

連続と極限

大阿久 俊則

目次

0	命題と論理	1
1	実数とその連続性	4
2	数列の極限	13
3	無限級数の収束と発散	22
4	関数の極限と連続性	29
5	関数列と関数項級数の一様収束	44

0 命題と論理

「6は偶数である.」, 「6は素数である.」, 「 $2+4=6$ 」, 「 $1+2=4$ 」などのように, 正しい(真,true)か正しくない(偽,false)かが確定するような主張を**命題**(proposition)と呼ぶ. 「 $2x+1=7$ 」, 「 x は偶数である.」などのように変数を含む命題の場合には, その真偽は一般に, 変数 x が具体的に何であるか(変数 x の値と呼ぶ)に依存する. ここで, 変数 x は, たとえば実数全体, 自然数全体など, ある集合を決めて, その集合に属するものとする. 解析学では通常 x の範囲は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ に属するとする. 命題を $P, Q, \dots$ などの記号で表す. (変数を含む命題に対しては $P(x)$ などの記号を用いることもある.) 1つまたは2つ以上の命題から, 次のような新しい命題を作ることができる.

NOT (否定) 「 P でない」(記号 $\neg P$): P が偽であるという主張. P が真のとき偽, P が偽のとき真.

AND 「 P かつ Q 」(記号 $P \wedge Q$): P と Q が共に真であるという主張.

OR 「 P または Q 」(記号 $P \vee Q$): P と Q の一方または両方が真であるという主張.

IF THEN 「 P ならば Q 」(記号 $P \Rightarrow Q$): もし P が真であれば Q も真であるという主張.

「 P でないかまたは Q 」(記号では $(\neg P) \vee Q$)と同じ命題である. $(P \Rightarrow Q) \wedge (Q \Rightarrow P)$ という命題を $P \Leftrightarrow Q$ で表し, 「 P と Q は同値である」という.

これらに関して次が成り立つ.

- $\neg(\neg P)$ は P と同じ. (2重否定=肯定)
- $\neg(P \wedge Q)$ は $(\neg P) \vee (\neg Q)$ と同じ. (「 $(P \text{ かつ } Q)$ ではない」=「 P でないかまたは Q でない」)
- $\neg(P \vee Q)$ は $(\neg P) \wedge (\neg Q)$ と同じ. (「 $(P \text{ または } Q)$ ではない」=「 P でなくかつ Q でない」)
- $\neg(P \Rightarrow Q)$ は $P \wedge (\neg Q)$ と同じ.
- $P \wedge (Q \vee R)$ は $(P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$ と同じ.
- $P \vee (Q \wedge R)$ は $(P \vee Q) \wedge (P \vee R)$ と同じ.
- $(\neg Q) \Rightarrow (\neg P)$ ($P \Rightarrow Q$ の対偶) は, $Q \vee (\neg P)$ の意味であるから, $P \Rightarrow Q$ と同じである.

変数 x を含む命題 $P(x)$ に対して次の2つの (変数を含まない) 命題が導かれる.

- 「すべての x に対して $P(x)$ 」 (記号: $\forall x P(x)$): 変数 x が今考えている集合のどの元であっても $P(x)$ は真であるという主張. たとえば実数全体の集合 $\mathbb{R}$ で考えているときは, 「すべての $x \in \mathbb{R}$ に対して $P(x)$ 」 (記号: $\forall x \in \mathbb{R} P(x)$) と表す. 数学では「すべての」 (for all + 複数形) と「任意の」 (for any + 単数形) とは同じ意味.
- 「ある x に対して $P(x)$ 」 (記号: $\exists x P(x)$): $P(x)$ が真であるような x が今考えている集合の中に (少なくとも1つ) 存在するという主張. たとえば実数全体の集合 $\mathbb{R}$ で考えているときは, 「ある $x \in \mathbb{R}$ に対して $P(x)$ 」 (記号: $\exists x \in \mathbb{R} P(x)$) と表す.

例 0.1 (1) $x^2 - x + 1 > 0$ という命題を $P(x)$ と書けば, $\forall x \in \mathbb{R} P(x)$ は「すべての実数 x に対して $x^2 - x + 1 > 0$ が成り立つ」という主張になる. この命題は真である.

(2) $x^2 - x + 1 = 0$ という命題を $Q(x)$ と書けば, $\exists x \in \mathbb{R} Q(x)$ は「 $x^2 - x + 1 = 0$ が成り立つような実数 x が少なくとも1つ存在する」という主張になる. この命題は偽である.

変数 x を含む命題 $P(x) \Rightarrow Q(x)$ は $\forall x (P(x) \Rightarrow Q(x))$ と解釈する. たとえば $\forall x \in \mathbb{R} (x > 0 \Rightarrow x^2 > 0)$ という命題は, x が実数を動くことが文脈から明らかな場合は単に $x > 0 \Rightarrow x^2 > 0$ と表す. これは「任意の正の実数 x について $x^2 > 0$ が成立する」と言い換えることもできる.

問題 1 次の命題を文章で表せ. またその真偽を判定せよ.

- (1) $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 - 2x + 1 > 0)$ (2) $\exists x \in \mathbb{R} (x > 0 \wedge 2x - 1 < 0)$
 (3) $\forall x \in \mathbb{R} (x^2 > 1 \Rightarrow x > 1)$

「ある」や「すべて」を含む命題の否定は次のようになる.

- $\neg(\forall x P(x))$ は $\exists x (\neg P(x))$ と同じ. 「すべての x については成り立たない (部分否定)」 = 「成り立たないような x がある」
- $\neg(\exists x P(x))$ は $\forall x (\neg P(x))$ と同じ. 「成り立たつような x はない」 = 「すべての x について成り立たない (全否定)」

問題 2 次の命題を否定 ($\neg$) を用いずに表せ.

- (1) $\neg(\forall x \in \mathbb{R} (x^2 - 2x + 1 > 0))$ (2) $\neg(\exists x \in \mathbb{R} (x > 0 \wedge 2x - 1 < 0))$
 (3) $\neg(\forall x \in \mathbb{R} (x^2 > 1 \Rightarrow x > 1))$

2つ以上の変数を含む命題については「すべて」と「ある」の組み合わせ方がいろいろあり得る. たとえば2つの変数 x と y を含む命題 $P(x, y)$ については,

$$\begin{array}{lll} \forall x(\forall y P(x, y)), & \forall x(\exists y P(x, y)), & \exists x(\forall y P(x, y)), \\ \exists x(\exists y P(x, y)), & \forall y(\exists x P(x, y)), & \exists y(\forall x P(x, y)) \end{array}$$

の6通りが可能であり, 一般にこの6通りは意味の異なる命題となる. 括弧を省略して, たとえば, $\forall x(\exists y P(x, y))$ を $\forall x, \exists y P(x, y)$ のように表すことが多い. $\forall x, \exists y$ と $\exists y, \forall x$ は意味が異なることに注意. 一方, $\forall x, \forall y$ と $\forall y, \forall x$ はどちらも同じ意味であり, $\forall x, y$ とも表す. 同様に, $\exists x, \exists y$ と $\exists y, \exists x$ はどちらも同じ意味であり, $\exists x, y$ とも表す.

問題 3 次の各々の命題を文章と記号で表し, 真か偽か判定せよ (結果のみでよい). ただし $\mathbb{Z}$ は整数全体の集合, $\mathbb{R}$ は実数全体の集合を表す.

- (1) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} (x < n)$
 (2) $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} (x < n)$
 (3) $\forall x \in \mathbb{R}, \exists n \in \mathbb{Z} (|x - n| < 1)$
 (4) $\exists n \in \mathbb{Z}, \forall x \in \mathbb{R} (|x - n| < 1)$

以下では次の記号も用いる.

- $:=$ は「左辺を右辺で定義する」という意味である.
- A と B を集合とするとき, $A \subset B$ とは「 $x \in A \Rightarrow x \in B$ 」という命題が真であることである. 従って $A = B$ の場合も含む. $A \cap B$ は $(x \in A) \wedge (x \in B)$ をみたすような x の集合, $A \cup B$ は $(x \in A) \vee (x \in B)$ をみたすような x の集合である. また, 差集合 $A \setminus B$ ($A - B$ と表すこともある) は $(x \in A) \wedge (x \notin B)$ をみたすような x の集合である.

1 実数とその連続性

数の集合としては、**自然数**全体の集合 $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ (0 を含めることもある)、**整数**全体の集合 $\mathbb{Z} = \{0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ 、および有理数 (分数) 全体の集合 $\mathbb{Q}$ は既知とする。**実数**とは、 $x = x_0 + 0.x_1x_2x_3\cdots$ という形 (10 進小数表示) で表される数のことである。ここで x_0 は整数、 x_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) は $0, 1, 2, \dots, 9$ のいずれかである。たとえば

$$3 + 0.12121212\cdots = 3.12121212\cdots, \quad -2 + 0.110111011110\cdots$$

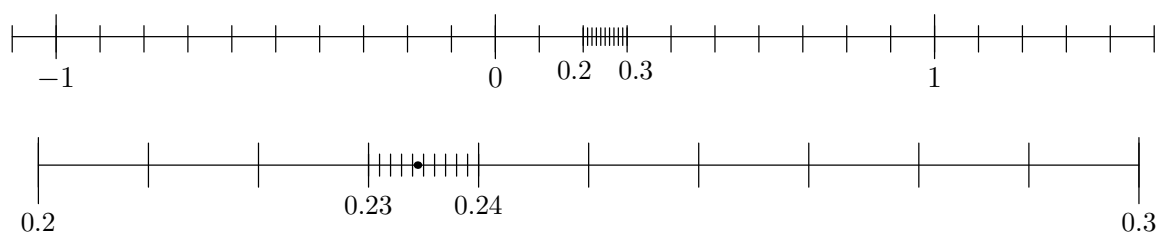
など。このとき x_0 を x の**整数部分**と呼び $[x]$ (ガウス記号) で表す。ただし 9 がある所から無限に続く場合は、それらの 9 を 0 に変えて、その直前の数を 1 だけ増やす。たとえば

$$0.12345678999999\cdots = 0.12345679000000\cdots = 0.12345679$$

また、この右辺のように、ある所から先はすべて 0 になる場合は、それらの 0 は省略し、このような実数を**有限小数**と呼ぶ。有限小数ではない実数を**無限小数**という。実数 x が**有理数**であるための必要十分条件は、 x が有限小数であるか、または**循環小数**であること (ある所から先は、いくつかの連続する項 (循環節) の繰り返しになること) である。

実数 x と y が有限小数であるときは、通常の方法で和 $x + y$ 、差 $x - y$ 、積 xy が定まり結果も有限小数となる。 y が 0 でなければ商 x/y も通常の方法で計算できるが、結果は有限小数か循環小数となる。 x または y が無限小数の場合の和、差、積、商については後で考察する。

実数全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。実数は目盛りのついた直線 (実数直線) 上の点と 1 対 1 に対応する。例えば、 $x = 0.23444\cdots$ は整数 (間隔 1) の目盛りでは 0 と 1 の間にあり、間隔 0.1 の目盛りでは 0.2 と 0.3 の間にあり、間隔 0.01 の目盛りでは 0.23 と 0.24 の間にある。このように間隔を限りなく狭めて行けば、直線上の 1 つの点が定まる。(厳密には以下で考察する上限や極限の議論が必要になる。)



さて、相異なる 2 つの実数の間には次のようにして大小関係が定まる。

定義 1.1 x_0, y_0 は整数、 x_k, y_k ($k \geq 1$) は 0 以上 9 以下の整数であるとき、

$$x_0 + 0.x_1x_2x_3\cdots > y_0 + 0.y_1y_2y_3\cdots$$

とは、ある 0 以上の整数 n があって、 $x_n > y_n$ かつ ($0 \leq k \leq n-1$ のとき $x_k = y_k$) が成り立つことである。(ただし数列 $\{x_n\}$ と $\{y_n\}$ において、9 が無限に続くことはないと仮定する。) また、 $x \geq y$ は「 $x > y$ または $x = y$ 」を意味する。 x_0 は x の整数部分と呼ばれ $x_0 = [x]$ と表す (ガウス記号)。このとき、 $x_0 \leq x < x_0 + 1$ である。特に $x \geq 0$ と $x_0 \geq 0$ は同値である。

数列 $\{x_n\}$ に対するこのような順序の決め方を一般に辞書式順序と呼ぶ. 次の補題が成り立つことは定義から明らかであろう.

補題 1.1 任意の実数 x, y, z について, $x > y$ かつ $y > z$ ならば $x > z$ が成立する. すなわち, 上で定義した大小関係は実数全体の集合 $\mathbb{R}$ 上の (全) 順序である.

補題 1.2 $x > y$ であるような任意の 2 つの実数 x, y に対して, ある有限小数 z が存在して $x > z > y$ が成立する.

証明: 大小関係の定義により, ある 0 以上の整数 n があって, $x_n > y_n$ かつ $(0 \leq k \leq n-1$ のとき $x_k = y_k)$ が成り立つ. もし $x_n - y_n \geq 2$ であれば, $y_n < y_n + 1 < x_n$ であるから, $z = y_0 + 0.y_1 \cdots y_{n-1}(y_n + 1)$ とおけば $x > z > y$ となる. $x_n - y_n = 1$ のときは, ある自然数 m であって $m > n$ かつ $y_m \leq 8$ を満たすものが存在する (無限に 9 が続くことはないから). このとき,

$$z = y_0 + 0.y_1 \cdots y_{n-1}y_n \cdots y_{m-1}9$$

とおけば $x > z > y$ が成立する. $\square$

定義 1.1 の大小関係を用いて, 最大元, 最小元, 上限, 下限の概念を以下のように定義する.

定義 1.2 A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする.

(1) 実数 M が A の**最大元 (最大値)**(the maximum) であるとは,

$$M \in A \quad \text{かつ} \quad \forall x \in A (x \leq M)$$

が成り立つ (真である) ことである. このとき, $M = \max A$ と表す.

(2) 実数 m が A の**最小元 (最小値)**(the minimum) であるとは,

$$m \in A \quad \text{かつ} \quad \forall x \in A (x \geq m)$$

が成り立つことである. このとき, $m = \min A$ と表す.

例 1.1 (1) $A = [-1, 2] = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 \leq x \leq 2\}$ (閉区間) のとき, $\max A = 2$, $\min A = -1$.

(2) $\mathbb{N}$ の最大元はない (最大元 M があったとすると, $M + 1$ も自然数であり M より大きいから矛盾). $\mathbb{N}$ の最小元は 1 である. (0 も $\mathbb{N}$ に含める場合は最小元は 0.)

(3) $A = (-1, 2) = \{x \in \mathbb{R} \mid -1 < x < 2\}$ (开区間) は最大元も最小元も持たない. (証明: A の最大元 M があるとすると, $M < 2$ であるから, 補題 1.2 により, $M < x < 2$ を満たす有限小数 x が存在する. このとき $x \in A$ であるから, これは M が A の最大元であることに矛盾する. 最小元がないことも同様に示せる.)

定義 1.3 A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする.

- (1) 実数 u が A の**上界** (an upper bound) であるとは,

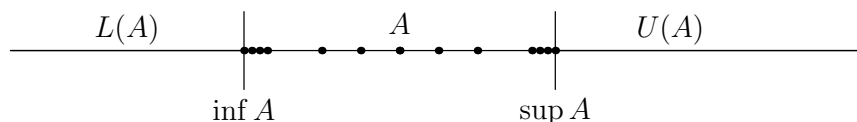
$$\forall x \in A (x \leq u)$$

が成り立つことである ($u \in A$ である必要はない).

