lexp}_R(\vec{P}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{P}_j)$$

をみたす $Q_{ijk} \in A_n$ が存在する. これを $(\mathcal{K}_0\langle\partial\rangle)^r$ における関係式とみなせるから, $\mathbf{G}$ は $\hat{\mathcal{N}}$ のグレブナ基底である. □

$\vec{P} \in (\mathcal{D}_0)^r$ のとき, $\vec{P} \in (\mathcal{K}_0\langle\partial\rangle)^r$ とみなせて, $\mathrm{coef}_R(\vec{P}) \in \mathcal{O}_0 = \mathbf{C}\{x\}$ となることに注意しておく.

命題 4.3.6. $\mathcal{N}$ を $(\mathcal{D}_0)^r$ の有限部分集合 $\mathbf{G}$ の生成する $(\mathcal{D}_0)^r$ の左部分 $\mathcal{D}_0$-加群とする. $\hat{\mathcal{N}}$ を $\mathbf{G}$ の生成する $(\mathcal{K}_0\langle\partial\rangle)^r$ の左部分 $\mathcal{K}_0\langle\partial\rangle$-加群とする. $\mathbf{G}$ が $\hat{\mathcal{N}}$ の R-順序に関するグレブナ基底であって, かつすべての $\vec{P} \in \mathbf{G}$ に対して $\mathrm{lcoef}_R(\vec{P})(0) \neq 0$ ならば, $\mathbf{G}$ は $\mathcal{N}$ の D-順序に関するグレブナ基底でもある.

証明: $\mathbf{G} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s\}$ とおく. $\mathbf{G}$ は $\hat{\mathcal{N}}$ のグレブナ基底だから, $\beta^{(k)} := \mathrm{lexp}_R(\vec{P}_k)$ とおいて, $\mathrm{lp}(\vec{P}_i) = \mathrm{lp}(\vec{P}_j)$ のとき,

$$S_{ij} := \mathrm{lterm}_R(\vec{P}_j)\partial^{\beta^{(i)}\vee\beta^{(j)}-\beta^{(j)}} - \mathrm{lterm}_R(\vec{P}_i)\partial^{\beta^{(i)}\vee\beta^{(j)}-\beta^{(i)}}$$

とおくと, $(\mathcal{K}_0\langle\partial\rangle)^r$ における $\mathbf{G}$ による簡約操作 (アルゴリズム 4.1.12) において $\mathrm{lcoef}_R(\vec{P}_k)$ による割算のみが用いられ, 仮定から $\mathrm{lcoef}_R(\vec{P}_k)$ は $\mathbf{C}\{x\}$ の可逆元であることに注意すれば,

$$S_{ij}\vec{P}_i - S_{ji}\vec{P}_j = \sum_{k=1}^{s} Q_{ijk}\vec{P}_k, \qquad \mathrm{lexp}_D(Q_{ijk}) \prec_D \mathrm{lexp}_D(\vec{P}_i) \vee \mathrm{lexp}(\vec{P}_j)$$

をみたす $Q_{ijk} \in \mathcal{D}_0$ が存在することがわかる. 故に $\mathbf{G}$ は $\mathcal{N}$ のグレブナ基底でもある. □

4.4 微分作用素環に対する tangent cone アルゴリズム

ここでは A_n の元で生成される $\mathcal{D}_0$ の左イデアル, あるいはもっと一般的に $(A_n)^r$ の元で生成される $(\mathcal{D}_0)^r$ の左部分 $\mathcal{D}_0$-加群を考察し, 4.2 節の意味での D-順序に関するグレブナ基底を計算するアルゴリズムを与える. 方法は 2.3 節と同様にある意味で斉次化を行ない A_n に対するグレブナ基底アルゴリズムを用いるというものである.

x_0 を変数として $A_n[x_0]$ で A_n を係数環とする x_0 の多項式環を表わそう. $x_0 = x_{n+1}, \partial_0 = \partial_{n+1}$ とすれば $A_n[x_0]$ は ∂_0 を含まない元からなる A_{n+1} の部分環といってもよい.

定義 4.4.1. (F-斉次性) $A_n[x_0]$ の元 P が (m 階) **F-斉次**とは, m を整数として P が

$$P = \sum_{|\beta|-|\alpha|-\mu=m} a_{\mu,\alpha,\beta}{x_0}^{\mu}x^{\alpha}\partial^{\beta} \qquad (a_{\mu,\alpha,\beta} \in \mathbf{C})$$

という形に書けること. 更に $\vec{P} \in (A_n[x_0])^r$ が (m 階) F-斉次とは, $\vec{P}$ の各成分が m 階 F-斉次であることと定義する.

補題 4.4.2. $P, Q \in A_n[x_0]$ がそれぞれ m 階 F-斉次, ℓ 階 F-斉次ならば, PQ は $m+\ell$ 階 F-斉次である.

証明: Leibniz の公式 (命題3.1.4) によって, $R := PQ$ とおくと

$$R(x_0, x, \xi) = \sum_{\nu \in \mathbf{N}^n} \frac{1}{\nu!} \left(\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial \xi^\nu} P(x_0, x, \xi) \right) \left(\frac{\partial^{|\nu|}}{\partial x^\nu} Q(x_0, x, \xi) \right) \tag{4.1}$$

である. 仮定から

$$\begin{aligned} P(x_0, x, \xi) &= \sum_{|\beta| - |\alpha| - \mu = m} a_{\mu,\alpha,\beta} {x_0}^\mu x^\alpha \xi^\beta, \\ Q(x_0, x, \xi) &= \sum_{|\beta| - |\alpha| - \mu = \ell} b_{\mu,\alpha,\beta} {x_0}^\mu x^\alpha \xi^\beta \end{aligned}$$

という形に書けるから, これと (4.1) から補題の結論がわかる. □

定義 4.4.3. (F-斉次化) $P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x^\alpha \partial^\beta$ を Weyl 代数 A_n の元とするとき, P の **F-斉次化** P^h を

$$P^h := \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} x_0^{|\beta| - |\alpha| + m} x^\alpha \partial^\beta \in A_n[x_0]$$

で定義する. ただし $m := \deg_F(P) := \max\{|\alpha| - |\beta| \mid a_{\alpha,\beta} \neq 0\}$ とおいた. P^h は $-m$ 階 F-斉次である. また $\vec{P} = (P_1, \ldots, P_r) \in (A_n)^r$ に対して, $m_k := \deg_F(P_k)$, $m := \max\{m_k \mid k = 1, \ldots, r\}$ とおいて, $\vec{P}$ の F-斉次化 $\vec{P}^h$ を

$$\vec{P}^h := ({x_0}^{m - m_1} (P_1)^h, \ldots, {x_0}^{m - m_r} (P_r)^h) \in (A_n[x_0])^r$$

で定義する. $\vec{P}^h$ は $-m$ 階 F-斉次である.

補題 4.4.4. $P, Q \in A_n$ に対して $(PQ)^h = P^h Q^h$.

証明:

$$P = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta, \qquad Q = \sum_{\alpha,\beta} b_{\alpha\beta} x^\alpha \partial^\beta$$

として, $m := \deg_F(P)$, $\ell := \deg_F(Q)$ とおくと, 補題4.4.2 から $x^\alpha \partial^\beta x^{\alpha'} \partial^{\beta'}$ は $|\beta| + |\beta'| - |\alpha| - |\alpha'|$ 階 F-斉次であるから, $\deg_F(PQ) = m + \ell$ であることがわかる. 従って

$$\begin{aligned} (PQ)^h &= \sum_{\alpha,\beta,\alpha',\beta'} a_{\alpha\beta} b_{\alpha'\beta'} {x_0}^{|\beta| + |\beta'| - |\alpha| - |\alpha'| - m - \ell} x^\alpha \partial^\beta x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \\ &= \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} {x_0}^{|\beta| - |\alpha| - m} x^\alpha \partial^\beta \sum_{\alpha',\beta'} b_{\alpha'\beta'} {x_0}^{|\beta'| - |\alpha'| - \ell} x^{\alpha'} \partial^{\beta'} \\ &= P^h Q^h. \end{aligned}$$

□

$\mathbf{N}^{2n+1}$ の順序 $\prec_H$ を

$$\begin{aligned} (\mu, \alpha, \beta) \prec_H (\mu', \alpha', \beta') \iff & |\beta| < |\beta'| \\ \text{or} \quad & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu + |\alpha| < \mu' + |\alpha'|) \\ \text{or} \quad & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu + |\alpha| = \mu' + |\alpha'|,\ \mu < \mu') \\ \text{or} \quad & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu = \mu',\ |\alpha| = |\alpha'|,\ \beta \prec_L \beta') \\ \text{or} \quad & (\beta = \beta',\ \mu = \mu',\ |\alpha| = |\alpha'|,\ \alpha \prec_L \alpha') \end{aligned}$$

で定義して**H-順序**と呼ぼう. H-順序は $\mathbf{N}^{2n+1}$ の項順序である. $A_n[x_0]$ の元

$$P = \sum_{\mu,\alpha,\beta} a_{\mu,\alpha,\beta} {x_0}^{\mu} x^{\alpha} \partial^{\beta} \neq 0$$

に対して, その leading exponent と leading coefficient を

$$\mathrm{lexp}_H(P) := \max{}_H\{(\mu,\alpha,\beta) \mid a_{\mu,\alpha,\beta} \neq 0\}, \quad \mathrm{lcoef}_H(P) := a_{\mu\alpha\beta} \quad ((\mu,\alpha,\beta) := \mathrm{lexp}_H(P))$$

で定義する ($\max_H$ は H-順序に関する最大元を表わす).

さらにベクトルの場合を扱うため, $\mathbf{N}^{2n+1} \times \{1,\ldots,r\}$ の全順序 $\prec_H$ を

$$\begin{aligned}(\mu,\alpha,\beta,i) \prec_H (\mu',\alpha',\beta',j) \iff\ & |\beta| < |\beta'| \\ \text{or}\ & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu < \mu') \\ \text{or}\ & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu = \mu',\ i < j) \\ \text{or}\ & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu = \mu',\ i = j,\ (\mu,\alpha,\beta) \prec_H (\mu',\alpha',\beta'))\end{aligned}$$

で定義する. これは 1.2 節の条件 (r-1), (r-2) を満たす.

$$\vec{P} = \sum_{\mu,\alpha,\beta,i} a_{\mu\alpha\beta i} {x_0}^{\mu} x^{\alpha} \partial^{\beta} \vec{e}_i \in (A_n)^r$$

に対して,

$$\mathrm{lexp}_H(\vec{P}) := \max{}_H\{(\mu,\alpha,\beta,i) \mid a_{\mu\alpha\beta i} \neq 0\}$$

で $\vec{P}$ の leading exponent を定義する. さらに $\mathrm{lexp}(\vec{P}) = (\mu,\alpha,\beta,i)$ のとき,

$$\mathrm{lp}_H(\vec{P}) := i, \qquad \mathrm{lcoef}_H(\vec{P}) := a_{\mu\alpha\beta i}$$

で leading point と leading coefficient を定義する.

定義 4.4.5. N を $(A_n[x_0])^r$ の左部分 $A_n[x_0]$-加群とする. N の有限部分集合 $\mathbf{G}$ が (H-順序に関する)N の**グレブナ基底**とは

$$E_H(N) := \{\mathrm{lexp}_H(\vec{P}) \mid \vec{P} \in N \setminus \{0\}\} = \mathrm{mono}(E_H(\mathbf{G}))$$

が成立すること.

H-順序に関しては, 4.1 節の議論が適用できるので, $(A_n[x_0])^r$ の左部分加群 N の有限個の生成元が与えられたとき, それからアルゴリズム 4.1.21 より N の H-順序に関するグレブナ基底が得られる. さらにそのとき, もし生成元がすべて F-斉次だったとすると, 補題 4.4.2 により, それらの S-作用素も F-斉次であり, また F-斉次な元による簡約操作は F-斉次性を保存するから, 結局アルゴリズム 4.1.21 を適用して得られる N のグレブナ基底は F-斉次な $(A_n[x_0])^r$ の元からなる.

次の補題は補題 4.4.4 から明らか:

補題 4.4.6. $\vec{P} \in (A_n)^r$ と $Q \in A_n$ に対して $(Q\vec{P})^h = Q^h \vec{P}^h$.

補題 4.4.7. $\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_s \in (A_n)^r$ に対して $\vec{P} := \vec{P}_1 + \cdots + \vec{P}_s$ とおくと, 適当な $\mu,\mu_1,\dots,\mu_s \in \mathbf{N}$ をとれば
$$x_0{}^{\mu}\vec{P}^h = x_0{}^{\mu_1}(\vec{P}_1)^h + \cdots + x_0{}^{\mu_s}(\vec{P}_s)^h$$
が成立する.

証明: $m := \deg_F(\vec{P})$, $m_k := \deg_F(\vec{P}_k)$ とおくと $m \le m_0 := \max\{m_k \mid k \in \{1,\dots,s\}\}$ であり F-斉次化の定義から

$$x_0{}^{m_0-m}\vec{P}^h = x_0{}^{m_0-m_1}(\vec{P}_1)^h + \cdots + x_0{}^{m_0-m_s}(\vec{P}_s)^h$$

が成立する. □

写像 $\varpi : \mathbf{N}^{2n+1} \times \{1,\dots,r\} \longrightarrow \mathbf{N}^{2n} \times \{1,\dots,r\}$ を $\varpi(\mu,\alpha,\beta,i) = (\alpha,\beta,i)$ で定義する. また $(A_n[x_0])^r$ の元を $\vec{P}(x_0)$ で表わすとき $\vec{P}(1) \in (A_n)^r$ は $\vec{P}$ の x_0 に 1 を代入した作用素 (のベクトル) を表わす.

補題 4.4.8. (1) すべての $\vec{P} \in (A_n)^r$ に対して $\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) = \varpi(\mathrm{lexp}_H(\vec{P}^h))$.

(2) $\vec{P}(x_0) \in (A_n[x_0])^r$ が F-斉次ならば $\mathrm{lexp}_D(\vec{P}(1)) = \varpi(\mathrm{lexp}_H(\vec{P}(x_0)))$.

証明: $\vec{P} \in (A_n)^r$ に対して $\vec{P}^h = \vec{P}^h(x_0)$ は F-斉次で $\vec{P}^h(1) = \vec{P}$ であるから, (1) は (2) から従う.
$$\vec{P}(x_0) = \sum_{\mu,\alpha,\beta,i} a_{\mu\alpha\beta i} x_0{}^{\mu} x^{\alpha}\partial^{\beta}\vec{e}_i \in (A_n[x_0])^r$$
が m 階 F-斉次とすると, $a_{\mu\alpha\beta i} \ne 0$ のとき, $|\beta| - |\alpha| - \mu = m$ である. そこで $|\beta| - |\alpha| - \mu = m$ かつ $|\beta'| - |\alpha'| - \mu' = m$ とすると, H-順序の定義から

$$\begin{aligned}
(\mu,\alpha,\beta,i) \prec_H (\mu',\alpha',\beta',j) \iff & |\beta| < |\beta'| \\
\text{or}\ & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu < \mu') \\
\text{or}\ & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu = \mu',\ i < j) \\
\text{or}\ & (|\beta| = |\beta'|,\ \mu = \mu', i = j\ \ \beta \prec_L \beta') \\
\text{or}\ & (\beta = \beta',\ \mu = \mu',\ i = j,\ \alpha \prec_{L'} \alpha')
\end{aligned}$$

であるから, $|\beta| = |\beta'|$ のとき $\mu + |\alpha| = \mu' + |\alpha'|$ であることに注意すれば, このとき $(\mu,\alpha,\beta,i) \prec_H (\mu',\alpha',\beta',j)$ と $(\alpha,\beta,i) \prec_D (\alpha',\beta',j)$ は同値になる. 以上のことから, (2) がわかる. □

定理 4.4.9. N を $(A_n)^r$ の元 $\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_m$ の生成する $(A_n)^r$ の左部分 A_n-加群とする. N^h を $(\vec{P}_1)^h,\dots,(\vec{P}_m)^h$ の生成する $(A_n[x_0])^r$ の左部分 $A_n[x_0]$-加群として, $\mathbf{G}^h$ を N^h の H-順序に関するグレブナ基底であって, F-斉次なものからなるものとする. このとき $\mathbf{G} := \{\vec{P}(1) \mid \vec{P}(x_0) \in \mathbf{G}^h\}$ は, $\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_m$ の生成する $(\mathcal{D}_0)^r$ の左部分 $\mathcal{D}_0$-加群 $\mathcal{N}$ の D-順序に関するグレブナ基底である.

証明: 2段階に分けて証明する. 以下 $\mathbf{G}^h = \{\vec{Q}_1(x_0), \ldots, \vec{Q}_s(x_0)\}$ とおく.

(第1段階) $\mathbf{G}$ が $\mathcal{N}$ を ($\mathcal{D}_0$ 上) 生成すること: 各 $\vec{Q}_k(x_0)$ は N^h の元だから, 適当な $R_{k1}(x_0), \ldots, R_{km}(x_0) \in A_n[x_0]$ によって

$$\vec{Q}_k(x_0) = R_{k1}(x_0)(\vec{P}_1)^h(x_0) + \cdots + R_{km}(x_0)(\vec{P}_m)^h(x_0)$$

と表わされる. この両辺に $x_0 = 1$ を代入して

$$\vec{Q}_k(1) = R_{k1}(1)\vec{P}_1 + \cdots + R_{km}(1)\vec{P}_m \in N$$

を得る. 次に各 k に対して $(\vec{P}_k)^h \in N^h$ だから, 適当な $T_{k1}(x_0), \ldots, T_{ks}(x_0) \in A_n[x_0]$ によって

$$(\vec{P}_k)^h(x_0) = T_{k1}(x_0)\vec{Q}_1(x_0) + \cdots + T_{ks}(x_0)\vec{Q}_s(x_0)$$

と書ける. これに $x_0 = 1$ を代入して

$$\vec{P}_k = T_{k1}(1)\vec{Q}_1(1) + \cdots + T_{ks}(1)\vec{Q}_s(1)$$

を得るから, $\vec{P}_k$ は $\mathbf{G}$ の元の A_n-係数の一次結合で表わされる. $\mathcal{N}$ は $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s$ が $\mathcal{D}_0$ 上生成する $(\mathcal{D}_0)^r$ の部分加群であったから, $\mathcal{N}$ は $\mathcal{D}_0$ 上 $\mathbf{G}$ で生成される.

(第2段階) $\mathrm{lexp}_H(\vec{Q}_k) = (\mu_k, \alpha^{(k)}, \beta^{(k)}, i_k)$ として,

$$S_{ij}(x_0) := \mathrm{lcoef}_H(\vec{Q}_j){x_0}^{\mu_i \vee \mu_j - \mu_i} x^{\alpha^{(i)} \vee \alpha^{(j)} - \alpha^{(i)}} \partial^{\beta^{(i)} \vee \beta^{(j)} - \beta^{(i)}}$$

とおけば, 仮定によって F-斉次な $R_{ijk}(x_0) \in A_n[x_0]$ が存在して

$$S_{ij}(x_0)\vec{Q}_i(x_0) - S_{ji}(x_0)\vec{Q}_j(x_0) = \sum_{k=1}^{s} R_{ijk}(x_0)\vec{Q}_k(x_0),$$
$$\mathrm{lexp}_H(R_{ijk}(x_0)\vec{Q}_k(x_0)) \prec_H \mathrm{lexp}_H(\vec{Q}_i(x_0)) \vee \mathrm{lexp}_H(\vec{Q}_j(x_0))$$

が成立する. これに $x_0 = 1$ を代入すれば, 補題 4.4.8 によって

$$S_{ij}(1)\vec{Q}_i(1) - S_{ji}(1)\vec{Q}_j(1) = \sum_{k=1}^{s} R_{ijk}(1)\vec{Q}_k(1),$$
$$\mathrm{lexp}_D(R_{ijk}(1)\vec{Q}_k(1)) \prec_D \mathrm{lexp}_D(\vec{Q}_i(1)) \vee \mathrm{lexp}_D(\vec{Q}_j(1))$$

を得る.

$$S_{ij}(1)\vec{Q}_i(1) - S_{ji}(1)\vec{Q}_j(1) = \mathrm{sp}_D(\vec{P}_i, \vec{P}_j)$$

だから, 定理 4.2.15 により, $\mathbf{G}$ は $\mathcal{N}$ の D-順序に関するグレブナ基底である. □

次の系は上記の定理の証明と定理 4.2.18 から直ちにわかる:

系 4.4.10. 定理 4.4.9 と同じ仮定の下で, 定理 4.4.9 の証明と同じ記号を用いて

$$\vec{V}_{ij} := (0, \ldots, \overset{(i)}{S_{ij}(1)}, \ldots, \overset{(j)}{S_{ji}(1)}, \ldots, 0) - (R_{ij1}(1), \ldots, R_{ijs}(1))$$

とおけば, 1次シジジー加群

$$\{(U_1, \ldots, U_s) \in (\mathcal{D}_0)^s \mid U_1\vec{Q}_1(1) + \cdots + U_s\vec{Q}_s(1) = 0\}$$

は $\mathcal{D}_0$ 上 $\{\vec{V}_{ij} \mid i < j,\ \mathrm{lp}_D(\vec{Q}_i(1)) = \mathrm{lp}_D(\vec{Q}_j(1))\}$ で生成される.

第5章　線型偏微分方程式系に対するアルゴリズム

5.1　方程式系の表示と未知関数の変換

この章では, 具体的に与えられた線型偏微分方程式系

$$\mathcal{M} \quad : \quad \sum_{j=1}^{r} P_{ij} u_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

の (解の) 構造に関する情報を取り出すためのアルゴリズムを考察する. 以下では, 特に断らない限り, 考える線型偏微分方程式系 $\mathcal{M}$ は代数的, すなわち, 上記で P_{ij} はすべて Weyl 代数 A_n の元であると仮定する.

この節では, $\mathcal{M}$ の具体的な表示と未知関数の変換について考える. $\mathcal{M}$ を上記のような代数的線型偏微分方程式系とする. 3.3 節で説明したように

$$\vec{P}_i := (P_{i1}, \ldots, P_{ir}) \in (A_n)^r \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

とおいて, $\vec{e}_1, \ldots, \vec{e}_r$ を r 次元単位ベクトルとして, u_i を $\vec{e}_i \in \mathcal{D}^r$ の $\mathcal{M}$ における剰余類とすれば, 左 $\mathcal{D}$-加群として

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}^r/(\mathcal{D}\vec{P}_1 + \cdots + \mathcal{D}\vec{P}_s) = \mathcal{D}u_1 + \cdots + \mathcal{D}u_r$$

である.

$$\begin{aligned} \mathcal{N} &:= \mathcal{D}\vec{P}_1 + \cdots + \mathcal{D}\vec{P}_s \subset \mathcal{D}^r, \\ N &:= A_n\vec{P}_1 + \cdots + A_n\vec{P}_s \subset (A_n)^r, \\ M &:= (A_n)^r/N \end{aligned}$$

とおく. さらに

$$L := \{(U_1, \ldots, U_s) \in (A_n)^s \mid U_1\vec{P}_1 + \cdots + U_s\vec{P}_s = 0\}$$

とおこう. $\prec$ を $\mathbf{N}^n$ の任意の項順序として, アルゴリズム 4.1.21 によって, N の順序 $\prec$ に関するグレブナ基底を計算すれば, 定理 4.1.30 によって L の生成元

$$\vec{R}_k = (R_{k1}, \ldots, R_{ks}) \in (A_n)^s \qquad (k = 1, \ldots, t)$$

を得る. そこで φ を自然な射影として, A_n-準同型 ψ, χ を

$$\begin{aligned} \psi(U_1, \ldots, U_s) &:= U_1\vec{P}_1 + \cdots + U_s\vec{P}_s, \\ \chi(U_1, \ldots, U_t) &:= U_1\vec{R}_1 + \cdots + U_t\vec{R}_t \end{aligned}$$

$(U_i \in A_n)$ で定義すれば,

$$0 \longleftarrow M \longleftarrow (A_n)^r \xleftarrow{\psi} (A_n)^s \xleftarrow{\chi} (A_n)^t$$

は左 A_n-加群の完全系列である. $\mathcal{D}$ は A_n 上平坦である (定理3.2.17) から, これから左 $\mathcal{D}$-加群の完全系列

$$0 \longleftarrow \mathcal{M} \xleftarrow{\tilde{\varphi}} \mathcal{D}^r \xleftarrow{\tilde{\psi}} \mathcal{D}^s \xleftarrow{\tilde{\chi}} \mathcal{D}^t$$

を得る. ただし, ここで $\tilde{\varphi}, \tilde{\psi}, \tilde{\chi}$ はそれぞれ

$$\begin{aligned}
\tilde{\varphi}(U_1, \ldots, U_r) &:= U_1 u_1 + \cdots + U_r u_r, \\
\tilde{\psi}(U_1, \ldots, U_s) &:= U_1 \vec{P}_1 + \cdots + U_s \vec{P}_s, \\
\tilde{\chi}(U_1, \ldots, U_t) &:= U_1 \vec{R}_1 + \cdots + U_t \vec{R}_t
\end{aligned}$$

$(U_i \in \mathcal{D})$ で定義される $\mathcal{D}$-準同型である. このとき 3.3 節の議論から, 一般に $\mathcal{F}$ を左 $\mathcal{D}$-加群の層とすれば, 与えられた $g_1, \ldots, g_s \in \mathcal{F}(U)$ (U は $\mathbf{C}^n$ の領域) に対して, 非斉次線型偏微分方程式系

$$\sum_{j=1}^{r} P_{ij} f_j = g_i \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

が解 $f_1, \ldots, f_r \in \mathcal{F}(U)$ を持つためには

$$\sum_{i=1}^{s} R_{ki} g_i = 0 \qquad (k = 1, \ldots, t)$$

が成立していることが必要である.

次に未知関数の変換について考察しよう.

$$\mathcal{M} = \mathcal{D}u_1 + \cdots + \mathcal{D}u_r$$

を上述のように与えられた左連接 $\mathcal{D}$-加群とする. $Q_{kj} \in A_n$ を与えて

$$\begin{aligned}
v_k &:= \sum_{j=1}^{r} Q_{kj} u_j \qquad (k = 1, \ldots, m), \\
\mathcal{M}' &:= \mathcal{D}v_1 + \cdots + \mathcal{D}v_m \subset \mathcal{M}
\end{aligned}$$

とおこう. このとき次の 2 つの問題を考えよう:

(I) $v_1, \ldots, v_m$ に対する微分方程式系 $\mathcal{M}'$ を具体的に求めるアルゴリズムを見出すこと;

(II) $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ となるかどうかを判定するアルゴリズムを見出すこと.