A の上界全体の集合を

$$U(A) = \{u \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A (x \leq u)\}$$

で表そう. A の上界が存在するとき, すなわち $U(A)$ が空集合でないとき, A は**上に有界**であるという. A が上に有界であるとき, $U(A)$ の最小元を A の**上限 (最小上界)**(the supremum, the least upper bound) と呼び, $\sup A$ で表す. すなわち $\sup A = \min U(A)$ は A の上界のうち最小の実数である.



- (2) 実数 ℓ が A の**下界** (かかい)(a lower bound) であるとは,

$$\forall x \in A (x \geq \ell)$$

が成り立つことである. A の下界全体の集合を

$$L(A) = \{\ell \in \mathbb{R} \mid \forall x \in A (x \geq \ell)\}$$

で表そう. A の下界が存在するとき, すなわち $L(A)$ が空集合でないとき, A は**下に有界**であるという. A が下に有界であるとき, $L(A)$ の最大元を A の**下限 (最大下界)**(the infimum, the greatest lower bound) と呼び, $\inf A$ で表す. すなわち, $\inf A = \max L(A)$ は A の下界のうち最大の実数である.

- (3) A が上に有界かつ下に有界であるとき, A は**有界 (集合)** であるという.

例 1.2 (1) $A = [-1, 2]$ のとき, 実数 u が A の上界であるための必要十分条件は $u \geq 2$ であるから, $U(A) = [2, \infty)$ であり, A の上限は $\sup A = \min U(A) = 2$ である. 同様にして A の下限は -1 であることがわかる.

- (2) $\mathbb{N}$ は上に有界でないから上限なし. 下限は 1. (0 も $\mathbb{N}$ に含める場合は下限は 0.)

- (3) $A = (-1, 2)$ のとき, 実数 u が A の上界であるための必要十分条件は $u \geq 2$ である. ($u \geq 2$ なら u が A の上界であることは明らか. $u < 2$ なら, 補題 1.2 により $\max\{u, -1\} < x < 2$ を満たす有限小数 x が存在するので u は A の上界でない.) よって $U(A) = [2, \infty)$ であり, A の上限は $\sup A = \min U(A) = 2$ である. 同様にして A の下限は -1 であることがわかる.

補題 1.3 A を $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とする.

(1) A の最大元 M が存在すれば M は A の上限である.

(2) A の最小元 m が存在すれば m は A の下限である.

証明: (1) を示そう. M を A の最大元とする. 任意の $x \in A$ に対して $x \leq M$ が成立するから, M は A の上界である. 一方, 実数 u が A の上界であれば, 任意の $x \in A$ に対して $x \leq u$ であるが, $M \in A$ であるから, $x = M$ として $M \leq u$ がわかる. よって M は A の上界のうち最小のものである. (2) についても同様に証明できる (各自考えよ). $\square$

問題 4 補題 1.3 の (2) を証明せよ.

問題 5 A を开区間 $(-1, 2)$ とするとき, 補題 1.2 を用いて次を証明せよ.

(1) A は最小元を持たない.

(2) A の下限は -1 である.

問題 6 次の各々の集合 A について, 最大元 $\max A$, 最小元 $\min A$, 上限 $\sup A$, 下限 $\inf A$ があるかどうか判定し, あればその値を求めよ. ただし $\mathbb{Q}$ は有理数全体の集合を表す. できれば証明もすること. その際, 2 乗すると 2 になるような正の実数 $\sqrt{2}$ が存在すること, および実数に対する通常の計算規則は自由に用いてよい.

$$(1) A = \{x \in \mathbb{Z} \mid x^2 \leq 2\}$$

$$(2) A = \{x \in \mathbb{Q} \mid x^2 \leq 2\}$$

$$(3) A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$$

$$(4) A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2\}$$

$$(5) A = \left\{ \frac{(-1)^{n-1}}{n} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

$$(6) A = \left\{ \frac{n}{n+1} \mid n \in \mathbb{N} \right\}$$

次の定理は実数の連続性 (数直線が実数で隙間なく連続に埋めつくされていること) の数学的表現である. (実数の「公理」として証明なしで仮定する本が多い. 定理 1.1 の証明は省略して認めてもそれ以降の内容の理解には支障がない.)

定理 1.1 (実数の連続性) A を上に有界な $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とすると, 上限 $\sup A$ が存在する. A を下に有界な $\mathbb{R}$ の空でない部分集合とすると, 下限 $\inf A$ が存在する.

証明: A を上に有界な集合とする. A の上界全体の集合を $U(A)$ とする. 仮定により $U(A)$ は空集合ではない. 上界の定義により, $b \in U(A)$ かつ $b \leq c$ ならば $c \in U(A)$ である. 整数 $x_0, x_1, x_2, \dots$ を次のようにして順に定める.

(1) $U(A)$ に含まれないような最大の整数を x_0 とする.

(2) $x_0, x_0 + 0.1, \dots, x_0 + 0.9$ のうちで $U(A)$ に含まれない最大のものを $x_0 + 0.x_1$ とする. このとき, $x_0 + 0.x_1 + 10^{-1} \in U(A)$ である.

(3) $x_0, x_1, \dots, x_n$ まで決まったとき,

$$x_0 + 0.x_1 \cdots x_n, \quad x_0 + 0.x_1 \cdots x_n 1, \quad x_0 + 0.x_1 \cdots x_n 9$$

のうちに $U(A)$ に含まれないような最大のものを $x_0 + 0.x_1 \cdots x_n x_{n+1}$ とする. このとき $x_0 + 0.x_1 \cdots x_n x_{n+1} + 10^{-n-1} \in U(A)$ である.

そして実数 x を $x = x_0 + 0.x_1 x_2 x_3 \cdots$ で定義する (ただし 9 が無限に続く可能性がある).

まず最初に, x の表示で 9 が無限に続く場合を考察しておこう. 小数第 $n+1$ 位以降はすべて 9 とすると, $x = x_0 + 0.x_1 \cdots x_n 999 \cdots$ と書ける. このとき $x_0, x_1, \dots$ の定義により, $u := x_0 + 0.x_1 \cdots x_{n-1} x_n + 10^{-n}$ は $U(A)$ に属する. すなわち u は A の上界である. $u = \sup A$ であることを示そう. $y \in \mathbb{R}$ かつ $y < u$ とすると, ある $m > n$ があって,

$$y < x_0 + 0.x_1 \cdots x_n \cdots x_m = x_0 + 0.x_1 \cdots x_n \underbrace{9 \cdots 9}_{m-n}$$

となる. ここで $x_0 + 0.x_1 \cdots x_n \cdots x_m$ は定義により A の上界ではないから, y も A の上界ではない. 以上により u は A の最小上界であることが示された.

そこで, 以下では $x = x_0 + 0.x_1 x_2 \cdots$ において 9 は無限には続かないと仮定して良い. $x = \sup A$ であることを示そう. そのためにまず x が A の上界であることを示す. x が A の上界でないとする. $x < y$ であるような $y \in A$ が存在する. $y = y_0 + 0.y_1 y_2 \cdots$ とすると, ある n があって, $x_n < y_n$ かつ $(0 \leq k \leq n-1$ のとき $x_k = y_k$) である. 一方, $x_0, x_1, \dots, x_n$ の定義から,

$$y' := y_0 + 0.y_1 \cdots y_n = x_0 + 0.x_1 \cdots x_{n-1} y_n \in U(A),$$

すなわち y' は A の上界である. $y \in A$ だから $y \leq y'$ でなければならないが, 一方 $y' \leq y$ であるから, $y' = y \in A$ である.

仮定により, $x_{n+1}, x_{n+2}, \dots$ の中に 9 以外の数がある. すなわち $x_m \leq 8$ かつ $m > n$ を満たす自然数 m がある. このとき,

$$x < x' := x_0 + 0.x_1 \cdots x_n \cdots x_{m-1} 9 < y'$$

であり, x の定義から $x' \in U(A)$, すなわち x' は A の上界である. 一方 $y' \in A$ であるから, これは矛盾である. 以上により, x は A の上界であることが示された.

最後に, x が A の最小上界であることを示そう. y の表示を上のようにとって, $y < x$ と仮定すると, ある n があって, $y_n < x_n$ かつ $(0 \leq k \leq n-1$ のとき $x_k = y_k$) である. このとき, $y < x_0 + 0.x_1 \cdots x_n$ であるが, 定義より $x_0 + 0.x_1 \cdots x_n$ は $U(A)$ に含まれない, すなわち A の上界ではない. よって, y も A の上界ではない. 以上により x は A の最小上界である. $\square$

問題 7 A が下に有界な $\mathbb{R}$ の空でない部分集合であるとき, A の下限 $\inf A$ が存在することを証明せよ. (ヒント: 実数 $x = x_0 + 0.x_1 x_2 \cdots$ を $x_0 + 0.x_1 \cdots x_n$ は $L(A)$ に属するが, $x_0 + 0.x_1 \cdots x_n + 10^{-n}$ は $L(A)$ に属さないように決める. このとき, x が A の下限であることを示せばよい.)

有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ では、4 則演算（和、差、積、商）と順序（大小関係）が定義されていて、中学校以来おなじみの性質をみたす。このことを $\mathbb{Q}$ は順序体であるという。

定義 1.4 (体) 集合 K の 2 つ元 a, b に対して、その和 $a + b$ と積 ab と呼ばれる K の元が定義され、次の性質を満たすとき K のことを**体** (field) という。 K の 2 つの元に対して和を対応させる（2 項）演算のことを加法、積を対応させる演算のことを乗法と呼ぶ。

- (1) (i) 任意の $a, b \in K$ に対して $a + b = b + a$ が成立する。（加法の交換法則）
- (ii) 任意の $a, b, c \in K$ に対して $(a + b) + c = a + (b + c)$ が成立する。（加法の結合法則）
- (iii) K のある元 0 が存在して、任意の $a \in K$ に対して $a + 0 = a$ が成立する。（ 0 を加法についての単位元という）
- (iv) K の任意の元 a に対してある $b \in K$ が存在して $a + b = 0$ が成立する。このとき $b = -a$ と表し a の加法についての逆元という。
- (2) (i) 任意の $a, b \in K$ に対して $ab = ba$ が成立する。（乗法の交換法則）
- (ii) 任意の $a, b, c \in K$ に対して $(ab)c = a(bc)$ が成立する。（乗法の結合法則）
- (iii) 0 とは異なる K のある元 1 が存在して、任意の $a \in K$ に対して $a1 = a$ が成立する。（ 1 を乗法についての単位元という）
- (iv) 任意の $a, b, c \in K$ に対して $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ が成立する。（分配法則）
- (v) K の 0 とは異なる任意の元 a に対してある $b \in K$ が存在して $ab = 1$ が成立する。このとき $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$ と表し a の乗法についての逆元という。

なお、(1) の (i)–(iv) が成立するとき K は（加法について）**アーベル群**または**可換群**であるという。さらに (2) の (i)–(iv) が成立するとき K は**可換環**であるという。

体 K の 2 つの元 a, b に対して $a - b = a + (-b)$ と定義する。

定義 1.5 (順序体) 体 K において順序関係（または大小関係）と呼ばれる関係 $<$ が定義され、以下の性質を満たすとき、 K を**順序体** (ordered field) という。

- (3) (i) K の元 a, b, c について、 $a < b$ かつ $b < c$ ならば $a < c$ が成立する。
- (ii) K の任意の 2 つの元 a, b に対して、 $a < b$ または $a > b$ または $a = b$ の 3 つの関係のうち、いずれか 1 つのみが成立する。 $a \leq b$ とは $(a < b \text{ または } a = b)$ が成立することと定義する。また $a > b$ は $b < a$ のことである。 $a \geq b$ は $(a > b \text{ または } a = b)$ を表す
- (4) (i) $a, b \in K$ が $a < b$ を満たせば、 $a + c < b + c$ が任意の $c \in K$ について成立する。
- (ii) K の元 a, b について、 $a > 0$ かつ $b > 0$ ならば $ab > 0$ が成立する。

補題 1.4 K を体とすると, $a, b \in K$ について次が成立する.

- | | |
|---|---|
| (1) $-(-a) = a$ | (2) $a0 = 0$ |
| (3) $(-1)a = -a$ | (4) $a(-b) = (-a)b = -(ab)$ |
| (5) $(-a)(-b) = ab$. 特に $(-1)^2 = 1$ | (6) $ab = 0$ ならば $(a = 0 \text{ または } b = 0)$ |
| (7) $a \neq 0$ ならば $(-a)^{-1} = -a^{-1}$ | (8) $a \neq 0$ ならば $(a^{-1})^{-1} = a$ |
| (9) $a \neq 0$ かつ $b \neq 0$ ならば $(ab)^{-1} = a^{-1}b^{-1}$ | |

証明: (1) $(-a) + a = 0$ より a は $-a$ の加法についての逆元であるから, $a = -(-a)$ である.

(2) $0a = (0 + 0)a = 0a + 0a$ の両辺に $-0a$ を加えると

$$0 = 0a + (-0a) = (0a + 0a) + (-0a) = 0a + (0a + (-0a)) = 0a$$

(3) $(-1)a + a = (-1)a + 1a = (-1 + 1)a = 0a = 0$.

(5) (1) と (4) より $(-a)(-b) = -(a(-b)) = -(-(ab)) = ab$

(6) $ab = 0$ かつ $a \neq 0$ と仮定すると $0 = a^{-1}0 = a^{-1}(ab) = (a^{-1}a)b = 1b = b$. 同様に $b \neq 0$ と仮定すると $a = 0$ となるので, 結局 $a = 0$ または $b = 0$ の少なくとも一方が成立する. $\square$

問題 8 補題 1.4 の (4),(7),(8),(9) を証明せよ.

補題 1.5 K を順序体として $a, b, c \in K$ とすると次が成立する.

- | | |
|--|--|
| (1) $a > 0 \Leftrightarrow -a < 0$. | (2) $(a > 0 \text{ かつ } b < 0) \Rightarrow ab < 0$. |
| (3) $\forall a \in K$ に対して $a^2 \geq 0$. | (4) $0 < 1$. |
| (5) $a > b \Leftrightarrow a - b > 0$ | (6) $a > b \Leftrightarrow -a < -b$ |
| (7) $(a < b \text{ かつ } c > 0) \Rightarrow ac < bc$ | (8) $(a < b \text{ かつ } c < 0) \Rightarrow ac > bc$ |
| (9) $a > 0 \Leftrightarrow a^{-1} > 0$ | (10) $a < 0 \Leftrightarrow a^{-1} < 0$ |
| (11) $a > b > 0 \Leftrightarrow b^{-1} > a^{-1} > 0$ | (12) $a < b < 0 \Leftrightarrow b^{-1} < a^{-1} < 0$ |

証明: (1) $a > 0$ とする. 順序体の公理 (4) の (i) より, $0 = a + (-a) > 0 + (-a) = -a$ が成立する. 逆に $-a < 0$ とすると, $0 = a + (-a) < a + 0 = a$ が成立する.

(2) $a > 0$ かつ $b < 0$ とすると $-b > 0$ であるから, 順序体の公理 (4) の (ii) より, $a(-b) > 0$. よって $-(ab) = a(-b) > 0$ であるから, $ab < 0$ である.

(3) $a > 0$ ならば順序体の公理 (4) の (ii) より $a^2 > 0$ である. $a < 0$ ならば $-a > 0$ であるから $a^2 = (-a)^2 > 0$ となる. $a = 0$ のときは $a^2 = 0$ であるから, いずれの場合にも示された.

(4) (3) より $1 = 1^2 \geq 0$ が成立する. 体の公理より $1 \neq 0$ であるから, $0 < 1$.

(5) $a > b$ ならば両辺に $-b$ を加えて $a - b = a + (-b) > b + (-b) = 0$ が成立する. 逆に $a - b > 0$ ならば両辺に b を加えて $a > b$ を得る.

(7) $a < b$ かつ $c > 0$ とすると $b - a > 0$ であるから $bc - ac = (b - a)c > 0$. よって $ac < bc$ である.

(9) $a > 0$ とする. $a^{-1} = 0$ と仮定すると $1 = aa^{-1} = 0$ となり体の公理に反するから, $a^{-1} \neq 0$ である. もし $a^{-1} < 0$ だったとすると, (2) より $1 = a(a^{-1}) < 0$ となり

(4) に反する. 以上により $a^{-1} > 0$ であり. 逆に $a^{-1} > 0$ であれば, 前半の議論により $a = (a^{-1})^{-1} > 0$ である.

(11) $a > b > 0$ とする. $a^{-1}b^{-1} > 0$ を掛けると $a(a^{-1}b^{-1}) > b(a^{-1}b^{-1})$ より $b^{-1} > a^{-1}$.
□

問題 9 補題 1.5 の (6), (8), (10), (12) を証明せよ.

定理 1.2 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ と実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は通常のと, 積, 大小関係によって順序体になる.

$\mathbb{Q}$ が順序体になることは有理数どうしの和と積, および大小関係の定義から確認することができる (実際には場合分けなどがかなり煩雑にはなるが.)

実数については, まず加法と乗法を定義する必要がある. そこで, 実数の 10 進小数表示と上限を用いて, 実数の加法と乗法を次のように定義しよう.

定義 1.6 10 進小数で表された実数 $x = x_0 + 0.x_1x_2x_3\cdots$ と自然数 n に対して $[x]_n = x_0 + 0.x_1x_2\cdots x_n$ と定義する.

定義 1.7 10 進小数表示された実数 $x = x_0 + 0.x_1x_2x_3\cdots$ と $y = y_0 + 0.y_1y_2y_3\cdots$ を考える.

- (1) 有限小数の和 $[x]_n + [y]_n$ は整数 $x_0 + y_0 + 2$ 以下であるから, 集合 $\{[x]_n + [y]_n \mid n \geq 1\}$ は (上に) 有界である. そこで, 実数 $x + y$ を

$$x + y := \sup\{[x]_n + [y]_n \mid n \geq 1\}$$

で定義する.

- (2) $-[x]_n \geq -x_0 - 1$ より $\{-[x]_n \mid n \geq 1\}$ は下に有界である. そこで実数 $-x$ を

$$-x = \inf\{-[x]_n \mid n \geq 1\}$$

で定義すると $x + (-x) = 0$ が成立する (証明略).

- (3) $x > 0$ かつ $y > 0$ のとき, $[x]_n[y]_n \leq (x_0 + 1)(y_0 + 1)$ より集合 $\{[x]_n[y]_n \mid n \geq 1\}$ は (上に) 有界である. そこで, 実数 xy を

$$xy := \sup\{[x]_n[y]_n \mid n \geq 1\}$$

により定義する.

- (4) $x = 0$ または $y = 0$ のときは $xy = 0$ と定義する. $x < 0$ かつ $y < 0$ のときは $xy = (-x)(-y)$ と定義する. $x < 0$ かつ $y > 0$ のときは $xy = -(-x)y$, $x > 0$ かつ $y < 0$ のときは $xy = -x(-y)$ と定義する.

この加法と乗法により $\mathbb{R}$ は順序体となる (証明は省略).

問題 10 $x = 0.8888\cdots$, $y = 0.2222\cdots$ とする.

- (1) 自然数 n に対して $[x]_n + [y]_n$ を求めよ.
- (2) 定義 1.7 の (1) に従って (分数を用いずに) $x + y$ を求めよ.

問題 11 $x = 0.646464\cdots$ とする.

- (1) 自然数 n に対して $-[x]_n$ を $y_0 + 0.y_1y_2\cdots y_n$ (y_0 は整数, $y_1, \dots, y_n$ は 0 以上 9 以下の整数) の形で表せ.
- (2) 定義 1.7 の (2) に従って $-x$ を求めよ.

定義 1.8 (絶対値) 実数 x に対して, $|x| = \max\{x, -x\}$ を x の絶対値という. $x \geq 0$ または $-x \geq 0$ であるから, $|x| \geq 0$ である.

補題 1.6 実数 x, y に対して次が成立する.

- (1) $-|x| \leq x \leq |x|$, $|-x| = |x|$
- (2) $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$
- (3) $|x + y| \leq |x| + |y|$ (三角不等式)
- (4) $||x| - |y|| \leq |x - y|$

証明: (1) $|x|$ の定義から $x \leq |x|$ かつ $-x \leq |x|$ が成り立つ. また $-x \leq |x|$ と性質 (12) より $x = -(-x) \geq -|x|$ となる. 絶対値の定義から $|-x| = \max\{-x, -(-x)\} = \max\{-x, x\} = |x|$.

(2) $x = 0$ ならば $|x| = \max\{0, 0\} = 0$ である. 逆に $|x| = 0$ とすると, $\max\{x, -x\} = 0$ より, $x \leq 0$ かつ $-x \leq 0$, すなわち $x = -(-x) \geq 0$ であるから, $x = 0$ となる.

(3) $x \geq 0$ かつ $y \geq 0$ のときは $x + y \geq 0$ だから,

$$|x + y| = x + y = |x| + |y|$$

であり, 等号が成立する. $x \leq 0$ かつ $y \leq 0$ のときは, $x + y \leq 0$ であるから, $|x + y| = -(x + y) = (-x) + (-y) = |x| + |y|$ となって等号が成り立つ.

$x > 0$ かつ $y < 0$ のときは, $y < 0 < -y$ より $x + y < x + (-y) = |x| + |y|$ である. また $-x < 0 < x$ より $-(x + y) = (-x) + (-y) < x + (-y) = |x| + |y|$. 従って

$$|x + y| = \max\{x + y, -(x + y)\} < |x| + |y|$$

が成立する. $x < 0$ かつ $y > 0$ のときも同様である.

(4) (3) より

$$|x| = |(x - y) + y| \leq |x - y| + |y|$$

両辺に $-|y|$ を加えて $|x| - |y| \leq |x - y|$ を得る. x と y を交換して $|y| - |x| \leq |y - x| = |x - y|$ も成り立つ. よって

$$||x| - |y|| = \max\{|x| - |y|, |y| - |x|\} \leq |x - y|$$

□

問題 12 実数 x, y について次を示せ.

$$(1) \quad x \neq 0 \text{ ならば } |x^{-1}| = |x|^{-1} \quad (2) \quad y \neq 0 \text{ ならば } \left| \frac{x}{y} \right| = \frac{|x|}{|y|}.$$

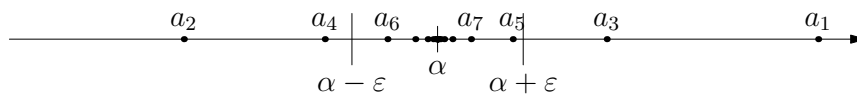
2 数列の極限

数列とは、自然数全体の集合 $\mathbb{N}$ から実数全体の集合 $\mathbb{R}$ への写像 (関数) のことである. この写像による自然数 n の像を a_n と書く. このとき, 数列を $\{a_n\}$ で表す. n の動く範囲を示すために $\{a_n\}_{n \geq 1}$ や $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ などと書くこともある. また, n の範囲を $\mathbb{N} \cup \{0\}$ にすることもある.

定義 2.1 数列 $\{a_n\}$ が実数 α に**収束する** ($\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$) とは, 任意の正の実数 ε に対してある自然数 N が存在して, $n \geq N$ をみたす任意の自然数 n について $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立すること, すなわち

$$\forall \varepsilon > 0, \exists N (n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon) \quad \text{あるいは} \quad \forall \varepsilon > 0, \exists N, \forall n \geq N (|a_n - \alpha| < \varepsilon)$$

という命題が真であることである. 数列がある実数に収束するとき, その数列は収束するという. どんな実数にも収束しない数列は発散するという.



注意 2.1 $C > 0$ を ε に無関係な正の実数とすると, $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ の代わりに $|a_n - \alpha| < C\varepsilon$ としてもよい. ε はいくらでも小さくとれるので, $C\varepsilon$ もいくらでも小さくできるからである. 同じ理由で, 不等号 $<$ は $\leq$ にしてもよい.

命題 2.1 数列の極限は, もし存在すればただひとつである. すなわち $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \beta$ ならば $\alpha = \beta$ である.

証明: 正の実数 ε を任意にとると, ある自然数 N と N' が存在して, $(n \geq N \text{ ならば } |a_n - \alpha| < \varepsilon)$ かつ $(n \geq N' \text{ ならば } |a_n - \beta| < \varepsilon)$ が成り立つ. よって $n \geq \max\{N, N'\}$ ならば三角不等式より

$$|\alpha - \beta| = |(\alpha - a_n) + (a_n - \beta)| \leq |\alpha - a_n| + |a_n - \beta| = |a_n - \alpha| + |a_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が成立する. ここで $|\alpha - \beta| > 0$ と仮定すると補題 1.2 より, $0 < c < |\alpha - \beta|$ を満たす有理数 c が存在する. ε は任意の正の実数でよい (自由に選べる) から, $\varepsilon = c/2$ としてもよい. すると $c < |\alpha - \beta| < 2\varepsilon = c$ となり矛盾である. よって $\beta = \alpha$ でなければならない. $\square$

命題 2.2 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0$.

証明: ε を任意の正の実数とする. 実数の定義より, $0 < 10^{-k} < \varepsilon$ が成り立つような自然数 k が存在する. このとき, $n \geq 10^k$ を満たす任意の自然数 n に対して

$$0 < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{10^k} = 10^{-k} < \varepsilon$$

が成立する. よって数列 $\left\{\frac{1}{n}\right\}$ は 0 に収束する. $\square$

例 2.1 数列 $a_n = \frac{n}{n+1}$ が 1 に収束することを定義に従って直接示そう. ε を任意の正の実数 (有理数でもよい) とする. 自然数 n が $n > 1/\varepsilon$ を満たせば,

$$0 < 1 - a_n = 1 - \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1} < \frac{1}{n} < \varepsilon \quad \text{従って} \quad |a_n - 1| < \varepsilon$$

が成立するから, N を $N \geq 1/\varepsilon$ を満たす自然数, たとえば

$$N = \left\lceil \frac{1}{\varepsilon} + 1 \right\rceil$$

とすれば, $(n \geq N \Rightarrow |a_n - 1| < \varepsilon)$ が成立する.

問題 13 次の各々の数列 $\{a_n\}$ の極限を α とする. (まず α を予測する.) $0 < \varepsilon < 1$ を満たす任意の正の実数 ε に対して, 「 $n \geq N$ を満たすすべての自然数 n に対して $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する」ような自然数 N を一つ ε を用いて与えよ. (上が成り立つような最小の N である必要はない.)

$$(1) \quad a_n = \frac{2n}{n+1} \quad (2) \quad a_n = \frac{n+1}{n^2} \quad (\text{ヒント: } n+1 \leq 2n \text{ を用いるとよい.})$$

定理 2.1 数列 $\{a_n\}$ が α に収束し, 数列 $\{b_n\}$ が β に収束するとき, 数列 $\{a_n \pm b_n\}$ は $\alpha \pm \beta$ (複号同順) に収束する. すなわち, 次が成立する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \pm \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$$

証明: 任意に正の実数 ε をとる. このとき, ある自然数 N と N' が存在して

$$(n \geq N \Rightarrow |a_n - \alpha| < \varepsilon) \quad \text{かつ} \quad (n \geq N' \Rightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon)$$

が成立する. よって $n \geq \max\{N, N'\}$ ならば三角不等式により

$$|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| = |(a_n - \alpha) \pm (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が成立する. 従って $a_n \pm b_n$ は $\alpha \pm \beta$ に収束する. $\square$

命題 2.3 $a_n \leq b_n$ が任意の自然数 n について成立するとする. さらに, 数列 $\{a_n\}$ が α に収束し, 数列 $\{b_n\}$ が β に収束すれば, $\alpha \leq \beta$ が成立する.

証明: 背理法で示す. $\alpha > \beta$ と仮定する. $\alpha - \beta > 0$ であるから, $0 < 2\varepsilon < \alpha - \beta$ をみたす有理数 ε が存在する. 極限の定義より, ある自然数 N があって, $n \geq N$ ならば

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon$$

が成立する. 仮定により $a_n - b_n \leq 0$ であるから, $n \geq N$ のとき

$$\alpha - \beta = (\alpha - a_n) + (a_n - b_n) + (b_n - \beta) < 2\varepsilon < \alpha - \beta$$

となるが, これは矛盾である. よって, $\alpha \leq \beta$ でなければならない. $\square$

問題 14 命題 2.3 において, すべての n について $a_n < b_n$ であれば $\alpha < \beta$ が成立するか? 真であれば証明し, 偽であれば反例を挙げよ.

問題 15 (はさみうちの論法) 数列 $\{a_n\}, \{b_n\}, \{c_n\}$ について,

(1) ある自然数 N があって $n \geq N$ を満たす任意の自然数 n について $a_n \leq b_n \leq c_n$ が成立する.

(2) $\{a_n\}$ と $\{c_n\}$ は同一の極限值 α に収束する.

と仮定すると, $\{b_n\}$ も α に収束することを証明せよ.

定義 2.2 数列 $\{a_n\}$ が単調増加であるとは, 任意の自然数 n について $a_n \leq a_{n+1}$ が成り立つことである. また, $\{a_n\}$ が単調減少であるとは, 任意の自然数 n について $a_n \geq a_{n+1}$ が成り立つことである. 単調増加または単調減少であるような数列を単調数列と呼ぶ. $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ を数列 $\{a_n\}$ の値全体の集合とする. A が上に (下に) 有界な集合であるとき, 数列 $\{a_n\}$ は上に (下に) 有界であるという. 上下に有界な数列を有界数列と呼ぶ.

命題 2.4 収束する数列は有界である.

証明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ とすると, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < 1$ が成立する. このとき $\alpha - 1 < a_n < \alpha + 1$ である. そこで

$$M = \max\{a_1, \dots, a_{N-1}, \alpha + 1\}, \quad m = \min\{a_1, \dots, a_{N-1}, \alpha - 1\}$$

とおけば, 任意の n について $m \leq a_n \leq M$ が成立するから, 数列 $\{a_n\}$ は有界である. $\square$

定理 2.2 有界な単調数列は収束する.

証明: 数列 $\{a_n\}$ は有界かつ単調増加であるとする. $A = \{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ は有界集合であるから, 定理 1.1 より上限 $\alpha = \sup A$ が存在する. このとき $\{a_n\}$ は α に収束することを示そう. ε を任意の正の実数とする. 上限の定義により, $\alpha - \varepsilon$ は A の上界ではないから, ある自然数 N があって, $a_N > \alpha - \varepsilon$ となる. よって, 任意の自然数 n について, $n \geq N$ ならば

$$0 \leq \alpha - a_n \leq \alpha - a_N < \varepsilon$$

が成り立つ. 従って $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$ である. 同様にして, $\{a_n\}$ が単調減少のときは, $\beta = \inf A$ に収束することがわかる. $\square$

問題 16 数列 $\{a_n\}$ が有界かつ単調減少ならば収束することを証明せよ.

例 2.2 (e の定義) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを示そう. この数列の極限 e は自然対数の底と呼ばれる重要な定数である. 2項定理により,

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1)\cdots(n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$k \geq 2$ のとき, $k! = 2 \cdot 3 \cdots k \geq 2^{k-1}$ であり, $k = 1$ のときは等号が成立するから,

$$a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3$$

従って $\{a_n\}$ は上に有界である. また,

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &> 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &> 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = a_n \end{aligned}$$

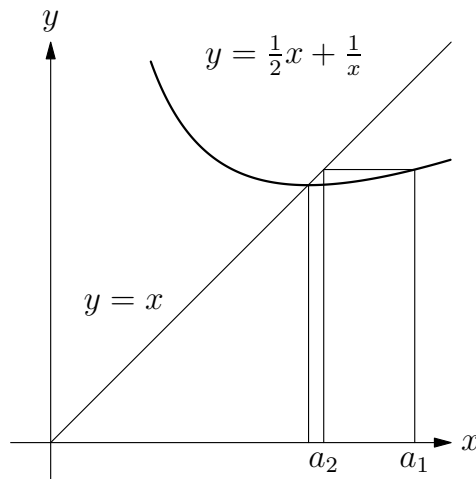
より, $\{a_n\}$ は単調増加である. 従って定理 2.2 により, 数列 $\{a_n\}$ は収束する. その極限を e で表す. $a_2 > a_1 = 2$, $a_n < 3$ より $2 < e \leq 3$ であることがわかる.