(I) の解答:

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}' &:= \{(U_1, \ldots, U_m) \in \mathcal{D}^m \mid U_1 v_1 + \cdots + U_m v_m = 0\}, \\
\mathcal{M}' &:= \mathcal{D}v_1 + \cdots + \mathcal{D}v_m \subset \mathcal{M}, \\
N' &:= \{(U_1, \ldots, U_m) \in (A_n)^m \mid (U_1, \ldots, U_m)(Q_{kj}) \in N\}, \\
M' &:= (A_n)^m / N'
\end{aligned}$$

とおく (ここで (Q_{kj}) は Q_{kj} を成分とする $m\times r$ 行列を表わす). このとき $U_1,\dots,U_m \in A_n$ に対して $(U_1,\dots,U_m) \in N'$ であるための必要十分条件は, ある $V_1,\dots,V_r \in A_n$ が存在して

$$U_1\vec{Q}_1 + \cdots + U_m\vec{Q}_m + V_1\vec{P}_1 + \cdots + V_r\vec{P}_r = 0$$

すなわち

$$(U_1,\dots,U_m,V_1,\dots,V_r) \in L := S(\vec{Q}_1,\dots,\vec{Q}_m,\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_r)$$

となることである. そこで, $\vec{Q}_1,\dots,\vec{Q}_m,\vec{P}_1,\dots,\vec{P}_r$ の生成する $(A_n)^r$ の左部分 A_n-加群の項順序 $\prec_W$ に関するグレブナ基底を求めれば, 定理 4.1.31 によって L の生成元 $\vec{R}_1,\dots,\vec{R}_\ell \in (A_n)^{m+r}$ が求まる. $\vec{R}_k$ の最初の m 個の成分を並べたベクトルを $\vec{R}'_k$ とすれば, 上の議論から, $\vec{R}'_1,\dots,\vec{R}'_\ell$ が N' の生成元であることがわかる. そこで $U_1,\dots,U_m \in A_n$ に対して

$$\psi'(U_1,\dots,U_\ell) := U_1\vec{R}'_1 + \cdots + U_\ell\vec{R}'_\ell$$

と定義すれば, 左 A_n-加群の完全系列

$$0 \longleftarrow M' \longleftarrow (A_n)^m \xleftarrow{\psi'} (A_n)^\ell$$

を得る. これから左 $\mathcal{D}$-加群の完全系列

$$0 \longleftarrow \mathcal{D}\otimes_{A_n} M' \longleftarrow \mathcal{D}^m \xleftarrow{\tilde{\psi}'} \mathcal{D}^\ell \tag{1.1}$$

が導かれる. 一方 $U_1,\dots,U_m \in A_n$ に対して, $\varphi'(U_1,\dots,U_m)$ を $(U_1,\dots,U_m)(Q_{jk}) \in (A_n)^r$ の M における剰余類とすれば,

$$0 \longrightarrow N' \longrightarrow (A_n)^m \xrightarrow{\varphi'} M \tag{1.2}$$

は左 A_n-加群の完全系列だから, $\mathcal{M} = \mathcal{D}\otimes_{A_n} M$ に注意すれば (cf. 3.3 節) 左 $\mathcal{D}$-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{D}\otimes_{A_n} N' \longrightarrow \mathcal{D}^m \xrightarrow{\tilde{\varphi}'} \mathcal{M}$$

を得る. ここで $\tilde{\varphi}'$ は

$$\tilde{\varphi}'(U_1,\dots,U_m) := \sum_{i=1}^m U_i v_i = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^r U_i Q_{ij} u_j$$

で定義される. 一方 $\mathcal{N}'$ の定義から,

$$0 \longrightarrow \mathcal{N}' \longrightarrow \mathcal{D}^m \xrightarrow{\tilde{\varphi}'} \mathcal{M}$$

は完全系列だから $\mathcal{N}' \cong \mathcal{D}\otimes_{A_n} N'$ を得る. 従って

$$\mathcal{M}' \cong \mathcal{D}^m/\mathcal{N}' \cong \mathcal{D}^m/\mathcal{D}\otimes_{A_n} N' \cong \mathcal{D}\otimes_{A_n}((A_n)^r/N') \cong \mathcal{D}\otimes_{A_n} M'$$

である. これと (1.1) から完全系列

$$0 \longleftarrow \mathcal{M}' \longleftarrow \mathcal{D}^m \xleftarrow{\tilde{\psi}'} \mathcal{D}^\ell$$

を得る. $\tilde{\psi}'(U_1,\ldots,U_\ell)=U_1\vec{R}'_1+\cdots+U_\ell\vec{R}'_\ell$ であるから, $v_1,\ldots,v_m$ に対する方程式系 $\mathcal{M}'$ は具体的には

$$\mathcal{M}' \quad : \quad \sum_{j=1}^{m} R_{ij}v_j=0 \qquad (i=1,\ldots,\ell)$$

で表わされる. ただし $\vec{R}'_i=(R_{i1},\ldots,R_{im})$ とおいた.
(II) の解答: (1.2) から 1 対 1 の A_n-準同型

$$M'=(A_n)^m/N' \xrightarrow{\overline{\varphi}'} M$$

が導かれる. この準同型によって, $M'\subset M$ とみなしたとき,

$$\begin{aligned} M'=M &\iff \mathrm{Im}\,\overline{\varphi}'=M \\ &\iff A_n\vec{Q}_1+\cdots+A_n\vec{Q}_m+N=(A_n)^r \\ &\iff A_n\vec{Q}_1+\cdots+A_n\vec{Q}_m+A_n\vec{P}_1+\cdots+A_n\vec{P}_s=(A_n)^r \end{aligned}$$

であるから, $\vec{Q}_1,\ldots,\vec{Q}_m,\vec{P}_1,\ldots,\vec{P}_s$ が生成する $(A_n)^r$ の左 A_n-加群 L の項順序 $\prec$ に関するグレブナ基底 $\mathbf{G}$ を求めれば, $M'=M$ となるための必要十分条件は,

$$E(\mathbf{G})\supset\{(0,i)\in\mathbf{N}^{2n}\times\{1,\ldots,r\}\mid i=1,\ldots,r\}$$

となることである.
　一方, 点 $p\in\mathbf{C}^n$ において

$$\begin{aligned} \mathcal{M}'_p=\mathcal{M}_p &\iff \mathcal{D}_pv_1+\cdots+\mathcal{D}_pv_m=\mathcal{M}_p \\ &\iff \mathcal{D}_p\vec{Q}_1+\cdots+\mathcal{D}_p\vec{Q}_m+\mathcal{N}_p=(\mathcal{D}_p)^r \\ &\iff \mathcal{D}_p\vec{Q}_1+\cdots+\mathcal{D}_p\vec{Q}_m+\mathcal{D}_p\vec{P}_1+\cdots+\mathcal{D}_p\vec{P}_s=(\mathcal{D}_p)^r \end{aligned}$$

を得る. 従って, 定理 4.4.9 を用いて, $\vec{Q}_1,\ldots,\vec{Q}_m,\vec{P}_1,\ldots,\vec{P}_s$ が生成する $(\mathcal{D}_p)^r$ の左 $\mathcal{D}_p$-加群 $\mathcal{L}$ の D-順序に関するグレブナ基底 $\mathbf{G}'$ を求めれば, $\mathcal{M}'=\mathcal{M}$ となるための必要十分条件は

$$E_D(\mathbf{G}')\supset\{(0,i)\in\mathbf{N}^{2n}\times\{1,\ldots,r\}\mid i=1,\ldots,r\}$$

となることである.
　なお, 以上のことから $M'=M$ ならば,

$$A_n\vec{Q}_1+\cdots+A_n\vec{Q}_m+A_n\vec{P}_1+\cdots+A_n\vec{P}_s=(A_n)^r$$

であるから, 任意の $p\in\mathbf{C}^n$ に対して

$$\mathcal{D}_p\vec{Q}_1+\cdots+\mathcal{D}_p\vec{Q}_m+\mathcal{D}_p\vec{P}_1+\cdots+\mathcal{D}_p\vec{P}_s=(\mathcal{D}_p)^r$$

となる. 実際, 各単位ベクトル $\vec{e}_i\in(A_n)^r$ が $Q_1,\ldots,Q_m,P_1,\ldots,P_s$ の A_n 係数の 1 次結合で書けるので, 必然的に $\mathcal{D}_p$ 係数の 1 次結合でも書けることになる. 従って $M'=M$ ならば, 任意の $p\in\mathbf{C}^n$ に対して $\mathcal{M}'_p=\mathcal{M}_p$ となることがわかった.

さらに $M=M'$ または $\mathcal{M}_p=\mathcal{M}'_p$ のとき, グレブナ基底のアルゴリズム (アルゴリズム 4.1.21 および定理 4.4.9) から, 各 $j=1,\dots,r$ に対して

$$\vec{e}_j = U_{j1}\vec{Q}_1+\cdots+U_{jm}\vec{Q}_m+V_{j1}\vec{P}_1+\cdots+V_{js}\vec{P}_s$$

となる $U_{j1},\dots,U_{jm},V_{j1},\dots,V_{js}\in A_n$ を見出すことができる. このとき

$$u_j = U_{j1}v_1+\cdots+U_{jm}v_m \qquad (j=1,\dots,r)$$

であるから, 逆に $u_1,\dots,u_r$ を $v_1,\dots,v_m$ で具体的に表わすことが可能である.
　常微分方程式 $(n=1)$ の場合の簡単な例を挙げよう.

例 5.1.1. $\lambda\in\mathbf{C}$ を定数, $n=1$ として $x=x_1,\partial=\partial_1$ と書こう.

$$\mathcal{M}:=\mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial-\lambda)=\mathcal{D}u$$

(u は 1 の $\mathcal{M}$ における剰余類) とおく. $v:=xu$, $\mathcal{M}':=\mathcal{D}v\subset\mathcal{M}$ とおいて, v に対する方程式 $\mathcal{M}'$ の具体形を求め, $\mathcal{M}'=\mathcal{M}$ かどうかを判定しよう.

$$P:=x\partial-\lambda,\quad Q:=x$$

とおく. P と Q は 4.4 節の意味で F-斉次であるから, 4.3 節の W-順序による A_1 でのグレブナ基底と 4.2 節の D-順序による $\mathcal{D}_0$ でのグレブナ基底は一致することに注意しておく. そこで以下では W-順序によるグレブナ基底を考える.
(1) $\lambda\neq-1$ のとき:

$$\mathrm{sp}(P,Q)=P-\partial Q=x\partial-\lambda-(x\partial+1)=-\lambda-1\neq 0$$

だから, $A_1P+A_1Q=A_1$ であり, (II) から ($\mathbf{C}$ 上で) $\mathcal{M}'=\mathcal{M}$ である. 上の式から

$$\frac{1}{\lambda+1}\partial Q-\frac{1}{\lambda+1}P=1 \tag{1.3}$$

を得る. 定理 4.1.31 に従って

$$C:=\left(\frac{1}{\lambda+1}\partial,\ -\frac{1}{\lambda+1}\right),\qquad D:=\begin{pmatrix} x\\ x\partial-\lambda\end{pmatrix}$$

とおけば

$$DC-I_2=\begin{pmatrix}\frac{1}{\lambda+1}x\partial-1 & -\frac{1}{\lambda+1}x\\ \frac{1}{\lambda+1}(x\partial-\lambda)\partial & -\frac{1}{\lambda+1}(x\partial-\lambda)-1\end{pmatrix}$$

だから, v の満たす方程式は

$$\left(\frac{1}{\lambda+1}x\partial-1\right)v=(x\partial-\lambda)\partial v=0$$

となるが, $(x\partial-\lambda)\partial=\partial(x\partial-\lambda-1)$ であるから, これは

$$(x\partial-\lambda-1)v=0$$

と同値である．すなわち $\mathcal{M}' = \mathcal{D}v = \mathcal{D}/\mathcal{D}(x\partial - \lambda - 1)$ である．また, (1.3) の両辺を u に作用させて

$$u = \frac{1}{\lambda+1}\partial v$$

を得る．
(2) $\lambda = -1$ のとき:

$$\mathrm{sp}(P, Q) = P - \partial Q = x\partial + 1 - (x\partial + 1) = 0$$

であるから $\{P, Q\}$ は W-順序に関するグレブナ基底であり, 上の注意から, D-順序に関するグレブナ基底でもある．従って $\mathcal{D}_0 P + \mathcal{D}_0 Q \neq \mathcal{D}_0$ であるから $\mathcal{M}'_0 \neq \mathcal{M}_0$ である．($p \neq 0$ では $\mathcal{M}'_p = \mathcal{M}_p$ が成り立つ.) 上式から $P = \partial Q$ だから, $U, V \in A_1$ に対して

$$UQ + VP = 0 \Longleftrightarrow (U + V\partial)x = 0 \Longleftrightarrow U + V\partial = 0$$

だから, $\mathcal{M}' = \mathcal{D}/\mathcal{D}\partial$ を得る．すなわち v に対する方程式は $\partial v = 0$ である．

例 5.1.2. $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbf{C}$ として Gauss の微分方程式

$$Pu = \Big(x(1-x)\partial^2 + \{\gamma - (\alpha + \beta + 1)x\}\partial - \alpha\beta\Big)\, u = 0$$

を考える．$\mathcal{M} := \mathcal{D}/\mathcal{D}P = \mathcal{D}u$ とおく．$v := \partial u$ として $\mathcal{M}' = \mathcal{D}v \subset \mathcal{M}$ を考える．$\alpha\beta \neq 0$ のとき $A_1\partial + A_1 P = A_1$ であるから, $\mathbf{C}$ 上で $\mathcal{M}' = \mathcal{M}$ を得る．逆の対応が

$$u = \frac{1}{\alpha\beta}\{x(1-x)\partial - (\alpha+\beta+1)x + \gamma\}v$$

で与えられることもわかる．また, $\alpha\beta = 0$ のときは, 任意の $p \in \mathbf{C}$ において $\mathcal{D}_p\partial + \mathcal{D}_p P = \mathcal{D}_p\partial \neq \mathcal{D}_p$ となるので, $\mathcal{M}'_p \neq \mathcal{M}$ である．

問題 1. 上の例において v の満たす方程式を求めよ．

5.2 特性多様体

ここでは, 線型偏微分方程式系の特性多様体 (cf. 3.4 節) を計算するアルゴリズムを与えるのが目標である．4.3 節と同様に $\mathbf{N}^{2n}$ の項順序 $\prec_W$ であって

$$(\alpha, \beta) \prec_W (\alpha', \beta') \Longrightarrow |\beta| \leq |\beta'|$$

を満たすものを一つ固定する．更に $\mathbf{N}^{2n} \times \{1, \ldots, r\}$ の全順序 $\prec_W$ を

$$\begin{aligned}(\alpha, \beta, i) \prec_W (\alpha', \beta', j) \quad \Longleftrightarrow \quad & |\beta| < |\beta'| \\ \text{or} \quad & (|\beta| = |\beta'|,\ i < j) \\ \text{or} \quad & (|\beta| = |\beta'|,\ i = j,\ (\alpha, \beta) \prec_W (\alpha', \beta'))\end{aligned}$$

で定義して W-順序と呼ぶ．この順序に関する $\vec{P} \in (A_n)^r$ の leading exponent と leading point をそれぞれ $\mathrm{lexp}(\vec{P})$, $\mathrm{lp}(\vec{P})$ で表わそう．

定理 5.2.1. $P_{ij} \in A_n$ として, 線型偏微分方程式系

$$\mathcal{M} \quad : \quad \sum_{j=1}^{r} P_{ij} u_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, s)$$

を考える. $\vec{P}_i := (P_{i1}, \ldots, P_{ir}) \in (A_n)^r$ とおいて, $\mathbf{G}$ を $(A_n)^r$ の左部分 A_n-加群 $N := A_n\vec{P}_1 + \cdots + A_n\vec{P}_s$ の W-順序に関するグレブナ基底として, $\nu = 1, \ldots, r$ に対して $\mathbf{G}_\nu := \{\vec{P} \in \mathbf{G} \mid \mathrm{lp}(\vec{P}) = \nu\}$ とおくと, $\mathcal{M}$ の特性多様体 $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ は

$$\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \bigcup_{\nu=1}^{r} \{(x, \xi) \in \mathbf{C}^{2n} \mid \sigma(\vec{P})_\nu(x, \xi) = 0 \text{ for any } \vec{P} \in \mathbf{G}_\nu\}$$

で定義される $\mathbf{C}^{2n}$ の代数的集合である. ここで, $\sigma(\vec{P})_\nu$ は $\sigma(\vec{P})$ の第 ν 成分を表わす.

証明: $\mathcal{D}^r$ の左 $\mathcal{D}$-部分加群 (の層) $\mathcal{N}$ を

$$\mathcal{N} := \mathcal{D}\vec{P}_1 + \cdots + \mathcal{D}\vec{P}_s$$

で定義する. $k \geq 0$ に対して

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_k &:= \mathcal{D}(k)u_1 + \cdots + \mathcal{D}(k)u_r, \\ \mathcal{N}_k &:= \mathcal{D}(k)^r \cap \mathcal{N}, \\ \mathrm{gr}(\mathcal{N}) &:= \bigoplus_{k=0}^{\infty} (\mathcal{N}_k / \mathcal{N}_{k-1}), \\ \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N})) &:= \mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n}} \otimes_{\mathcal{O}[\xi]} \mathrm{gr}(\mathcal{N}) \end{aligned}$$

とおく. 3.4 節の議論から, $\mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N}))$ は $(\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n}})^r$ の部分 $\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n}}$-加群とみなせて,

$$\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \{p^* = (x, \xi) \in \mathbf{C}^{2n} \mid \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N}))_{p^*} \neq ((\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n}})_{p^*})^r\}$$

が成立する. また, $\mathrm{gr}(\mathcal{N})$ の部分 $\mathcal{O}[\xi]$-加群の層 $\mathcal{L}^{(\nu)}$ を

$$\mathcal{L}^{(\nu)} := \{(f_1, \ldots, f_r) \in \mathrm{gr}(\mathcal{N}) \mid f_\mu = 0 \text{ for } \mu > \nu\}$$

で定義すると, $\mathcal{L}^{(\nu)}/\mathcal{L}^{(\nu-1)}$ は (第 ν 成分に着目することにより) $\mathcal{O}[\xi]$ のイデアル (の層) とみなすことができる. 従って $p^* \in T^*\mathbf{C}^n = \mathbf{C}^{2n}$ に対して

$$\begin{aligned} p^* \notin \mathrm{Char}(\mathcal{M}) \quad &\iff \quad \mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N}))_{p^*} = ((\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n}})_{p^*})^r \\ &\iff \quad \mu(\mathcal{L}^{(\nu)}/\mathcal{L}^{(\nu-1)})_{p^*} = (\mathcal{O}_{\mathbf{C}^{2n}})_{p^*} \quad (\forall \nu = 1, \ldots, r) \end{aligned}$$

である. 実際この条件は, 各 ν に対して $(f_{\nu,1}, \ldots, f_{\nu,\nu-1}, 1, 0, \ldots, 0)$ という形の $\mu(\mathrm{gr}(\mathcal{N}))$ の元が存在することと同値であることに注意すればよい. さて, 以下では $\mathcal{L}^{(\nu)}/\mathcal{L}^{(\nu-1)}$ が $\{\sigma(\vec{P})_\nu \mid \vec{P} \in \mathbf{G}_\nu\}$ で生成されることを示そう.

まず定理 4.3.3 によって, $\mathrm{gr}(\mathcal{N})$ は $\mathcal{O}[\xi]$ 上 $\sigma(\mathbf{G}) := \{\sigma(\vec{P}) \mid \vec{P} \in \mathbf{G}\}$ で生成される. 従って $\mathbf{G} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_t\}$ として, $\vec{f} \in (\mathcal{N}_m/\mathcal{N}_{m-1}) \cap \mathcal{L}^{(\nu)}$ とすると, 適当な $q_i \in \mathcal{O}[\xi]$ によって

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{t} q_i \sigma(\vec{P}_i) \tag{2.1}$$

と書ける．ここで $\mu := \max\{\mathrm{lp}(\vec{P}_i) \mid q_i \neq 0\}$ として，

$$\mathbf{G}_{\leq\mu} := \{\sigma(\vec{P}) \mid \vec{P} \in \mathbf{G},\ \mathrm{lp}(\vec{P}) \leq \mu\}, \qquad \sigma(\mathbf{G}_{\leq\mu}) := \{\sigma(\vec{P}) \mid \vec{P} \in \mathbf{G}_{\leq\mu}\}$$

とおこう．$\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_t$ の順番を適当に入れ替えることにより $\mathbf{G}_{\leq\mu} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_\ell\}$ $(\ell \leq t)$ としてよい．W-順序の定義から, $\sigma(\mathbf{G}_{\leq\mu})$ は $\mathbf{C}[x,\xi]^r$ において, W-順序に関するグレブナ基底であることがわかる．すなわち, $1 \leq i < j \leq \ell$ に対して

$$\mathrm{sp}(\sigma(\vec{P}_i), \sigma(\vec{P}_j)) = s_{ij}\sigma(\vec{P}_i) - s_{ji}\sigma(\vec{P}_j) = \sum_{k=1}^{\ell} q_{ijk}\sigma(\vec{P}_k) \tag{2.2}$$

かつ

$$\mathrm{lexp}_W(\vec{q}_{ijk}\sigma(\vec{P}_k)) \preceq_W \mathrm{lexp}_W(\sigma(\vec{P}_i)) \vee \mathrm{lexp}_W(\sigma(\vec{P}_j)) \quad (k = 1, \ldots, \ell)$$

を満たす $q_{ijk} \in \mathbf{C}[x,\xi]$ と単項式 s_{ij}, s_{ji} が存在する．特に (2.2) の第 μ 成分を見れば, $\sigma(\mathbf{G}_\mu)$ の第 μ 成分のなす集合は $\mathbf{C}[x,\xi]$ におけるグレブナ基底であることがわかる．ここで $\mathbf{G}_\mu = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_\lambda\}$ $(\lambda \leq \ell)$ と仮定してよい．$1 \leq i < j \leq \lambda$ に対して

$$\vec{v}_{ij} := (0, \ldots, \overset{(i)}{s_{ij}}, \ldots, \overset{(j)}{-s_{ji}}, \ldots, 0) - (q_{ij1}, \ldots, q_{ij\lambda}) \in \mathbf{C}[x,\xi]^\lambda$$

とおき, $\mathcal{O}[\xi]$-準同型 φ, ψ を

$$\begin{aligned} \varphi(f_1, \ldots, f_\lambda) &:= f_1 \cdot (\sigma(\vec{P}_1))_\mu + \cdots + f_\lambda \cdot (\sigma(\vec{P}_\lambda))_\mu, \\ \psi((f_{ij})_{i<j}) &:= \sum_{i<j} f_{ij} \cdot (\vec{v}_{ij})_\mu \end{aligned}$$

で定義すれば, 定理 4.3.3 の証明と同様に $\mathcal{O}[\xi]$ の $\mathbf{C}[x,\xi]$ 上の平坦性から, $\mathcal{O}[\xi]$-加群の完全系列

$$0 \longrightarrow \mathcal{O}[\xi]^{\lambda(\lambda-1)/2} \xrightarrow{\psi} \mathcal{O}[\xi]^\lambda \xrightarrow{\varphi} \mathcal{O}[\xi] \longrightarrow 0$$

を得る．さて (2.1) と μ の定義から

$$\vec{f} = \sum_{i=1}^{\ell} q_i\sigma(\vec{P}_i) \tag{2.3}$$

が成立している．ここで $\mu > \nu$ と仮定すると, $\vec{f} \in \mathcal{L}^{(\nu)}$ から (2.3) の両辺の第 μ 成分は 0 でなければならないから, 上の完全系列によって, 適当な $g_{ij} \in \mathcal{O}[\xi]$ が (考えている点の近傍で) 存在して

$$(q_1, \ldots, q_\lambda) = \sum_{1 \leq i < j \leq \lambda} g_{ij}\vec{v}_{ij} \tag{2.4}$$

が成立する．(2.3), (2.4) によって

$$\begin{aligned} \vec{f} &= \sum_{k=1}^{\ell} q_k\sigma(\vec{P}_k) \\ &= \sum_{k=1}^{\lambda} q_k\sigma(\vec{P}_k) + \sum_{k=\lambda+1}^{\ell} q_k\sigma(\vec{P}_k) \\ &= \sum_{1 \leq i < j \leq \lambda} g_{ij}\vec{v}_{ij} \cdot (\sigma(\vec{P}_1), \ldots, \sigma(\vec{P}_\ell)) + \sum_{k=\lambda+1}^{\ell} q_k\sigma(\vec{P}_k) \\ &= \sum_{k=\lambda+1}^{\ell} q_k\sigma(\vec{P}_k) \end{aligned}$$

を得る．ここで最後の行は $\vec{P}_k \in \mathbf{G}_{\leq \mu-1}$ なる k に関する和に他ならない．$\mu - 1 > \nu$ ならば, $\mu - 1$ を改めて μ として, 以上の議論を繰り返せば, 結局 $\vec{f}$ が $\sigma(\mathbf{G}_{\leq \nu})$ の $\mathcal{O}[\xi]$-係数の 1 次結合で表わされることがわかる．その 1 次結合の第 ν 成分に着目すれば, このことは $\mathcal{L}^{(\nu)}/\mathcal{L}^{(\nu-1)}$ が $\sigma(\mathbf{G}_\nu)$ で生成されることを意味する．故に

$$p^* = (p, \xi) \notin \mathrm{Char}(\mathcal{M}) \quad \Longleftrightarrow \quad \forall \nu = 1, \ldots, r \quad (\sigma(\vec{P})(p, \xi) \neq 0 \text{ for some } \vec{P} \in \mathbf{G}_\nu)$$

を得るから定理が証明できた．□

例 5.2.2. 変数を $x_1, \ldots, x_4$ の代わりに t, x, y, z として, $\partial_1, \ldots$ の代わりに $\partial_t, \ldots$ などと表わすことにする．電場を $\vec{E}$, 磁場を $\vec{H}$ で表わすと, 真空中の Maxwell の方程式は

$$\begin{aligned}
&\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div} \vec{H} = 0, \\
&\operatorname{rot} \vec{E} + \mu \partial_t \vec{H} = 0, \\
&\operatorname{rot} \vec{H} - \varepsilon \partial_t \vec{E} = 0
\end{aligned}$$

で与えられる．ただし ε, μ は正の定数とする (それぞれ, 真空の誘電率, 透磁率を表わす). $(\vec{E}, \vec{H}) = (u_1, \ldots, u_6)$ としてこれらを成分表示すれば, 定理 5.2.1 の記号で

$$\begin{aligned}
\vec{P}_1 &= (\partial_x, \partial_y, \partial_z, 0, 0, 0), \\
\vec{P}_2 &= (0, 0, 0, \partial_x, \partial_y, \partial_z), \\
\vec{P}_3 &= (0, -\partial_z, \partial_y, \mu\partial_t, 0, 0), \\
\vec{P}_4 &= (\partial_z, 0, -\partial_x, 0, \mu\partial_t, 0), \\
\vec{P}_5 &= (-\partial_y, \partial_x, 0, 0, 0, \mu\partial_t), \\
\vec{P}_6 &= (-\varepsilon\partial_t, 0, 0, 0, -\partial_z, \partial_y), \\
\vec{P}_7 &= (0, -\varepsilon\partial_t, 0, \partial_z, 0, -\partial_x), \\
\vec{P}_8 &= (0, 0, -\varepsilon\partial_t, -\partial_y, \partial_x, 0)
\end{aligned}$$

となる．これらが $(A_4)^6$ で生成する左 A_4-加群の (∂ についての全次数-辞書式順序から誘導される W-順序に関する) グレブナ基底 $\mathbf{G}$ を求めると $\mathbf{G} = \{\vec{P}_i \mid i = 1, \ldots, 13\}$, ただし

$$\begin{aligned}
\vec{P}_9 &= (\varepsilon\mu\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2, 0, 0, 0, 0, 0), \\
\vec{P}_{10} &= (0, \varepsilon\mu\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2, 0, 0, 0, 0), \\
\vec{P}_{11} &= (\varepsilon\partial_z\partial_t, 0, 0, \partial_y\partial_x, \partial_y^2 + \partial_z^2, 0), \\
\vec{P}_{12} &= (\partial_z\partial_x, \partial_z\partial_y, \varepsilon\mu\partial_t^2 - \partial_x^2 - \partial_y^2, 0, 0, 0), \\
\vec{P}_{13} &= (0, \varepsilon\partial_z\partial_t, -\varepsilon\partial_y\partial_t, -\partial_x^2 - \partial_y^2 - \partial_z^2, 0, 0)
\end{aligned}$$

となる．(各 $\vec{P}_i$ は定数係数, すなわち $\mathbf{C}[\partial]^6$ の元であるから, 実際にはこれは, 多項式環上の加群のグレブナ基底アルゴリズム (アルゴリズム 1.2.17) で計算できる．上の定理から,

特性多様体 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{P}_9)_1(\tau,\xi,\eta,\zeta)=0\} \\
&\quad \cup\{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{P}_{10})_2=0\} \\
&\quad \cup\{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{P}_1)_3=\sigma(\vec{P}_{12})_3=0\} \\
&\quad \cup\{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{P}_3)_4=\sigma(\vec{P}_{13})_4=0\} \\
&\quad \cup\{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{P}_4)_5=\sigma(\vec{P}_8)_5=\sigma(\vec{P}_{11})_5=0\} \\
&\quad \cup\{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{P}_2)_6=\sigma(\vec{P}_5)_6=\sigma(\vec{P}_6)_6=\sigma(\vec{P}_7)_6=0\} \\
&= \{\varepsilon\mu\tau^2-\xi^2-\eta^2-\zeta^2=0\}\cup\{\varepsilon\mu\tau^2-\xi^2-\eta^2-\zeta^2=0\} \\
&\quad \cup\{\zeta=\varepsilon\mu\tau^2-\xi^2-\eta^2=0\}\cup\{\tau=\xi^2+\eta^2+\zeta^2=0\} \\
&\quad \cup\{\tau=\xi=\eta^2+\zeta^2=0\}\cup\{\tau=\xi=\eta=\zeta=0\} \\
&= \{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \varepsilon\mu\tau^2-\xi^2-\eta^2-\zeta^2=0\}
\end{aligned}
$$

となる (t,x,y,z の双対変数を τ,ξ,η,ζ とおいた). これは, 電磁波が速度 $1/\sqrt{\varepsilon\mu}$ で伝播することを意味する.