問題 17 $2 < e < 3$ (すなわち $e \neq 3$) であることを示せ. (ヒント: $\frac{1}{3!}$ と $\frac{1}{2^2}$ を比較せよ.)

例 2.3 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{a_n} \quad (n \geq 1)$$

で定める. (漸化式から a_n は有理数であることがわかる.) この数列が収束することを示し, その極限を求めよう.



(1) 任意の自然数 n に対して $a_n > 0$ かつ $a_n^2 \geq 2$ が成立することを n についての帰納法で示そう. $a_1 = 2$ より $n = 1$ のときは成立する. $a_n > 0$ かつ $a_n^2 \geq 2$ が成り立つと仮定する. このとき, 漸化式より $a_{n+1} > 0$ は明らかに成り立つ. x, y を有理数とすると, $(x+y)^2 - 4xy = (x-y)^2 \geq 0$ より $(x+y)^2 \geq 4xy$ が成立することに注意すると,

$$a_{n+1}^2 = \left(\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} \right)^2 \geq 4 \frac{a_n}{2} \frac{1}{a_n} = 2$$

となるから, 示された.

(2) $\{a_n\}$ は単調減少である. 実際 (1) より

$$a_{n+1} - a_n = \frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} - a_n = -\frac{a_n}{2} + \frac{1}{a_n} = \frac{2 - a_n^2}{2a_n} \leq 0$$

が成立する.

(3) (1) と (2) により数列 $\{a_n\}$ は下に有界かつ単調減少であるから, ある極限值 α に収束する. $a_n > 0$ であるから, $\alpha \geq 0$ である.

$$a_n a_{n+1} = \frac{1}{2} a_n^2 + 1$$

と後で証明する数列の積の極限に関する定理を用いると

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n a_{n+1} = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right) \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} \right) = \alpha^2, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n^2 = \left(\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \right)^2 = \alpha^2$$

より $\alpha^2 = \frac{1}{2} \alpha^2 + 1$, すなわち $\alpha^2 = 2$ が成立することがわかる. これと $\alpha \geq 0$ より $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha = \sqrt{2}$ を得る.

例 2.4 (等比数列) r を実数として, 等比数列 $\{r^n\}_{n \geq 0}$ を考える.

(1) $|r| < 1$ のときは 0 に収束することを示す. $r = 0$ のときは明らかだから $r \neq 0$ としよ. $\frac{1}{|r|} > 1$ であるから $h = \frac{1}{|r|} - 1$ とおくと $h > 0$ である. 2 項定理より,

$$\frac{1}{|r|^n} = (1+h)^n \geq hn$$

が任意の自然数 n について成り立つ. $\varepsilon > 0$ に対して, $n \geq \frac{1}{h\varepsilon}$ のとき,

$$|r^n| = \frac{1}{(1+h)^n} \leq \frac{1}{hn} \leq \frac{1}{h} h\varepsilon = \varepsilon$$

となるから, $\{r^n\}$ は 0 に収束する.

(2) $|r| > 1$ のときは発散することを示す. 収束すると仮定すると, 命題 2.4 より, $|r|^n = |r^n| \leq M$ がすべての自然数 n について成り立つような定数 M が存在する. 一方 $h = |r| - 1$ とおくと, $h > 0$ であり,

$$|r|^n = (1+h)^n \geq nh$$

である．ここで n を $\frac{M}{h}$ より大きい自然数とすれば， $|r|^n \geq nh > \frac{M}{h}h = M$ となり，矛盾である．よって $\{r^n\}$ は発散する．

(3) $r = 1$ のときは， $r^n = 1$ より 1 に収束する．

(4) $r = -1$ のときは発散する．実際，もし α に収束したとすると，ある自然数 N が存在して $n \geq N$ のとき $|a_n - \alpha| < \frac{1}{2}$ が成立するが， n を N より大きな偶数とすれば $|a_n - \alpha| = |1 - \alpha| < \frac{1}{2}$ となり， n を N より大きな奇数とすれば $|a_n - \alpha| = |-1 - \alpha| < \frac{1}{2}$ となるから，

$$2 = (1 - \alpha) + (\alpha + 1) < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1$$

となって矛盾である．

定理 2.3 数列 $\{a_n\}$ が α に収束し，数列 $\{b_n\}$ が β に収束するとき，数列 $\{a_nb_n\}$ は $\alpha\beta$ に収束する．

証明: 命題 2.4 により $\{a_n\}$ は有界数列であるから，ある正の実数 M が存在して，任意の n について $|a_n| \leq M$ が成立する．正の実数 $\varepsilon > 0$ を任意にとる．ある自然数 N が存在して， $n \geq N$ をみたすすべての n について

$$|a_n - \alpha| < \varepsilon, \quad |b_n - \beta| < \varepsilon$$

が成り立つ．このとき三角不等式より

$$\begin{aligned} |a_nb_n - \alpha\beta| &= |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \leq |a_n(b_n - \beta)| + |\beta(a_n - \alpha)| \\ &= |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \leq M|b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha| \\ &< M\varepsilon + |\beta|\varepsilon = (M + |\beta|)\varepsilon \end{aligned}$$

が成立する．ここで $M + |\beta|$ は ε に無関係な定数であるから，数列 $\{a_nb_n\}$ が $\alpha\beta$ に収束することが示された．□

定理 2.4 $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ かつ $\beta \neq 0$ ならば

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$$

が成立する．

証明: $\frac{a_n}{b_n} = a_n \cdot \frac{1}{b_n}$ であるから，定理 2.3 により $a_n = 1$ の場合，すなわち

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{b_n} = \frac{1}{\beta}$$

を示せば十分である． $\frac{|\beta|}{2} > 0$ であるから，ある自然数 N があって， $n \geq N$ のとき，

$$|b_n - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

が成立する．このとき補題 1.6 の (4) より

$$|b_n| = |\beta - (b_n - \beta)| \geq |\beta| - |b_n - \beta| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2} \quad (\forall n \geq N)$$

が成立する． ε を任意の正の実数とする． $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \beta$ より，ある自然数 N' があって，

$$n \geq N' \Rightarrow |b_n - \beta| < \varepsilon$$

が成立する．よって $n \geq \max\{N, N'\}$ ならば

$$\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|\beta - b_n|}{|b_n||\beta|} \leq \frac{1}{\frac{|\beta|}{2}|\beta|} |b_n - \beta| < \frac{2}{|\beta|^2} \varepsilon$$

が成立する．ここで $2/|\beta|^2$ は ε に無関係な定数であるから，主張が示された．□

定義 2.3 数列 $\{a_n\}$ と自然数の数列 $\{n_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ で $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ を満たすものに対して， k を添字とする数列 $\{a_{n_k}\}$ を $\{a_n\}$ の**部分列**という．一つの数列に対して，その部分列の取り方は無数にある．

定理 2.5 (Bolzano-Weierstrass の定理) 有界な数列は収束する部分列を持つ．

証明: 2 分法と呼ばれる方法で証明しよう．仮定により，ある正の実数 M があって，すべての n について $|a_n| \leq M$ が成立する．すなわち，すべての a_n は区間 $I = [-M, M]$ に属する．区間 I は 2 つの閉区間 $[-M, 0]$ と $[0, M]$ の和集合であるから，その少なくとも一方は無限個の n に対する a_n を含む．その区間を I_1 とすると I_1 は幅が M の閉区間であり， $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_1\}$ は無限集合である．次に I_1 を 2 つの閉区間に等分すると，等分してできた区間のうち少なくとも一方は無限個の n に対する a_n を含む．それを I_2 とする (I_2 は幅が $M/2$ の閉区間である)．同様に $k = 1, 2, 3, \dots$ に対して，幅が $M/2^{k-1}$ の閉区間 I_k であって， $\{n \in \mathbb{N} \mid a_n \in I_k\}$ が無限集合となるようなものを定めることができる． $I_k = [c_k, d_k]$ とおくと， I_k の定め方から， $I \supset I_1 \supset I_2 \supset I_3 \supset \dots$ すなわち

$$-M \leq c_1 \leq c_2 \leq c_3 \leq \dots \leq d_3 \leq d_2 \leq d_1 \leq M$$

かつ

$$d_k - c_k = \frac{M}{2^{k-1}} \quad (1)$$

が成立する． $\{c_k\}$ は単調増加かつ有界だから，ある実数 α に収束する． $\{d_k\}$ は単調減少かつ有界だから，ある実数 β に収束する．(1) に定理 2.1 と例 2.4 を適用すると

$$\beta - \alpha = \lim_{k \rightarrow \infty} d_k - \lim_{k \rightarrow \infty} c_k = \lim_{k \rightarrow \infty} (d_k - c_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{M}{2^{k-1}} = 0$$

が成立するから $\alpha = \beta$ である．さて， a_n が I_1 に属するような n を一つ選んでそれを n_1 としよう． $a_n \in I_2$ となるような n も無限にあるから，特に $a_n \in I_2$ かつ $n > n_1$ をみたすような n も無数にある．その一つを n_2 としよう．以下同様に自然数の単調増加数列 $n_1 < n_2 < n_3 < \dots$ を定めて $a_{n_k} \in I_k$ ($k = 1, 2, 3, \dots$) となるようにできる．

正の実数 ε を任意に定める. ある自然数 N があって $\frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon$ が成立する. k を $k \geq N$ を満たす任意の自然数とすると, $c_k \leq \alpha = \beta \leq d_k$ かつ $c_k \leq a_{n_k} \leq d_k$ であり, $d_k - c_k = \frac{M}{2^{k-1}} \leq \frac{M}{2^{N-1}} < \varepsilon$ であるから, $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ が成立する. 従って $\{a_n\}$ の部分列 $\{a_{n_k}\}$ は α に収束することが示された. $\square$

定義 2.4 数列 $\{a_n\}$ が**基本列**または**Cauchy(コーシー列)**であるとは, 任意の正の実数 ε に対して, ある自然数 N が存在して,

$$n, m \geq N \Rightarrow |a_n - a_m| < \varepsilon$$

が成り立つ (すなわち n と m が限りなく大きくなれば $|a_n - a_m|$ は限りなく小さくなる) ことである. (ここで例えば $n < m$ と仮定してもよい.)

例 2.5 実数 x の 10 進小数表示 $x = x_0 + 0.x_1x_2x_3\cdots$ に対して $[x]_n = x_0 + 0.x_1\cdots x_n$ ($n \in \mathbb{N}$) とおくと, $1 \leq n < m$ のとき, $0 \leq [x]_m - [x]_n \leq 10^{-n}$ が成り立つ. 任意の正の実数 ε に対して $10^{-N} < \varepsilon$ を満たす自然数 N が存在する. このとき $m > n \geq N$ ならば $0 \leq [x]_m - [x]_n < \varepsilon$ が成立するから数列 $\{[x]_n\}$ は基本列である.

定理 2.6 数列 $\{a_n\}$ が収束するための必要十分条件は $\{a_n\}$ が基本列であることである.

証明: (1) $\{a_n\}$ が α に収束すると仮定する. 任意の正の実数 $\varepsilon > 0$ に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ. 従って, $n, m \geq N$ ならば

$$|a_n - a_m| = |(a_n - \alpha) - (a_m - \alpha)| \leq |a_n - \alpha| + |a_m - \alpha| = \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が成立するから, $\{a_n\}$ は基本列である.

(2) 逆に $\{a_n\}$ が基本列であると仮定する. まず, $\{a_n\}$ が有界数列であることを示す. ある自然数 N があって, $n, m \geq N$ ならば $|a_n - a_m| < 1$ が成り立つ. 従って $n \geq N$ ならば

$$|a_n| = |a_N + (a_n - a_N)| \leq |a_N| + |a_n - a_N| < |a_N| + 1$$

である. よって $M = \max\{|a_1|, \dots, |a_{N-1}|, |a_N| + 1\}$ とおけば, 任意の n について $|a_n| \leq M$ が成立する. すなわち $\{a_n\}$ は有界である.

定理 2.5 により $\{a_n\}$ のある部分列 $\{a_{n_k}\}$ で収束するものが存在する. その極限を α とおく. このとき, もとの数列 $\{a_n\}$ が α に収束することを示そう. 任意の正の実数 ε に対して, ある自然数 K があって, $k \geq K$ ならば $|a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$ が成立する. 一方 $\{a_n\}$ が基本列であることから, ある自然数 N' が存在して, $n, m \geq N'$ ならば $|a_n - a_m| < \varepsilon$ となる. そこで $k \geq K$ かつ $n_k \geq N'$ をみたす自然数 k をとれば, $n \geq N'$ のとき,

$$|a_n - \alpha| = |(a_n - a_{n_k}) + (a_{n_k} - \alpha)| \leq |a_n - a_{n_k}| + |a_{n_k} - \alpha| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が成り立つ. 従って数列 $\{a_n\}$ は α に収束する. $\square$

問題 18 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $a_1 = 1$, $a_{n+1} = \sqrt{a_n + 2}$ ($n \geq 1$) で定める.

- (1) 任意の自然数 n に対して $1 \leq a_n < 2$ が成り立つことを示せ.
- (2) $\{a_n\}$ は単調増加であることを示せ. (ヒント: $a_{n+1}^2 - a_n^2$ の正負を調べよ.)
- (3) $\{a_n\}$ は収束することを示せ.
- (4) $\{a_n\}$ の極限值を求めよ.

問題 19 $0 < |a| < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ が成り立つことを次の方針で証明せよ.

- (1) $h = \frac{1}{|a|} - 1$ とおき, $h > 0$ かつ $|a| = \frac{1}{1+h}$ を示す.
- (2) $n \geq 2$ のとき, $(1+h)^n \geq \frac{n(n-1)}{2}h^2$ が成り立つことを示す.
- (3) $\varepsilon > 0$ とするとき, 上の不等式を用いて, 「 $n \geq N$ をみたすすべての自然数 n について $na^n < \varepsilon$ が成り立つ」ような N を求める.

問題 20 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ を $a_1 = 3$, $a_{n+1} = \frac{a_n + 8}{a_n + 3}$ ($n \geq 1$) で定める.

- (1) a_n が収束すると仮定して, その極限值 α を求めよ.
- (2) 任意の自然数 n について $|a_{n+1} - \alpha| \leq \frac{1}{3}|a_n - \alpha|$ が成立することを示せ.
- (3) a_n は α に収束することを示せ.

問題 21 数列 $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ が α に収束すれば, 数列

$$s_n = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \quad (n \in \mathbb{N})$$

も α に収束することを次の方針で示せ.

正の実数 $\varepsilon > 0$ を任意に固定する. ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|a_n - \alpha| < \varepsilon$ が成り立つ. 自然数 n が $n > N$ を満たすとき,

$$s_n - \alpha = \frac{1}{n} \{ (a_1 - \alpha) + \cdots + (a_{N-1} - \alpha) \} + \frac{1}{n} \{ (a_N - \alpha) + (a_{N+1} - \alpha) + \cdots + (a_n - \alpha) \}$$

と書き直せることを用いる (この式も示すこと).

3 無限級数の収束と発散

定義 3.1 数列 $\{a_n\}$ に対して, その部分和の数列 $\{S_n\}$ を

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + \cdots + a_n$$

で定める. この $\{S_n\}$ が実数 S に収束するとき, **無限級数** $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は S に**収束する**と言い,

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots = S$$

と表す. なお, 数列 $\{a_n\}$ の添え字 n が 1 ではなく, たとえば 0 から始まるときは, 上の $\sum$ も $k=0$ からの和に置き換えるものとする. S のことをこの無限級数の**和**とも言う. 部分和の数列 $\{S_n\}$ が発散するとき, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は**発散する**という.

例 3.1 (等比級数) r を実数とすると, 無限等比級数 $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ が収束するための必要十分条件は $|r| < 1$ である. このとき, 和は $\frac{1}{1-r}$ である. 実際, 有限等比級数の和の公式より, $r \neq 1$ のとき,

$$S_n = 1 + r + \cdots + r^n = \frac{1 - r^{n+1}}{1 - r}$$

であるから, 例 2.4 により $\{S_n\}$ は $|r| < 1$ のときは $\frac{1}{1-r}$ に収束し, $|r| > 1$ および $r = -1$ のときは発散する. また $r = 1$ のときは, $S_n = n + 1$ であるから, 発散する.

命題 3.1 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束すれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である.

証明: 部分和 S_n の極限を S とすれば,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_n - S_{n-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n - \lim_{n \rightarrow \infty} S_{n-1} = S - S = 0.$$

□

命題 3.2 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するための必要十分条件は, 任意の正の実数 ε に対して, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ を満たす任意の自然数および任意の自然数 p に対して

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| < \varepsilon$$

が成立することである.

証明: 部分和を S_n とすると, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するための必要十分条件は, 定理 2.6 より, 数列 $\{S_n\}$ が基本列となることである.

$$S_{n+p} - S_n = a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}$$

であるから, 命題の条件は $\{S_n\}$ が基本列であることと同値である. $\square$

定義 3.2 $a_n \geq 0$ が任意の n について成り立つとき, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は**正項級数**であるという.

命題 3.3 正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が収束するための必要十分条件は, 部分和の数列 $\{S_n\}$ が有界数列となることである.

証明: $a_n \geq 0$ より $\{S_n\}$ は単調増加であるから, $\{S_n\}$ が有界であれば, 定理 2.2 により $\{S_n\}$ は収束する. 逆に $\{S_n\}$ が収束すれば命題 2.4 により $\{S_n\}$ は有界である. $\square$

定理 3.1 s を正の実数とすると, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}$ は $s > 1$ のとき収束し, $s \leq 1$ のとき発散する.

証明: (1) $s > 1$ とする. 任意の自然数 N に対して, $N \leq 2^n - 1$ となる自然数 n をとると,

$$\begin{aligned} S_N &\leq S_{2^n-1} = 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{5^s} + \frac{1}{6^s} + \frac{1}{7^s}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^s} + \frac{1}{(2^{n-1}+1)^s} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^s}\right) \\ &< 1 + \left(\frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^s}\right) + \left(\frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s} + \frac{1}{4^s}\right) \\ &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{(2^{n-1})^s} + \frac{1}{(2^{n-1})^s} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^s}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{2^s} + \frac{4}{4^s} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{(2^{n-1})^s} \\ &= 1 + \frac{1}{2^{s-1}} + \frac{1}{4^{s-1}} + \cdots + \frac{1}{(2^{n-1})^{s-1}} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{(2^{s-1})^n}}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}} < \frac{1}{1 - \frac{1}{2^{s-1}}} \quad \left(\text{公比 } \frac{1}{2^{s-1}} < 1 \text{ の等比級数の和の公式より}\right) \end{aligned}$$

であり, 最後の式の値は n にも N にも無関係であるから, $\{S_n\}$ は有界数列であり収束する.

(2) $s \leq 1$ のとき, $n^s \leq n$ に注意すると,

$$\begin{aligned} S_{2^n-1} &= 1 + \frac{1}{2^s} + \frac{1}{3^s} + \cdots + \frac{1}{(2^n-1)^s} \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^n-1} \\ &= 1 + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{n-1}} + \frac{1}{2^{n-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^n-1}\right) \\ &> 1 + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^n} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) \\ &= 1 + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{n-1}}{2^n} = 1 + \frac{n-1}{2} \end{aligned}$$

となるから, $\{S_n\}$ は有界数列でないので発散する. $\square$

定理 3.2 2つの正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ と $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ を考える. ある自然数 N があって, $n \geq N$ ならば $a_n \leq b_n$ が成り立つとする. このとき,

(1) 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が収束すれば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も収束する.

(2) 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ が発散すれば $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ も発散する.

証明: $S_n = a_1 + \cdots + a_n$, $T_n = b_1 + \cdots + b_n$ とおく. (1) 級数 $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ が T に収束すると仮定すると, $n \geq N$ のとき,

$$S_n = \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^n a_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} a_k + \sum_{k=N}^n b_k \leq \sum_{k=1}^{N-1} a_k + T$$

であるから $\{S_n\}$ は有界であり, 命題 3.3 により $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する. (2) は (1) の対偶であるから正しい. $\square$

問題 22 次の無限級数の収束・発散を判定せよ.

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2+1} \quad (2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{k}+1} \quad (3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2k-1} \quad (4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{k^3+1}$$

定義 3.3 数列 $\{a_n\}$ が無限大に発散するとは, 任意の正の実数 M に対してある自然数 N が存在して

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad a_n > M$$

が成立することである. このとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ と表す. また, $-a_n$ が無限大に発散するとき $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ と表す.

定理 3.3 (d'Alembert(ダランベール)の判定法 (ratio test)) 任意の k に対して $a_k > 0$ であるような正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ を考える. 極限 $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$ が存在するか, あるいは $r = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \infty$ であるとする.

(1) $r < 1$ ならば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する.

(2) $r > 1$ ($r = \infty$ のときも含む) ならば $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は発散する.

証明: (1) $r < R < 1$ をみたす実数 R がとれる. $R - r > 0$ であるから, 収束の定義により, ある自然数 N があって, $n \geq N$ ならば

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < \frac{R - r}{2}$$

が成立する. 従って

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} < \frac{R - r}{2} + r = \frac{R + r}{2}$$

が成立する. ここで $m = (R + r)/2$ とおけば $m < R < 1$ であり, $n > N$ のとき,

$$a_n = a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \leq a_N m^{n-N}$$

が成立する. そこで $b_n = a_N m^{n-N}$ とおけば $\{b_n\}$ は公比 $m < 1$ の等比数列であるから $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ は収束する. よって, 上の不等式と定理 3.2 により, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は収束する.

(2) $1 < r < \infty$ とすると, $r > R > 1$ をみたす実数 R がとれる. $r - R > 0$ であるから, ある自然数 N があって, $n \geq N$ ならば

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} - r \right| < \frac{r - R}{2}$$

が成立する. 従って

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} > r - \frac{r - R}{2} = \frac{R + r}{2}$$

が成立する. ここで $m = (R + r)/2$ とおけば $m > R > 1$ であり, $n \geq N$ のとき,

$$a_n = a_N \frac{a_{N+1}}{a_N} \frac{a_{N+2}}{a_{N+1}} \cdots \frac{a_n}{a_{n-1}} \geq a_N m^{n-N}$$

が成立する. そこで $b_n = a_N m^{n-N}$ とおけば $\{b_n\}$ は公比 $m > 1$ の等比数列であるから $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ は発散する. よって, 上の不等式と定理 3.2 により, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は発散する. $r = \infty$ の

ときは, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $\frac{a_{n+1}}{a_n} > 2$ が成立する. 従って上と同様

にして $a_n \geq a_N 2^{n-N}$ が示されるので, $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は発散する. $\square$

例 3.2 a を正の実数として、無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} ka^k$ を考える. $a_n = na^n$ とおくと、

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = a \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n} = a$$

であるから、 $\sum_{k=1}^{\infty} ka^k$ は $a < 1$ のとき収束、 $a > 1$ のとき発散する. $a = 1$ のときは $a_n = n$ が発散するから、命題 3.1 により $\sum_{k=1}^{\infty} ka^k$ は発散する. 特に、命題 3.1 より $0 < a < 1$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} na^n = 0$ が成立する.

問題 23 次の無限級数の収束・発散を判定せよ.

$$(1) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{2^n} \quad (2) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{2^n + 4^n} \quad (3) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{2^n} \quad (4) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$$

定理 3.4 $\{a_n\}$ を任意の数列とする. もし無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ が収束すれば、無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

も収束する. (このとき、無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は絶対収束するという.)

証明: 命題 3.2 により、任意の正の実数 ε に対して、ある自然数 N が存在して、 $n \geq N$ と任意の自然数 p に対して

$$||a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}|| = |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

が成立する. このとき三角不等式より

$$|a_{n+1} + \cdots + a_{n+p}| \leq |a_{n+1}| + \cdots + |a_{n+p}| < \varepsilon$$

となるから、命題 3.2 により $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ も収束する. $\square$

定理 3.5 数列 $\{a_n\}$ は $a_n > 0$ ($\forall n \in \mathbb{N}$) かつ単調減少 ($a_{n+1} \leq a_n$) で $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ である とすると、無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} a_k = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \cdots$$

は収束する.

証明: 部分和の数列 $\{S_n\}$ を考える.

$$S_{2(n+1)} = S_{2n} + a_{2n+1} - a_{2n+2} \geq S_{2n}$$

より部分列 $\{S_{2n}\}$ は単調増加であり,

$$S_{2n} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \cdots - (a_{2n-2} - a_{2n-1}) - a_{2n} < a_1$$

であるから有界である. よって $\{S_{2n}\}$ はある極限值 S に収束する.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} (S_{2n} + a_{2n+1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{2n} + \lim_{n \rightarrow \infty} a_{2n+1} = S$$

であるから $\{S_n\}$ は S に収束することがわかる. $\square$

例 3.3 $a_n = \frac{1}{n}$ は定理 3.5 の仮定を満たすから無限級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots \quad (2)$$

は収束する. 一方, 定理 3.1 より各項の絶対値をとってできる級数

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$$

は発散するから, (2) は絶対収束はしない.

例 3.3 のように収束するが絶対収束はしない級数は**条件収束する**という. 条件収束する級数は, 項の順序を入れ替えると和の値が異なることがある. (問題 26 を参照.)

定理 3.6 絶対収束する無限級数の和は, 項の順序を入れ替えても変化しない.

証明: 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ は絶対収束すると仮定する.

$$a_k^+ = \begin{cases} a_k & (a_k > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (a_k \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases} \quad a_k^- = \begin{cases} -a_k & (a_k < 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (a_k \geq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくと, $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ は収束するから, その部分和の数列

$$T_n = \sum_{k=1}^n |a_k| = \sum_{k=1}^n a_k^+ + \sum_{k=1}^n a_k^-$$

は有界である. 従って $T_n^+ = \sum_{k=1}^n a_k^+$ と $T_n^- = \sum_{k=1}^n a_k^-$ も有界である. 正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^+$ と $\sum_{k=1}^{\infty} a_k^-$ の和はそれぞれの部分和の上限であるから, 項の順序を入れ替えても不変である. 従って,

$$\sum_{k=1}^n a_k = \sum_{k=1}^n a_k^+ - \sum_{k=1}^n a_k^-$$

の極限は項の順序を入れ替えても変わらない. $\square$

例 3.4 a を実数として, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$ を考える. $a_n = \frac{a^n}{n}$ とおく.

(i) $|a| < 1$ のとき ($a = 0$ のときは明らかに収束するので $a \neq 0$ としてよい):

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = |a| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{n+1} = |a| < 1$$

となるので, ダランベールの判定法から $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a^k|}{k}$ は収束する. (ダランベールの判定法は正項級数にしか適用できないことに注意.) 従って定理 3.4 により $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$ は収束する.

(ii) $|a| > 1$ のとき: $h = |a| - 1 > 0$ とおくと, $n \geq 2$ のとき

$$|a_n| = \frac{(1+h)^n}{n} \geq \frac{1+nh+nC_2h^2}{n} > \frac{h^2 n(n-1)}{n} = \frac{n-1}{2} h^2 \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから, 命題 3.1 (の対偶) より, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k}$ は発散する.

(iii) $a = 1$ のときは定理 3.1 より発散する.

(iv) $a = -1$ のときは定理 3.5 により収束する.

問題 24 次の無限級数は収束するかどうか, 収束する場合には絶対収束するかどうか判定せよ.

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \cdots$$

$$(2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}k}{2^k} = \frac{1}{2} - \frac{2}{4} + \frac{3}{8} - \frac{4}{16} + \cdots$$

問題 25 次の無限級数が収束するような実数 a の範囲を求めよ.

$$(1) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{k!} \quad (2) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 a^k \quad (3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{\sqrt{k}} \quad (4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a^k}{k^2}$$

問題 26 (1) $-1 < x \leq 1$ ならば $\log(1+x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$ が成立することを示せ.

(2) $R_{n+1}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$ とおく. $0 \leq x \leq 1$ のときは $|R_{n+1}(x)| \leq \frac{x^{n+1}}{n+1}$ が成立することを示せ.

(3) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \log 2$ を示せ.

(4) (3) の級数を並べ替えて (正の項を 1 つずつ負の項を 2 つずつ足す) できる級数

$$\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \cdots$$

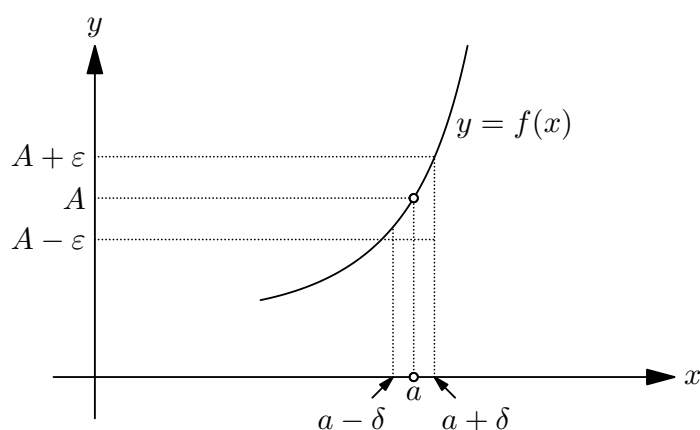
の和を求めよ. ヒント: この級数の第 n 番目の括弧の中の式を n を用いて表せ.

4 関数の極限と連続性

定義 4.1 (関数の極限) I を $\mathbb{R}$ の区間, $a \in I$ とする. 区間 I から 1 点 a を除いた集合 $I \setminus \{a\}$ で定義された関数 $f(x)$ の a における極限が A であるとは, 任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して,

$$(0 < |x - a| < \delta \text{ かつ } x \in I) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立することである. このとき, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ と書く.



上の定義では $f(x)$ の a における値は用いていないので, $f(x)$ は $x = a$ では定義されていても定義されていなくてもよい. また, ある ε_0 に対して上の性質を満たす δ が存在すれば, ε_0 よりも大きな ε に対しても上の性質が成り立つので, ε はたとえば $0 < \varepsilon < 1$ をみたすとしてもよい. さらに, 不等式 $|f(x) - A| < \varepsilon$ は, ε によらない正の定数 C を用いて $|f(x) - A| < C\varepsilon$ としてもよい.

例 4.1 $I = \mathbb{R}$, $a = 1$, $f(x) = \frac{x^3 - 1}{x - 1}$ のとき, $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ が成立することを示そう.

$$f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2 + x + 1$$

であるから, $x = 1 + h$ とおくと,

$$f(x) - 3 = \{(1+h)^2 + (1+h) + 1\} - 3 = 3h + h^2 = h(3+h)$$

となる. そこで, $0 < \varepsilon < 1$ を満たす任意の実数 ε に対して, $\delta = \frac{\varepsilon}{4}$ とすれば, $0 < |h| = |x - 1| < \delta$ のとき ($|h| < \delta < 1$ に注意)

$$|f(x) - 3| = |h||3+h| \leq |h|(3+|h|) < 4|h| = 4|x-1| < 4\delta = 4 \cdot \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon$$

が成立する. よって $\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$ が示された.