例 5.2.3. 変数は上の例と同じとして, 変位 $\vec{u}=(u_x,u_y,u_z)$ を未知関数として, 等方弾性体における波動方程式

$$
\begin{aligned}
\rho{\partial_t}^2u_x &= (\lambda+\mu)\partial_x\mathrm{div}\,\vec{u}+\mu\Delta u_x, \\
\rho{\partial_t}^2u_y &= (\lambda+\mu)\partial_y\mathrm{div}\,\vec{u}+\mu\Delta u_y, \\
\rho{\partial_t}^2u_z &= (\lambda+\mu)\partial_z\mathrm{div}\,\vec{u}+\mu\Delta u_z
\end{aligned}
$$

を考えよう. ここで, ρ,λ,μ は正の定数 (ρ は密度を表わし, λ,μ は Lamé 係数と呼ばれる) で,

$$
\mathrm{div}\,\vec{u}:=\partial_xu_x+\partial_yu_y+\partial_zu_z, \qquad \Delta:={\partial_x}^2+{\partial_y}^2+{\partial_z}^2
$$

である. これを定理 5.2.1 の形に書けば

$$
\begin{aligned}
\vec{P}_1 &:= (\rho{\partial_t}^2-(\lambda+2\mu){\partial_x}^2-\mu{\partial_y}^2-\mu{\partial_z}^2,\ -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_y,\ -(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z), \\
\vec{P}_2 &:= (-(\lambda+\mu)\partial_x\partial_y,\ \rho{\partial_t}^2-(\lambda+2\mu){\partial_y}^2-\mu{\partial_x}^2-\mu{\partial_z}^2,\ -(\lambda+\mu)\partial_y\partial_z), \\
\vec{P}_3 &:= (-(\lambda+\mu)\partial_x\partial_z,\ -(\lambda+\mu)\partial_y\partial_z,\ \rho{\partial_t}^2-(\lambda+2\mu){\partial_z}^2-\mu{\partial_x}^2-\mu{\partial_y}^2)
\end{aligned}
$$

となる. ここで λ/ρ と μ/ρ を改めて λ,μ とおけば $\rho=1$ としても一般性を失わない. 例 5.2.2 と同じ順序でのグレブナ基底は $\mathbf{G}=\{\vec{Q}_i \mid i=1,\ldots,7\}$ である. ただし

$$
\begin{aligned}
\vec{Q}_1 &= (-\lambda\partial_x\partial_z-\mu\partial_x\partial_z,-\lambda\partial_y\partial_z-\mu\partial_y\partial_z,-\mu\partial_x^2-\mu\partial_y^2-\lambda\partial_z^2-2\mu\partial_z^2+\partial_t^2), \\
\vec{Q}_2 &= (-\lambda\partial_x\partial_y-\mu\partial_x\partial_y,-\mu\partial_x^2-\lambda\partial_y^2-2\mu\partial_y^2-\mu\partial_z^2+\partial_t^2,-\lambda\partial_y\partial_z-\mu\partial_y\partial_z), \\
\vec{Q}_3 &= (-\lambda\partial_x^2-2\mu\partial_x^2-\mu\partial_y^2-\mu\partial_z^2+\partial_t^2,-\lambda\partial_x\partial_y-\mu\partial_x\partial_y,-\lambda\partial_x\partial_z-\mu\partial_x\partial_z), \\
\vec{Q}_4 &= (\lambda\mu\partial_x^3+2\mu^2\partial_x^3+\lambda\mu\partial_x\partial_y^2+2\mu^2\partial_x\partial_y^2-\lambda^2\partial_x\partial_z^2-2\lambda\mu\partial_x\partial_z^2-\mu\partial_t^2\partial_x, \\
&\quad \lambda\mu\partial_x^2\partial_y+2\mu^2\partial_x^2\partial_y+\lambda\mu\partial_y^3+2\mu^2\partial_y^3-\lambda^2\partial_y\partial_z^2-2\lambda\mu\partial_y\partial_z^2-\mu\partial_t^2\partial_y, \\
&\quad -\lambda^2\partial_z^3\lambda^2-3\lambda\mu\partial_z^3-2\mu^2\partial_z^3+\lambda\partial_t^2\partial_z+\mu\partial_t^2\partial_z),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\vec{Q}_5 &= (\mu\partial_x^2\partial_y+\mu\partial_y^3+\mu\partial_y\partial_z^2-\partial_t^2\partial_y, -\mu\partial_x^3-\mu\partial_x\partial_y^2-\mu\partial_x\partial_z^2+\partial_t^2\partial_x, 0),\\
\vec{Q}_6 &= (-\lambda\mu\partial_x^3\partial_y-2\mu^2\partial_x^3\partial_y-\lambda\mu\partial_x\partial_y^3-2\mu^2\partial_x\partial_y^3-\lambda\mu\partial_x\partial_y\partial_z^2-2\mu^2\partial_x\partial_y\partial_z^2+\lambda\partial_t^2\partial_x\partial_y\\
&\quad +2\mu\partial_t^2\partial_x\partial_y,\ -\lambda\mu\partial_x^2\partial_y^2-2\mu^2\partial_x^2\partial_y^2-\lambda\mu\partial_x^2\partial_z^2-2\mu^2\partial_x^2\partial_z^2+\mu\partial_t^2\partial_x^2-\lambda\mu\partial_y^4-2\mu^2\partial_y^4\\
&\quad -2\lambda\mu\partial_y^2\partial_z^2-4\mu^2\partial_y^2\partial_z^2+\lambda\partial_t^2\partial_y^2+3\mu\partial_t^2\partial_y^2-\mu\lambda\partial_z^4-2\mu^2\partial_z^4+\lambda\partial_t^2\partial_z^2+3\mu\partial_t^2\partial_z^2-\partial_t^4, 0),\\
\vec{Q}_7 &= (\lambda\mu\partial_x^4+2\mu^2\partial_x^4+2\lambda\mu\partial_x^2\partial_y^2+4\mu^2\partial_x^2\partial_y^2+2\lambda\mu\partial_x^2\partial_z^2+4\mu^2\partial_x^2\partial_z^2-\lambda\partial_t^2\partial_x^2\\
&\quad -3\mu\partial_t^2\partial_x^2+\lambda\mu\partial_y^4+2\mu^2\partial_y^4+2\lambda\mu\partial_y^2\partial_z^2+4\mu^2\partial_y^2\partial_z^2-\lambda\partial_t^2\partial_y^2-3\mu\partial_t^2\partial_y^2\\
&\quad +\lambda\mu\partial_z^4+2\mu^2\partial_z^4-\lambda\partial_t^2\partial_z^2-3\mu\partial_t^2\partial_z^2+\partial_t^4,\ 0, 0)
\end{aligned}
$$

である. $\vec{Q}_i$ $(i=1,\ldots,7)$ の leading point はそれぞれ $3,3,3,3,2,2,1$ であるから, 特性多様体 V は

$$
\begin{aligned}
V &= \{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{Q}_7)_1(\tau,\xi,\eta,\zeta)=0\}\\
&\quad \cup\{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{Q}_5)_2=\sigma(\vec{Q}_6)_2=0\}\\
&\quad \cup\{(t,x,y,z,\tau,\xi,\eta,\zeta) \mid \sigma(\vec{Q}_1)_3=\sigma(\vec{Q}_2)_3=\sigma(\vec{Q}_3)_3=\sigma(\vec{Q}_4)_3=0\}\\
&= \{(\tau^2-\mu(\xi^2+\eta^2+\zeta^2))(\tau^2-(\lambda+2\mu)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2))=0\}\\
&\quad \cup\{(\tau^2-\mu\xi^2-\mu\eta^2-\mu\zeta^2)(\tau^2-(\lambda+2\mu)\eta^2-(\lambda+2\mu)\zeta^2)\\
&\qquad =\xi(\tau^2-\mu\xi^2-\mu\eta^2-\mu\zeta^2)=0\}\\
&\quad \cup\{\tau^2-\mu\xi^2-\mu\eta^2-(\lambda+2\mu)\zeta^2=\eta\zeta=\xi\zeta=\zeta(\tau^2-(\lambda+2\mu)\zeta^2)=0\}\\
&= \{(\tau^2-\mu(\xi^2+\eta^2+\zeta^2))(\tau^2-(\lambda+2\mu)(\xi^2+\eta^2+\zeta^2))=0\}
\end{aligned}
$$

となる. これは, 変位が速度 $\sqrt{\mu/\rho}$ 及び $\sqrt{(\lambda+2\mu)/\rho}$ で伝わることを意味する.

5.3 ホロノミー系の特異点とランク

ここでは, 特に代数的線型偏微分方程式系がホロノミー系の場合を扱う. $\mathcal{M}$ を代数的線型偏微分方程式系とすると, 定理 5.2.1 によって, 特性多様体 $\mathrm{Char}(\mathcal{M})$ は $T^*\mathbf{C}^n=\mathbf{C}^{2n}$ の代数的集合である. 3.6 節で定義したように,

$$
\pi : T^*\mathbf{C}^n \ni (x,\xi) \longmapsto x \in \mathbf{C}^n
$$

とすると, $\mathcal{M}$ の特異点集合 (singular locus) $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ は

$$
\mathrm{Sing}(\mathcal{M}) := \pi(\{(x,\xi)\in \mathrm{Char}(\mathcal{M}) \mid \xi\neq 0\})
$$

で与えられる. 以下では, $f\in\mathbf{C}[x,\xi]$ の変数 ξ_i に 1 を代入した結果を $\mathrm{subst}(f,\xi_i,1)$ で表わすことにする.

命題 5.3.1. 一般に I を $\mathbf{C}[x,\xi]$ の ξ に関する斉次イデアル (すなわち ξ について斉次な多項式で生成されるイデアル) とし,

$$
V := \{(x,\xi)\in\mathbf{C}^{2n} \mid \xi\neq 0,\ f(x,\xi)=0 \text{ for any } f\in I\}
$$

とおく. 各 $i=1,\ldots,n$ に対して, $\mathbf{C}[x]$ のイデアル J_i を

$$J_i := \{f(x) \in \mathbf{C}[x] \mid f(x){\xi_i}^k \in I \text{ for some } k \in \mathbf{N}\}$$

で定義すると,

$$\pi(V) = \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0 \text{ for any } f \in J_i\}$$

が成立する.

証明: $i=1,\ldots,n$ に対して

$$V_i := \{(x,\xi) \in V \mid \xi_i = 1\}$$

とおくと, V は ξ について斉次だから $\pi(V) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi(V_i)$ である. 一方, I の元に $\xi_i = 1$ を代入したものの全体 I_i は, $2n-1$ 変数多項式環

$$R_i := \mathbf{C}[x, \xi_1, \ldots, \xi_{i-1}, \xi_{i+1}, \ldots, \xi_n]$$

のイデアルであって, $J_i = I_i \cap \mathbf{C}[x]$ が成立する. 実際, $J_i \subset I_i \cap \mathbf{C}[x]$ は明らかであるから, $f(x) \in I_i \cap \mathbf{C}[x]$ とすると, ある $g(x,\xi) \in I$ が存在して $f = \mathrm{subst}(g, \xi_i, 1)$ が成り立つ. g を ξ に関する斉次成分に分解して

$$g(x,\xi) = \sum_{k=0}^{m} g_k(x,\xi) \qquad (g_k \text{ は } \xi \text{ について } k \text{ 次斉次})$$

と書くと, I が ξ について斉次イデアルであることから, 各斉次成分 g_k は I に属する. 従って,

$$g^h(x,\xi) := \sum_{k=0}^{m} {\xi_i}^{m-k} g_k(x,\xi)$$

は I の元で ξ について m 次斉次である. そこで

$$h(x,\xi) := f(x){\xi_i}^m - g^h(x,\xi)$$

とおくと, h は ξ について斉次で, $\xi_i = 1$ を代入すると 0 となるから,

$$h(x,\xi) = q(x,\xi)(\xi_i - 1)$$

を満たす $q(x,\xi) \in \mathbf{C}[x,\xi]$ が存在する. $q(x,\xi)$ を ξ に関する斉次成分に分解すれば, h の斉次性から $q = h = 0$ でなければならないことがわかる. 従って $f(x){\xi_i}^m = g^h \in I$, すなわち $f \in J_i$ である. このことと定義から

$$\begin{aligned} W_i &:= \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0 \text{ for any } f \in J_i\} \\ &= \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0 \text{ for any } f \in I_i \cap \mathbf{C}[x]\} \\ &\supset \pi(V_i) \end{aligned}$$

は明らかであるが, 更に消去法 (終結式) の理論を用いると, W_i は $\pi(V_i)$ の Zariski closure, すなわち $\pi(V_i)$ を含む最小の代数的集合であることがわかる ([CLO] 参照). 従って $W := \bigcup_{i=1}^{n} W_i$ は $\pi(V) = \bigcup_{i=1}^{n} \pi(V_i)$ の Zariski closure である. 一方, 斉次性から V は $\mathbf{C}^n \times \mathbf{P}^{n-1}$ の代数的集合とみなせる ($\mathbf{P}^{n-1}$ は $n-1$ 次元複素射影空間) から, $\pi(V)$ は $\mathbf{C}^n$ の代数的集合である (例えば [Mum] 参照). 従って $W = \pi(V)$ が成立する. □

$\mathbf{N}^{2n}$ の全順序 $\prec_W$ は前節と同様とする.

命題 5.3.2. 命題 5.3.1 と同じ仮定のもとで, $\{f_1,\ldots,f_m\}$ を I の生成元の集合であって, 各 f_i は ξ について斉次であるものとする. 各 i について, $\mathbf{G}_i$ を

$$\{\mathrm{subst}(f_1,\xi_i,1),\ldots,\mathrm{subst}(f_m,\xi_i,1)\}$$

が $\mathbf{C}[x,\xi]$ で生成するイデアルの順序 $\prec_W$ に関するグレブナ基底とすると,

$$\pi(V)=\bigcup_{i=1}^{n}\{x\in\mathbf{C}^n\mid f(x)=0 \text{ for any } f\in\mathbf{G}_i\cap\mathbf{C}[x]\}$$

である.

証明: 命題 5.3.1 の記号で, J_i が $\mathbf{G}_i\cap\mathbf{C}[x]$ の生成する $\mathbf{C}[x]$ のイデアルであることを示せばよい. I_i を命題5.3.1の証明中で定義されたものとすると, $\mathbf{G}_i$ は $2n-1$ 変数多項式環 R_i において, $\prec_W$ から誘導される順序に関する I_i のグレブナ基底であると言ってもよい.

$$\mathbf{G}_i=\{f_1(x),\ldots,f_\ell(x),f_{\ell+1}(x,\xi),\ldots,f_s(x,\xi)\}$$

かつ $f_{\ell+1},\ldots,f_s$ は ξ について 1 次以上とする. $f(x)\in J_i$ とすると $f\in I_i$ だから $f=\sum_{k=1}^{s}q_kf_k$ かつ, ($q_k\neq 0$ ならば) $\mathrm{lexp}(q_kf_k)\preceq_W \mathrm{lexp}(f)$ なる $q_1,\ldots,q_s\in\mathbf{C}[x,\xi]$ が存在する. このことと $\prec_W$ の定義から, q_kf_k は ξ について 0 次でなければならないから, $k>\ell$ のとき $q_k=0$ でなければならない. これで, J_i は $\mathbf{G}_i\cap\mathbf{C}[x]$ の生成する $\mathbf{C}[x]$ のイデアルであることが示された. □

以上の 2 つの命題と定理 5.2.1 を合せれば, 特異点集合を計算するアルゴリズムが得られる:

定理 5.3.3. $P_{ij}\in A_n$ として, 線型偏微分方程式系

$$\mathcal{M}\quad:\quad\sum_{j=1}^{r}P_{ij}u_j=0\qquad(i=1,\ldots,s)$$

を考える. $\vec{P_i}:=(P_{i1},\ldots,P_{ir})\in(A_n)^r$ とおいて, $\mathbf{G}$ を $(A_n)^r$ の左部分 A_n-加群 $N:=A_n\vec{P_1}+\cdots+A_n\vec{P_s}$ の W-順序に関するグレブナ基底として, $\nu=1,\ldots,r$ に対して $\mathbf{G}_\nu:=\{\sigma(\vec{P})_\nu\in\mathbf{G}\mid \mathrm{lp}(\vec{P})=\nu\}$ とおく. 更に $\mathbf{G}_\nu$ の各元に $\xi_i=1$ を代入した多項式の生成する $\mathbf{C}[x,\xi]$ のイデアルの順序 $\prec_W$ に関するグレブナ基底を $\mathbf{G}_{\nu i}$ とおく. このとき $\mathcal{M}$ の singular locus (特異点集合) $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ は

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{M})=\bigcup_{\nu=1}^{r}\bigcup_{i=1}^{n}\{x\in\mathbf{C}^n\mid f(x)=0 \text{ for any } f\in\mathbf{G}_{\nu i}\cap\mathbf{C}[x]\}$$

で与えられる. 特に, $\mathrm{Sing}(\mathcal{M})\neq\mathbf{C}^n$ であるための条件は, すべての ν,i について, $\mathbf{G}_{\nu i}\cap\mathbf{C}[x]$ が空集合でないことである.

証明:

$$V_\nu:=\{(x,\xi)\mid f(x,\xi)=0 \text{ for any } f\in\mathbf{G}_\nu\}$$

とおくと, 定理 5.2.1 によって

$$V := \mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \bigcup_{\nu=1}^{r} V_\nu$$

である. 一方, 命題 5.3.2 から

$$\pi(V_\nu) = \bigcup_{i=1}^{n} \{x \in \mathbf{C}^n \mid f(x) = 0 \text{ for any } f \in \mathbf{G}_{\nu i} \cap \mathbf{C}[x]\}$$

であるから, 定理の結論を得る. □

次に $\mathcal{M}$ のランク (cf. 4.6 節) を計算するアルゴリズムを与えよう. $\mathcal{M}$ は $\mathbf{C}^n \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ 上でホロノミー系であることに注意する.

定理 5.3.4. $\mathcal{M}$ は定理 5.3.3 と同様とする. $\mathbf{N}^{2n}$ の項順序 $\prec_W$ を命題 4.3.4 で定義されたものとして, $\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s$ の生成する $(A_n)^r$ の左部分 A_n-加群の順序 $\prec_W$ に関するグレブナ基底を $\mathbf{G}$ として

$$m := \sharp(\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\} \setminus \mathrm{mono}(\varpi(E_W(\mathbf{G}))))$$

とおく. ただし

$$\varpi : \mathbf{N}^{2n} \times \{1, \ldots, r\} \longrightarrow \mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$$

は $\varpi(\alpha, \beta, \nu) = (\beta, \nu)$ で定義され, $\sharp$ は集合の元の個数を表わす. このときもし m が有限ならば, $\mathcal{M}$ は $\mathbf{C}^n \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ においてホロノミー系であって, そのランク, すなわち, そこでの $\mathcal{M}$ の正則解の次元は m に等しい.

証明: $\prec_R$ を 4.3 節で定義された $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ の項順序とする.

$$U := \{x \in \mathbf{C}^n \mid \mathrm{lcoef}_R(\vec{P})(x) \neq 0 \text{ for any } \vec{P} \in \mathbf{G}\}$$

とおくと, 各 $\vec{P} \in \mathbf{G}$ に対して $\mathrm{lcoef}_R(\vec{P})$ は x の多項式だから, U は $\mathbf{C}^n$ の空でない開集合である. 任意の $p \in U$ に対して $\mathcal{M}$ の p における茎 $\mathcal{M}_p$ は, $\mathcal{O}_p$-加群としては, $(\mathcal{O}_p)^m$ と同型であることを示そう.

平行移動することによって, $p = 0$ としても一般性を失わない. $\mathbf{G}$ が $(A_n)^r$ における $\prec_W$ に関するグレブナ基底であることから, 命題 4.3.4, 4.3.5, 4.3.6 によって, $\mathbf{G}$ は左 $\mathcal{D}_0$-加群

$$\mathcal{N}_0 := \mathcal{D}_0\vec{P}_1 + \cdots + \mathcal{D}_0\vec{P}_s \subset (\mathcal{D}_0)^r$$

の順序 $\prec_D$ (4.2 節を参照) に関するグレブナ基底であることがわかる. 仮定から, すべての $\vec{P} \in \mathbf{G}$ に対して $\mathrm{lexp}_R(\vec{P})(0) \neq 0$ だから, ある $\mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\}$ のモノイデアル E_0 が存在して,

$$E_D(\mathcal{N}) = \varpi^{-1}(E_0)$$

となっている. 更に

$$S_0 := \mathbf{N}^n \times \{1, \ldots, r\} \setminus E_0$$

とおけば, $m = \sharp S_0$ である. さて, r 次元単位ベクトルの $\mathcal{M}$ の茎 $\mathcal{M}_0 = (\mathcal{D}_0)^r/\mathcal{N}_0$ における剰余類を $u_1, \ldots, u_r$ として, $\mathcal{O}_0$-準同型 ψ を

$$(\mathcal{O}_0)^m \ni (f_{\alpha i})_{(\alpha,i)\in S_0} \longmapsto \psi((f_{\alpha i})) := \sum_{(\alpha,i)\in S_0} f_{\alpha i}(x)\partial^\alpha u_i \in \mathcal{M}_0$$

で定義しよう. 任意の $\mathcal{M}_0$ の元 v は, 適当な $Q_1, \ldots, Q_r \in \mathcal{D}_0$ によって

$$v = Q_1 u_1 + \cdots + Q_r u_r$$

と書けるが, $\mathbf{G} = \{\vec{P}_1, \ldots, \vec{P}_s\}$ とおけば, 定理 4.2.10(割算定理) によって

$$(Q_1, \ldots, Q_r) = U_1\vec{P}_1 + \cdots + U_s\vec{P}_s + (R_1, \ldots, R_r)$$

かつ $\mathrm{exps}(R_i) \subset \varpi^{-1}(S_0)$ をみたす $U_1, \ldots, U_s, R_1, \ldots, R_r \in \mathcal{D}_0$ が存在する. このとき

$$v = R_1 u_1 + \cdots + R_r u_r$$

で, 条件から適当な $f_{\alpha i} \in \mathcal{O}_0$ によって

$$(R_1, \ldots, R_r) = \sum_{(\alpha,i)\in S_0} f_{\alpha i}(x)\partial^\alpha \vec{e}_i$$

と書けるから, ψ は全射である. また. $\psi((f_{\alpha i})) = 0$ とすると, 定義から

$$\vec{P} := \sum_{(\alpha,i)\in S_0} f_{\alpha i}(x)\partial^\alpha \vec{e}_i \in \mathcal{N}_0$$

であるが, 一方 $\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) \notin \varpi^{-1}(E_0) = E_D(\mathcal{N})$ であるから, $\vec{P} = 0$ でなければならない. 以上によって ψ は同型であるから, $\mathcal{O}_0$-加群として, $\mathcal{M}_0$ は $(\mathcal{O})^m$ に同型である.

さて $Y := \{0\}$ とおくと, 接方程式系の茎 $(\mathcal{M}_Y)_0 = \mathcal{M}_0/x_1\mathcal{M}_0 + \cdots + x_n\mathcal{M}_0$ は $\mathcal{M}_0$ の $\mathcal{O}_0$-加群としての構造だけから定まるから

$$(\mathcal{M}_Y)_0 \simeq (\mathcal{O}_0/x_1\mathcal{O}_0 + \cdots + x_n\mathcal{O}_0)^m = \mathbf{C}^m$$

を得る. これと 3 章の結果から, $\mathcal{M}$ の 0 の近傍での正則関数解の全体は

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})_0 \simeq \mathcal{H}om_{\mathbf{C}}(\mathcal{M}_Y, \mathbf{C}) = \mathbf{C}^m$$

となる. また, m が有限であることから, 各 $\nu = 1, \ldots, r$ と $i = 1, \ldots, n$ に対して, $\mathrm{lexp}_D(\vec{P}) = (0; \overset{(1)}{0}, \ldots, \overset{(\nu)}{k(\nu,i)}, \ldots, \overset{(n)}{0}; i)$ なる $\vec{P} \in \mathbf{G}$ と $k(\nu,i) \in \mathbf{N}$ が存在するから, 0 の近傍では $\mathrm{Char}(\mathcal{M}) = \{(x,\xi) \mid \xi = 0\}$ となる. 以上のことから $\mathcal{M}$ は U においてホロノミー系であって, ランクは m であることがわかった. 特に $U \subset \mathbf{C}^n \setminus \mathrm{Sing}(\mathcal{M})$ である. □

例題として, Appell の 2 変数超幾何関数のみたす偏微分方程式系を考え, その特性多様体, 特異点集合, ランクを計算しよう. 計算には Risa/Asir 上で下山武司氏が主に作成した Weyl 代数用グレブナ基底プログラムを用いた.

以下では $n=2$ として x_1,x_2 のかわりに x,y を変数として, ∂_1,∂_2 のかわりに ∂_x,∂_y と書く. まず, Appell の 2 変数超幾何級数 $F_1,\ldots,F_4$ の満たす方程式系 $\mathcal{M}_1,\ldots,\mathcal{M}_4$ は u を未知関数として,

$$\mathcal{M}_i \quad : \quad P_{i1}u = P_{i2}u = 0 \qquad (i=1,\ldots,4)$$

で定義される. ここで P_{ij} は $\alpha,\alpha',\ldots$ を複素数の定数として, 次で定義される Weyl 代数 A_2 の元である:

$$\begin{aligned}
P_{11} &:= x(1-x)\partial_x^2 + y(1-x)\partial_x\partial_y + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\partial_x - \beta y\partial_y - \alpha\beta,\\
P_{12} &:= y(1-y)\partial_y^2 + x(1-y)\partial_x\partial_y + \{\gamma-(\alpha+\beta'+1)y\}\partial_y - \beta' x\partial_x - \alpha\beta',\\
P_{21} &:= x(1-x)\partial_x^2 - xy\partial_x\partial_y + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\partial_x - \beta y\partial_y - \alpha\beta,\\
P_{22} &:= y(1-y)\partial_y^2 - xy\partial_x\partial_y + \{\gamma'-(\alpha+\beta'+1)y\}\partial_y - \beta' x\partial_x - \alpha\beta',\\
P_{31} &:= x(1-x)\partial_x^2 + y\partial_x\partial_y + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\partial_x - \alpha\beta,\\
P_{32} &:= y(1-y)\partial_y^2 + x\partial_x\partial_y + \{\gamma-(\alpha'+\beta'+1)y\}\partial_y - \alpha'\beta',\\
P_{41} &:= x(1-x)\partial_x^2 - 2xy\partial_x\partial_y - y^2\partial_y^2 + \{\gamma-(\alpha+\beta+1)x\}\partial_x\\
&\quad -(\alpha+\beta+1)y\partial_y - \alpha\beta,\\
P_{42} &:= y(1-y)\partial_y^2 - 2xy\partial_x\partial_y - x^2\partial_x^2 + \{\gamma'-(\alpha+\beta+1)y\}\partial_y\\
&\quad -(\alpha+\beta+1)x\partial_x - \alpha\beta.
\end{aligned}$$

$\mathbf{N}^4$ の項順序 $\prec_W$ を命題 4.3.4 で定義されたものとする.
(1) $\mathcal{M}_1$:
$I_1 := P_{11}A_2 + P_{12}A_2$ の順序 $\prec_W$ に関する (極小) グレブナ基底は

$$\mathbf{G} = \{P_{11}, P_{13}, P_{14}, P_{15}\},$$

ただし,

$$\begin{aligned}
P_{13} &:= y(y-1)(x-y)\partial_y^2 + \beta' x(x-1)\partial_x\\
&\quad +(((\alpha-\beta+\beta'+1)y+\beta-\gamma)x + (-\alpha-\beta'-1)y^2 + \gamma y)\partial_y + \alpha\beta'(x-y),\\
P_{14} &:= (x-y)\partial_y\partial_x - \beta'\partial_x + \beta\partial_y,\\
P_{15} &:= (x-y^2)\partial_y\partial_x - (y-1)y\partial_y^2 + \beta'(-x-y)\partial_x\\
&\quad +((-\alpha+\beta-\beta'-1)y+\gamma)\partial_y - a\beta'
\end{aligned}$$

である. ただし $\alpha-\gamma+1\neq 0$ とする. 命題 5.3.2 の記号で

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{C}[x,y] &= \{x(x-1)(x-y)\},\\
\mathbf{G}_2 \cap \mathbf{C}[x,y] &= \{y(y-1)(x-y)\}
\end{aligned}$$

であるから, 特異点集合は

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{M}_1) = \{(x,y)\in\mathbf{C}^2 \mid xy(x-1)(y-1)(x-y)=0\}$$

である. また,

$$E_W(\mathbf{G}) = \{(2,0,2,0),\ (1,2,0,2),\ (1,0,1,1),\ (0,2,1,1)\}$$

より, $\mathcal{M}_1$ のランクは

$$m = \sharp(\mathbf{N}^2 \setminus \mathrm{mono}(\{(2,0),(1,1),(0,2)\})) = 3$$

である. 特性多様体は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Char}(\mathcal{M}_1) &= \{\sigma(P_{11}) = \sigma(P_{13}) = \sigma(P_{14}) = \sigma(P_{15}) = 0\} \\
&= \{(x,y,\xi,\eta) \mid x = y = 0\} \cup \{x-1 = y-1 = 0\} \\
&\quad \cup \{x = \eta = 0\} \cup \{x-1 = \eta = 0\} \cup \{y = \xi = 0\} \\
&\quad \cup \{y-1 = \xi = 0\} \cup \{x - y = \xi + \eta = 0\} \cup \{\xi = \eta = 0\}
\end{aligned}$$

となるから, 特に $\mathcal{M}_1$ は $\mathbf{C}^2$ 全体でホロノミー系であることもわかる.
(2) $\mathcal{M}_2$: $I_2 := P_{21}A_2 + P_{22}A_2$ の順序 $\prec_W$ に関する (極小) グレブナ基底は

$$\mathbf{G} = \{P_{21}, P_{22}, P_{23}, P_{24}\},$$

ただし,

$$\begin{aligned}
P_{23} &:= y(y-1)(-x-y+1){\partial_y}^3 + x^2\beta'(-x+1){\partial_x}^2 \\
&\quad + x(((\beta-\beta')y - \beta' + \gamma' - 1)x + (\alpha - \gamma + 1)y + \beta' - \gamma' + 1)\partial_y\partial_x \\
&\quad + ((\beta y^2 + (-\alpha - \beta' - 3)y + \gamma' + 1)x + (-\alpha - \beta' - 3)y^2 \\
&\quad + (\alpha + \beta' + \gamma' + 4)y - \gamma' - 1){\partial_y}^2 \\
&\quad + x\beta'(\alpha+1)(-x+1)\partial_x + (\alpha+1)((\beta y - \beta' - 1)x + (-\beta' - 1)y + \beta' + 1)\partial_y, \\
P_{24} &:= (y-1)y{\partial_y}^2\partial_x - (y-1)y{\partial_y}^3 + x\beta'(-x+1){\partial_x}^2 \\
&\quad + (((\beta-\beta')y - \beta' + \gamma' - 1)x + (\alpha + \beta' - \gamma + 2)y - \gamma')\partial_y\partial_x \\
&\quad + (\beta y^2 + (-\alpha - \beta' - 3)y + \gamma' + 1){\partial_y}^2 + \beta'(\alpha+1)(-x+1)\partial_x \\
&\quad + (\alpha+1)(\beta y - \beta' - 1)\partial_y
\end{aligned}$$

である. 命題 5.3.2 の記号で

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{C}[x,y] &= \{x(x-1)(x+y-1)\}, \\
\mathbf{G}_2 \cap \mathbf{C}[x,y] &= \{y(y-1)(x+y-1)\}
\end{aligned}$$

であるから, 特異点集合は

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{M}_2) = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy(x-1)(y-1)(x+y-1) = 0\}$$

である. また,

$$E_W(\mathbf{G}) = \{(2,0,2,0),\ (1,1,1,1),\ (1,2,0,3),\ (0,2,1,2)\}$$

より, $\mathcal{M}_2$ のランクは 4 である. 特性多様体は

$$\begin{aligned}\mathrm{Char}(\mathcal{M}_2) &= \{\sigma(P_{21})=\sigma(P_{22})=\sigma(P_{23})=\sigma(P_{24})=0\}\\ &= \{(x,y,\xi,\eta)\mid x=y=0\}\cup\{x-1=y=0\}\cup\{x=y-1=0\}\\ &\quad\cup\{x=\eta=0\}\cup\{x-1=\eta=0\}\cup\{y=\xi=0\}\\ &\quad\cup\{y-1=\xi=0\}\cup\{x+y-1=\xi-\eta=0\}\cup\{\xi=\eta=0\}\end{aligned}$$

となるから, 特に $\mathcal{M}_2$ は $\mathbf{C}^2$ 全体でホロノミー系である.
(3) $\mathcal{M}_3$: $I_3 := P_{31}A_2 + P_{32}A_2$ の順序 $\prec_W$ に関する (極小) グレブナ基底は

$$\mathbf{G}=\{P_{31},P_{32},P_{33},P_{34}\},$$

ただし,

$$\begin{aligned}P_{33} &:= y^2(y-1)((y-1)x-y){\partial_y}^3\\ &\quad+x(((\alpha'+\beta'+1)y+\alpha+\beta-\gamma)x+(-\alpha'-\beta'-1)y)\partial_y\partial_x\\ &\quad+y((-\alpha'-\beta'-3)y+\gamma+1)((-y+1)x+y){\partial_y}^2\\ &\quad+x\alpha'\beta'(x-1)\partial_x\\ &\quad+((((\beta'+1)\alpha'+\beta'+1)y^2+((-\beta'-1)\alpha'-\beta'-1)y+\beta\alpha)x\\ &\quad+((-\beta'-1)\alpha'-\beta'-1)y^2)\partial_y,\\ P_{34} &:= y^2{\partial_y}^2\partial_x-(y-1)^2y^2{\partial_y}^3\\ &\quad+(((-\alpha'-\beta'-1)y-\alpha-\beta+\gamma)x+(\alpha'+\beta'+1)y)\partial_y\partial_x\\ &\quad+y(y-1)((-\alpha'-\beta'-3)y+\gamma+1){\partial_y}^2\\ &\quad+\alpha'\beta'(-x+1)\partial_x\\ &\quad+(((-\beta'-1)\alpha'-\beta'-1)y^2+((\beta'+1)\alpha'+\beta'+1)y-\beta\alpha)\partial_y\end{aligned}$$

である. 命題 5.3.2 の記号で

$$\begin{aligned}\mathbf{G}_1\cap\mathbf{C}[x,y] &= \{x^2(x-1)(xy-x-y)\},\\ \mathbf{G}_2\cap\mathbf{C}[x,y] &= \{y^2(y-1)(xy-x-y)\}\end{aligned}$$

であるから, 特異点集合は

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{M}_3)=\{(x,y)\in\mathbf{C}^2\mid xy(x-1)(y-1)(xy-x-y)=0\}$$

である. また,

$$E_W(\mathbf{G})=\{(2,0,2,0),\ (1,0,1,1),\ (1,4,0,3),\ (0,2,1,2)\}$$

より, $\mathcal{M}_3$ のランクは 4 である. 特性多様体は

$$\begin{aligned}\mathrm{Char}(\mathcal{M}_3) &= \{\sigma(P_{31})=\sigma(P_{32})=\sigma(P_{33})=\sigma(P_{34})=0\}\\ &= \{(x,y,\xi,\eta)\mid x=y=0\}\cup\{x-1=\eta=0\}\\ &\quad\cup\{x-1=\eta=0\}\cup\{x=\eta=0\}\cup\{y=\xi=0\}\\ &\quad\cup\{xy-x-y=\xi-(y-1)^2\eta=0\}\cup\{\xi=\eta=0\}\end{aligned}$$

となるから, 特に $\mathcal{M}_3$ は $\mathbf{C}^2$ 全体でホロノミー系である.