問題 27 次の関数 $f(x)$ と a に対して $A := \lim_{x \rightarrow a} f(x)$ を予想して, $0 < \varepsilon < 1$ を満たす任意の実数 ε に対して,

$$0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立するような正の実数 δ を一つ具体的に ε を用いて表せ.

$$(1) \quad f(x) = x^2, \quad a = 0 \quad (2) \quad f(x) = x^2, \quad a = 1 \quad (3) \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = 1$$

定義 4.2 (右極限と左極限) 定義 4.1 において a は I の端点ではないとする.

(1) 任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して,

$$(a < x < a + \delta \text{ かつ } x \in I) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立するとき $A = \lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と表し, A を $f(x)$ の a における右極限という.

(2) 任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して,

$$(a - \delta < x < a \text{ かつ } x \in I) \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立するとき $A = \lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ と表し, A を $f(x)$ の a における左極限という.

次の補題は定義から明らかであろう.

補題 4.1 上の定義の条件のもとで, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$ であるための必要十分条件は $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = A$ かつ $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = A$ が成立することである.

定義 4.3 (無限大での極限) (1) 関数 $f(x)$ が区間 (a, ∞) で定義されていて、任意の正の実数 ε に対して、ある実数 $M \geq a$ が存在して、

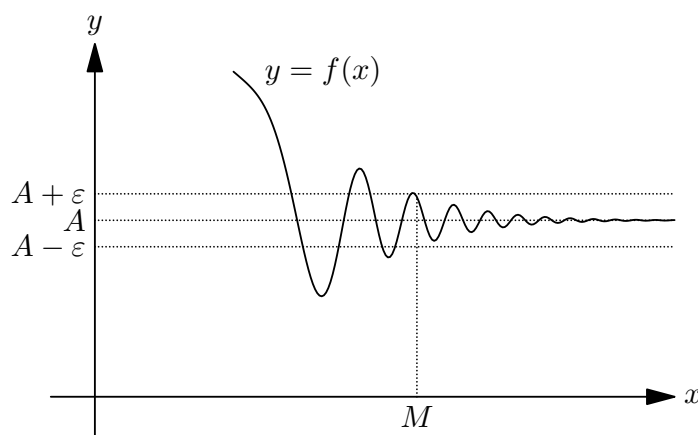
$$x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立するとき $A = \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ と表す.

(2) 関数 $f(x)$ が区間 $(-\infty, b)$ で定義されていて、任意の正の実数 ε に対して、ある実数 $m \leq b$ が存在して、

$$x < m \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立するとき $A = \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ と表す.



例 4.2 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$ である. 実際、任意の正の実数 ε に対して $M = \frac{1}{\varepsilon}$ とおけば、 $x > M$ のとき $0 < \frac{1}{x} < \varepsilon$ が成立、 $x < -M$ のとき $-\varepsilon < \frac{1}{x} < 0$ が成立する.

問題 28 次の関数 $f(x)$ に対して $A := \lim_{x \rightarrow \infty} f(x)$ を予想して、 $0 < \varepsilon < 1$ を満たす任意の実数 ε に対して、

$$x > M \Rightarrow |f(x) - A| < \varepsilon$$

が成立するような正の実数 M を一つ具体的に ε を用いて表せ.

$$(1) \quad f(x) = \frac{x+1}{x-1} \qquad (2) \quad f(x) = \sqrt{x+1} - \sqrt{x}$$

定義 4.4 (無限大への発散) $f(x)$ はある区間 I から $a \in I$ を除いた集合で定義された関数とする. 任意の正の実数 M に対して、ある正の実数 δ が存在して

$$(0 < |x - a| < \delta \text{ かつ } x \in I) \Rightarrow f(x) > M$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき ∞ に発散するといい、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$ と表す. また、任意の正の実数 M に対して、ある正の実数 δ が存在して

$$(0 < |x - a| < \delta \text{ かつ } x \in I) \Rightarrow f(x) < -M$$

が成り立つとき、 $f(x)$ は $x \rightarrow a$ のとき $-\infty$ に発散するといい、 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty$ と表す. $x \rightarrow a \pm 0$, $x \rightarrow \pm\infty$ の場合も同様である.

例 4.3 $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$ である. 実際, 任意の正の実数 M に対して $\delta = \frac{1}{M}$ とおけば, $0 < x < \delta$ のとき $\frac{1}{x} > M$ が成立, $-\delta < x < 0$ のとき $\frac{1}{x} < -M$ が成立する.

命題 4.1 $f(x)$ と $g(x)$ はある区間 I から $a \in I$ を除いた集合で定義され, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = A$, $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = B$ とすると次が成り立つ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = A \pm B$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = AB$$

$$(3) B \neq 0 \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$$

$x \rightarrow a \pm 0$, $x \rightarrow \pm\infty$ のときも同様である.

証明: (1) ε を任意の正の実数とする. 仮定より, ある正の実数 δ が存在して, $0 < |x-a| < \varepsilon$ かつ $x \in I$ ならば $|f(x) - A| < \varepsilon$ かつ $|g(x) - B| < \varepsilon$ がなりたつ. ($f(x)$ に対する δ と $g(x)$ に対する δ のうち小さい方をとればよい.) このとき

$$|f(x) \pm g(x) - (A \pm B)| = |(f(x) - A) \pm (g(x) - B)| \leq |f(x) - A| + |g(x) - B| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon$$

が成立するから (1) が成り立つ.

(2) ある正の実数 δ が存在して, $0 < |x-a| < \delta$ ならば $|f(x) - A| < 1$, 従って

$$|f(x)| = |f(x) - A + A| \leq |f(x) - A| + |A| < |A| + 1$$

が成立する. 一方, 任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ' が存在して, $0 < |x-a| < \delta'$ かつ $x \in I$ ならば

$$|f(x) - A| < \varepsilon, \quad |g(x) - B| < \varepsilon$$

が成立する. 以上により, $0 < |x-a| < \min\{\delta, \delta'\}$ かつ $x \in I$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x)g(x) - AB| &= |f(x)(g(x) - B) + (f(x) - A)B| \\ &\leq |f(x)||g(x) - B| + |f(x) - A||B| \\ &\leq (|A| + 1)\varepsilon + |B|\varepsilon = (|A| + |B| + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

であるから (2) が示せた. ($|A| + |B| + 1$ は ε によらない定数だから, $(|A| + |B| + 1)\varepsilon$ はいくらでも小さくできる.)

(3) (2) を用いれば $\lim_{x \rightarrow a} \frac{1}{g(x)} = \frac{1}{B}$ を示せばよい. まず, ある正の実数 δ があって, $0 < |x-a| < \delta$ かつ $x \in I$ のとき

$$|g(x) - B| < \frac{|B|}{2}$$

が成り立つ．このとき，

$$|g(x)| = |B - (B - g(x))| \geq |B| - |B - g(x)| > |B| - \frac{|B|}{2} = \frac{|B|}{2}$$

である．一方，任意の正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ' があって $0 < |x - a| < \delta'$ のとき

$$|g(x) - B| < \varepsilon$$

が成立する．以上により $0 < |x - a| < \min\{\delta, \delta'\}$ かつ $x \in I$ のとき，

$$\left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{B} \right| = \frac{|g(x) - B|}{|g(x)||B|} \leq \frac{|g(x) - B|}{\frac{1}{2}|B|^2} < \frac{2}{|B|^2} \varepsilon$$

が成立するから (3) が示された．□

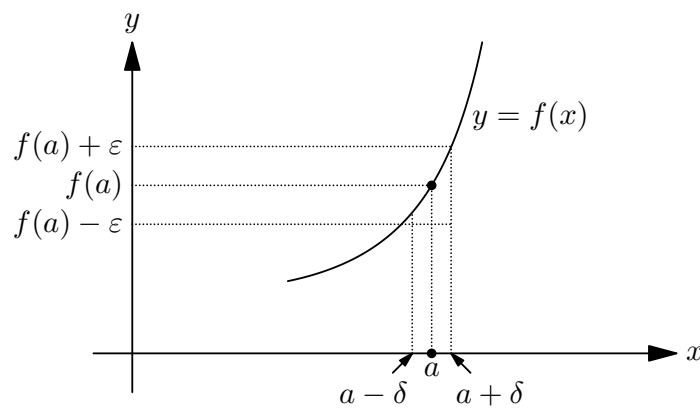
定義 4.5 (関数の連続性) 区間 I で定義された関数 $f(x)$ が， I の点 a で連続であるとは，

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

が成り立つこと，すなわち，任意の正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ が存在して，

$$(|x - a| < \delta \text{ かつ } x \in I) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成立することである ($x = a$ のときも上の不等式が成立することに注意)． $f(x)$ が区間 I のすべての点で連続であるとき， $f(x)$ は I で連続である，または I 上の連続関数であるという．



例 4.4 A, B を実数の定数として $f(x) = Ax + B$ とすれば， $f(x)$ は実数全体 $\mathbb{R}$ で連続である．実際， a を任意の実数として，任意の正の実数 ε に対して $\delta = \frac{\varepsilon}{|A|}$ とおく．($A = 0$ のときは， δ は任意，たとえば $\delta = 1$ とすればよい．) このとき， $|x - a| < \delta$ ならば，

$$|f(x) - f(a)| = |A(x - a)| = |A||x - a| < |A|\delta = \varepsilon$$

であるから， $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$ が成立する．

命題 4.2 区間 I で定義された関数 $f(x)$ と $g(x)$ が点 $a \in I$ で連続であるとする、 $f(x) + g(x)$, $f(x) - g(x)$, $f(x)g(x)$ も a で連続である。さらに $g(a) \neq 0$ ならば $\frac{f(x)}{g(x)}$ も a で連続である。

証明: $A = f(a)$, $B = g(a)$ において命題 4.1 を用いればよい。□

例 4.5 定数関数 1 と関数 x は $\mathbb{R}$ で連続であるから、命題 4.2 により、一般の多項式

$$f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n \quad (a_0, \dots, a_n \text{ は実数の定数})$$

は $\mathbb{R}$ で連続である。さらに、 $f(x), g(x)$ を多項式とすると、有理関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$ で連続である。

関数の連続性を数列を用いて言い換えることができる。

命題 4.3 $f(x)$ を区間 I で定義された関数、 $a \in I$ とするとき、次の 2 つの条件 (1) と (2) は同値である。

(1) $f(x)$ は a で連続である。

(2) $x_n \in I$ かつ $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ ならば、 $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = f(a)$ 。

証明: まず (1) $\Rightarrow$ (2) を示そう。 $f(x)$ が a で連続であることから、任意の正の実数 ε をとると、ある正の実数 δ が存在して

$$(|x - a| < \delta \text{ かつ } x \in I) \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$$

が成立する。一方、 $\{x_n\}$ が a に収束することから、ある自然数 N があって、

$$n \geq N \Rightarrow |x_n - a| < \delta$$

が成り立つ。以上により $n \geq N$ ならば $|f(x_n) - f(a)| < \varepsilon$ となるから数列 $\{f(x_n)\}$ は $f(a)$ に収束する。

次に (2) $\Rightarrow$ (1) の対偶を示そう。(1) を否定すると、

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x (|x - a| < \delta \text{ かつ } x \in I \text{ かつ } |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon) \quad (3)$$

となる。これを仮定して (2) が成立しないことを示せばよい。(3) を満たすような ε を一つとって固定する。 $\delta > 0$ は任意であるから、 n を任意の自然数として $\delta = \frac{1}{n}$ としてよい。このとき (3) を満たす x を (n によるので) x_n とおくと、 x_n は

$$|x_n - a| < \frac{1}{n} \text{ かつ } x_n \in I \text{ かつ } |f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$$

を満たす。従って $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$ であるが、すべての n について $|f(x_n) - f(a)| \geq \varepsilon$ であるから、 $\{f(x_n)\}$ は $f(a)$ に収束しない。すなわち (2) は成り立たない。以上により (2) $\Rightarrow$ (1) が示された。□

問題 29 $f(x)$ が区間 I で連続であるとき, $|f(x)|$ も I で連続であることを示せ.

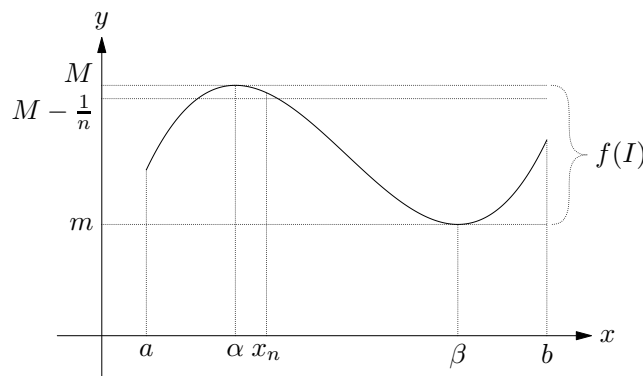
問題 30 $f(x)$ が区間 I で連続であり, $g(y)$ が $f(I)$ を含むような区間 J で連続であるとき, 合成関数 $F(x) = g(f(x))$ は I で連続であることを示せ.

定理 4.1 (Weierstrass の定理) 有界閉区間 I で連続な関数 $f(x)$ は I で最大値と最小値を持つ. すなわち, I の点 α と β が存在して, 任意の $x \in I$ について

$$f(\beta) \leq f(x) \leq f(\alpha)$$

が成立する.

証明: $I = [a, b]$ とする. まず $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ が有界集合であることを示す. 有界でないとする. 任意の自然数 n に対して, $|f(x_n)| > n$ を満たす $x_n \in I$ が存在する. $a \leq x_n \leq b$ より, 数列 $\{x_n\}$ は有界であるから Bolzano-Weierstrass の定理により, 収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ が存在する. この部分列の極限を c とすると, $a \leq c \leq b$ であるから, $f(x)$ は c で連続である. 従って命題 4.3 によって数列 $\{f(x_{n_k})\}$ は $f(c)$ に収束するから有界である. これは $|f(x_{n_k})| > n_k \geq k$ に反する. よって, $f(I)$ は有界集合である.



ゆえに, $f(I)$ の上限 $M = \sup f(I)$ と下限 $m = \inf f(I)$ が存在する. このとき, $f(\alpha) = M$ となるような $\alpha \in I$ が存在することを示そう. 任意の自然数 n に対して, $M - \frac{1}{n}$ は $f(I)$ の上界ではないから,

$$M - \frac{1}{n} < f(x_n) \leq M$$

を満たすような $x_n \in I$ が存在する. このとき数列 $f(x_n)$ は M に収束する. 一方, Bolzano-Weierstrass の定理により, 数列 $\{x_n\}$ の収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ がとれる. この部分列の極限を α とすると, $a \leq x_{n_k} \leq b$ より $a \leq \alpha \leq b$ であり, 命題 4.3 により

$$f(\alpha) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = M$$

が成り立つ. $f(\beta) = m$ をみたく $\beta \in I$ が存在することも同様に示せる. M と m はそれぞれ $f(I)$ の上界と下界であるから, 任意の $x \in I$ について $f(\beta) = m \leq f(x) \leq M = f(\alpha)$ が成立する. $\square$

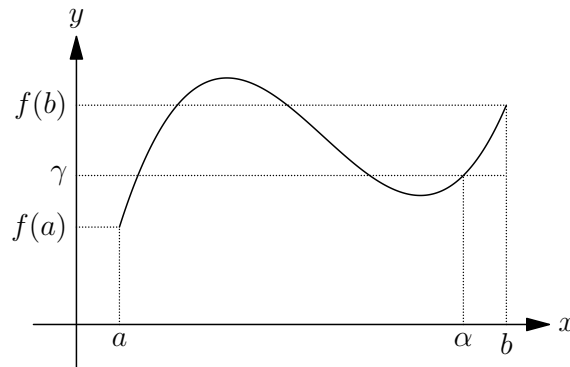
問題 31 次の関数 $f(x)$ は区間 I で最大値と最小値をそれぞれ持つかどうか判定せよ.

$$(1) \quad f(x) = x^2, \quad I = (-1, 1) \quad (2) \quad f(x) = \frac{1}{x}, \quad I = [1, \infty)$$

$$(3) \quad f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad I = \mathbb{R} \quad (4) \quad f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}, \quad I = \mathbb{R}$$

定理 4.2 (中間値の定理) $f(x)$ は有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続な関数で $f(a) \neq f(b)$ であるとする. このとき, γ を $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数とすると, $f(\alpha) = \gamma$ をみたす $\alpha \in (a, b)$ が少なくとも一つ存在する.

証明:



$f(a) < \gamma < f(b)$ と仮定してよい. ($f(b) < \gamma < f(a)$ のときは $-f(x)$ と $-\gamma$ について $-f(\alpha) = -\gamma$ を満たす α の存在を示せば良い.)

$$A = \{x \in [a, b] \mid f(x) \leq \gamma\}$$

とおく. $f(a) < \gamma$ より $a \in A$ であるから, A は区間 $[a, b]$ の空でない部分集合である. よって $\alpha = \sup A$ が存在する.

まず, $a < \alpha < b$ であることを示そう. $f(x)$ は a で連続だから, $0 < \delta < b - a$ をみたすようなある正の実数 δ があって, $a \leq x \leq a + \delta$ ならば $|f(x) - f(a)| < \gamma - f(a)$, 従って $f(x) < f(a) + (\gamma - f(a)) = \gamma$ が成立する. よって $a + \delta \in A$ であるから, $\alpha = \sup A \geq a + \delta > a$ が示された.

また, $f(x)$ は b で連続だから, $0 < \delta < b - a$ をみたすようなある正の実数 δ があって, $b - \delta < x \leq b$ ならば $|f(x) - f(b)| < f(b) - \gamma$, 従って $f(x) > f(b) - (f(b) - \gamma) = \gamma$ が成立する. このとき $x \notin A$ であるから, $\alpha \leq b - \delta < b$ が示された.

次に, $f(\alpha) = \gamma$ であることを示そう. 任意の自然数 n に対して, $\alpha - \frac{\alpha - a}{n}$ は I に属し, A の上界ではないから

$$\alpha - \frac{\alpha - a}{n} < x_n \text{ かつ } f(x_n) \leq \gamma$$

をみたす $x_n \in [a, b]$ がある. $x_n \in A$ であるから, $x_n \leq \alpha$ も成立する. よって $|x_n - \alpha| < \frac{\alpha - a}{n}$ が成り立つから, 数列 $\{x_n\}$ は α に収束する. 従って,

$$f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq \gamma$$

が成立する．一方，任意の自然数 n について， $y_n := \alpha + \frac{b-\alpha}{n}$ は $\alpha < y_n \leq b$ をみたすから $y_n \notin A$ すなわち $f(y_n) > \gamma$ であり，数列 $\{y_n\}$ は α に収束するから，

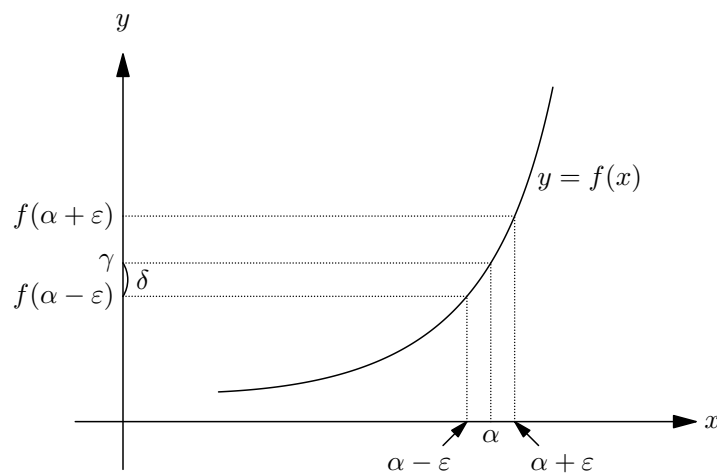
$$f(\alpha) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(y_n) \geq \gamma$$

が成立する．以上により $f(\alpha) = \gamma$ が示された．□

系 4.1 $f(x)$ が区間 I で連続ならば， $f(x)$ の値域 $f(I)$ は区間である．特に， I が有界閉区間ならば $f(I)$ も有界閉区間である．

証明: $M = \sup f(I)$, $m = \inf f(I)$ とおく．ただし $f(I)$ が上に有界でなければ $M = \infty$, $f(I)$ が下に有界でなければ $m = -\infty$ とする．このとき $m < y < M$ ならば $y \in f(I)$ であることを示せばよい． m と M の定義により， y は $f(I)$ の上界でも下界でもないから， $m < y_1 < y < y_2 < M$ をみたす $y_1, y_2 \in f(I)$ が存在する． $y_i = f(x_i)$ ($i = 1, 2$) を満たす $x_1, x_2 \in I$ をとると，中間値の定理により， $f(x) = y$ を満たす x が x_1 と x_2 の間に存在する．従って $y \in f(I)$ であるから $(m, M) \subset f(I)$ が成立する．一方 m, M の定義により， $f(I) \subset [m, M]$ も成立するから， $f(I)$ は区間 (m, M) , $[m, M)$, $(m, M]$, $[m, M]$ のいずれかである． I が有界閉区間のときは，Weierstrass の定理（定理 4.1）により $M = f(\alpha)$, $m = f(\beta)$ を満たす $\alpha, \beta \in I$ が存在するから $f(I) = [m, M]$ となり有界閉区間である．□

定理 4.3 $f(x)$ が区間 I で連続であり，かつ単調増加 ($x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$) または単調減少 ($x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$) であるとする， $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ は区間 $f(I)$ で連続である．



証明: $f(x)$ は I で連続かつ単調増加であるとする． $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ は単射 (1 対 1) であるから，逆写像 $f^{-1} : f(I) \rightarrow I$ が存在する． $f^{-1}(x)$ が $\gamma \in f(I)$ で連続であることを示そう． $\alpha = f^{-1}(\gamma)$ とおく．簡単のため， α は I の端点ではないとする．(端点の場合は，以下の議論で $\alpha \pm \varepsilon$ のうち一方のみを考えればよい．) $\alpha \pm \varepsilon \in I$ を満たすような正の実数 ε を任意にとって

$$\delta = \min\{f(\alpha + \varepsilon) - \gamma, \gamma - f(\alpha - \varepsilon)\}$$

とおくと, $\delta > 0$ であり, $|x - \gamma| < \delta$ ならば

$$f(\alpha - \varepsilon) \leq \gamma - \delta < x < \gamma + \delta \leq f(\alpha + \varepsilon)$$

が成立する. f^{-1} は単調増加だから, $|x - \gamma| < \delta$ ならば

$$\alpha - \varepsilon < f^{-1}(x) < \alpha + \varepsilon \text{ すなわち } |f^{-1}(x) - f^{-1}(\gamma)| < \varepsilon$$

が成立する. よって $f^{-1}(x)$ は γ で連続である. $\square$

例 4.6 (累乗根) q を自然数として関数 $f(x) = x^q$ を考える. $f(x)$ は区間 $I = [0, \infty)$ で連続かつ単調増加であり, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ であるから, 系 4.1 により, $f(I) = I$ であり, 逆関数 $f^{-1}(x)$ は I で連続かつ単調増加である. $f^{-1}(x) = x^{\frac{1}{q}} = \sqrt[q]{x}$ と書き, x の q 乗根という.

補題 4.2 a を正の実数とすると $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$.

証明: $a > 1$ と仮定して, $a_n = a^{\frac{1}{n}} - 1$ とおくと, $a_n > 0$ であり, 2 項定理より

$$a = (a_n + 1)^n > na_n$$

が成立する. 従って $0 < a_n < \frac{a}{n}$ であるから, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ となる. $0 < a < 1$ のときは $a^n = 1/(1/a)^n$ を用いればよい. $\square$

定義 4.6 (指数関数の定義) a を正の実数とする. $r = \frac{p}{q}$ が有理数で $p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$ のときは, $a^r = \sqrt[q]{a^p}$ である. x を任意の実数とすると, a^x を

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[x]_n}$$

で定義する. $a \geq 1$ のときは, $a^{[x]_n}$ は単調増加かつ $a^{[x]_n} \leq a^{[x]_n + 1}$ が任意の n について成立する. また $0 < a < 1$ のときは, $a^{[x]_n}$ は単調減少かつ $a^{[x]_n} \geq a^{[x]_n + 1}$ が任意の n について成立する. 従って定理 2.2 により, 上の極限は存在する.

命題 4.4 (指数関数の性質) a を正の実数とする.

- (1) $f(x) = a^x$ は $a > 1$ ならば $\mathbb{R}$ で単調増加であり, $0 < a < 1$ ならば $\mathbb{R}$ で単調減少である.
- (2) 任意の実数 x, y について $a^{x+y} = a^x a^y$ が成立する.
- (3) $f(x) = a^x$ は $\mathbb{R}$ で連続である.
- (4) 任意の実数 x, y について $(a^x)^y = a^{xy}$ が成立する.

証明: (1) $a > 1$ とする. r と s が有理数で $r < s$ を満たせば $a^r < a^s$ であることは既知とする (r の分母と s の分母の最大公約数を m として $(a^r)^m$ と $(a^s)^m$ を比較すればよい.) 従って, x, y を $x < y$ を満たす実数とすると, $[x]_n \leq [y]_n$ より $a^{[x]_n} \leq a^{[y]_n}$ が任意の自然数 n について成立する. よって $n \rightarrow \infty$ とした極限をとれば, 上の定義と命題 2.3 により $a^x \leq a^y$ が成立する.

ここで等式は成立しないことを示そう. $x < r < y$ を満たす有理数 r が存在する. $10^{-N} < y - r$ となるような自然数 N をとれば, $n \geq N$ のとき

$$[x]_n \leq x < r < y - 10^{-N} \leq [y]_N \leq [y]_n$$

が成立する. r と $[y]_N$ は有理数だから $a^r < a^{[y]_N}$ であることに注意すると, 上の不等式から

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[x]_n} \leq a^r < a^{[y]_N} \leq a^y$$

を得る. $0 < a < 1$ のときは同様にして a^x が単調減少であることがわかる.

(2) $a > 1$ としてよい. ($a = 1$ のときは $a^x = 1$ より明らか, $0 < a < 1$ のときは $a^x = 1/(1/a)^x$ を考えればよい.) x, y を任意の実数とする. $[x]_n \leq x \leq [x]_n + 10^{-n}$ より

$$[x]_n + [y]_n \leq x + y \leq [x]_n + [y]_n + 2 \cdot 10^{-n}$$

が成立する. ここで r, s が有理数のときは $a^{r+s} = a^r a^s$ が成立する (r と s の分母の最小公倍数を m として両辺の m 乗を比較すればよい) ことに注意すると, 性質 (1) より

$$a^{[x]_n} a^{[y]_n} = a^{[x]_n + [y]_n} \leq a^{x+y} \leq a^{[x]_n + [y]_n + 2 \cdot 10^{-n}} = a^{[x]_n} a^{[y]_n} a^{2 \cdot 10^{-n}} \quad (4)$$

を得る. ここで, $10^n = (1+9)^n > 1+9n > 2n$ より $2 \cdot 10^{-n} < \frac{1}{n}$, よって $1 < a^{2 \cdot 10^{-n}} < a^{\frac{1}{n}}$ が成り立つから, $a^{2 \cdot 10^{-n}}$ は $n \rightarrow \infty$ のとき 1 に収束する. よって (4) の最右辺と最左辺は $n \rightarrow \infty$ のとき共に $a^x a^y$ に収束するから, はさみうちの論法により $a^{x+y} = a^x a^y$ を得る.

(3) $a > 1$ としてよい. x_0 を任意の実数とすると (2) より

$$|f(x) - f(x_0)| = |a^x - a^{x_0}| = |a^{x-x_0} a^{x_0} - a^{x_0}| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1|$$

が成立する. ε を任意の正の実数とすると, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{\frac{1}{n}} = 1$ より, ある自然数 N があって,

$$0 < a^{\frac{1}{N}} - 1 = |a^{\frac{1}{N}} - 1| < \varepsilon$$

が成り立つ. このとき

$$0 < 1 - a^{-\frac{1}{N}} = |a^{-\frac{1}{N}} - 1| = a^{-\frac{1}{N}} |a^{\frac{1}{N}} - 1| < |a^{\frac{1}{N}} - 1| < \varepsilon$$

であるから, a^x が単調増加であることに注意すると, $-\frac{1}{N} < x < \frac{1}{N}$ ならば

$$1 - \varepsilon < a^{-\frac{1}{N}} < a^x < a^{\frac{1}{N}} < 1 + \varepsilon$$

が成り立つことがわかる．以上により $|x - x_0| < \frac{1}{N}$ ならば

$$|f(x) - f(x_0)| = a^{x_0} |a^{x-x_0} - 1| < a^{x_0} \varepsilon$$

が成立するので $f(x) = a^x$ は x_0 で連続である．

(4) 有理数 r, s に対して $(a^r)^s = a^{rs}$ が成立するから， a^x が連続なものと命題 4.3，および x^r が連続なこと（例 4.6 からわかる）を用いると，任意の実数 x に対して

$$a^{xr} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[x]_n r} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^{[x]_n})^r = (a^x)^r$$

を得る．よって，任意の実数 x, y に対して

$$a^{xy} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x[y]_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^{[y]_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} (a^x)^y$$

が成立する．（ここで x を固定したとき $(a^x)^y$ が y の関数として連続であることを用いた．これは a^x を a として (2) を用いればわかる．）□

補題 4.3 $a > 1$ のとき，

$$\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0.$$

証明: $h = a - 1$ とおくと $h > 0$ であり，自然数 n に対して

$$a^n = (1 + h)^n > nh$$

が成り立つ．よって任意の正の実数 M に対して $N \geq \frac{M}{h}$ を満たす自然数 N をとれば，

$$x \geq N \Rightarrow a^x \geq a^N > Nh \geq M$$

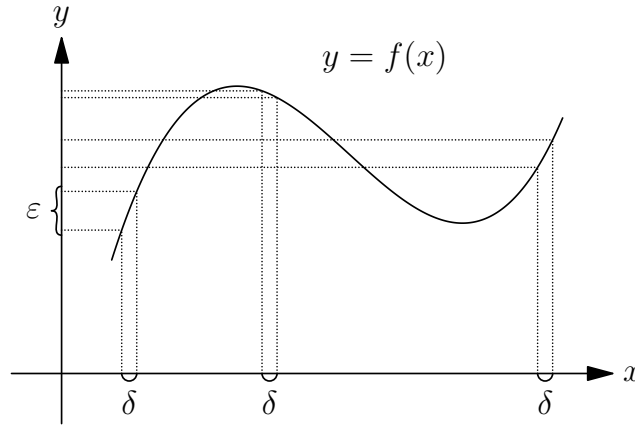
であるから， $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ が示された．これと $a^{-x} = 1/a^x$ から $\lim_{n \rightarrow -\infty} a^n = 0$ がわかる．□

命題 4.5 a を 1 以外の正の実数とする． $y = a^x$ の逆関数を $y = \log_a x$ と表す． $\log_a x$ は区間 $(0, \infty)$ で連続である．