(4) $\mathcal{M}_4$: $I_4 := P_{41}A_2 + P_{42}A_2$ の順序 $\prec_W$ に関する (極小) グレブナ基底は

$$\mathbf{G} = \{P_{43}, P_{44}, P_{45}, P_{46}\},$$

ただし,

$$\begin{aligned}
P_{43} &:= -2xy\partial_y\partial_x + y(-x-y+1){\partial_y}^2 \\
&\quad +x(-\alpha-\beta+\gamma-1)\partial_x + (-\gamma' x + (-\alpha-\beta-1)y+\gamma')\partial_y - \alpha\beta, \\
P_{44} &:= x{\partial_x}^2 - y{\partial_y}^2 + \gamma\partial_x - \gamma'\partial_y, \\
P_{45} &:= y(x^2+(-2y-2)x+y^2-2y+1){\partial_y}^3 \\
&\quad +2x^2(-\alpha-\beta+\gamma-1){\partial_x}^2 \\
&\quad +x((\alpha+\beta-\gamma-2\gamma'+3)x+(-\alpha-\beta+3\gamma-3)y-\alpha-\beta+\gamma+2\gamma'-3)\partial_y\partial_x \\
&\quad +((\gamma'+1)x^2+((\alpha+\beta-3\gamma'-2)y-2\gamma'-2)x+(\alpha+\beta+3)y^2 \\
&\quad +(-\alpha-\beta-\gamma'-4)y+\gamma'+1){\partial_y}^2 \\
&\quad +2x((-\beta-1)\alpha-\beta+\gamma-1)\partial_x \\
&\quad +((((\beta+1)\alpha+\beta-2\gamma'+1)x+((\beta+1)\alpha+\beta+1)y+(-\beta-1)\alpha-\beta-1)\partial_y, \\
P_{46} &:= -2(y-1)y{\partial_y}^2\partial_x + y(x-3y-1){\partial_y}^3 \\
&\quad +2x(-\alpha-\beta+\gamma-1){\partial_x}^2 \\
&\quad +((\alpha+\beta-\gamma-2\gamma'+3)x+(-2\alpha-2\beta+4\gamma-6)y+2\gamma')\partial_y\partial_x \\
&\quad +((\gamma'+1)x+(\alpha+\beta-4\gamma'-3)y-\gamma'-1){\partial_y}^2 \\
&\quad +2((-\beta-1)\alpha-\beta+\gamma-1)\partial_x + ((\beta+1)\alpha+\beta-2\gamma'+1)\partial_y
\end{aligned}$$

である. 命題 5.3.2 の記号で

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{C}[x,y] &= \{x(x^2-2xy+y^2-2x-2y+1)\}, \\
\mathbf{G}_2 \cap \mathbf{C}[x,y] &= \{y(x^2-2xy+y^2-2x-2y+1)\}
\end{aligned}$$

であるから, 特異点集合は

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{M}_4) = \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid xy(x^2-2xy+y^2-2x-2y+1)=0\}$$

である. また,

$$E_W(\mathbf{G}) = \{(1,1,1,1),\ (1,0,2,0),\ (2,1,0,3),\ (0,2,1,2)\}$$

より, $\mathcal{M}_4$ のランクは 4 である. 特性多様体は

$$\begin{aligned}
\mathrm{Char}(\mathcal{M}_4) &= \{\sigma(P_{43}) = \sigma(P_{44}) = \sigma(P_{45}) = \sigma(P_{46}) = 0\} \\
&= \{(x,y,\xi,\eta) \mid x=y=0\} \cup \{x=\eta=0\} \\
&\quad \cup \{y=\xi=0\} \cup \{\xi=\eta=0\} \\
&\quad \cup \{x^2-2xy+y^2-2x-2y+1 = -2x\xi+(-x-y+1)\eta = \\
&\quad (2y-2)\xi+(-x+3y+1)\eta = 0\}
\end{aligned}$$

となるから, 特に $\mathcal{M}_4$ は $\mathbf{C}^2$ 全体でホロノミー系である.

3変数の場合の例として, Lauricella の超幾何級数 F_D の満たす線型偏微分方程式系 $\mathcal{M}_D$ を考えよう. これは

$$\mathcal{M}_D \quad : \quad P_1 u = P_2 u = P_3 u = 0$$

で定義される. ただし $x_1 = x, x_2 = y, x_3 = z$ と書くと,

$$\begin{aligned}
P_1 &:= x(1-x){\partial_x}^2 + y(1-x)\partial_y\partial_x + z(1-x)\partial_z\partial_x \\
&\quad +(\gamma - (\alpha+\beta_1+1)x)\partial_x - \beta_1 y\partial_y - \beta_1 z\partial_z - \alpha\beta_1, \\
P_2 &= x(1-y)\partial_y\partial_x + y(1-y){\partial_y}^2 + z(1-y)\partial_z\partial_y \\
&\quad -\beta_2 x\partial_x(\gamma - (\alpha+\beta_2+1)y)\partial_y - \beta_2 z\partial_z - \alpha\beta_2, \\
P_3 &:= x(1-z)\partial_z\partial_x + y(1-z)\partial_z\partial_y + z(1-z){\partial_z}^2 \\
&\quad -\beta_3 x\partial_x - \beta_3 y\partial_y + (\gamma - (\alpha+\beta_3+1)z)\partial_z - \alpha\beta_3
\end{aligned}$$

である ($\alpha, \beta_1, \ldots$ は複素数の定数). $\alpha - \gamma + 1 \neq 0$ のとき $I := P_1 A_3 + P_2 A_3 + P_3 A_3$ の W-順序に関する極小グレブナ基底 $\mathbf{G}$ は 9 個の元からなり,

$$\begin{aligned}
E_W(\mathbf{G}) \;=\; &\{(1,1,2,0,0,2),\ (0,1,0,0,1,1),\ (1,0,2,0,1,1),\ (1,2,0,0,2,0), \\
&(1,0,0,1,0,1),\ (0,0,2,1,0,1),\ (1,0,0,1,1,0),\ (0,2,0,1,1,0), \\
&(2,0,0,2,0,0)\}
\end{aligned}$$

であるから, $\mathcal{M}_D$ のランクは 4 である. また命題 5.3.2 の記号で

$$\begin{aligned}
\mathbf{G}_1 \cap \mathbf{C}[x,y,z] &= \{x(x-1)(-x+z)(-x+y)\}, \\
\mathbf{G}_2 \cap \mathbf{C}[x,y,z] &= \{y(y-1)(-y+z)(x-y)\}, \\
\mathbf{G}_3 \cap \mathbf{C}[x,y,z] &= \{z(z-1)(-y+z)(x-z)\}
\end{aligned}$$

であるから, 特異点集合は

$$\mathrm{Sing}(\mathcal{M}_D) = \{(x,y,x) \in \mathbf{C}^3 \mid xyz(x-1)(y-1)(z-1)(x-y)(y-z)(z-x) = 0\}$$

である.

問題 1. α, β を複素数の定数として $\mathbf{C}^2$ における偏微分方程式系

$$(x\partial_x - \alpha)u = (y\partial_y - \beta)u = \partial_y^2 u = 0$$

のランク, 特性多様体, singular locus を計算せよ (必要なら α, β の値によって場合分けを行なえ).

第6章　フックス型偏微分方程式系に対するアルゴリズム

6.1　フックス型偏微分方程式系

この章では $(t,x)=(t,x_1,\dots,x_n)$ を $(n+1)$-次元複素ユークリッド空間 $\mathbf{C}^{n+1}$ $(n\geq 1)$ の座標として, X を $\mathbf{C}^{n+1}$ の領域とする (X は原点 0 を含むと仮定しておく). $\partial_i=\partial/\partial x_i$ として, $\partial_t=\partial/\partial t$, $\partial_x=(\partial_1,\dots,\partial_n)$ と書こう. 多重指数 $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$, $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)\in\mathbf{N}^n$ に対して, これまでと同様に $x^\alpha=x_1^{\alpha_1}\dots x_n^{\alpha_n}$, $\partial_x^\beta=\partial_1^{\beta_1}\dots\partial_n^{\beta_n}$ と書く.

6.1.1　$\mathcal{D}_0$ の filtration とフックス型作用素

$\mathcal{D}$ を X 上の ($n+1$ 変数の) 解析的微分作用素の環の層とする. 3 章で定義したように $\mathcal{D}_0$ は $\mathcal{D}$ の $0\in X$ における茎を表わす. $Y=\{(t,x)\in X\mid t=0\}$ とおこう. なお, 以下の議論は $\mathcal{D}_0$ のかわりに $p\in Y$ における茎 $\mathcal{D}_p$ に対しても同様に適用できることを注意しておく.

$\mathcal{D}_0$ の元 P は

$$P=\sum_{\nu\geq 0,\beta\in\mathbf{N}^n}a_{\nu,\beta}(t,x)\partial_t^\nu\partial_x^\beta=\sum_{\nu,\mu\geq 0,\beta,\alpha\in\mathbf{N}^n}a_{\mu,\nu,\alpha,\beta}t^\mu x^\alpha\partial_t^\nu\partial_x^\beta, \tag{1.1}$$

と書ける. ここで ν と β については有限和である. さて整数 m に対して, $\mathcal{D}_0$ の $\mathbf{C}$-部分空間 $\mathcal{F}_m$ を

$$\mathcal{F}_m:=\left\{P=\sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta}a_{\mu,\nu,\alpha,\beta}t^\mu x^\alpha\partial_t^\nu\partial_x^\beta\in\mathcal{D}_0\,\middle|\,a_{\mu,\nu,\alpha,\beta}=0\text{ if }\nu-\mu>m\right\}.$$

で定義する. $\{\mathcal{F}_m\}_{m\in\mathbf{Z}}$ は

$$\dots\mathcal{F}_{-2}\subset\mathcal{F}_{-1}\subset\mathcal{F}_0\subset\mathcal{F}_1\subset\mathcal{F}_2\dots,\quad\bigcup_{m\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}_m=\mathcal{D}_0,\quad\mathcal{F}_m\mathcal{F}_\ell\subset\mathcal{F}_{m+\ell}$$

を満たす $\mathcal{D}_0$ の filtration である. $P\in\mathcal{D}_0\setminus\{0\}$ に対して P の **F-階数** (F-order) $\mathrm{ord}_F(P)$ を, $P\in\mathcal{F}_m$ を満たす最小の m と定義する. (1.1) の形の P の F-階数が m のとき,

$$\hat\sigma(P)=\hat\sigma_m(P):=\sum_{\nu-\mu=m}a_{\mu,\nu,\alpha,\beta}t^\mu x^\alpha\partial_t^\nu\partial_x^\beta\in\mathcal{D}_0$$

とおき, P の **形式シンボル** (formal symbol) と呼ぶ. ($P=0$ のときは $\hat\sigma(P)=0$ とおく.) 一般に $\hat\sigma(Q)\hat\sigma(P)\neq\hat\sigma(P)\hat\sigma(Q)$ であるが, $\hat\sigma(PQ)=\hat\sigma(P)\hat\sigma(Q)$ が任意の $P,Q\in\mathcal{D}_0$ に対して成り立つことは容易に示せる.

上記の filtration は 柏原 ([Kash3]) によって導入され, 形式シンボルは Laurent-Schapira ([LS]) によって定義された.

次の定義は, 本質的には Baouendi-Goulaouic ([BG]) によるものである:

定義 6.1.1. (フックス型作用素) $P \in \mathcal{D}_0$ が $Y = \{t = 0\}$ に沿って $0 \in Y$ で**フックス型**とは, P が次の条件 (FC1) と (FC2) を満たすことである:

(FC1) 非負整数 k, m と x の正則関数 $a_j(x)$ で,

$$\hat{\sigma}(P) = \sum_{j=0}^{\min\{k,m\}} a_j(x) t^{k-j} \partial_t^{m-j}$$

かつ $a_0(0) \neq 0$ を満たすものが存在する;

(FC2) $\mathrm{ord}(\hat{\sigma}(P)) = \mathrm{ord}(P)$.

定義 6.1.2. $P \in \mathcal{D}_0$ が Y に沿って (0 で) **形式的にフックス型** (formally Fuchsian) とは P が上の条件 (FC1) を満たすこと.

形式的フックス型作用素の概念は [LS] で導入されているが, そこでは Y に沿って楕円型と呼ばれている.

ここでは Y を X の複素超平面としたが, X の複素超曲面 Y に対しても以上の概念は定義できる (ただし Y は特異点を持たないとする). 実際, 局所的な複素解析的座標変換によって $Y = \{t = 0\}$ とすることができ, (形式的) フックス型作用素の定義は, そのときの座標変換の選び方によらないことも容易に確かめられる. 以下の定義に関しても同様である.

6.1.2 フックス型偏微分方程式系

この章では 1 個の未知関数 u に対する線型偏微分方程式系

$$\mathcal{M}: \quad P_1 u = \ldots = P_s u = 0$$

を考察する. ここで $P_1, \ldots, P_s \in \mathcal{D}(X)$ とする. 3 章で説明したように $\mathcal{M}$ は $\mathcal{I} = \mathcal{D}P_1 + \cdots + \mathcal{D}P_s$ として, 連接 $\mathcal{D}$-加群 $\mathcal{D}/\mathcal{I}$ とみなされる.

定義 6.1.3. (フックス型偏微分方程式系) 上記の仮定と記号のもとで $\mathcal{M}$ が Y に沿って ($p \in Y$ で) **フックス型**とは, $\mathcal{I}_p$ の元 P で Y に沿ってフックス型であるようなものが存在すること. また, $\mathcal{M}$ が Y に沿って (p で) **形式的にフックス型**とは, Y に沿って形式的にフックス型であるような $P \in \mathcal{I}_p$ が存在すること.

特に, 単独方程式 $\mathcal{M} : Pu = 0$ がフックス型であるための必要十分条件は, P がフックス型作用素であることである. これは次の補題から直ちにわかる:

補題 6.1.4. $P, Q \in \mathcal{D}_0$ とする. PQ が 0 で Y に沿ってフックス型であるための必要十分条件は P, Q が共に Y に沿ってフックス型であることである.

証明: $\hat\sigma(PQ)=\hat\sigma(P)\hat\sigma(Q)$ だから, PQ が形式的にフックス型であることと P,Q が形式的にフックス型であることは同値である. また,

$$\mathrm{ord}(\hat\sigma(PQ))=\mathrm{ord}(\hat\sigma(P))+\mathrm{ord}(\hat\sigma(Q))\le\mathrm{ord}(P)+\mathrm{ord}(Q)=\mathrm{ord}(PQ)$$

であるから

$$\mathrm{ord}(\hat\sigma(PQ))=\mathrm{ord}(PQ)\quad\Longleftrightarrow\quad(\mathrm{ord}(\hat\sigma(P))=\mathrm{ord}(P),\ \mathrm{ord}(\hat\sigma(Q))=\mathrm{ord}(Q))$$

であり, 補題の結論を得る. □

6.1.3 フックス型方程式系の特性指数

$\overline{\mathcal{D}}_0$ を filtration $\{\mathcal{F}_m\}$ に付随した graded ring, すなわち $\overline{\mathcal{D}}_0:=\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_{m-1}$ とする. $\overline{\mathcal{D}}_0$ は非可換環である. 各整数 m に対して, 形式シンボルは準同型

$$\hat\sigma=\hat\sigma_m:\mathcal{F}_m\longrightarrow\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_{m-1}\subset\overline{\mathcal{D}}_0$$

を定義する. 次に $\mathcal{D}'_0=\mathbf{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$ を x に関する n 変数収束巾級数係数の微分作用素環, τ と θ を不定元として, $\mathcal{D}'_0[\theta]$ を $\mathcal{D}'_0$ を係数環とする θ の多項式環とする. $\overline{\mathcal{D}}_0$ から

$$\mathcal{D}'_0[\theta,\tau,\tau^{-1}]:=\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}\mathcal{D}'_0[\theta]\tau^m$$

への 1 対 1 の環準同型 ψ を定義しよう. まず $\mathcal{D}'_0[\theta,\tau,\tau^{-1}]$ に環構造を

$$(P(\theta,x,\partial_x)\tau^j)\cdot(Q(\theta,x,\partial_x)\tau^k):=P(\theta-k,x,\partial_x)Q(\theta,x,\partial_x)\tau^{j+k}$$

で定義する. $\mathcal{F}_m\setminus\mathcal{F}_{m-1}$ の元 P に対して, $\hat\sigma(P)$ は

$$\hat\sigma(P)=t^{-m}\hat P(t\partial_t,x,\partial_x)$$

という形に一意的に書ける. このとき $\psi(P):=\hat P(\theta,x,\partial_x)\tau^m$ と定義する. これによって

$$\psi:\mathcal{F}_m/\mathcal{F}_{m-1}\to\mathcal{D}'_0[\theta]\tau^m$$

という加法群としての準同型が各整数 m について定まる. ψ はすべての m について 1 対 1 で, $m\le 0$ のときは同型であることも容易にわかる.

補題 6.1.5. $\psi:\overline{\mathcal{D}}_0\to\mathcal{D}'_0[\theta,\tau,\tau^{-1}]$ は 1 対 1 の環準同型である.

さて上記の $\mathcal{M}$ は $Y=\{t=0\}$ に沿って 0 でフックス型としよう. $\mathcal{D}_0$ の左イデアル $\overline{\mathcal{I}}_0$ を

$$\overline{\mathcal{I}}_0:=\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}\hat\sigma_m(\mathcal{I}_0\cap\mathcal{F}_m)$$

で定義する. $\mathcal{O}'_0=\mathbf{C}\{x\}$ と書いて

$$\mathcal{O}'_0[\theta,\tau,\tau^{-1}]=\bigoplus_{m\in\mathbf{Z}}\mathcal{O}'_0[\theta]\tau^m\subset\mathcal{D}'_0[\theta,\tau,\tau^{-1}]$$

とおく. $\mathcal{J}$ を $\mathcal{O}'_0[\theta,\tau,\tau^{-1}]$ の $\psi(\overline{\mathcal{I}}_0)\cap\mathcal{O}'_0[\theta,\tau,\tau^{-1}]$ を含む最小の左イデアルとして

$$\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0) := \mathcal{J}\cap\mathcal{O}'_0[\theta]$$

とおく. $\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0)$ は, 可換環 $\mathcal{O}'_0[\theta]$ のイデアルである. 容易にわかるように $\mathcal{J}$ は $\mathcal{O}'_0[\theta,\tau,\tau^{-1}]$ 上 $\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0)$ で生成される.

補題 6.1.6.

$$\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0) = \{f(\theta,x)\in\mathcal{O}'_0[\theta] \mid f(\theta,x)\tau^{-m}\in\psi(\overline{\mathcal{I}}_0)\cap\mathcal{O}'_0[\theta]\tau^{-m}\quad(\exists m\geq 0)\}.$$

$p\in Y$ のとき, $\mathcal{O}'_p[\theta]$ のイデアル $\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},p)$ も同様に定義される.

定義 6.1.7. p を Y の点とするとき

$$e_Y(\mathcal{M},p) := \{\theta\in\mathbf{C} \mid f(\theta,p)=0\quad(\forall f\in\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},p))\}$$

のことを, p における $\mathcal{M}$ の Y に沿っての**特性指数**の集合と呼ぶ.

定義 6.1.8. $\mathcal{O}'_p[\theta]$ のイデアル $\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},p)$ を

$$\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},p) := \{f\in\mathcal{O}'_p[\theta] \mid af\in\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},p)\quad(\exists a\in\mathcal{O}'_p\setminus\{0\})\}$$

で定義して, p における $\mathcal{M}$ の Y に沿っての**強特性指数**の集合を

$$\tilde{e}_Y(\mathcal{M},p) := \{\theta\in\mathbf{C} \mid f(\theta,p)=0\quad(\forall f\in\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},p))\}$$

で定義する.

補題 6.1.9. $\mathcal{M}$ が 0 で Y に沿ってフックス型とすると, イデアル $\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},0)$ は θ についてモニックなある多項式 $f\in\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},0)$ で生成される.

証明: $\mathcal{K}'_0$ を $\mathcal{O}'_0$ の商体とする. $\mathcal{O}'_0$ は一意分解整域である. $\mathcal{L}$ を $\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},0)$ で生成される $\mathcal{K}'_0[\theta]$ のイデアルとすると

$$\mathcal{L} = \{cf \mid f\in\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},0),\ c\in\mathcal{K}'_0\}$$

が成り立つ. f を $\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},0)$ の元のうちで θ に関する次数が最小の原始多項式とすると, $\mathcal{L}$ は f で生成される. $\mathcal{M}$ は Y に沿ってフックス型だから, モニックな多項式 $g\in\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0)$ が存在する. すると $\mathcal{K}'_0[\theta]$ において f は g を割りきる. Gauss の補題によって, f は g を $\mathcal{O}'_0[\theta]$ で割りきり, かつ f は θ についてモニックであることがわかる. h を $\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},0)$ の元とすると, f は $\mathcal{K}'_0[\theta]$ において h を割りきるから, $\mathcal{O}'_0[\theta]$ においても割りきる. □

特に単独のフックス型方程式 $\mathcal{M}:Pu=0$ の特性指数は, θ についての代数方程式 (決定方程式 (indicial equation) という) $\psi(\hat{\sigma}(P))=0$ の根であり, 強特性指数の集合と特性指数の集合は一致する.

例 6.1.10. $n = 1$, $x = x_1$ として, 方程式系

$$\mathcal{M}: \quad (t\partial_t - a)(t\partial_t - b)u = x(t\partial_t - a)u = 0$$

を考えよう. (ここで $a, b \in \mathbf{C}$ は相異なる定数とする.) このとき

$$\begin{aligned}
\mathcal{J}_Y(\mathcal{M}, 0) &= \mathcal{O}_0'[\theta](\theta - a)(\theta - b) + \mathcal{O}_0'[\theta]x(\theta - a), \\
\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M}, 0) &= \mathcal{O}_0'[\theta](\theta - a)
\end{aligned}$$

となるので

$$e_Y(\mathcal{M}, 0) = \{a, b\}, \quad \tilde{e}_Y(\mathcal{M}, 0) = \{a\}$$

を得る. なお $\mathcal{M}$ の (原点の近傍での) 任意の多価解析解 u は v を原点の近傍で正則な関数として $u = v(x)t^a$ と書ける. 一方 $\mathcal{M}$ は超関数解 $t_+^a + \delta(x)t_+^b$ を持つ.

6.1.4 フックス型方程式系に対する境界値問題

非特性的な場合と同様に, $\mathcal{M}$ と $\mathcal{I}$ を 6.1.2 節と同じとして, $\mathcal{M}$ の $Y = \{t = 0\}$ に沿っての接方程式系 (tangential system または induced system) を

$$\mathcal{M}_Y := \mathcal{M}/t\mathcal{M} = \mathcal{D}/(t\mathcal{D} + \mathcal{I})$$

で定義する. ただし $\mathcal{D}'$ は Y 上の n 変数解析的微分作用素の環の層を表わすものとする. $\mathcal{M}$ が Y に沿って形式的にフックス型のとき, $\mathcal{M}_Y$ は連接 $\mathcal{D}'$-加群であることが知られている ([LS]). 3.5 節で証明した Cauchy-Kowalevskaja の定理はフックス型方程式系に対しても拡張される (Laurent, Monteiro Fernandes ([LM]) による):

命題 6.1.11. $\mathcal{M}$ が Y に沿ってフックス型とすると, 自然な層同型

$$\mathcal{H}om_{\mathcal{D}}(\mathcal{M}, \mathcal{O})|_Y \simeq \mathcal{H}om_{\mathcal{D}'}(\mathcal{M}_Y, \mathcal{O}')$$

が存在する. ただし, ここで $\mathcal{O}$ と $\mathcal{O}'$ はそれぞれ X および Y 上の正則関数の環の層を表わす.

次の命題は良く知られている ([Tah], [Osh1], [Osh2] など):

命題 6.1.12. $\mathcal{M}$ は 0 において Y に沿ってフックス型とする. 更に, Y に沿ってフックス型の作用素 $P \in \mathcal{I}$ が存在して, その特性指数 $\theta_1, \ldots, \theta_m$ はすべて定数 (x によらない) かつ重複度 1 であり, 更に $i \neq j$ ならば $\theta_i - \theta_j$ は整数でないとする. このとき

$$S := \{i \in \{1, \ldots, m\} \mid \theta_i \in \tilde{e}_Y(\mathcal{M}, 0)\}$$

とおくと, U を $0 \in X$ の任意の開近傍として, $\mathcal{M}$ の $U \setminus Y$ 上の任意の正則な解は

$$u = \sum_{i \in S} v_i(t, x)t^{\theta_i}$$

という形に書ける. ここで v_i は $U \cap Y$ の (X における) ある開近傍で正則な関数である.

6.2 FD-グレブナ基底 (理論的方法)

この節では $\mathcal{D}_0$ の左イデアルに対して, FD-グレブナ基底の概念を導入する. これは, 4.2 節の D-グレブナ基底と同様に, 実際の計算よりむしろ理論的な意味を持つものである. これまでと同様に $Y = \{(t,x) \mid t = 0\}$ とおく. なお以下の議論は $p \in Y$ として $\mathcal{D}_p$ の左イデアルについても同様に成り立つ.

$\prec_L$ と $\prec_{L'}$ を (変数の適当な順序に関する) $\mathbf{N}^n$ の辞書式順序として, $\mathbf{N}^{2n+2}$ の全順序 $\prec_{FD}$ を次で定義して FD-順序と呼ぼう: $(\mu,\nu,\alpha,\beta), (\mu',\nu',\alpha',\beta') \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}^n$ に対して,

$$
\begin{aligned}
(\mu,\nu,\alpha,\beta) \prec_{FD} (\mu',\nu',\alpha',\beta') \iff & (\nu-\mu < \nu'-\mu') \\
\text{or} \quad & (\nu-\mu = \nu'-\mu',\ |\beta| < |\beta'|) \\
\text{or} \quad & (\nu-\mu = \nu'-\mu',\ |\beta| = |\beta'|,\ \nu < \nu') \\
\text{or} \quad & (\nu = \nu',\ \mu = \mu',\ |\beta| = |\beta'|,\ \beta \prec_L \beta') \\
\text{or} \quad & (\nu = \nu',\ \mu = \mu',\ \beta = \beta',\ |\alpha| > |\alpha'|) \\
\text{or} \quad & (\nu = \nu',\ \mu = \mu',\ \beta = \beta',\ |\alpha| = |\alpha'|,\ \alpha \prec_{L'} \alpha').
\end{aligned}
$$

また $\mathbf{N}^{n+2}$ の全順序 $\prec_{FR}$ を次で定義して FR-順序と呼ぼう:

$$
(\mu,\nu,\beta) \prec_{FR} (\mu',\nu',\beta') \quad\iff\quad (\mu,\nu,0,\beta) \prec_{FD} (\mu',\nu',0,\beta').
$$

任意の整数 m に対して, $\{(\mu,\nu,\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n+2} \mid \nu + |\beta| \le m\}$ の任意の部分集合は FD-順序に関して最大元を持つ. また, 任意の整数 m, k に対して, $\{(\mu,\nu,\beta) \in \mathbf{N}^{n+2} \mid \nu-\mu \ge k,\ \nu+|\beta| \le m\}$ の任意の部分集合は FR-順序に関して最大元と最小元を持つ. $\mathcal{D}_0$ の元

$$
P = \sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} t^\mu x^\alpha \partial_t^\nu \partial_x^\beta
$$

に対して P の指数の集合と FD-順序に関する leading exponent, leading coefficient, leading term を

$$
\begin{aligned}
\mathrm{exps}(P) &:= \{(\mu,\nu,\alpha,\beta) \mid a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} \neq 0\}, \\
\mathrm{lexp}_{FD}(P) &:= \max{}_{FD}(\mathrm{exps}(P)), \\
\mathrm{lcoef}_{FD}(P) &:= a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} \qquad ((\mu,\nu,\alpha,\beta) := \mathrm{lexp}_{FD}(P)), \\
\mathrm{lterm}_{FD}(P) &:= a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} t^\mu x^\alpha \partial_t^\nu \partial_x^\beta \qquad ((\mu,\nu,\alpha,\beta) := \mathrm{lexp}_{FD}(P))
\end{aligned}
$$

で定義する. ただし $\max{}_{FD}$ は FD-順序に関する最大元を表わす. ($P = 0$ のときは $\mathrm{lexp}_{FD}(P) = (\infty,0,0,0)$ とおいて, 任意の $(\mu,\nu,\alpha,\beta) \in \mathbf{N}^{2n+2}$ に対して $(\infty,0,0,0) \prec_{FD} (\mu,\nu,\alpha,\beta)$ とみなすことにする.) $\varpi : \mathbf{N}^{2n+2} \to \mathbf{N}^{n+2}$ を $\varpi(\mu,\nu,\alpha,\beta) = (\mu,\nu,\beta)$ で定義される射影として, $P \in \mathcal{D}_0$ の FR-順序に関する leading exponent, leading coefficient, leading term を

$$
\begin{aligned}
\mathrm{lexp}_{FR}(P) &:= \varpi(\mathrm{lexp}_{FD}(P)), \\
\mathrm{lcoef}_{FR}(P) &:= \sum_{\alpha \in \mathbf{N}^n} a_{\mu_0,\nu_0,\alpha,\beta_0} x^\alpha \qquad ((\mu_0,\nu_0,\beta_0) := \mathrm{lexp}_{FR}(P)), \\
\mathrm{lterm}_{FR}(P) &:= \mathrm{lcoef}_{FR}(P) t^{\mu_0} \partial_t^{\nu_0} \partial_x^{\beta_0} \qquad ((\mu_0,\nu_0,\beta_0) := \mathrm{lexp}_{FR}(P)).
\end{aligned}
$$

で定義する. 更に, 指数 $(\mu,\nu,\beta)\in\mathbf{N}^{n+2}$ に対して

$$\mathrm{coef}_{FR}(P,(\mu,\nu,\beta)) := \sum_{\alpha} a_{\mu,\nu,\alpha,\beta}x^{\alpha}$$

とおく. 次の 2 つの補題は定義から明らかである:

補題 6.2.1. 任意の $P,Q\in\mathcal{D}_0$ に対して

$$\begin{aligned}
\mathrm{lexp}_{FD}(PQ) &= \mathrm{lexp}_{FD}(P)+\mathrm{lexp}_{FD}(Q),\\
\mathrm{lcoef}_{FD}(PQ) &= \mathrm{lcoef}_{FD}(P)\mathrm{lcoef}_{FD}(Q),\\
\mathrm{lexp}_{FR}(PQ) &= \mathrm{lexp}_{FR}(P)+\mathrm{lexp}_{FR}(Q),\\
\mathrm{lcoef}_{FR}(PQ) &= \mathrm{lcoef}_{FR}(P)\mathrm{lcoef}_{FR}(Q).
\end{aligned}$$

補題 6.2.2. $P\in\mathcal{D}_0$ が 0 で Y に沿って形式的にフックス型であるための必要十分条件は $\mathrm{lexp}_{FD}(P)=(\mu,\nu,0,0)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}^n$ がある $\mu,\nu\in\mathbf{N}$ について成り立つことである.

例によって, $\mathcal{D}_0$ の部分集合 S に対して

$$E_{FD}(S) := \{\mathrm{lexp}_{FD}(P) \mid P\in S\setminus\{0\}\}$$

とおこう.

補題 6.2.3. (割算定理) P と $P_1,\dots,P_s$ を $\mathcal{D}_0$ の元とすると, 任意の整数 m に対して $\mathcal{D}_0$ の元 $Q_1,\dots,Q_s$ と R で

$$\begin{aligned}
&P=\sum_{i=1}^{s}Q_iP_i+R,\\
&\mathrm{exps}(R)\cap\mathrm{mono}(E_{FD}(\{P_1,\dots,P_s\}))\subset E_{FD}(\mathcal{F}_m),\\
&\mathrm{lexp}_{FD}(Q_iP_i)\preceq_{FD}\mathrm{lexp}_{FD}(P),\quad \mathrm{lexp}_{FD}(R)\preceq_{FD}\mathrm{lexp}_{FD}(P)
\end{aligned}$$

を満たすものが存在する. この R を $\mathrm{red}_{FD}(P,\{P_1,\dots,P_s\},m)$ で表わし, P の $\mathcal{F}_m$-簡約と呼ぶことにする (必ずしも一意的ではない).

証明: 与えられた $P,P_1,\dots,P_s$ に対して,

$$E_i := \mathrm{lexp}_{FD}(P_i)+\mathbf{N}^{2n+2},\qquad E := \bigcup_{i=1}^{s}E_i$$

とおく.

$$\mathrm{lexp}_{FD}(Q_iP_i)\preceq_{FD}\mathrm{lexp}_{FD}(P)\quad(\forall i=1,\dots,s) \tag{2.1}$$

をみたす $Q_i,R\in\mathcal{D}_0$ による

$$P=\sum_{i=1}^{s}Q_iP_i+R \tag{2.2}$$

という形の表示の全体を考えよう. $\mathrm{redlexp}_{FR}(R)$ を集合

$$\{(\mu,\nu,\beta)\in\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n \mid \nu-\mu\geq m+1,\ (\mu,\nu,\beta)\in\varpi(\mathrm{exps}(R)\cap E)\}$$

の FR-順序に関する最小元とする. (上記の集合が空集合のときは $\mathrm{redlexp}_{FR}(R)=(\infty,0,0)$ とおくことにする.) さて, (2.1) を満たす表示 (2.2) のうちで $\mathrm{redlexp}_{FR}(R)$ が FR-順序に関して最小になるものをひとつ選んで, 以後そのような表示 (2.2) について考察しよう. $\mathrm{redlexp}_{FR}(P)\neq(\infty,0,0)$ と仮定して $(\mu_0,\nu_0,\beta_0)=\mathrm{redlexp}_{FR}(R)$, $(\mu_i,\nu_i,\beta_i)=\mathrm{lexp}_{FR}(P_i)$ $(i=1,\dots,s)$ とおき,

$$R=\sum_{\mu,\nu,\beta}a_{\mu,\nu,\beta}(x)t^\mu\partial_t^\nu\partial_x^\beta,\quad P_i=\sum_{\mu,\nu,\beta}a_{i,\mu,\nu,\beta}(x)t^\mu\partial_t^\nu\partial_x^\beta$$

と書こう. $S:=\{i\in\{1,\dots,s\}\mid(\mu_0,\nu_0,\beta_0)\in\varpi(E_i)\}$ とおいて,

$$a(x)=a_{\mu_0,\nu_0,\beta_0}(x),\qquad a_i(x)=a_{i,\mu_i,\nu_i,\beta_i}(x)\quad(i\in S)$$

と書く. Weierstrass-広中の割算定理 (定理 2.1.9) によって,

$$\begin{aligned}
&a(x)=\sum_{i\in S}q_i(x)a_i(x)+r(x),\qquad r(x)=\sum_\alpha r_\alpha x^\alpha,\\
&\mathrm{lexp}_{FD}(q_i(x)a_i(x))\preceq_{FD}\mathrm{lexp}(a(x))\quad(\forall i\in S),\\
&\alpha\in\bigcup_{i\in S}(\alpha_i+\mathbf{N}^n)\quad\Longrightarrow\quad r_\alpha=0
\end{aligned}$$

を満たすような収束巾級数 $q_i(x),r(x)$ が存在する.

$$Q_i':=q_i(x)t^{\mu_0-\mu_i}\partial_t^{\nu_0-\nu_i}\partial_x^{\beta_0-\beta_i},\qquad R':=R-\sum_{i\in S}Q_i'P_i$$

とおくと, $\mathrm{redlexp}_{FR}(R')\preceq_{FR}(\mu_0,\nu_0,\beta_0)$,

$$\mathrm{coef}(R',(\mu_0,\nu_0,\beta_0))=a_{\mu_0,\nu_0,\beta_0}(x)-\sum_{i\in S}q_i(x)a_i(x)=r(x),$$

かつ $\mathrm{exps}(r(x)t^{\mu_0}\partial_t^{\nu_0}\partial_x^{\beta_0})\cap E=\emptyset$ であるから, $\mathrm{redlexp}_{FR}(R')\prec_{FR}\mathrm{redlexp}_{FR}(R)$ を得る. 更に

$$P=\sum_{i=1}^s Q_iP_i+\sum_{i\in S}Q_i'P_i+R'$$

も成り立つ. これは仮定に反する. □

定義 6.2.4. $\mathcal{I}_0$ を $\mathcal{D}_0$ の左イデアルとする. $\mathcal{I}_0$ の有限部分集合 $\mathbf{G}=\{P_1,\dots,P_s\}$ が $\mathcal{I}_0$ の (Y に沿っての)**FD-グレブナ基底**とは, つぎの 2 つの条件が満たされることである:

(1) $\mathbf{G}$ は $\mathcal{I}_0$ を生成する; すなわち $\mathcal{I}_0=\mathcal{D}_0P_1+\cdots+\mathcal{D}_0P_s$.

(2) $E_{FD}(\mathcal{I}_0)=\mathrm{mono}(E_{FD}(\mathbf{G}))$.

定義 6.2.5. $P, Q \in \mathcal{D}_0$ に対して,

$$\mathrm{lexp}_{FD}(P) = (\mu, \nu, \alpha, \beta), \quad \mathrm{lexp}_{FD}(Q) = (\mu', \nu', \alpha', \beta')$$

とするとき, P と Q の **S-作用素**を

$$\begin{aligned}\mathrm{sp}_{FD}(P, Q) \quad &:= \quad \mathrm{lcoef}_{FD}(Q) t^{\mu \vee \mu' - \mu} \partial_t^{\nu \vee \nu' - \nu} x^{\alpha \vee \alpha' - \alpha} \partial_x^{\beta \vee \beta' - \beta} P \\ & \quad\quad -\mathrm{lcoef}_{FD}(P) t^{\mu \vee \mu' - \mu'} \partial_t^{\nu \vee \nu' - \nu'} x^{\alpha \vee \alpha' - \alpha'} \partial_x^{\beta \vee \beta' - \beta'} Q\end{aligned}$$

で定義する.

定理 6.2.6. $\mathcal{I}_0$ を $\mathcal{D}_0$ の左イデアル, $\mathbf{G} = \{P_1, \ldots, P_s\}$ を $\mathcal{I}_0$ の生成元の集合とするとき, 次の条件 (1)–(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は $\mathcal{I}_0$ の FD-グレブナ基底;

(2) 任意の $P \in \mathcal{I}_0$ と $m \in \mathbf{Z}$ に対して, P の $\mathbf{G}$ による任意の $\mathcal{F}_m$-簡約は $\mathcal{F}_m$ に属する;

(3) 任意の整数 m と $1 \leq i < j \leq s$ なる i, j に対して, 適当な $Q_{ij1}, \ldots, Q_{ijs} \in \mathcal{D}_0$ と $R_{ij} \in \mathcal{F}_m$ が存在して, $\mathrm{sp}_{FD}(P_i, P_j) = \sum_{k=1}^{s} Q_{ijk} P_k + R_{ij}$ かつ $\mathrm{lexp}_{FD}(Q_{ijk} P_k) \prec_{FD} \mathrm{lexp}_{FD}(P_i) \vee \mathrm{lexp}_{FD}(P_j)$ が任意の k について成立する.

証明: 一般性を失うことなく $\mathrm{lcoef}_{FD}(P_k) = 1$ $(k = 1, \ldots, s)$ と仮定してよい.

(1) $\Longrightarrow$ (2): m を任意の整数とする. $R := \mathrm{red}_{FD}(P, \mathbf{G}, m)$ とすると, $\mathcal{F}_m$-簡約の定義から $R \in \mathcal{I}_0$ かつ

$$\mathrm{exps}(R) \cap \mathrm{mono}(E_{FD}(\mathbf{G})) \subset \mathrm{lexp}_{FD}(\mathcal{F}_m)$$

であるが, (1) により $\mathrm{lexp}(R) \in \mathrm{mono}(E_{FD}(\mathbf{G}))$ であるから $\mathrm{lexp}(R) \in \mathrm{lexp}_{FD}(\mathcal{F}_m)$, 従って $R \in \mathcal{F}_m$ を得る.

(2) $\Longrightarrow$ (3): $\mathrm{sp}_{FD}(P_i, P_j) \in \mathcal{I}_0$ の $\mathcal{F}_m$-簡約を考察すればよい.

(3) $\Longrightarrow$ (1): P を $\mathcal{I}_0$ の任意の元とする. 以下では形式巾級数係数の微分作用素環 $\hat{\mathcal{D}}_0 := \mathbf{C}[[t, x]]\langle \partial_t, \partial_x \rangle$ を用いる. lexp_{FD} などは $\hat{\mathcal{D}}_0$ の元に対しても同様に定義される. $\mathrm{lexp}_{FD}(P) \in \mathrm{mono}(E_{FD}(\mathbf{G}))$ を 2 段階に分けて証明しよう.

(第 1 段階) $\mathrm{ord}_F(P) > m$ なる負の整数 m をとる. P に対して, $Q_k \in \hat{\mathcal{D}}_0$ と $R \in \hat{\mathcal{F}}_m$ による

$$P = \sum_{k=1}^{s} Q_k P_k + R \tag{2.3}$$

という表示の全体を考える. ただし, ここで

$$\hat{\mathcal{F}}_m := \left\{ P = \sum_{\mu, \nu, \alpha, \beta} a_{\mu, \nu, \alpha, \beta} t^\mu x^\alpha \partial_t^\nu \partial_x^\beta \in \hat{\mathcal{D}}_0 \,\middle|\, a_{\mu, \nu, \alpha, \beta} = 0 \text{ if } \nu - \mu > m \right\}$$

とおいた. ($P \in \mathcal{I}_0$ であるから (2.3) のような表示は少なくともひとつは存在する.) (2.3) の形の表示のうちで $\max_{FR}\{\mathrm{lexp}_{FR}(Q_k P_k) \mid k = 1, \ldots, s\}$ が FR-順序に関して最小にな

るようなものをとろう．以後 (2.3) はこの最小性を持った表示としよう．$\mathrm{lexp}_{FR}(P_k) := (\mu_k, \nu_k, \beta_k)$ とおく．我々の目標は

$$(\mu, \nu, \beta) := \max{}_{FR}\{\mathrm{lexp}_{FR}(Q_k P_k) \mid k = 1, \ldots, s\} = \mathrm{lexp}_{FR}(P) \tag{2.4}$$

を示すことである．

$(\mu, \nu, \beta) \succ_{FR} \mathrm{lexp}_{FR}(P)$ と仮定しよう．S-作用素を具体的に

$$\mathrm{sp}_{FD}(P_i, P_j) = S_{ij} P_i - S_{ji} P_j \quad (i < j)$$

と書こう．ただし $\mu_{ij} := \mu_i \vee \mu_j - \mu_i$ などとおき,

$$S_{ij} := t^{\mu_{ij}} \partial_t^{\nu_{ij}} x^{\alpha_{ij}} \partial_x^{\beta_{ij}}$$

とした．m のかわりに

$$m' := m - \nu - 1 - \max\{\mu_i \vee \mu_j \mid 1 \leq i < j \leq s\}$$

に対して (3) の条件を適用すれば $1 \leq i < j \leq s$ に対して

$$S_{ij} P_i - S_{ji} P_j = \sum_{k=1}^{s} Q_{ijk} P_k + R_{ij},$$

かつ (3) と同じ条件を m のかわりに m' について満たす q_{ijk}, R_{ij} が存在する．$p_i := \sigma(\mathrm{lterm}_{FR}(P_i))$, $s_{ij} := \sigma(S_{ij})$, かつ

$$q_{ijk} := \begin{cases} \sigma(\mathrm{lterm}_{FR}(Q_{ijk})) & \text{if } \mathrm{lexp}_{FR}(Q_{ijk} P_k) = (\mu_i \vee \mu_j, \nu_i \vee \nu_j, \beta_i \vee \beta_j) \\ 0 & \text{otherwise,} \end{cases}$$

とおく．これらはすべて x の形式巾級数を係数とする t, τ, ξ の単項式である．すると, 形式巾級数環 $\mathbf{C}[[t, \tau, x, \xi]]$ における関係式

$$s_{ij} p_i - s_{ji} p_j = \sum_{k=1}^{s} q_{ijk} p_k \qquad (1 \leq i < j \leq s) \tag{2.5}$$

を得る．従って $\{p_1, \ldots, p_s\}$ は $\mathbf{C}[[t, \tau, x, \xi]]$ において, 次で定義される $\mathbf{N}^{2n+2}$ の順序 $\prec_O$ に関するグレブナ基底である．ここで $(\mu, \nu, \alpha, \beta)$, $(\mu', \nu', \alpha', \beta') \in \mathbf{N}^{2n+2}$ に対して

$$\begin{aligned} (\mu, \nu, \alpha, \beta) \prec_O (\mu', \nu', \alpha', \beta') \iff & (\mu + \nu + |\alpha| + |\beta| > \mu' + \nu' + |\alpha'| + |\beta'|) \\ \text{or} \quad & (\mu + \nu + |\alpha| + |\beta| = \mu' + \nu' + |\alpha'| + |\beta'|, \\ & (\nu, \mu, \alpha, \beta) \prec' (\nu', \mu', \alpha', \beta')) \end{aligned}$$

で定義する．ただし $\prec'$ は

$$\begin{aligned} (\nu, \mu, \alpha, \beta) \prec' (\nu', \mu', \alpha', \beta') \iff & (\nu < \nu') \\ \text{or} \quad & (\nu = \nu',\ \mu < \mu') \\ \text{or} \quad & (\nu = \nu',\ \mu = \mu',\ \beta \prec_{L'} \beta') \\ \text{or} \quad & (\nu = \nu',\ \mu = \mu',\ \beta = \beta',\ \alpha \prec_L \alpha') \end{aligned}$$

で定義される $\mathbf{N}^{2n+2}$ の辞書式順序である.

定理 2.1.22 によって, $\mathbf{C}[[t,\tau,x,\xi]]^s$ の部分加群

$$\{(q_1,\ldots,q_s)\in(\mathbf{C}[[t,\tau,x,\xi]])^s \mid \sum_{k=1}^{s} q_k p_k = 0\}$$

は (2.5) の関係式によって生成される. すなわち

$$\vec{v}_{ij} := (0,\ldots,\overset{(i)}{s_{ij}},\ldots,\overset{(j)}{-s_{ji}},\ldots,0)-(q_{ij1},\ldots,q_{ijs})$$

$(1\le i<j\le s)$ によって生成される. ここで $\vec{v}_{ij}$ の第 k 成分は

$$v_{ijk}(x)t^{\mu_i\vee\mu_j-\mu_k}\tau^{\nu_i\vee\nu_j-\nu_k}\xi^{\beta_i\vee\beta_j-\beta_k}\quad(\exists v_{ijk}(x)\in\mathbf{C}\{x\})$$

という形をしていることに注意する. さて前記のような最小性を持つ (2.3) に対して

$$q_k := \begin{cases}\sigma(\mathrm{lterm}_{FR}(Q_k)) & \text{if } \mathrm{lexp}_{FR}(Q_kP_k)=(\mu,\nu,\beta)\\ 0 & \text{otherwise.}\end{cases}$$

とおこう. すると (2.3) と仮定 $(\mu,\nu,\beta)\succ_{FR}\mathrm{lexp}_{FR}(P)$ から

$$\sum_{k=1}^{s} q_k p_k = 0$$

がわかる. 従って

$$(q_1,\ldots,q_s)=\sum_{1\le i<j\le s} u_{ij}\vec{v}_{ij} \tag{2.6}$$

が成り立つような $u_{ij}\in\mathbf{C}[[t,\tau,x,\xi]]$ が存在する. 更に (2.6) の両辺の第 k 成分の指数 $(\mu-\mu_k,\nu-\nu_k,\beta-\beta_k)$ に対応する t,τ,ξ の単項式を考察することにより, u_{ij} は

$$u_{ij}=c_{ij}(x)t^{\mu-\mu_i\vee\mu_j}\tau^{\nu-\nu_i\vee\nu_j}\xi^{\beta-\beta_i\vee\beta_j}\quad(\exists c_{ij}(x)\in\mathbf{C}[[x]])$$

という形をしていると仮定してよいことがわかる. (もし $(\mu,\nu,\beta)\notin(\mu_i\vee\mu_j,\nu_i\vee\nu_j,\beta_i\vee\beta_j)$ ならば $c_{ij}(x)=0$ である.)

$$\begin{aligned}
&U_{ij} := c_{ij}(x)t^{\mu-\mu_i\vee\mu_j}\partial_t^{\nu-\nu_i\vee\nu_j}\partial_x^{\beta-\beta_i\vee\beta_j},\\
&\vec{V}_{ij} := (0,\ldots,\overset{(i)}{S_{ij}},\ldots,\overset{(j)}{-S_{ji}},\ldots,0)-(Q_{ij1},\ldots,Q_{ijs}),\\
&(Q'_1,\ldots,Q'_s) := (Q_1,\ldots,Q_s)-\sum_{i<j}U_{ij}\vec{V}_{ij}
\end{aligned}$$

とおこう. すると (2.3) から

$$\begin{aligned}
P &= \sum_{k=1}^{s} Q'_kP_k+\sum_{i<j}U_{ij}\vec{V}_{ij}\cdot(P_1,\ldots,P_s)+R\\
&= \sum_{k=1}^{s} Q'_kP_k+\sum_{i<j}U_{ij}R_{ij}+R
\end{aligned}$$

を得る．ここで上記の仮定から $\sum_{i<j} U_{ij} R_{ij} + R \in \hat{\mathcal{F}}_m$ である．更に (2.6) から

$$\mathrm{lexp}_{FR}(Q'_k P_k) \prec_{FR} (\mu, \nu, \beta)$$

が成り立つ．これは (2.3) に対する最小性の仮定に矛盾する．

(第 2 段階) $(\mu_0, \nu_0, \alpha_0, \beta_0) = \mathrm{lexp}_{FD}(P)$, $m = \nu_0 - \mu_0 - 1$ とおく．$Q_k \in \hat{\mathcal{D}}_0$ と $R \in \hat{\mathcal{F}}_m$ による, 条件 (2.4) を満たす (2.3) の表示の全体を考えよう．(第 1 段階) によって, そのような表示 (2.3) は少なくともひとつ存在する．更に (2.4) を満たす表示 (2.3) に対して

$$(\mu_0, \nu_0, \alpha, \beta_0) := \max{}_{FD}\{\mathrm{lexp}_{FD}(Q_k P_k) \mid k = 1, \ldots, s\}$$

とおくと, $(\mu_0, \nu_0, \alpha, \beta_0) \succeq_{FD} (\mu_0, \nu_0, \alpha_0, \beta_0)$ であるから, $|\alpha| \le |\alpha_0|$ が成り立つ．従って $(\mu_0, \nu_0, \alpha, \beta_0)$ が FD-順序に関して最小になるような表示 (2.3) が存在する．以後, (2.3) はこの意味での最小性を持った表示としよう．このとき $\alpha = \alpha_0$ を示すのが目標である．

$\alpha \neq \alpha_0$ と仮定しよう．すると $(\mu_0, \nu_0, \alpha, \beta_0) \succ_{FD} (\mu_0, \nu_0, \alpha_0, \beta_0)$ である．必要なら $\{P_1, \ldots, P_s\}$ を並べ換えることにより

$$\begin{aligned} \mathrm{lexp}_{FD}(Q_k P_k) &= (\mu_0, \nu_0, \alpha, \beta_0) \quad \text{for} \quad 1 \le k \le \sigma, \\ \mathrm{lexp}_{FD}(Q_k P_k) &\prec_{FD} (\mu_0, \nu_0, \alpha, \beta_0) \quad \text{for} \quad \sigma + 1 \le k \le s \end{aligned}$$

がある $\sigma \ge 2$ について成立すると仮定してよい．$k = 1, \ldots, \sigma$ に対して $c_k := \mathrm{lcoef}_{FD}(Q_k)$, $Q'_k = \mathrm{lterm}_{FD}(Q_k)$ とおこう．すると,

$$\mu'_k := \mu_0 - \mu_k, \quad \nu'_k := \nu_0 - \nu_k, \quad \alpha'_k := \alpha - \alpha_k, \quad \beta'_k := \beta_0 - \beta_k.$$

として, $Q'_k = c_k t^{\mu'_k} \partial_t^{\nu'_k} x^{\alpha'_k} \partial_x^{\beta'_k}$ を得る．更に $Q''_k := Q_k - Q'_k$ とおけば

$$P = \sum_{k=1}^{\sigma} Q'_k P_k + \sum_{k=1}^{\sigma} Q''_k P_k + \sum_{k=\sigma+1}^{s} Q_k P_k \tag{2.7}$$

を得る．ここで $k = 1, \ldots, \sigma$ に対して $\mathrm{lexp}_{FD}(Q''_k P_k) \prec_{FD} (\mu_0, \nu_0, \alpha, \beta_0)$ であることに注意しておく．(2.7) の第 1 項は

$$\begin{aligned} P' &:= \sum_{k=1}^{\sigma} Q'_k P_k = \sum_{k=1}^{\sigma} c_k t^{\mu'_k} \partial_t^{\nu'_k} x^{\alpha'_k} \partial_x^{\beta'_k} P_k \qquad (2.8) \\ &= \sum_{k=1}^{\sigma-1} (c_1 + \cdots + c_k) \left(t^{\mu'_k} \partial_t^{\nu'_k} x^{\alpha'_k} \partial_x^{\beta'_k} P_k - t^{\mu'_{k+1}} \partial_t^{\nu'_{k+1}} x^{\alpha'_{k+1}} \partial_x^{\beta'_{k+1}} P_{k+1} \right) \\ &\quad + (c_1 + \cdots + c_\sigma) t^{\mu'_\sigma} \partial_t^{\nu'_\sigma} x^{\alpha'_\sigma} \partial_x^{\beta'_\sigma} P_\sigma \end{aligned}$$

と書き換えることができる．$\mathrm{lcoef}_{FD}(P_k) = 1$ であるから, もし $c_1 + \cdots + c_\sigma \neq 0$ ならば

$$\mathrm{lterm}_{FD}(P) = \mathrm{lterm}_{FD}(P') = (c_1 + \cdots + c_\sigma) \mathrm{lterm}_{FD}(t^{\mu'_\sigma} \partial_t^{\nu'_\sigma} x^{\alpha'_\sigma} \partial_x^{\beta'_\sigma} P_\sigma),$$

特に $\mathrm{lexp}_{FD}(P) = (\mu_0, \nu_0, \alpha, \beta_0)$ となる．これは仮定に反するから $c_1 + \cdots + c_\sigma = 0$ でなければならない．

一方 Leibniz の公式を用いると

$$\begin{aligned}(2.9)\quad & t^{\mu'_k}\partial_t^{\nu'_k}x^{\alpha'_k}\partial_x^{\beta'_k}P_k - t^{\mu'_{k+1}}\partial_t^{\nu'_{k+1}}x^{\alpha'_{k+1}}\partial_x^{\beta'_{k+1}}P_{k+1} \\ = \ & t^{\mu_0-\mu_k\vee\mu_{k+1}}\partial_t^{\nu_0-\nu_k\vee\nu_{k+1}}x^{\alpha-\alpha_k\vee\alpha_{k+1}}\partial_x^{\beta_0-\beta_k\vee\beta_{k+1}}\mathrm{sp}_{FD}(P_k,P_{k+1}) \\ & +S_kP_k+T_{k+1}P_{k+1}\end{aligned}$$

が,

$$\mathrm{lexp}_{FD}(S_kP_k), \mathrm{lexp}_{FD}(T_{k+1}P_{k+1}) \prec_{FD} (\mu_0,\nu_0,\alpha,\beta_0)$$

を満たすような適当な S_k, T_{k+1} について成り立つことがわかる.

$$m' := m-1-\max\{\nu_0-\mu_0-\nu_k\vee\nu_{k+1}+\mu_k\vee\mu_{k+1} \mid k=1,\dots\sigma-1\}$$

とおいて仮定 (2) を m のかわりに m' に対して用いると, (2.7),(2.8),(2.9) から

$$\begin{aligned}P \ = \ & \sum_{k=1}^{\sigma-1}(c_1+\cdots+c_k)t^{\mu_0-\mu_k\vee\mu_{k+1}}\partial_t^{\nu_0-\nu_k\vee\nu_{k+1}}x^{\alpha-\alpha_k\vee\alpha_{k+1}}\partial_x^{\beta_0-\beta_k\vee\beta_{k+1}} \\ & \cdot(\sum_{k=1}^{s}Q_{ijk}P_k+R_{ij})+\sum_{k=1}^{\sigma-1}S_kP_k+\sum_{k=2}^{\sigma}T_kP_k+\sum_{k=1}^{\sigma}Q''_kP_k+\sum_{k=\sigma+1}^{s}Q_kP_k\end{aligned}$$

を得る. これは (2.3) の最小性に関する仮定に反する.

以上により, $\mathrm{lexp}_{FD}(P) \in \mathrm{mono}(E_{FD}(\mathbf{G}))$ が示された. □

FD-グレブナ 基底が求まれば, 方程式系が形式的にフックス型であるかどうかを判定でき, また特性指数の集合を完全に決定することができる:

定理 6.2.7. $\mathcal{M}$ と $\mathcal{I}$ を 6.1 節と同様として $\mathcal{I}_0$ をイデアルの層 $\mathcal{I}$ の 0 における茎とする. $\mathbf{G}$ を $\mathcal{I}_0$ の FD-グレブナ 基底とする. このとき $\mathcal{M}$ が 0 で $Y=\{(t,x)\mid t=0\}$ に沿って形式的にフックス型であるための必要十分条件は, 適当な $\mu,\nu\in\mathbf{N}$ によって $\mathrm{lexp}_{FD}(P)=(\mu,\nu,0,0)$ と書けるような $P\in\mathbf{G}$ が存在することである.

証明: もし $\mathrm{lexp}_{FD}(P)=(\mu,\nu,0,0)$ であるような $P\in\mathbf{G}$ が存在すれば, 定義によって $\mathcal{M}$ は形式的にフックス型である. さて, $\mathcal{M}$ が形式的にフックス型と仮定しよう. すると形式的にフックス型の作用素 $A\in\mathcal{I}_0$ が存在するから, ある $\mu',\nu'\in\mathbf{N}$ について $(\mu',\nu',0,0)\in E_{FD}(\mathcal{I}_0)$ となる. $\mathbf{G}$ は FD-グレブナ 基底だから定義から

$$E_{FD}(\mathcal{I}_0)=\mathrm{mono}(E_{FD}(\mathbf{G}))\ni(\mu',\nu',0,0)$$

を得る. 従って適当な $\mu,\nu\in\mathbf{N}$ について $\mathrm{lexp}_{FD}(P)=(\mu,\nu,0,0)$ となるような $P\in\mathbf{G}$ が存在する. □

定理 6.2.8. 前定理と同じ記号の下で, $\mathcal{M}$ は 0 で Y に沿ってフックス型とする. $\mathbf{G}$ を $\mathcal{I}_0$ の FD-グレブナ基底として,

$$\mathbf{G}' := \{P\in\mathbf{G}\mid \mathrm{lexp}_{FD}(P)=(\mu,\nu,\alpha,0)\mid \exists\mu,\nu\in\mathbf{N},\ \exists\alpha\in\mathbf{N}^n\}$$

とおこう. すると $\mathcal{M}$ の 0 における特性指数の集合は

$$e_Y(\mathcal{M},0)=\{\theta\in\mathbf{C}\mid\psi(\hat{\sigma}(P))(\theta,0)=0\quad(\forall P\in\mathbf{G}')\}\tag{2.10}$$

で与えられる. 更に P を $\mathbf{G}'$ の元のうちで ∂_t に関する階数が最小のもの (の一つ) とすると, モニックな多項式 $f(\theta,x)\in\mathcal{O}'_0[\theta]$ と $a(x)\in\mathcal{O}'_0$ であって

$$\psi(\hat{\sigma}(P))=a(x)f(\theta,x)\tau^k\qquad(\exists k\in\mathbf{Z}),$$

かつイデアル $\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},0)$ は f で生成されるようなものが存在する. 特に

$$\tilde{e}_Y(\mathcal{M},0)=\{\theta\in\mathbf{C}\mid f(\theta,0)=0\}$$

が成立する.

証明: (2.10) を示すには, $\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0)$ が

$$\{\tau^{-\mathrm{ord}_F(P)}\cdot\psi(\hat{\sigma}(P))\mid P\in\mathbf{G}'\}$$

で生成されることを言えば十分である. 定義によりこの集合は $\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0)$ に含まれる. $g\in\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0)$ とすると, 補題 6.1.6 によって, $\psi(\hat{\sigma}(P))=g(\theta,x)\tau^{-k}$ となるような $P\in\mathcal{I}_0$ と $k\in\mathbf{N}$ が存在する. このとき適当な $\nu\in\mathbf{N}$ と $\alpha\in\mathbf{N}^n$ によって $\mathrm{lexp}_{FD}(P)=(\nu+k,\nu,\alpha,0)$ が成立する. さて, $\mathbf{G}=\{P_1,\dots P_s\}$, $\mathrm{ord}_F(P_i)=k_i$ として $P_i\in\mathbf{G}'$ に対して $\psi(\hat{\sigma}(P_i))=f_i(\theta,x)\tau^{k_i}$ とおこう.

$P\in\mathcal{I}_0$ で $\mathbf{G}$ は FD-グレブナ基底だから, 定理 6.2.6 から, 適当な $Q_1,\dots,Q_s\in\mathcal{D}_0$ と $R\in\mathcal{F}_{-k-1}$ によって

$$P=Q_1P_1+\cdots+Q_sP_s+R,\qquad\mathrm{lexp}_{FD}(Q_iP_i)\preceq_{FD}(\nu+k,\nu,\alpha,0)$$

と書ける. 特にこれから, $\mathrm{ord}_F(Q_i)\le -k-k_i$ となり, 更にもし $\mathrm{ord}_F(Q_i)=-k-k_i$ ならば, $P_i\in\mathbf{G}'$ かつ

$$q_i(\theta,x):=\tau^{k+k_i}\cdot\psi(\hat{\sigma}(Q_i))\in\mathcal{O}'_0[\theta]$$

となる.

$$S:=\{i\in\{1,\dots,s\}\mid\mathrm{ord}_F(Q_i)=-k-k_i\}$$

とおくと

$$\hat{\sigma}(P)=\sum_{i\in S}\hat{\sigma}(Q_i)\hat{\sigma}(P_i)$$

であり, 従って

$$g(\theta,x)=\sum_{i\in S}q_i(\theta-k_i,x)f_i(\theta,x)$$

が成り立つ. 以上のことから $\mathcal{J}_Y(\mathcal{M},0)$ が $\{f_i(\theta,x)\mid P_i\in\mathbf{G}'\}$ で生成されることがわかる. これで (2.10) が示された.

次に $f(\theta,x)\in\mathcal{O}'_0[\theta]$ を, $\tilde{\mathcal{J}}_Y(\mathcal{M},0)$ を生成するようなモニック多項式とする (cf. 補題 6.1.9). $S':=\{i\in\{1,\dots,s\}\mid P_i\in\mathbf{G}'\}$ とおくと, $\mathbf{G}$ が FD-グレブナ基底であることから, ある $a(x)\in\mathcal{O}'_0\setminus\{0\}$ と $r_i(\theta,x)\in\mathcal{O}'_0[\theta]$ が存在して

$$a(x)f(\theta,x)=\sum_{i\in S'}r_i(\theta-k_i)f_i(\theta,x)$$

が成立し, かつ $r_i(\theta,x)f_i(\theta,x)$ の θ に関する次数は $f(\theta,x)$ の θ に関する次数 m 以下であることがわかる. 従ってもし $r_i \neq 0$ ならば, f_i の θ に関する次数は m でなければならない. これと, f が f_i を $\mathcal{O}'_0[\theta]$ において割り切ることから, 適当な $a_i(x) \in \mathcal{O}'_0$ により $f_i(\theta,x) = a_i(x)f(\theta,x)$ と書けることがわかる. □

6.3 FW-グレブナ基底と FR-グレブナ基底

$\mathbf{N}^{2n+2}$ の全順序 $\prec_{FW}$ (FW-順序と呼ぶ) を次で定義しよう. (μ,ν,α,β), $(\mu',\nu',\alpha',\beta') \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}^n$ に対して,

$$
\begin{array}{rcl}
(\mu,\nu,\alpha,\beta) \prec_{FW} (\mu',\nu',\alpha',\beta') & \Longleftrightarrow & (\nu-\mu < \nu'-\mu') \\
& \text{or} & (\nu-\mu = \nu'-\mu',\ |\beta| < |\beta'|) \\
& \text{or} & (\nu-\mu = \nu'-\mu',\ |\beta| = |\beta'|,\ \nu < \nu') \\
& \text{or} & (\nu = \nu',\ \mu = \mu',\ |\beta| = |\beta'|,\ \beta \prec_L \beta') \\
& \text{or} & (\nu = \nu',\ \mu = \mu',\ \beta = \beta',\ |\alpha| < |\alpha'|) \\
& \text{or} & (\nu = \nu',\ \mu = \mu',\ \beta = \beta',\ |\alpha| = |\alpha'|,\ \alpha \prec_{L'} \alpha').
\end{array}
$$

下から 2 行目の $|\alpha| < |\alpha'|$ が反対になっている他は, 前節で定義した FD-順序と同じである. FW-順序も整列順序ではない. $(n+1)$-変数の Weyl 代数 $A_{n+1} := \mathbf{C}[t,x]\langle\partial_t,\partial_x\rangle$ の元

$$P = \sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} a_{\mu\nu\alpha\beta} t^\mu x^\alpha {\partial_t}^\nu {\partial_x}^\beta \neq 0$$

に対して P の指数の集合と FW-順序に関する leading exponent, leading coefficient, leading term を

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{exps}(P) & := & \{(\mu,\nu,\alpha,\beta) \mid a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} \neq 0\}, \\
\mathrm{lexp}_{FW}(P) & := & \max{}_{FW}(\mathrm{exps}(P)), \\
\mathrm{lcoef}_{FW}(P) & := & a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} \qquad ((\mu,\nu,\alpha,\beta) := \mathrm{lexp}_{FW}(P)), \\
\mathrm{lterm}_{FW}(P) & := & a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} t^\mu x^\alpha \partial_t^\nu \partial_x^\beta \qquad ((\mu,\nu,\alpha,\beta) := \mathrm{lexp}_{FW}(P))
\end{array}
$$

で定義する. ただし $\max{}_{FW}$ は FW-順序に関する最大元を表わす. 更に A_{n+1} の部分集合 S に対して

$$E_{FW}(S) := \{\mathrm{lexp}_{FW}(P) \mid P \in S \setminus \{0\}\}$$

とおく.

補題 6.3.1. 任意の $P,Q \in A_{n+1}$ に対して

$$
\begin{array}{rcl}
\mathrm{lexp}_{FW}(PQ) & = & \mathrm{lexp}_{FW}(P) + \mathrm{lexp}_{FW}(Q), \\
\mathrm{lcoef}_{FW}(PQ) & = & \mathrm{lcoef}_{FW}(P)\mathrm{lcoef}_{FW}(Q).
\end{array}
$$

次の補題も前節の補題 6.2.3 と同様にして証明できる (Weierstrass-広中の割算定理は不要):

補題 6.3.2. (割算定理) P と $P_1, \dots, P_s$ を A_{n+1} の元とすると, 任意の整数 m に対して A_{n+1} の元 $Q_1, \dots, Q_s$ と R で

$$\begin{aligned}&P = \sum_{i=1}^{s} Q_i P_i + R,\\ &\mathrm{exps}(R) \cap \mathrm{mono}(E_{FW}(\mathbf{G})) \subset E_{FW}(\mathcal{F}_m),\\ &\mathrm{lexp}_{FW}(Q_i P_i) \preceq_{FW} \mathrm{lexp}_{FW}(P), \quad \mathrm{lexp}_{FW}(R) \preceq_{FW} \mathrm{lexp}_{FW}(P)\end{aligned}$$

を満たすものが存在する. この R を $\mathrm{red}_{FW}(P, \{P_1, \dots, P_s\}, m)$ で表わし, P の $\mathcal{F}_m$-簡約と呼ぶことにする (必ずしも一意的ではない).

定義 6.3.3. I を A_{n+1} の左イデアルとする. I の有限部分集合 $\mathbf{G} = \{P_1, \dots, P_s\}$ が I の (Y に沿っての)**FW-グレブナ基底**とは, 次の 2 つの条件が満たされることである:

(1) $\mathbf{G}$ は I を生成する; すなわち $I = A_{n+1}P_1 + \cdots + A_{n+1}P_s$.

(2) $E_{FW}(I) = \mathrm{mono}(E_{FW}(\mathbf{G}))$.

定義 6.3.4. $P, Q \in A_{n+1}$ に対して,

$$\mathrm{lexp}_{FW}(P) = (\mu, \nu, \alpha, \beta), \quad \mathrm{lexp}_{FW}(Q) = (\mu', \nu', \alpha', \beta')$$

とするとき, P と Q の S-**作用素**を

$$\begin{aligned}\mathrm{sp}_{FW}(P, Q) \quad := \quad & \mathrm{lcoef}_{FW}(Q) t^{\mu \vee \mu' - \mu} \partial_t^{\nu \vee \nu' - \nu} x^{\alpha \vee \alpha' - \alpha} \partial_x^{\beta \vee \beta' - \beta} P \\ & - \mathrm{lcoef}_{FW}(P) t^{\mu \vee \mu' - \mu'} \partial_t^{\nu \vee \nu' - \nu'} x^{\alpha \vee \alpha' - \alpha'} \partial_x^{\beta \vee \beta' - \beta'} Q\end{aligned}$$

で定義する.

次の定理は前節の定理 6.2.6 と同様に証明される (それよりは幾分やさしい):

定理 6.3.5. I を A_{n+1} の左イデアル, $\mathbf{G} = \{P_1, \dots, P_s\}$ を I の生成元の集合とするとき, 次の条件 (1)–(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は I の FW-グレブナ基底;

(2) 任意の $P \in I$ と $m \in \mathbf{Z}$ に対して, P の $\mathbf{G}$ による任意の $\mathcal{F}_m$-簡約は $\mathcal{F}_m \cap A_{n+1}$ に属する;

(3) 任意の整数 m と $1 \le i < j \le s$ なる i, j に対して, 適当な $Q_{ij1}, \dots, Q_{ijs} \in A_{n+1}$ と $R_{ij} \in \mathcal{F}_m \cap A_{n+1}$ が存在して, $\mathrm{sp}_{FW}(P_i, P_j) = \sum_{k=1}^{s} Q_{ijk} P_k + R_{ij}$ かつ $\mathrm{lexp}_{FW}(Q_{ijk} P_k) \prec_{FW} \mathrm{lexp}_{FW}(P_i) \vee \mathrm{lexp}_{FW}(P_j)$ が任意の k について成立する.

この節の主目的は FW-グレブナ基底と FD-グレブナ基底とを関連づけることであるが, そのために, 以下で定義する FR-グレブナ基底の概念を経由する. まず, x の有理関数係数の t の多項式を係数とする微分作用素環を導入しよう:

$$\begin{aligned}\mathcal{D}_R &:= \mathbf{C}(x)[t]\langle\partial_t,\partial_x\rangle \\ &= \left\{P=\sum_{\mu,\nu,\beta} a_{\mu,\nu,\beta}(x)t^\mu\partial_t^\nu\partial_x^\beta \,\middle|\, a_{\mu,\nu,\beta}(x)\in\mathbf{C}(x)\right\}.\end{aligned}$$

ここで和は μ,ν,β について有限和である. $\mathcal{D}_R$ の元

$$P=\sum_{\mu,\nu,\beta} a_{\mu,\nu,\beta}(x)t^\mu\partial_t^\nu\partial_x^\beta \neq 0$$

に対して, その FR-順序 (cf. 6.2 節) に関する指数の集合, leading exponent, leading coefficient, leading term をそれぞれ

$$\begin{aligned}\mathrm{exps}_{FR}(P) &:= \{(\mu,\nu,\beta)\mid a_{\mu,\nu,\beta}(x)\neq 0\}, \\ \mathrm{lexp}_{FR}(P) &:= \max{}_{FR}\{(\mu,\nu,\beta)\mid a_{\mu,\nu,\beta}(x)\neq 0\}, \\ \mathrm{lcoef}_{FR}(P) &:= a_{\mu,\nu,\beta}(x) \quad ((\mu,\nu,\beta):=\mathrm{lexp}_{FR}(P)), \\ \mathrm{lterm}_{FR}(P) &:= a_{\mu,\nu,\beta}(x)t^\mu\partial_t^\nu\partial_x^\beta \quad ((\mu,\nu,\beta):=\mathrm{lexp}_{FR}(P))\end{aligned}$$

で定義する. 更に $\mathcal{D}_R$ の部分集合 S に対して

$$E_{FR}(S) := \{\mathrm{lexp}_{FR}(P)\mid P\in S\setminus\{0\}\}$$

とおく. また各整数 m に対して

$$\hat{\mathcal{F}}_m := \left\{P=\sum_{\mu,\nu,\beta} a_{\mu,\nu,\beta}(x)t^\mu\partial_t^\nu\partial_x^\beta\in\mathcal{D}_R \,\middle|\, a_{\mu,\nu,\beta}(x)=0 \text{ if } \nu-\mu>m\right\}$$

とおく.

補題 6.3.6. 任意の $P,Q\in\mathcal{D}_R$ に対して

$$\begin{aligned}\mathrm{lexp}_{FR}(PQ) &= \mathrm{lexp}_{FR}(P)+\mathrm{lexp}_{FR}(Q), \\ \mathrm{lcoef}_{FR}(PQ) &= \mathrm{lcoef}_{FR}(P)\mathrm{lcoef}_{FR}(Q).\end{aligned}$$

補題 6.3.7. (割算定理) P と $P_1,\dots,P_s$ を $\mathcal{D}_R$ の元とすると, 任意の整数 m に対して $\mathcal{D}_R$ の元 $Q_1,\dots,Q_s$ と R で

$$\begin{aligned}&P=\sum_{i=1}^s Q_iP_i+R, \\ &\mathrm{exps}(R)\cap\mathrm{mono}(E_{FR}(\mathbf{G}))\subset E_{FR}(\hat{\mathcal{F}}_m), \\ &\mathrm{lexp}_{FR}(Q_iP_i)\preceq_{FR}\mathrm{lexp}_{FR}(P), \quad \mathrm{lexp}_{FR}(R)\preceq_{FR}\mathrm{lexp}_{FR}(P)\end{aligned}$$

を満たすものが存在する. この R を $\mathrm{red}_{FR}(P,\{P_1,\dots,P_s\},m)$ で表わし, P の $\hat{\mathcal{F}}_m$-簡約と呼ぶことにする (必ずしも一意的ではない).

定義 6.3.8. $\hat{I}$ を $\mathcal{D}_R$ の左イデアルとする. $\hat{I}$ の有限部分集合 $\mathbf{G}=\{P_1,\dots,P_s\}$ が $\hat{I}$ の (Y に沿っての)**FR-グレブナ基底**とは, 次の 2 つの条件が満たされることである:

(1) $\mathbf{G}$ は $\hat{I}$ を生成する; すなわち $\hat{I}=\mathcal{D}_R P_1+\cdots+\mathcal{D}_R P_s$.

(2) $E_{FR}(\hat{I})=\mathrm{mono}(E_{FR}(\mathbf{G}))$.

定義 6.3.9. $P,Q\in\mathcal{D}_R$ に対して,

$$\mathrm{lexp}_{FR}(P)=(\mu,\nu,\beta),\quad \mathrm{lexp}_{FR}(Q)=(\mu',\nu',\beta')$$

とするとき, P と Q の **S-作用素**を

$$\begin{aligned}\mathrm{sp}_{FR}(P,Q)\ &:=\ \mathrm{lcoef}_{FR}(Q)(x)t^{\mu\vee\mu'-\mu}\partial_t^{\nu\vee\nu'-\nu}\partial_x^{\beta\vee\beta'-\beta}P\\ &\quad\ -\mathrm{lcoef}_{FR}(P)(x)t^{\mu\vee\mu'-\mu'}\partial_t^{\nu\vee\nu'-\nu'}\partial_x^{\beta\vee\beta'-\beta'}Q\end{aligned}$$

で定義する.

次の定理も前節の定理 6.2.6 と同様に証明される:

定理 6.3.10. $\hat{I}$ を $\mathcal{D}_R$ の左イデアル, $\mathbf{G}=\{P_1,\dots,P_s\}$ を $\hat{I}$ の生成元の集合とするとき, 次の条件 (1)–(3) は同値:

(1) $\mathbf{G}$ は $\hat{I}$ の FR-グレブナ基底;

(2) 任意の $P\in\hat{I}$ と $m\in\mathbf{Z}$ に対して, P の $\mathbf{G}$ による任意の $\hat{\mathcal{F}}_m$-簡約は $\hat{\mathcal{F}}_m$ に属する;

(3) 任意の整数 m と $1\le i<j\le s$ なる i,j に対して, 適当な $Q_{ij1},\dots,Q_{ijs}\in\mathcal{D}_R$ と $R_{ij}\in\hat{\mathcal{F}}_m$ が存在して, $\mathrm{sp}_{FR}(P_i,P_j)=\sum_{k=1}^s Q_{ijk}P_k+R_{ij}$ かつ $\mathrm{lexp}_{FR}(Q_{ijk}P_k)\prec_{FR}\mathrm{lexp}_{FR}(P_i)\vee\mathrm{lexp}_{FR}(P_j)$ が任意の k について成立する.

まず FW-グレブナ基底と FR-グレブナ基底との関連について考察しておこう.

命題 6.3.11. $\mathbf{G}$ を A_{n+1} の左イデアル I の FW-グレブナ基底とする. $\hat{I}$ を I を含む最小の $\mathcal{D}_R$ の左イデアルとすると, $\mathbf{G}$ は $\hat{I}$ の FR-グレブナ基底でもある.

証明: $\mathbf{G}$ は A_{n+1} 上 I を生成するから, $\mathbf{G}$ は $\mathcal{D}_R$ 上 $\hat{I}$ を生成する. 従って

$$\mathrm{lexp}_{FR}(\hat{I})=\mathrm{mono}(\mathrm{lexp}_{FR}(\mathbf{G}))$$

を示せばよい. まず $\mathrm{lexp}_{FR}(\hat{I})=\mathrm{lexp}_{FR}(I)$ を示そう. 実際 $P\in\hat{I}$ とすると, ある多項式 $a(x)\in\mathbf{C}[x]$ が存在して $Q:=aP\in I$ となる. このとき

$$\mathrm{lexp}_{FR}(P)=\mathrm{lexp}_{FR}(Q)\in\mathrm{lexp}_{FR}(I)$$

であるから, $\mathrm{lexp}_{FR}(\hat{I})\subset\mathrm{lexp}_{FR}(I)$ を得る. 従って $I\subset\hat{I}$ より $\mathrm{lexp}_{FR}(\hat{I})=\mathrm{lexp}_{FR}(I)$ である. $\mathbf{G}$ が I の FW-グレブナ基底であることから $\mathrm{mono}(E_{FW}(\mathbf{G}))=E_{FW}(I)$ であるが, 一般に $P\in A_{n+1}$ に対して $\mathrm{lexp}_{FR}(P)=\varpi(\mathrm{lexp}_{FW}(P))$ が成立するから

$$\begin{aligned}\mathrm{mono}(E_{FR}(\mathbf{G}))\ &=\ \varpi(\mathrm{mono}(E_{FW}(\mathbf{G})))\\ &=\ \varpi(E_{FW}(I))=E_{FR}(I)=E_{FR}(\hat{I})\end{aligned}$$

が成り立つ. 以上により, $\mathbf{G}$ は $\hat{I}$ の FR-グレブナ基底である. □

次に FR-グレブナ基底と FD-グレブナ基底との関係を考察する.

命題 6.3.12. $P_1, \dots, P_s \in A_{n+1}$ として, $\mathbf{G} = \{P_1, \dots, P_s\}$ を $\mathcal{D}_R$ の左イデアル $\hat{I} := \mathcal{D}_R P_1 + \cdots + \mathcal{D}_R P_s$ の FR-グレブナ基底とする.

$$a(x) := \mathrm{lcoef}_{FR}(P_1)(x) \dots \mathrm{lcoef}_{FR}(P_s)(x) \in \mathbf{C}[x]$$

とおいて, $a(0) \neq 0$ と仮定する. このとき $\mathbf{G}$ は $\mathcal{D}_0$ の左イデアル $\mathcal{I}_0 := \mathcal{D}_0 P_1 + \cdots + \mathcal{D}_0 P_s$ の FD-グレブナ基底でもある.

証明: $i = 1, \dots, s$ に対して

$$(\mu_i, \nu_i, \beta_i) = \mathrm{lexp}_{FR}(P_i), \quad a_i(x) = \mathrm{lcoef}_{FR}(P_i) \in \mathbf{C}[x]$$

とおこう. $1 \leq i < j \leq s$ なる任意の i, j に対して, P_i と P_j の S-多項式を具体的に

$$\mathrm{sp}_{FR}(P_i, P_j) = a_j(x) S_{ij} P_i - a_i(x) S_{ji} P_j \tag{3.1}$$

と書こう. ただしここで $\mu_{ij} := \mu_i \vee \mu_j - \mu_i$ などとして $S_{ij} := t^{\mu_{ij}} \partial_t^{\nu_{ij}} \partial_x^{\beta_{ij}}$ とおいた. 一方 $a_i(0) a_j(0) \neq 0$ に注意すれば,

$$\mathrm{sp}_{FD}(P_i, P_j) = a_j(0) S_{ij} P_i - a_i(0) S_{ji} P_j \tag{3.2}$$

を得る. R_{ij} を $\mathrm{sp}_{FR}(P_i, P_j)$ の $\mathbf{G}$ による $\hat{\mathcal{F}}_m$-簡約としよう. するとある $Q_1, \dots, Q_s \in \mathcal{D}_R$ と $R \in \hat{\mathcal{F}}_m$ が存在して

$$\mathrm{sp}_{FR}(P_i, P_j) = Q_1 P_1 + \cdots + Q_s P_s + R \tag{3.3}$$

かつ $\mathrm{lexp}_{FR}(P_i Q_i) \prec_{FR} \mathrm{lexp}_{FR}(P_i) \vee \mathrm{lexp}_{FR}(P_j)$ が成り立つ. ここで $\hat{\mathcal{F}}_m$-簡約の構成法から, 適当な自然数 k をとれば $a(x)^k Q_i$ $(i = 1, \dots, s)$ と $a(x)^k R$ がすべて A_{n+1} に属するようにできる. $a(0) \neq 0$ より, Q_i と R は $\mathcal{D}_0$ の元とみなすことができ, かつ

$$\mathrm{lexp}_{FD}(P_k Q_k) \prec_{FD} \mathrm{lexp}_{FD}(P_i) \vee \mathrm{lexp}_{FD}(P_j) \qquad (1 \leq k \leq s)$$

が成立する. (3.1),(3.2),(3.3) を合わせて

$$\begin{aligned} \mathrm{sp}_{FD}(P_i, P_j) &= Q_1 P_1 + \cdots + Q_s P_s + R \\ &\quad -(a_j(x) - a_j(0)) S_{ij} P_i + (a_i(x) - a_i(0)) S_{ji} P_j \end{aligned}$$

を得る.

$$\mathrm{lexp}_{FD}((a_j(x) - a_j(0)) S_{ij} P_i) \prec_{FD} \mathrm{lexp}_{FD}(S_{ij} P_i) = \mathrm{lexp}_{FD}(P_i) \vee \mathrm{lexp}_{FD}(P_j)$$

に注意すれば定理 6.2.6 から, $\mathbf{G}$ は $\mathcal{I}$ の FD-グレブナ基底であることがわかる. □

以上の２つの命題を合わせて次の定理を得る:

定理 6.3.13. $P_1, \dots, P_s \in A_{n+1}$ として, $\mathbf{G} = \{P_1, \dots, P_s\}$ を A_{n+1} の左イデアル $I := A_{n+1} P_1 + \cdots + A_{n+1} P_s$ の FW-グレブナ基底とする.

$$a(x) := \mathrm{lcoef}_{FR}(P_1)(x) \cdots \mathrm{lcoef}_{FR}(P_s)(x)$$

とおいて, $Y := \{(t, x) \mid t = 0\}$ の点 $p = (0, x_0)$ において $a(x_0) \neq 0$ と仮定する. このとき $\mathbf{G}$ は $\mathcal{D}_p$ の左イデアル $\mathcal{I}_p := \mathcal{D}_p P_1 + \cdots + \mathcal{D}_p P_s$ の FD-グレブナ基底である.

以上により FW-グレブナ基底が計算できれば, Y の “generic” な点においては, FD-グレブナ基底が求まったことになり, 従ってそこでの特性指数が完全に決定できることがわかった. 次節では, 4.4 節と類似の斉次化の手法により FW-グレブナ基底を計算するアルゴリズムを与えよう.

6.4 斉次化によるFW-グレブナ基底の計算

$\mathbf{N}^{2n+3}$ の全順序 $\prec_H$ (H-順序と呼ぶ) を次で定義しよう. (i,μ,ν,α,β), $(j,\mu',\nu',\alpha',\beta') \in \mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}\times\mathbf{N}^n\times\mathbf{N}^n$ に対して,

$$\begin{aligned}(i,\mu,\nu,\alpha,\beta) \prec_H (j,\mu',\nu',\alpha',\beta') \iff & (i<j)\\ \text{or} \quad & (i=j,\ |\beta|<|\beta'|)\\ \text{or} \quad & (i=j,\ |\beta|=|\beta'|,\ \nu<\nu')\\ \text{or} \quad & (i=j,\ \nu=\nu',\ |\beta|=|\beta'|,\ \beta\prec_L\beta')\\ \text{or} \quad & (i=j,\ \nu=\nu',\ \beta=\beta',\ \mu<\mu')\\ \text{or} \quad & (i=j,\ \nu=\nu',\ \mu=\mu',\ \beta=\beta',\ |\alpha|<|\alpha'|)\\ \text{or} \quad & (i=j,\ \nu=\nu',\ \mu=\mu',\ \beta=\beta',\ |\alpha|=|\alpha'|,\\ & \alpha\prec_{L'}\alpha').\end{aligned}$$

これは 1 章の意味で項順序であり, 特に整列順序である. 以下では x_0 をパラメータとして, A_{n+1} を係数環とする x_0 の多項式環 $A_{n+1}[x_0]$ を考察しよう. x_0 の代わりに x_{n+1} と書けば, これは A_{n+2} の部分環とみなすこともできる. $A_{n+1}[x_0]$ の元

$$P = \sum_{i,\mu,\nu,\alpha,\beta} a_{i\mu\nu\alpha\beta} t^\mu {x_0}^i x^\alpha {\partial_t}^\nu {\partial_x}^\beta$$

に対して P の指数の集合と H-順序に関する leading exponent, leading coefficient, leading term を

$$\begin{aligned}\mathrm{exps}(P) &:= \{(i,\mu,\nu,\alpha,\beta) \mid a_{i,\mu,\nu,\alpha,\beta}\neq 0\},\\ \mathrm{lexp}_H(P) &:= \max{}_H(\mathrm{exps}(P)),\\ \mathrm{lcoef}_H(P) &:= a_{i,\mu,\nu,\alpha,\beta} \qquad ((i,\mu,\nu,\alpha,\beta):=\mathrm{lexp}_H(P)),\\ \mathrm{lterm}_H(P) &:= a_{i,\mu,\nu,\alpha,\beta} t^\mu x^\alpha \partial_t^\nu \partial_x^\beta \qquad ((i,\mu,\nu,\alpha,\beta):=\mathrm{lexp}_H(P))\end{aligned}$$

で定義する. ただし $\max{}_H$ は H-順序に関する最大元を表わす. 更に $A_{n+1}[x_0]$ の部分集合 S に対して

$$E_H(S) := \{\mathrm{lexp}_H(P) \mid P\in S\setminus\{0\}\}$$

とおく.

定義 6.4.1. I を $A_{n+1}[x_0]$ の左イデアルとする. I の有限部分集合 $\mathbf{G}=\{P_1,\dots,P_s\}$ が I の **H-グレブナ基底**とは, $E_H(I)=\mathrm{mono}(E_H(\mathbf{G}))$ が成立することである.

H-順序は項順序だから, この H-グレブナ基底の定義は定義 4.1.11 の特別な場合に他ならない (特にこのとき $\mathbf{G}$ は I を生成する). 従って H-グレブナ基底に関しては, 4.1 節の議論がすべて適用できる. 次に 4.4 節の F-斉次化の議論を少し変更して適用しよう. ここでは, いわば t と ∂_t のみに関する F-斉次性を考える.

定義 6.4.2. (F-斉次性) $A_{n+1}[x_0]$ の元 P が (m 階) **F-斉次**とは, m を整数として P が

$$P = \sum_{\nu-\mu-i=m} a_{i,\mu,\nu,\alpha,\beta} t^\mu {x_0}^i x^\alpha \partial_t^\nu \partial^\beta \qquad (a_{i,\mu,\nu,\alpha,\beta} \in \mathbf{C})$$

という形に書けること.

補題 6.4.3. $P, Q \in A_{n+1}[x_0]$ がそれぞれ m 階 F-斉次, ℓ 階 F-斉次ならば, PQ は $m+\ell$ 階 F-斉次である.

定義 6.4.4. (F-斉次化) $P = \sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} t^\mu x^\alpha \partial_t^\nu \partial^\beta$ を A_{n+1} の元とするとき, P の **F-斉次化** P^h を

$$P^h := \sum_{\mu,\nu,\alpha,\beta} a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} t^\mu x_0^{\nu-\mu-m} x^\alpha \partial_t^\nu \partial^\beta \in A_n[x_0]$$

で定義する. ただし $m := \min\{\nu - \mu \mid a_{\mu,\nu,\alpha,\beta} \neq 0\}$ とおいた.

以下の補題は 4.4 節の対応する補題とほとんど同様に証明できる.

補題 6.4.5. $P, Q \in A_{n+1}$ に対して $(PQ)^h = P^h Q^h$.

補題 6.4.6. $P_1, \ldots, P_s \in A_{n+1}$ に対して $P := P_1 + \cdots + P_s$ とおくと, 適当な $i, i_1, \ldots, i_s \in \mathbf{N}$ をとれば

$${x_0}^i P^h = {x_0}^{i_1} (P_1)^h + \cdots + {x_0}^{i_s} (P_s)^h$$

が成立する.

写像 $\varpi' : \mathbf{N}^{2n+3} \longrightarrow \mathbf{N}^{2n+2}$ を $\varpi'(i,\mu,\nu,\alpha,\beta) = (\mu,\nu,\alpha,\beta)$ で定義する. また $A_{n+1}[x_0]$ の元を $P(x_0)$ で表わすとき $P(1) \in A_{n+1}$ は P の x_0 に 1 を代入した作用素を表わす.

補題 6.4.7. (1) すべての $P \in A_{n+1}$ に対して $\mathrm{lexp}_{FW}(P) = \varpi'(\mathrm{lexp}_H(P^h))$.

(2) $P(x_0) \in A_{n+1}[x_0]$ が F-斉次ならば $\mathrm{lexp}_{FW}(P(1)) = \varpi'(\mathrm{lexp}_H(P(x_0)))$.

証明: (2) を示せばよい. $\nu - \mu - i = \nu' - \mu' - j = \ell$ としよう. このとき $i = \nu - \mu - \ell$, $j = \nu' - \mu' - \ell$ だから, 容易に

$$(i,\mu,\nu,\alpha,\beta) \prec_H (j,\mu',\nu',\alpha',\beta') \quad \Longleftrightarrow \quad (\mu,\nu,\alpha,\beta) \prec_{FW} (\mu',\nu',\alpha',\beta')$$

がわかる. これから (2) が成り立つことが導かれる. □

H-グレブナ基底のアルゴリズム (アルゴリズム 4.1.21) により, F-斉次な $A_{n+1}[x_0]$ の元で生成される $A_{n+1}[x_0]$ の左イデアルの H-グレブナ基底として, F-斉次な元からなるものが存在することがわかる.

定理 6.4.8. I を A_{n+1} の元 $P_1, \ldots, P_m$ の生成する A_{n+1} の左イデアルとする. I^h を $(P_1)^h, \ldots, (P_m)^h$ の生成する $A_{n+1}[x_0]$ の左イデアルとして, $\mathbf{G}^h$ を I^h の H-グレブナ基底であって, F-斉次なものからなるものとする. このとき $\mathbf{G} := \{P(1) \mid P(x_0) \in \mathbf{G}^h\}$ は, I の FW-グレブナ基底である.

証明: 2段階に分けて証明する. 以下 $\mathbf{G}^h = \{Q_1(x_0), \ldots, Q_s(x_0)\}$ とおく.

(第1段階) $\mathbf{G}$ が I を生成すること: 各 $Q_k(x_0)$ は I^h の元だから, $A_{n+1}[x_0]$ の適当な元 $R_{k1}(x_0)$, …, $R_{km}(x_0)$ によって

$$Q_k(x_0) = R_{k1}(x_0)(P_1)^h(x_0) + \cdots + R_{km}(x_0)(P_m)^h(x_0)$$

と表わされる. この両辺に $x_0 = 1$ を代入して

$$Q_k(1) = R_{k1}(1)P_1 + \cdots + R_{km}(1)P_m \in I$$

を得る. 次に各 k に対して $(P_k)^h \in I^h$ だから, 適当な $T_{k1}(x_0), \ldots, T_{ks}(x_0) \in A_{n+1}[x_0]$ によって

$$(P_k)^h(x_0) = T_{k1}(x_0)Q_1(x_0) + \cdots + T_{ks}(x_0)Q_s(x_0)$$

と書ける. これに $x_0 = 1$ を代入して

$$P_k = T_{k1}(1)Q_1(1) + \cdots + T_{ks}(1)Q_s(1)$$

を得る. 従って I は $\mathbf{G}$ で生成される.

(第2段階) $E_{FW}(I) = \mathrm{mono}(E_{FW}(\mathbf{G}))$ を示す. $P \in I$ とすると, 適当な $R_1, \ldots, R_s \in A_{n+1}$ によって

$$P = R_1Q_1 + \cdots + R_sQ_s$$

と書ける. このとき補題 6.4.5 と補題 6.4.6 から, ある $i, i_1, \ldots, i_s \in \mathbf{N}$ により

$${x_0}^i P^h = {x_0}^{i_1}(R_1)^h(Q_1)^h + \cdots + {x_0}^{i_s}(R_s)^h(Q_s)^h \in I^h$$

が成立する. ${x_0}^i P^h$ の x_0 に 1 を代入すると P になるから, 補題 6.4.7 を用いて

$$\begin{aligned}\mathrm{lexp}_{FW}(P) &= \varpi'(\mathrm{lexp}_H({x_0}^i P^h)) \in \varpi'(E_H(I^h)) \\ &= \varpi'(\mathrm{mono}(E_H(\mathbf{G}^h))) = \mathrm{mono}(E_{FW}(\mathbf{G}))\end{aligned}$$

を得る. $P \in I$ は任意だったから, $E_{FW}(I) = \mathrm{mono}(E_{FW}(\mathbf{G}))$ が示された. 以上により $\mathbf{G}$ は I の FW-グレブナ基底である. □

6.5 接方程式系

この節では, 前節までと同じ記号を用い, 方程式系

$$\mathcal{M} \quad : \quad P_1u = \ldots = P_su = 0$$

は $Y := \{(t, x) \mid t = 0\}$ に沿って 0 でフックス型と仮定する. $\mathcal{M}$ の Y に沿っての接方程式系 (tangential system, induced system) は, 非特性的な場合 (cf. 3.5 節) と同様に

$$\mathcal{M}_Y := \mathcal{M}/t\mathcal{M} = \mathcal{D}/(\mathcal{I} + t\mathcal{D})$$

で定義される. ただしこれは, 特性指数 0 に関する境界値の満たす方程式系であり, 一般の特性指数に関する境界値の満たす方程式系を定義するには, 最初に $\mathcal{M}$ にある変換を施しておく必要がある.

さて, 以下では $\mathcal{M}_Y$ の 0 における茎 $\mathcal{M}_{Y,0}$ の $\mathcal{D}'_0 := \mathbf{C}\{x\}\langle\partial_x\rangle$ 上の加群としての構造を計算するアルゴリズムを与えよう. u を $1 \in \mathcal{D}$ の $\mathcal{M} = \mathcal{D}/\mathcal{I}$ における剰余類として, $P \in \mathcal{D}$ に対して, $[Pu]$ で Pu の $\mathcal{M}_Y$ における剰余類を表わすことにする.

定理 6.5.1. $\mathcal{M}$ が Y に沿って 0 で形式的にフックス型と仮定して

$$\{k \in \mathbf{N} \mid k \geq k_0\} \cap e_Y(\mathcal{M}, 0) = \emptyset$$

を満たすような $k_0 \in \mathbf{N}$ をとると, $\mathcal{M}_{Y,0}$ は $\mathcal{D}'_0$-加群として $[\partial_t^j u]$ $(0 \leq j \leq k_0 - 1)$ で生成される. 特に $k_0 = 0$ ならば $\mathcal{M}_{Y,0} = 0$ である.

証明: 定義から $\mathcal{M}_{Y,0}$ は $\mathcal{D}'_0$-加群として $[\partial_t^j u]$ $(j \geq 0)$ で生成されることがわかる. $k \geq k_0$ とすると, ある $P \in \mathcal{I}_0$ が存在して, ある $j \geq 0$ と $f \in \mathcal{O}'_0[\theta]$ によって

$$\psi(\hat{\sigma}(P)) = f(\theta, x)\tau^{-j}$$

と書け, しかも f は $f(k, 0) \neq 0$ を満たすようにできる. このとき P はある $P' \in \mathcal{F}_0$ を用いて

$$P = t^j f(t\partial_t, x) + t^{j+1} P'(t, \partial_t, x, \partial_x)$$

という形に表わされる. これから

$$\begin{aligned} \partial_t^{j+k} P &= \partial_t^{j+k}(t^j f(t\partial_t, x) + t^{j+1}P') \\ &= (t\partial_t + k + 1)(t\partial_t + k + 2) \ldots (t\partial_t + k + j) f(t\partial_t + k, x)\partial_t^k + \partial_t^{j+k} t^{j+1} P' \end{aligned}$$

となるから, $\mathcal{M}_{Y,0}$ において

$$0 = [\partial_t^{j+k} Pu] = (k+1)(k+2)\ldots(k+j) f(k, x)[\partial_t^k u] + [\partial_t^{j+k} t^{j+1} P' u]$$

を得る. $\partial_t^{j+k} t^{j+1} P' \in \mathcal{F}_{k-1}$ であるから, ∂_t についての階数が高々 $k-1$ であるような $\mathcal{D}'_0$ の元 $Q(\partial_t, x, \partial_x)$ が存在して

$$\partial_t^{j+k} t^{j+1} P' - Q(\partial_t, x, \partial_x) \in t\mathcal{D}_0$$

が成立する. 従って $f(k, 0) \neq 0$ に注意すれば

$$[\partial_t^k u] \in \mathcal{D}'_0[u] + \mathcal{D}'_0[\partial_t u] + \cdots + \mathcal{D}'_0[\partial_t^{k-1} u]$$

を得る. 以上の議論を繰り返せば,

$$[\partial_t^k u] \in \mathcal{D}'_0[u] + \mathcal{D}'_0[\partial_t u] + \cdots + \mathcal{D}'_0[\partial_t^{k_0-1} u]$$

がわかる. □

この定理によって $\mathcal{M}_Y$ は $\mathcal{M}$ の (Y の近傍における) 正則解 $u(t,x)$ に対して, その Y への制限

$$u(0,x), \partial_t u(0,x), \ldots, \partial_t^{k_0-1} u(0,x)$$

の満たす関係式 (微分方程式系) を表わしていることがわかる.

以下では $\mathcal{M}_{Y,0}$ をある条件 (Y の generic な点では最初から満たされている) の下で, 具体的に計算する方法を述べよう. $\mathcal{M}$ は定理6.5.1と同じ条件を満たしているとする. $\mathbf{G}$ を $\mathcal{D}_0$ の左イデアル $\mathcal{I}_0$ を生成するような有限集合とする. $\psi(\hat{\sigma}(P_0)) = f(\theta, x)\tau^{-j_0}$ かつ, 任意の $k \geq k_0$ に対して $f(k,0) \neq 0$ となるような $P_0 \in \mathbf{G}$ が存在すると仮定しよう. (ここで $j_0 \geq 0$ としてよい.) この仮定は $P_1, \ldots, P_s \in A_{n+1}$ で, $\mathbf{G}$ として $P_1, \ldots, P_s$ が生成する A_{n+1} のFW-グレブナ基底をとれば, 命題6.3.12の条件の下で成立する (定理6.2.8を参照のこと).

$\mathcal{D}_0'$-準同型 $\rho : \mathcal{D}_0 \longrightarrow \mathcal{D}_0'[\partial_t]$ を次のように定義しよう: $P \in \mathcal{D}_0$ を具体的に6.1節の(1.1)のように書くとき

$$\rho(P) := \sum_{\nu,\alpha,\beta} a_{0,\nu,\alpha,\beta} x^\alpha \partial_x^\beta \partial_t^\nu \in \mathcal{D}_0'[\partial_t]$$

とする. 一般に $\mathcal{D}_0'[\partial_t]$ の元 P に対しては, その F-階数 $\nu = \mathrm{ord}_F(P)$ は P の ∂_t に関する階数に他ならず, またその形式シンボルは適当な $A \in \mathcal{D}_0'$ を用いて $\hat{\sigma}(P) = A(x, \partial_x)\partial_t^\nu$ と書ける. このとき, この A を $\mathrm{coef}(P, \partial_t, \nu)$ で表わすことにする. 定理6.5.1の証明から, 任意の $k \geq k_0$ に対して, $p_k(0) \neq 0$ であるような巾級数 $p_k(x) \in \mathbf{C}\{x\}$ が存在して

$$\hat{\sigma}(\rho(\partial_t^{j_0+k} P_0)) = p_k(x)\partial_t^k$$

と書けることがわかる. この P_0 を用いて, 各 $P \in \mathcal{D}_0'[\partial_t]$ に対して $\mathrm{ind}(P, P_0) \in \mathcal{D}_0'[\partial_t]$ を次のアルゴリズムで定義しよう:

アルゴリズム 6.5.2. ($\mathrm{ind}(P, P_0)$)
Input: $P \in \mathcal{D}_0'[\partial_t]$;
while ($\nu := \mathrm{ord}_F(P) \geq k_0$)
　　$P := P - (1/p_\nu)\mathrm{coef}(P, \partial_t, \nu)\rho(\partial_t^{j_0+\nu} P_0)$;
Output: P;

さて

$$\mathcal{D}_0'^{(k_0)} := \bigoplus_{k=0}^{k_0-1} \mathcal{D}_0' \partial_t^k \subset \mathcal{D}_0'[\partial_t]$$

とおくと $\mathrm{ind}(\cdot, P_0)$ は $\mathcal{D}_0'[\partial_t]$ から $\mathcal{D}_0'^{(k_0)}$ への $\mathcal{D}_0'$-準同型を定義する. $\mathcal{D}_0'^{(k_0)}$ の元 $Q = \sum_{k=0}^{k_0-1} Q_k(x, \partial_x)\partial_t^k$ に対して

$$[Qu] = \sum_{k=0}^{k_0-1} Q_k(x, \partial_x)[\partial_t^k u] \in \mathcal{M}_{Y,0}$$

と書こう.

定理 6.5.3. 以上の仮定の下で, ある整数 $j_0 \geq 0$ が存在して, $\mathcal{M}_{Y,0}$ は具体的に未知関数 $[u]$,...,$[\partial_t^{k_0-1}u]$ 達に対する偏微分方程式系

$$[\mathrm{ind}(\rho(\partial_t^j P), P_0)u] = 0 \qquad (\forall P \in \mathbf{G},\ \forall j = 0, 1, \ldots, j_0)$$

で与えられる.

証明: $P \in \mathbf{G}$, $j \geq 0$ として $\nu := \mathrm{ord}_F(P)$ とおこう. アルゴリズム 6.5.2 によって

$$\rho(\partial_t^j P) = \sum_{k=k_0}^{\nu+j} Q_k(x, \partial_x)\rho(\partial_t^{j_0+k} P_0) + \mathrm{ind}(\rho(\partial_t^j P), P_0)$$

がある $Q_k(x, \partial_x) \in \mathcal{D}'_0$ について成り立つ. 従って $\mathrm{ind}(\rho(\partial_t^j P), P_0)$ は $\mathcal{L} := \rho(\mathcal{I}_0)$ に属する. これは $[\mathrm{ind}(\rho(\partial_t^j P), P_0)u] = 0$ を意味する.

簡単のため $\mathcal{D}'_0$-準同型 $\mathrm{ind}(\cdot, P_0)$ を単に ind で表わそう. すると $\mathrm{ind} : \mathcal{D}'_0[\partial_t] \to \mathcal{D}'^{(k_0)}_0$ は全射準同型である ($j < k_0$ のとき $\mathrm{ind}(\partial_t^j) = \partial_t^j$ だから). 更に $\mathrm{ind}^{-1}(\mathrm{ind}(\mathcal{L}))$ はまた $\mathcal{L}$ に含まれる. 実際 $P \in \mathcal{D}'_0[\partial_t]$ に対して $\nu := \mathrm{ord}_F(P)$ とおくと

$$P = \sum_{k=k_0}^{\nu} Q_k(x, \partial_x)\rho(\partial_t^{j_0+k} P_0) + \mathrm{ind}(P)$$

が適当な $Q_k \in \mathcal{D}'_0$ について成立するから, $\mathrm{ind}(P) \in \mathcal{L}$ と $P \in \mathcal{L}$ は同値である. このことから

$$\mathcal{L} \subset \mathrm{ind}^{-1}(\mathrm{ind}(\mathcal{L})) \subset \mathrm{ind}^{-1}(\mathcal{L} \cap \mathcal{D}'^{(k_0)}_0) \subset \mathcal{L}$$

を得る. 従って ρ と ind から $\mathcal{D}'_0$-同型

$$\mathcal{M}_{Y,0} \simeq \mathcal{D}'_0[\partial_t]/\mathcal{L} \simeq \mathcal{D}'^{(k_0)}_0/\mathrm{ind}(\mathcal{L})$$

が導かれる. $\mathcal{L}$ は $\{\rho(\partial_t^j P) \mid P \in \mathbf{G}, j \geq 0\}$ で生成される $\mathcal{D}'_0[\partial_t]$ の $\mathcal{D}'_0$-部分加群であるから, $\mathrm{ind}(\mathcal{L})$ は $\{\mathrm{ind}(\rho(\partial_t^j P)) \mid P \in \mathbf{G}, j \geq 0\}$ で生成される $\mathcal{D}'^{(k_0)}_0$ の $\mathcal{D}'_0$-部分加群である. $\mathcal{D}'_0$ はネター環だから (命題 4.2.12), ある j_0 が存在して, $\mathrm{ind}(\mathcal{L})$ は $\mathcal{D}'_0$ 上

$$\{\mathrm{ind}(\rho(\partial_t^j P)) \mid P \in \mathbf{G},\ 0 \leq j \leq j_0\}$$

で生成される. □

最後に一般の特性指数に対する境界値に対応する接方程式系を計算しよう. $\mathcal{M}$ は定数 (x によらない) 特性指数 $\lambda \in \mathbf{C}$ を持つと仮定しよう. このとき未知関数 $t^{-\lambda}u$ に関する偏微分方程式系 $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ は次のように定義される: $k_i := \mathrm{ord}_F(P_i)$, $k_i^+ := \max\{k_i, 0\}$ として $Q_i := t^{-\lambda+k_i^+} P_i t^{\lambda} \in \mathcal{D}_0$ とおき, $\mathcal{M}^{(\lambda)}$ を

$$\mathcal{M}^{(\lambda)}: \quad Q_1 u = \ldots = Q_s u = 0$$

で定義する. するとそれの接方程式系 $\mathcal{M}_Y^{(\lambda)}$ は, $u = v(t, x)t^{\lambda}$ (v は Y の近傍で正則) という形の $\mathcal{M}$ の解 u に対して $v(0, x), \partial_t v(0, x), \ldots$ の間の関係式を表わしていることになる. 従って上記の方法を変換した作用素 $Q_1, \ldots, Q_s$ に適用すれば, 特性指数 λ に関する接方程式系が得られる.

6.6 計算例

前節までのアルゴリズムの応用例として, Appell の超幾何関数 F_3 に対する偏微分方程式系

$$\mathcal{M}_3 \quad : \quad P_{31}u = P_{32}u = 0$$

を考察しよう (cf. 5.2 節). $Y := \{(x,y) \in \mathbf{C}^2 \mid y = 0\}$ としよう (従って前節までの記号では $t = y$, $x_1 = x$ となる). P_{31}, P_{32} の生成する A_{n+1} の左イデアルの FW-グレブナ基底として, $\mathbf{G} = \{P_{31}, P_{32}, P_{33}\}$ を得る. ただし

$$\begin{aligned} P_{33} \quad := \quad & (1-y)y^2{\partial_y}^3 + (x-1)y^2\partial_x{\partial_y}^2 \\ & +\{(\alpha - \alpha' + \beta - \beta' - \gamma - 3)y \\ & +(2\gamma - \alpha - \beta + 1)\}y{\partial_y}^2 \\ & +(\alpha' + \beta' + 1)(x-1)y\partial_x\partial_y \\ & +[\{(\alpha + \beta - \beta' - \gamma - 1)\alpha' + (\beta' + 1)\alpha \\ & +(\beta - \gamma - 1)\beta' + \beta - \gamma - 1\}y + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)]\partial_y \\ & +\alpha'\beta'(x-1)\partial_x + \alpha'\beta'(\alpha + \beta - \gamma) \end{aligned}$$

である. 従って P_{33} は Y に沿ってフックス型であり, その形式シンボルは

$$\hat{\sigma}(P_{33}) = y^2{\partial_y}^3 + (2\gamma - \alpha - \beta + 1)y{\partial_y}^2 + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)\partial_y$$

となる.

$$\mathrm{lcoef}_{FR}(P_{31}) = x(1-x), \quad \mathrm{lcoef}_{FR}(P_{32}) = x, \quad \mathrm{lcoef}_{FR}(P_{33}) = 1$$

であるから $x_0 \in \mathbf{C} \setminus \{0, 1\}$ のとき, $p = (x_0, 0) \in Y$ において

$$e_Y(\mathcal{M}, p) = \{0,\ \alpha - \gamma + 1,\ \beta - \gamma + 1\}$$

であることがわかる. 従って $\alpha - \gamma$, $\beta - \gamma$, $\alpha - \beta$ がいずれも整数でなければ $\mathcal{M}$ の任意の解析的な解 u は p の近傍で

$$u(x,y) = v_1(x,y) + v_2(x,y)y^{\alpha-\gamma+1} + v_3(x,y)y^{\beta-\gamma+1}$$

という形に書ける. ただし

$$v_1, v_2, v_3 \in \mathbf{C}\{x - x_0, y\}$$

である. 更に接方程式系を計算すると, 境界値 $w_i(x) := v_i(x, 0)$ 達はそれぞれ

$$\begin{aligned} & \{x(1-x){\partial_x}^2 + (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\partial_x - \alpha\beta\}w_1 = 0, \\ & (x\partial_x + \alpha)w_2 = 0, \\ & (x\partial_x + \beta)w_3 = 0 \end{aligned}$$

を満たすことがわかる. 故に $v_1(x, 0)$ は Gauss の超幾何関数で表わされ, 適当な定数 $c_2, c_3 \in \mathbf{C}$ によって

$$v_2(x, 0) = c_2x^{-\alpha}, \qquad v_3(x, 0) = c_3x^{-\beta}$$

と書けることがわかる．

Appell の超幾何関数 F_1–F_4 に対する方程式系について，それらの特異点集合の各々の既約成分を Y とするとき，この章のアルゴリズムを用いてすべての場合について特性指数と接方程式系を計算することができる．計算の過程で，すべての場合について，フックス型であることも確かめられる．以下に特性指数の結果を表にしておこう (接方程式系に関する結果はすこし繁雑になるので省略する)．この表に現れる特異点集合の既約成分はすべて双有理的な座標変換によって直線に変換できるので，そのような座標変換を施した後にアルゴリズムを適用する．

方程式系	特異点集合の既約成分	特性指数
F_1	$x=0$	$0,\ \beta'-\gamma+1$
	$x=1$	$0,\ \gamma-\alpha-\beta$
	$y=0$	$0,\ \beta-\gamma+1$
	$y=1$	$0,\ \gamma-\alpha-\beta'$
	$x-y=0$	$0,\ 1-\beta-\beta'$
F_2	$x=0$	$0,\ 1-\gamma$
	$x=1$	$0,\ \gamma-\alpha-\beta+\beta'$
	$y=0$	$0,\ 1-\gamma'$
	$y=1$	$0,\ \gamma'-\alpha-\beta'+\beta$
	$x+y=1$	$0,\ \gamma+\gamma'-\alpha-\beta-\beta'$
F_3	$x=0$	$0,\ \alpha'-\gamma+1,\ \beta'-\gamma+1$
	$x=1$	$0,\ \gamma-\alpha-\beta$
	$y=0$	$0,\ \alpha-\gamma+1,\ \beta-\gamma+1$
	$y=1$	$0,\ \gamma-\alpha'-\beta'$
	$xy-x-y=0$	$0,\ \gamma-\alpha-\alpha'-\beta-\beta'+1$
F_4	$x=0$	$0,\ 1-\gamma$
	$y=0$	$0,\ 1-\gamma'$
	x^2+y^2-2xy $-2x-2y+1=0$	$0,\ \gamma+\gamma'-\alpha-\beta-1/2$

第 7 章　補遺

7.1　平坦性

この節では, 平坦性に関連した事実で, 本文で証明を省略したものについて証明を与えておこう. ブルバキの「可換代数」([Bou]) の第 1 章に書いてある程度の基本的な事実は, 証明なしで自由に用いることにする ([Bou] の第 2 章以降の事項は仮定しない). まず定義から始めよう:

定義 7.1.1. 一般に R を (乗法の単位元を持つ) 環, E を右 R-加群とするとき, E が R 上**平坦** (flat) とは,

$$F' \longrightarrow F \longrightarrow F''$$

を左 R-加群の任意の完全系列とするとき, これから自然に定義される図式

$$E \otimes_R F' \longrightarrow E \otimes_R F \longrightarrow E \otimes_R F''$$

がアーベル群の完全系列になることである.

平坦性の次の判定法は有用である ([Bou]1 章 §2 命題 1, 補題 3):

補題 7.1.2. 上の定義の記号の下で, E が R 上平坦であるための必要十分条件は, R の任意の有限生成左イデアル I に対して, 自然な準同型

$$E \otimes_R I \longrightarrow E \otimes_R R = E$$

が単射であることである.

更にこの補題の条件を具体的に見るために, テンソル積が 0 になるための次の条件を引用しておこう ([Bou]1 章 §2 補題 10):

補題 7.1.3. R を環, E を右 R-加群, F を左 R-加群とする. $\{f_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を F の生成元の集合, $\{e_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を有限個の $\lambda \in \Lambda$ を除いて 0 であるような E の元の族とする. このとき $E \otimes_R F$ において $\sum_{\lambda\in\Lambda} e_\lambda \otimes f_\lambda = 0$ であるための必要十分条件は, E の元からなる有限族 $\{x_j\}_{j\in J}$ と, 各 $\lambda \in \Lambda$ と $j \in J$ に対してある $a_{j\lambda} \in R$ が存在して

(1) 有限個の組 $(j, \lambda) \in J \times \Lambda$ を除いて $a_{j\lambda} = 0$;

(2) すべての $j \in J$ について $\sum_{\lambda\in\Lambda} a_{j\lambda} f_\lambda = 0$;

(3) すべての $\lambda \in \Lambda$ について $e_\lambda = \sum_{j\in J} x_j a_{j\lambda}$;

を満たすことである.

命題 7.1.4. K を体, $x = (x_1, \dots, x_n)$ を変数とするとき, 形式巾級数環 $K[[x]]$ は多項式環 $K[x]$ 上平坦である.

証明: $f_1, \dots, f_s \in K[x]$ を任意にとって, それらの生成する $K[x]$ のイデアルを I とする. $q_1, \dots, q_s \in K[[x]]$ が $\sum_{i=1}^s q_i f_i = 0$ を満たしたとしよう. このとき $K[[x]] \otimes_{K[x]} I$ において $\sum_{i=1}^s q_i \otimes f_i = 0$ であることを示せば, 補題 7.1.2 から結論を得る. さて $\{f_1, \dots, f_s\}$ は 2.3 節の意味で, それらが生成する $K[[x]]$ のイデアルの ($\delta = (1, \dots, 1)$ とした順序 $\prec_\delta$ に関する) グレブナ (標準) 基底であると仮定しても一般性を失わない. このとき $(q_1, \dots, q_s)$ は $(f_1, \dots, f_s)$ のシジジー加群に属することになるから, 定理 2.3.6 によって, 適当な $g_{ij} \in K[[x]]$ をとれば, そこでの記号を用いると

$$(q_1, \dots, q_s) = \sum_{1 \le i < j \le s} g_{ij} \vec{v}_{ij}$$

と書ける. これは $J = \{(i,j) \mid 1 \le i < j \le s\}$ として補題 7.1.3 の条件が成り立つことを意味するから ($\vec{v}_{ij}$ は多項式を成分とするベクトルであることに注意せよ), $\sum_{i=1}^s q_i \otimes f_i = 0$ を得る. □

次に, 収束巾級数環が多項式環上平坦であることを示すために忠実平坦性について復習しておこう ([Bou]1 章 §3):

定義 7.1.5. E を環 R 上の右加群とする. このとき E が R 上**忠実に平坦** (faithfully flat) とは, 任意の左 R-加群の図式

$$F' \longrightarrow F \longrightarrow F''$$

について, これが完全系列であることと, これから自然に定義される図式

$$E \otimes_R F' \longrightarrow E \otimes_R F \longrightarrow E \otimes_R F''$$

が完全系列であることとが同値であることである.

次の補題は忠実平坦性のひとつの特徴付けを与える ([Bou]1 章 §3 命題 1):

補題 7.1.6. E を環 R 上の右平坦加群とする. このとき E が R 上忠実に平坦であるための必要十分条件は, R の任意の極大左イデアル I に対して $EI \neq E$ であることである.

さらに次の事実を用いる ([Bou]1 章 §3 命題 7):

補題 7.1.7. R を環, R' を R の部分環とする. E を忠実に平坦な右 R-加群とする. このとき, E が右 R'-加群として平坦であるための必要十分条件は, R が右 R'-加群として平坦であることである.

命題 7.1.8. K を複素数体の部分体とするとき, 形式巾級数環 $K[[x]]$ は収束巾級数環 $K\{x\}$ 上忠実に平坦である.

証明: (1) $K[[x]]$ が $K\{x\}$ 上平坦であること: 定理 2.1.22 において $g_1,\dots,g_s\in K\{x\}$ とすれば, Weierstrass-広中の割算定理によって, $\vec{v}_{ij}$ の成分はすべて収束巾級数とすることができる. 従って, 命題 7.1.4 の証明と全く同じ論法で $K[[x]]$ は $K\{x\}$ 上平坦であることがわかる.

(2) $K\{x\}$ の極大イデアルは $x_1,\dots,x_n$ の生成するイデアル I のみである. $K[[x]]I=K[[x]]x_1+\cdots+K[[x]]x_n\neq K[[x]]$ であるから, 補題 7.1.6 によって $K[[x]]$ は $K\{x\}$ 上忠実に平坦である. □

系 7.1.9. K を複素数体の部分体とするとき, 収束巾級数環 $K\{x\}$ は多項式環 $K[x]$ 上平坦である.

証明: $E=K[[x]]$, $R=K\{x\}$, $R'=K[x]$ として補題 7.1.7 を適用すればよい. □

命題 7.1.10. 解析的微分作用素環 $\mathcal{D}_0$ は Weyl 代数 A_n 上平坦である.

証明: 系 4.4.10 を用いれば, 命題 7.1.4 と同じ論法で結論を得る. □

最後に, 定理 2.1.22 が収束巾級数環においても成立することを証明しよう (実はこの事実は定理 4.2.18, 従って系 4.4.10 の証明で用いられている).

命題 7.1.11. K を $\mathbf{C}$ の部分体とすると, 定理 2.2.11(従って定理 2.1.22 も) が $R=K[[x]]$ を $R=K\{x\}$ で置き換えてもそのまま成立する.

証明: R 以外は定理 2.2/11 の記号をそのまま用いよう. $K\{x\}$-加群の図式

$$K\{x\}^{s(s-1)/2}\xrightarrow{\psi}K\{x\}^s\xrightarrow{\varphi}K\{x\}^r \tag{1.1}$$

を

$$\psi(u_{ij}):=\sum_{1\le i<j\le s}u_{ij}\vec{v}_{ij},\qquad \varphi((f_1,\dots,f_s)):=\sum_{i=1}^{s}f_i\vec{g}_i$$

で定義しよう. このとき (1.1) から導かれる図式

$$K[[x]]^{s(s-1)/2}\xrightarrow{\psi}K[[x]]^s\xrightarrow{\varphi}K[[x]]^r$$

は, 定理 2.2.11 によって完全系列である. ここで $K[[x]]$ は $K\{x\}$ 上忠実に平坦だから, (1.1) は完全系列である. これは, 定理 2.2.11 が $R=K\{x\}$ のときも成立することを意味する. □

7.2 接方程式系の特性多様体

ここでは, 本文で省略した定理 3.5.9 の (2) の証明を述べる. この事実の証明は擬微分作用素の環の層を導入して超局所的に考察するのが, 一番簡明であろうが, ここでは微分作用素環の範囲で初等的かつ具体的な証明を与えよう. 定理 3.5.9 の (1) の証明と同様の論法により, Y の余次元が 1 で, $\mathcal{M}$ が一つの切断で生成される (すなわち未知関数が 1 個の) 場合について証明すれば十分である. すなわち次の命題を示せばよい:

命題 7.2.1. $\mathcal{M}$ を $0 \in \mathbf{C}^n$ の近傍で定義された連接左 $\mathcal{D}$-加群で, ある切断 $u \in \mathcal{M}$ によって $\mathcal{M} = \mathcal{D}u$ が 0 の近傍で成立するものとする. $Y := \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 = 0\}$ として,

$$\rho : \Xi \ni (0, x_2, \ldots, x_n; \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \longmapsto (x_2, \ldots, x_n; \xi_2, \ldots, \xi_n) \in T^*Y$$

とすると, Y が $\mathcal{M}$ に関して非特性的ならば $\mathrm{Char}(\mathcal{M}_Y) \subset \rho(\mathrm{Char}(\mathcal{M}) \cap \Xi)$ が成立する.

証明: $\mathcal{I} := \{P \in \mathcal{D} \mid Pu = 0\}$ とおく. 以下 $x' = (x_2, \ldots, x_n)$, $\xi' = (\xi_2, \ldots, \xi_n)$, $\partial' = (\partial_2, \ldots, \partial_n)$ と書こう. Y が $\mathcal{M}$ に関して非特性的なことから

$$P_0 = {\partial_1}^m + B_1(x, \partial'){\partial_1}^{m-1} + \ldots + B_m(x, \partial')$$

かつ $\mathrm{ord}(B_j) \leq j$ $(j = 1, \ldots, m)$ という形に表わせるような $P_0 \in \mathcal{I}_0$ が存在する. このとき, $\mathcal{M}_Y$ は $\mathcal{D}_Y$-加群として, 剰余類 $[u]$, $[\partial_1 u]$, $\ldots$, $[{\partial_1}^{m-1}u]$ で生成される. $\overline{\mathcal{I}}$ を $\{\sigma(P) \mid P \in \mathcal{I}\}$ で生成される $\mathcal{O}[\xi]$ のイデアルとする. $f_0 := \sigma(P_0)$ として, 適当な $f_1, \ldots, f_s \in \overline{\mathcal{I}}_0$ をとれば, $\overline{\mathcal{I}}$ は局所的に $f_0, f_1, \ldots, f_s$ で生成されるようにできる.

さて $\xi'^0 = (\xi_2^0, \ldots, \xi_n^0) \in \mathbf{C}^{n-1}$ を固定して, $(0; \xi'^0) \notin \rho(\mathrm{Char}(\mathcal{M}) \cap \Xi)$ と仮定しよう. 以下では [CLO] の 3 章と同様の終結式による消去法の理論を用いて $(0; \xi'^0) \notin \mathrm{Char}(\mathcal{M}_Y)$ を証明しよう. 必要なら十分大きな自然数 N を用いて, f_1 を $f_1 + f_0{\xi_1}^N$ で置き換えることにより, $f_2, \ldots, f_s$ の ξ_1 に関する次数は f_1 の ξ_1 に関する次数よりも小さく, かつ f_1 は ξ_1 についてモニックと仮定してよい. 新しい変数 $t_1, \ldots, t_s$ を導入して, f_0 と $t_1 f_1 + \ldots + t_s f_s$ の ξ_1 の多項式としての終結式

$$h := \mathrm{Res}(f_0,\, t_1 f_1 + \ldots + t_s f_s,\, \xi_1) \in \mathcal{O}_0[\xi', t_1, \ldots, t_s]$$

を考えよう. これを $t_1, \ldots, t_s$ について展開して

$$h = \sum_\alpha h_\alpha {t_1}^{\alpha_1} \cdots {t_s}^{\alpha_s}, \qquad h_\alpha \in \mathcal{O}_0[\xi']$$

と書こう. ここで和は $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_s) \in \mathbf{N}^s$ について有限和である. 終結式の性質から, 適当な $a, b \in \mathcal{O}_0[\xi', t_1, \ldots, t_n]$ が存在して

$$af_0 + b(t_1 f_1 + \ldots + t_s f_s) = h$$

が成立する. この両辺を $t_1, \ldots, t_s$ について展開して比較すれば, 各 h_α は $f_0, f_1, \ldots, f_s$ の $\mathcal{O}_0[\xi]$-係数の 1 次結合で表わせることがわかる. 従って, すべての α について $h_\alpha \in \overline{\mathcal{I}}_0$ である.

次に, ある α について $h_\alpha(0; \xi'^0) \neq 0$ となることを示そう. すべての α について $h_\alpha(0, \xi'^0) = 0$ と仮定すると, $\mathbf{C}[t_1, \ldots, t_s]$ の元として $h(0; \xi'^0, t_1, \ldots, t_s) = 0$ である. ここで, f_1 についての仮定から $\sum_{i=1}^s t_i f_i(0, \xi_1, \xi'^0)$ の ξ_1 についての次数は f_1 のそれに等しいから, 終結式の定義により

$$\mathrm{Res}(f_0(0; \xi_1, \xi'^0),\, t_1 f_1(0; \xi_1, \xi'^0) + \cdots + t_s f_s(0; \xi_1, \xi'^0),\, \xi_1) = h(0; \xi'^0) = 0$$

が成り立つ. 従って終結式の性質から, ξ_1 について 1 次以上のある多項式 $g(\xi_1, t_1, \ldots, t_s) \in \mathbf{C}[\xi_1, t_1, \ldots, t_s]$ が存在して, g は $\mathbf{C}[\xi_1, t_1, \ldots, t_s]$ において, $f_0(0; \xi_1, \xi'^0)$ と $t_1 f_1(0, \xi_1, \xi'^0) +$

$\ldots + t_s f_s(0, \xi_1, \xi'^0)$ を共に割り切る. $f_0(0, \xi_1, \xi'^0)$ は $t_1, \ldots, t_s$ を含まないから, g も同様, すなわち $g \in \mathbf{C}[\xi_1]$ でなければならない. 従って, g は各 $f_i(0; \xi_1, \xi'^0)$ $(i = 1, \ldots, s)$ を $\mathbf{C}[\xi_1]$ において割り切る. 故に $g(c) = 0$ なる $c \in \mathbf{C}$ をとれば

$$f_i(0; c, \xi'^0) = 0 \quad (\forall i = 0, 1, \ldots, s)$$

となる. これは $(0; c, \xi'^0) \in \mathrm{Char}(\mathcal{M})$ を意味するので, 最初の仮定に反する. 以上により, $\overline{\mathcal{I}}_0 \cap \mathcal{O}_0[\xi']$ の元 f で, $f(0; \xi'^0) \neq 0$ を満たすものが存在することがわかった. f を ξ' についての斉次成分に分解することにより, 最初から f は ξ について斉次と仮定してよい.

以上の事実を用いて $(0; \xi'^0) \notin \mathrm{Char}(\mathcal{M}_Y)$ を示そう. まず $\sigma(P) = f$ なる $P \in \mathcal{I}_0$ をとる. 各 $j = 0, 1, \ldots, m-1$ に対して ${\partial_1}^j P$ は

$${\partial_1}^j P = Q(x, \partial'){\partial_1}^j + Q'_j(x, \partial) \tag{2.1}$$

かつ $\mathrm{ord}(Q'_j) < \mathrm{ord}(P) + j$ という形に書け, かつ $\sigma(Q)(0, \xi'^0) = f(0, \xi'^0) \neq 0$ となることがわかる. Q'_j を P_0 で割算すれば

$$Q'_j = R_j P_0 + \sum_{\nu=0}^{m-1} Q'_{j\nu}(x, \partial'){\partial_1}^{\nu} \tag{2.2}$$

かつ

$$\mathrm{ord}(Q'_{j\nu}) + \nu \leq \mathrm{ord}(Q'_j) < \mathrm{ord}(P) + j \tag{2.3}$$

という形にできる. 各整数 k に対して

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_k &:= \mathcal{D}_Y(k)[u] + \mathcal{D}_Y(k-1)[\partial_1 u] + \cdots + \mathcal{D}_Y(k-m+1)[{\partial_1}^{m-1}u] \subset \mathcal{M}_Y, \\
\mathcal{N}_k &:= \{(R_0, R_1, \ldots, R_{m-1}) \in \mathcal{D}_Y(k) \oplus \mathcal{D}_Y(k-1) \oplus \cdots \oplus \mathcal{D}_Y(k-m+1) \mid \\
&\qquad \sum_{j=0}^{m-1} R_j[{\partial_1}^j u] = 0 \quad \text{in } \mathcal{M}_Y\}
\end{aligned}$$

とおこう. ただしここで $\mathcal{D}_Y(k)$ は高々階数 k の $\mathcal{D}_Y$ の切断からなる部分層を表わす. このとき, $\{\mathcal{M}_k\}$ は $\mathcal{M}_Y$ の good filtration であり, 完全系列

$$0 \longrightarrow \bigoplus \mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k-1} \longrightarrow (\mathcal{O}_Y[\xi'])^m \longrightarrow \bigoplus \mathcal{M}_k/\mathcal{M}_{k-1} \longrightarrow 0$$

が存在するから, $\mathrm{gr}(\mathcal{N}) := \bigoplus \mathcal{N}_k/\mathcal{N}_{k-1}$ とおくと, 3.4 節の議論から

$$\mathrm{Char}(\mathcal{M}_Y) = \{p = (x', \xi') \mid (\mathcal{O}_{T^*Y} \otimes_{\mathcal{O}_Y[\xi']} \mathrm{gr}(\mathcal{N}))_p \neq (\mathcal{O}_{T^*Y})_p^m\}$$

を得る. さて ${\partial_1}^j Pu = 0$ と (2.1) と (2.2) から, 各 $j = 0, \ldots, m-1$ について,

$$(Q'_{j0}, \ldots, P + Q'_{jj}, \ldots, Q'_{j,m-1}) \in \mathcal{N} := \bigcup_{k \in \mathbf{Z}} \mathcal{N}_k$$

が成り立ち, さらに (2.3) から $(0, \ldots, f, \ldots, 0) \in \mathrm{gr}(\mathcal{N})$ を得る. $f(0; \xi'^0) \neq 0$ に注意すれば, これは $(0; \xi'^0) \notin \mathrm{Char}(\mathcal{M}_Y)$ を意味する. $\square$

あとがき

1 章の内容は標準的である. もちろん本質的には B. Buchberger ([Bu1], [Bu2] など) による. ここでは本書のあとの部分で必要となる最小限の事項しか述べなかった. 多項式環のグレブナ基底についての証明まで完備した文献として, [CLO] と [BW] が最近出版された. 共にグレブナ基底の代数幾何, 数式処理などへの応用にも詳しく, この方面に興味を持つ読者には是非一読を勧めたい. 特に [CLO] に書いてある終結式とグレブナ基底を用いた消去法の論法を, 5.3 節と 7.2 節で援用した.

2 章の内容も標準的である. 巾級数環のグレブナ基底 (標準基底) の理論とアルゴリズムは, 広中平祐, Briançon, Galligo, Lazard, Mora などを始めとする多くの人達の研究成果の集成と言えよう. しかしながら, このような内容についてのまとまった文献は, あまり見当らない. そこで, このような形で整理しておくことも少しは意味があろう. なお, 2 章で用いた順序を一般化することも重要な問題であろうが, 少なくとも収束巾級数環については, 筆者はより一般的な結果については知らない. 形式巾級数環については, ある程度一般化がなされている.

3 章の内容のうち, 3.3 節以降はすべて柏原正樹による. 特に [Kash1], [Kash2] を参考にした. なるべく初等的な証明を心掛けたが, 連接性に関する事柄はいずれも多変数関数論の深い結果に依存しており, 証明なしで認めることにした. なおここで述べた D-加群の理論とその発展である超局所解析については, 上記の他, 例えば [Bj1], [Bj2], [Ma], [SKK], [Sch] などを参照されたい.

4 章の内容のうち 4.1 節は [Tak1], [KW] の特別な場合である. 特に Weyl 代数についてグレブナ基底の理論とアルゴリズムが適用できることは, これらより早く [Ga2] で指摘された. また, 有理関数係数の微分作用素環については [Nou] で独立に考察されている. 4.2 節の内容は [Ca] によるものである. 4.3, 4.4 節の内容は筆者による. Weyl 代数 ([Ga2]) と解析的微分作用素環 ([Ca]) のグレブナ基底との関連が従来ほとんど考察されていなかったようなのは不思議である.

5 章の内容のうち 5.1 節はさほど目新しくないであろう. [Tak1], [Tak3] は代数的な微分作用素環で類似の問題を定式化している. 特に [Tak1] では微分差分作用素環のグレブナ基底の応用として, 多変数特殊関数の近接関係式を求める問題が解かれており, 興味深い. またごく最近出版された [Mai] に解析的微分作用素環での定式化がある. (1 変数の場合は [BM] が詳しい.) 5.2 と 5.3 節の内容は [Oa1] による. 他に [Tak2] ではホロノミック系の積分の問題が扱われている.

6 章の内容は [Oa2], [Oa4] による. [Oa2] では FW-グレブナ基底でなく FR-グレブナ基底を考察しているが, 実際の計算では, 有理関数係数でなくここで述べたように多項式係数の微分作用素環の中ですべて計算した方が効率的であろう. ここで用いた種類の順序は 1,2,4 章で述べたような通常のグレブナ基底の理論で用いられる順序とは異なる種類のものである. この種の順序はおそらく [SO], [OS] で最初に用いられたものである. 順序をこの種のものまで込めて一般化して, 4 章と 6 章の理論を統一的に扱うことは今後の課題であろう. 与えられた方程式系がフックス型かどうかを判定する問題は, 現在のところ未解決である (形式的にフックス型かどうかは判定できる). また, 6.5 節の接方程式系の計算アルゴリズムも厳密な意味では不完全である. すなわち定理 6.5.3 において j_0 の “effective”

な上からの評価は, 少なくとも筆者には不明である. なおこの章で考察した問題に対して, [Tak4] では少し異なったアプローチが試みられている.

7.1 節の内容は目新しくはないと思うが, このように平坦性をグレブナ基底との関連で扱っている文献を筆者は知らない.

WEB 公開版への追記

6 章では多項式係数の形式的フックス型方程式系に対して，Y の generic point における特性指数の計算アルゴリズムを示したが，任意の点における特性指数を計算するアルゴリズムが [Oa5] で与えられた．6.5 節では接方程式系の計算アルゴリズムが上述の通り不完全であったが，完全なアルゴリズムが [Oa6] で与えられた．以上については Weyl 代数の枠組みのみではあるが [Oa7] の 5 章でも解説されている．また，与えられた方程式系がフックス型がどうかを判定するアルゴリズムは [Oa8] （さらに一般の場合は [Oa9]）で与えられた．4 章と 6 章で考察した微分作用素環における割り算アルゴリズムの一般化，特に tangent cone algorihtm については [GOT] で考察されている．

関連図書

[A] Appell, P.: Sur les fonctions hypergéométriques de plusiers variables. Gauthier Villars, Paris, 1925.

[BG] Baouendi, M.S., Goulaouic, C.: Cauchy problems with characteristic initial hypersurface. Comm. Pure Appl. Math. **26** (1973), 455–475.

[BW] Becker, T., Weispfenning, V.: Gröbner bases. (Graduate Texts in Mathematics), Springer, New York, 1993.

[Bj1] Björk, J.E.: Rings of Differential Operators. Amsterdam: North-Holland Publishing Company, 1979.

[Bj2] Björk, J.E.: Analytic $\mathcal{D}$-Modules and Applications. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1993.

[Bou] Bourbaki, N.: 可換代数 (数学原論). 東京図書, 1971.

[Br] Briançon, J.: Weierstrass préparé à la Hironaka. Astérisque **7–8** (1973), 67–73.

[BM] Briançon, J., Maisonobe, Ph.: Idéaux de germes d'opérateurs différentiels à une variable. L'Enseignement Math. **30** (1984), 7–38.

[Bu1] Buchberger, B.: Ein algorithmisches Kriterium für die Lösbarkeit eines algebraischen Gleichungssystems. Aequationes Math. **4** (1970), 374–383.

[Bu2] Buchberger, B.: A criterion for detecting unnecessary reductions in the construction of Gröbner bases. Lecture Notes in Computer Science **72** (1979), 3–21.

[Ca] Castro, F.: Calculs effectifs pour les idéaux d'opérateurs différentiels. Travaux en Cours **24** (1987), 1–19, Hermann.

[CLO] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Ideals, Varieties, and Algorithms. (Undergraduate Texts in Mathematics) Springer, New York, 1992.

[F] 古川 昭夫: Gröbner bases について. 数理解析研究所講究録 **612** (1987), 1–23.

[FSK] Furukawa, A., Sasaki, T., Kobayashi, H.: Gröbner basis of a mudule over $K[x_1, \dots, x_n]$ and polynomial solutions of a system of linear equations. 数理解析研究所講究録 **581** (1986),

[Ga1] Galligo, A.: A propos du théorème de préparation de Weierstrass. Lecture Notes in Mathematics **409** (1974), 543–579.

[Ga2] Galligo, A.: Some algorithmic questions on ideals of differential operators. Lecture Notes in Computer Science **204** (1985), 413–421.

[HU] 広中 平祐, 卜部 東介: 解析空間入門. (数理科学ライブラリー 1) 朝倉書店, 1981.

[Hi] 一松 信: 多変数解析関数論. 培風館, 1960.

[Hö] Hörmander, L.: 多変数複素解析学入門. 東京図書, 1973.

[KRW] Kandri-Rodi, A., Weispfenning, V.: Non-commutative Gröbner bases in algebras of solvable type. J. Symbolic Computation **9** (1990), 1–26.

[Kan] 金子 晃: ニュートン図形 · 特異点 · 振動積分. 上智大学数学講究録 No. 11, 1981.

[Kash1] 柏原 正樹: 偏微分方程式系の代数的研究. 東京大学修士論文, 1971.

[Kash2] Kashiwara, M.: Systems of Microdifferential Equations. Boston: Birkhäuser, 1983.

[Kash3] Kashiwara, M.: Vanishing cycle sheaves and holonomic systems of differential equations. Lecture Notes in Mathematics **1016** (1983), 134–142.

[Kaw] 河田 敬義: ホモロジー代数 I, II. (基礎数学講座) 岩波書店, 1977.

[KFS] Kobayashi, H., Furukawa, A., Sasaki, T.: Gröbner basis of ideal of convergent power series. 数理解析研究所講究録 **581** (1986), 7–20.

[LM] Laurent, Y., Monteiro Fernandes, T.: Systèmes différentiels fuchsiens le long d'une sous-variété. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **24** (1988), 397–431.

[LS] Laurent, Y., Schapira, P.: Images inverses des modules différentiels. Compositio Math. **61** (1987), 229–251.

[La] Lazard, D.: Gröbner bases, Gaussian elimination, and resolution of systems of algebraic equations. Lecture Notes in Computer Science **162** (1983), 146–156.

[Mai] Maisonobe, Ph.: $\mathcal{D}$-modules: an overview towards effectivity. In: Computer Algebra and Differential Equations (ed. E. Tournier), Cambridge University Press, 1994, pp. 21–55.

[Ma] Malgrange, B.: Équations différentielles à coefficients polynomiaux. Birkhäuser, Boston, 1991.

[MM] Möller, H. M., Mora, F.: New constructive methods in classical ideal theory. J. Algebra **100** (1986), 138–178.

[Mo1] Mora, F.: An algorithm to compute the equations of tangent cones. Lecture Notes in Computer Science **144** (1982), 158–165.

[Mo2] Mora, T.: Seven variations on standard bases. Preprint, Univ. Genova (1988).

[Mum] Mumford, D.: Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties. Springer, New York, 1976.

[Nor] 野呂 正行: Asir User's Manual (Version 1.3). 富士通研究所 情報社会研究所, 1993.

[NT] Noro, M., Takeshima, T.: Risa/asir—a computer algebra system. In: Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 1992 (ed. P. S. Wang), ACM, New York, 1992, pp. 387–396.

[Nou] Noumi, M.: Wronskian determinants and the Gröbner representation of a linear differential equaion. Algebraic Analysis (eds. M. Kashiwara and T. Kawai), Academic Press, Boston, 1988.

[Oa1] Oaku, T.: Computation of the characteristic variety and the singular locus of a system of differential equations with polynomial coefficients. Japan J. Indust. Appl. Math. **11** (1994), 485–497.

[Oa2] Oaku, T.: Algorithmic methods for Fuchsian systems of linear partial differential equations. J. Math. Soc. Japan **47** (1995), 297–328.

[Oa3] Oaku, T.: Tangent cone algorithm for differential operators. Winter Workshop on Computer Algebra, January 1994, pp. 37–40, JSSAC, Tokyo.

[Oa4] Oaku, T.: Algorithms for finding the structure of solutions of a system of linear partial differential equations. In: Proceedings of the International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation, 1994, Oxford, eds J. von zur Gathen, M. Giesbrecht, ACM, New York, 1994, pp. 216–223.

[OS] Oaku, T., Shimoyama, T.: A Gröbner basis method for modules over rings of differential operators. J. Symbolic Computation **18** (1994), 223–248.

[Osh1] 大島 利雄: 確定特異点型の境界値問題と表現論. 上智大学数学講究録 No. 5, 1979.

[Osh2] Oshima, T.: A definition of boundary values of solutions of partial differential equations with regular singularities. Publ. RIMS, Kyoto Univ. **19** (1983), 1203–1230.

[SIAS] 佐々木 健昭, 今井 浩, 浅野 孝夫, 杉原 厚吉: 計算代数と計算幾何. (岩波講座 応用数学) 岩波書店 1993.

[SKK] Sato, M., Kawai, T., Kashiwara, M.: Hyperfunctions and pseudo-differential equations. Lecture Notes in Mathematics **287** (1973), 265–529.

[Sch] Schapira, P.: Microdifferential Systems in the Complex Domain. Springer, Berlin, 1985.

[SN] 下山 武司, 野呂 正行: Asir Command Manual (Version 1.2). 富士通研究所 情報社会科学研究所, 1993.

[SO] 下山 武司, 大阿久 俊則: D-加群のグレブナ基底の計算とその応用. 数理解析研究所講究録 **811** (1992), 113–126.

[Tah] Tahara, H.: Fuchsian type equations and Fuchsian hyperbolic equations. Japan. J. Math. **5** (1979), 245–347.

[Tak1] Takayama, N.: Gröbner basis and the problem of contiguous relations. Japan J. Appl. Math. **6** (1989), 147–160.

[Tak2] Takayama, N.: An algorithm of constructing the integral of a module. In: Proceedings of International Symposium on Symbolic and Algebraic Computation 1990 (eds S. Watanabe, M. Nagata), ACM, New York, 1990, pp. 206–211.

[Tak3] Takayama, N.: An approach to the zero recognition problem by Buchberger algorithm. J. Symbolic Computation **14** (1992), 265–282.

[Tak4] Takayama, N.: Computational algebraic analysis and connection formula. 数理解析研究所講究録 **811** (1992), 82–97.

[Tak5] 高山 信毅: 環と加群のソフトウェア. 数学 **45** (1993), 256–263.

[GOT] Granger, M., Oaku, T., Takayama, N.: Tangent cone algorithm for homogenized differential operators. J. Symbolic Computation **39** (2005), 417–431.

[Oa5] Oaku, T.: An algorithm of computing b-functions. Duke Math. J. **87** (1997), 115–132.

[Oa6] Oaku, T.: Algorithms for b-functions, restrictions, and algebraic local cohomology groups of D-modules. Advances in Applied Math. **19** (1997), 61-105.

[Oa7] 大阿久 俊則: D 加群と計算数学, 朝倉書店，2002.

[Oa8] 大阿久 俊則: 微分作用素環の斉次化と確定特異点型 D 加群, 「グレブナー基底の現在」（日比孝之編）8 章 (pp. 176–196), 数学書房，2006.

[Oa9] Oaku, T.: Regular b-functions of D-modules. J. Pure and Applied Algebra **213** (2009), 1545–1557.