証明: $a > 1$ とする． $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ と系 4.1 より $f(x) = a^x$ の値域は $(0, \infty)$ となることがわかる．さらに $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続かつ単調増加だから，定理 4.3 より $f^{-1}(x) = \log_a x$ は $(0, \infty)$ で連続である．□

定義 4.7 ある区間 I で定義された関数 $f(x)$ が I で**一様連続**であるとは、任意の正の実数 ε に対して、ある正の実数 δ が存在して $|x - x'| < \delta$ かつ $x, x' \in I$ ならば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ が成立することである。

$f(x)$ が I で一様連続ならば $f(x)$ は I で連続である。



例 4.7 (1) $f(x) = 2x$ は $\mathbb{R}$ で一様連続である。実際、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon/2$ とおけば、 $|x - x'| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x')| = 2|x - x'| < \varepsilon$ が成立する。

(2) $f(x) = \frac{1}{x}$ は $I = [1, \infty)$ で一様連続である。実際、任意の $\varepsilon > 0$ に対して $\delta = \varepsilon$ とおけば、 $|x - x'| < \delta$ かつ $x, x' \in I$ ならば

$$|f(x) - f(x')| = \left| \frac{1}{x} - \frac{1}{x'} \right| = \frac{|x - x'|}{xx'} \leq |x - x'| < \delta = \varepsilon$$

が成立する。

(3) $f(x) = \frac{1}{x}$ は $I = (0, 1]$ で連続であるが一様連続ではない。

実際、 $0 < \delta < 1$ をみたす任意の実数 δ に対して $x = \delta$, $x' = \frac{\delta}{2}$ とおけば $|x - x'| = \frac{\delta}{2} < \delta$ かつ $x, x' \in I$ であるが、

$$|f(x) - f(x')| = \frac{|x - x'|}{xx'} = \frac{1}{\delta} \geq 1$$

である。これは一様連続であることの否定命題が真であることを意味する。

定理 4.4 $f(x)$ が有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続ならば、 $f(x)$ は I で一様連続である。

証明: 背理法で示す。 $f(x)$ が I で一様連続でないと仮定すると、

$$\exists \varepsilon > 0, \forall \delta > 0, \exists x, x' \in I (|x - x'| < \delta, |f(x) - f(x')| \geq \varepsilon)$$

という命題が成立する。この $\varepsilon > 0$ を固定する。任意の自然数 n に対して $\delta = 1/n$ とすれば、 $|x_n - y_n| < \frac{1}{n}$ かつ $|f(x_n) - f(y_n)| \geq \varepsilon$ をみたす $x_n, y_n \in I$ が存在する。 I は有界

閉区間であるから Bolzano-Weierstrass の定理により, $\{x_n\}$ の収束する部分列 $\{x_{n_k}\}$ をとれる. この極限を α とする. I は閉区間であるから, $\alpha \in I$ である.

$$|x_{n_k} - y_{n_k}| < \frac{1}{n_k} \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty)$$

より $\{y_{n_k}\}$ も α に収束する. 仮定により $f(x)$ は $\alpha \in I$ で連続であるから, 命題 4.3 より

$$\lim_{k \rightarrow \infty} f(x_{n_k}) = \lim_{k \rightarrow \infty} f(y_{n_k}) = f(\alpha),$$

従って

$$\lim_{k \rightarrow \infty} (f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})) = 0$$

が成立するが, これは $|f(x_{n_k}) - f(y_{n_k})| \geq \varepsilon$ に矛盾する. よって $f(x)$ は一様連続であることが示された. $\square$

命題 4.6 $f(x)$ は区間 I で連続であり, I の各点 (ただし I の端点 (もしあれば) は除く) で微分可能であるとする. このとき $f'(x)$ が有界, すなわち, ある定数 $M > 0$ があって, 任意の $x \in I$ (ただし端点は除く) に対して $|f'(x)| \leq M$ が成り立つとすると, $f(x)$ は I で一様連続である.

証明: 任意の正の実数 ε に対して $\delta = \varepsilon/M$ とおくと, $x_1, x_2 \in I$ が $|x_1 - x_2| < \delta$ を満たせば, たとえば $x_1 < x_2$ とすると, $f(x)$ は区間 $[x_1, x_2]$ で連続で区間 (x_1, x_2) で微分可能であるから, 平均値の定理により x_1 と x_2 の間のある実数 c があって,

$$|f(x_1) - f(x_2)| = |f'(c)(x_1 - x_2)| = |f'(c)||x_1 - x_2| < M\delta = \varepsilon$$

が成立する. 従って $f(x)$ は I で一様連続である. $\square$

問題 32 次の関数 $f(x)$ は区間 I で一様連続かどうか判定せよ. (理由も述べること.)

- | | |
|--|--|
| (1) $f(x) = x^2, \quad I = (-1, 1)$ | (2) $f(x) = x^2, \quad I = [1, \infty)$ |
| (3) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}, \quad I = \mathbb{R}$ | (4) $f(x) = \sqrt{x}, \quad I = [0, \infty)$ |

問題 33 関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続であり, 極限值

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = A, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = B$$

が存在すると仮定する. このとき, $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で一様連続であることを示せ.

一様連続性の応用として, 定積分と Riemann 和についての次の基本的な定理を証明しよう.

定理 4.5 関数 $f(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で連続とする.

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

を区間 $[a, b]$ の分割とし ($x_0, x_1, \dots, x_n$ を分割 Δ の分点という), $|\Delta| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \dots, n\}$ を小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の幅の最大値とする. 各々の $i = 1, \dots, n$ に対して, $x_{i-1} \leq \xi_i \leq x_i$ を満たす実数 ξ_i を任意に選び, $f(x)$ の分割 Δ に関する Riemann (リーマン) 和を

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^n f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

で定義する (これは ξ_i の選び方に依存する). このとき, ある実数 α が存在して次が成立する.

任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して, $[a, b]$ の分割 Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たせば, 任意の $\xi_i \in [x_{i-1}, x_i]$ ($i = 1, \dots, n$) について (すなわち ξ_i の選び方によらず)

$$|S_\Delta(f) - \alpha| < \varepsilon$$

が成立する. このとき α を $f(x)$ の $[a, b]$ での定積分と呼び, $\alpha = \int_a^b f(x) dx$ と表す.

証明: Weierstrass の定理により $f(x)$ は各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ で最大値と最小値

$$M_i = \max\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i = \min\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

を持つ. このとき,

$$U(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n M_i(x_i - x_{i-1}), \quad L(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n m_i(x_i - x_{i-1})$$

とおき, それぞれ f の分割 Δ に関する上限和, 下限和と呼ぼう. $m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ より

$$L(f, \Delta) \leq S_\Delta(f) \leq U(f, \Delta)$$

が成立することがわかる. また, Δ' を $[a, b]$ の別の分割とすると, $\Delta \cup \Delta'$ を Δ の分点と Δ' の分点を合わせてできる分割とする. このとき

$$L(f, \Delta) \leq L(f, \Delta \cup \Delta') \leq U(f, \Delta \cup \Delta') \leq U(f, \Delta')$$

が成立することがわかる. (分点を増やすと下限和は大きく, 上限和は小さくなる.) そこで Δ を固定して Δ' を動かすと, $\mathbb{R}$ の部分集合 $\{U(f, \Delta') \mid \Delta' \text{ は } [a, b] \text{ の分割}\}$ は下に有界であるから, 上限和の下限

$$\beta = \inf\{U(f, \Delta') \mid \Delta' \text{ は } [a, b] \text{ の分割}\}$$

が存在する. Δ' を固定して Δ を動かせば, 下限和の上限

$$\alpha = \sup\{L(f, \Delta) \mid \Delta \text{ は } [a, b] \text{ の分割}\}$$

も存在して $\alpha \leq \beta$ が成立する.

正の実数 ε を任意にとって固定する. 定理 4.4 より $f(x)$ は $[a, b]$ で一様連続であるから, ある正の実数 δ が存在して, $x, x' \in [a, b]$ が $|x - x'| < \delta$ を満たせば $|f(x) - f(x')| < \varepsilon$ が成立する. 最初にとった分割 Δ が $|\Delta| < \delta$ を満たすと仮定する. 各 i について, $m_i = f(y_i)$, $M_i = f(z_i)$ を満たす $y_i, z_i \in [x_{i-1}, x_i]$ が存在する. $|y_i - z_i| \leq x_i - x_{i-1} \leq |\Delta| < \delta$ であるから

$$0 \leq M_i - m_i = f(z_i) - f(y_i) = |f(z_i) - f(y_i)| < \varepsilon$$

が成立する. よって

$$0 \leq U(f, \Delta) - L(f, \Delta) = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \varepsilon(x_i - x_{i-1}) = (b - a)\varepsilon$$

これと $\alpha \geq L(f, \Delta)$, $\beta \leq U(f, \Delta)$ より

$$0 \leq \beta - \alpha \leq U(f, \Delta) - L(f, \Delta) < (b - a)\varepsilon$$

が成立し, $\beta - \alpha$ は ε によらないから $\alpha = \beta$ でなければならない.

$$L(f, \Delta) \leq \alpha = \beta \leq U(f, \Delta), \quad L(f, \Delta) \leq S_\Delta(f) \leq U(f, \Delta)$$

と $U(f, \Delta) - L(f, \Delta) < (b - a)\varepsilon$ より, $|S_\Delta(f) - \alpha| < (b - a)\varepsilon$ を得る. $\varepsilon > 0$ は任意であるから, $\varepsilon/(b - a)$ を改めて ε とすれば定理の主張が証明された. $\square$

5 関数列と関数項級数の一様収束

数列や級数の収束発散については既に述べたが, ここでは数列や級数の各項が変数を含む場合をあらためて考察しよう.

定義 5.1 I を $\mathbb{R}$ の区間とする. 任意の自然数 n に対して, $f_n(x)$ は I で定義された関数であるとする. このとき $\{f_n(x)\}$ を I 上の**関数列**という. $f(x)$ と $F(x)$ を I で定義された関数とする.

- (1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が I で $f(x)$ に**(各点) 収束**するとは, 任意の $x \in I$ について $\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = f(x)$ が成立することである.
- (2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ が I で $f(x)$ に**一様収束**するとは, 任意の正の実数 ε に対して, ある自然数 N が存在して,

$$n \geq N \quad \Rightarrow \quad \forall x \in I \quad (|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon)$$

が成立することである.

- (3) 関数項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ が I で $F(x)$ に**一様収束**するとは, 部分列 $S_n(x) := \sum_{k=1}^n f_k(x)$ が I で $F(x)$ に一様収束することである.

命題 5.1 $f_n(x)$ ($n \in \mathbb{N}$) と $f(x)$ を $\mathbb{R}$ の区間 I で定義された関数として,

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \in I\}$$

とおくと ($M_n \in \mathbb{R}$ または $M_n = \infty$), $f_n(x)$ が I で $f(x)$ に一様収束するための必要十分条件は, 数列 M_n が 0 に収束することである.

証明: 任意の $x \in I$ に対して $|f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$ が成立することと $M_n \leq \varepsilon$ は同値であるから. $\square$

例 5.1 $f_n(x) = x^n$ ($n \in \mathbb{N}$) とする.

(1) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は区間 $[0, \frac{1}{2}]$ で $f(x) = 0$ に一様収束する. 実際 $x \in [0, \frac{1}{2}]$ のとき, $0 \leq x^n \leq 2^{-n}$ であり, $\lim_{n \rightarrow \infty} 2^{-n} = 0$ だから, 任意の正の実数 ε に対して, ある自然数 N があって, $n \geq N$ のとき $2^{-n} < \varepsilon$ が成立する. このとき, 任意の $x \in [0, \frac{1}{2}]$ に対して $|f_n(x) - f(x)| = x^n \leq 2^{-n} < \varepsilon$ が成立する.

(2) 関数列 $\{f_n(x)\}$ は区間 $[0, 1)$ で $f(x) = 0$ に各点収束するが一様収束はしない. 実際, $x \in [0, 1)$ のとき $\lim_{n \rightarrow \infty} x^n = 0 = f(x)$ である. 一方,

$$M_n := \sup\{x^n \mid 0 \leq x < 1\} = 1$$

であるから上の命題により, $\{f_n(x)\}$ は区間 $[0, 1)$ では一様収束しない.

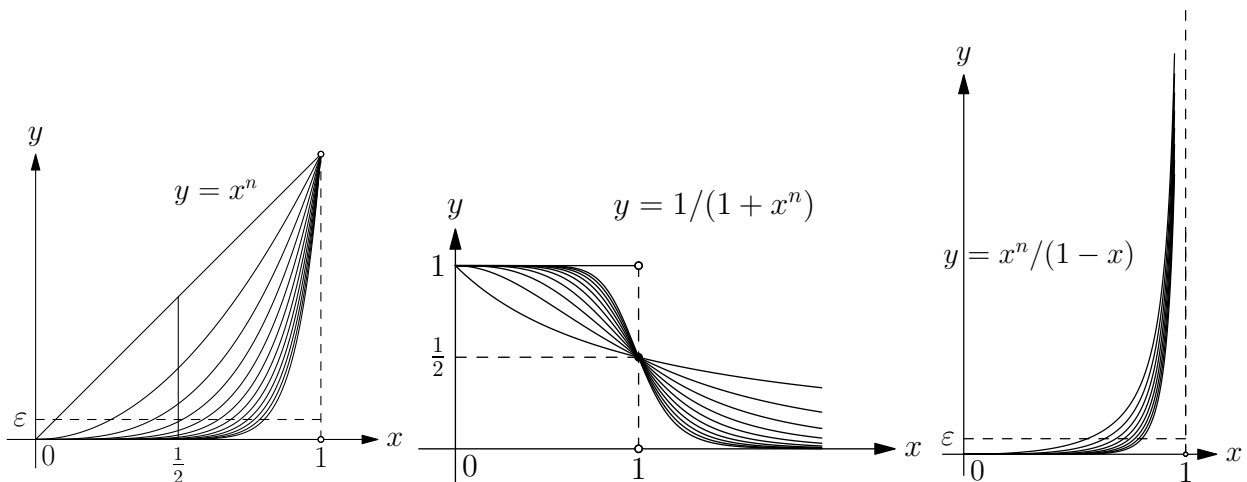
例 5.2 関数列 $f_n(x) = \frac{1}{1+x^n}$ を区間 $[0, \infty)$ で考える.

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < 1 \text{ のとき}) \\ \frac{1}{2} & (x = 1 \text{ のとき}) \\ 0 & (x > 1 \text{ のとき}) \end{cases}$$

とおくと, $\{f_n(x)\}$ は $I = [0, \infty)$ で $f(x)$ に各点収束するが一様収束はしない. 実際,

$$M_n := \sup\{|f_n(x) - f(x)| \mid x \geq 0\} \geq \sup\{f_n(x) \mid x > 1\} = \frac{1}{2}$$

だから M_n は 0 に収束しない.



例 5.3 $|x| < 1$ のとき, $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ であるが, この級数は区間 $[0, 1)$ で一様収束はしない. 実際,

$$S_n(x) = \sum_{k=0}^n x^k = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}, \quad F(x) = \frac{1}{1-x}$$

とおくと, 任意の n について

$$|S_n(x) - F(x)| = F(x) - S_n(x) = \frac{x^{n+1}}{1-x} \rightarrow \infty \quad (x \rightarrow 1-0)$$

であるから,

$$M_n := \sup\{|S_n(x) - F(x)| \mid 0 \leq x < 1\} = \infty$$

定理 5.1 区間 I で定義された関数列 $\{f_n(x)\}$ が I で $f(x)$ に一様収束し, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f_n(x)$ が I で連続であれば, $f(x)$ も I で連続である.

証明: $a \in I$ とする. $f(x)$ が a で連続であることを示す. ε を任意の正の実数とする. ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば, 任意の $x \in I$ について $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ が成立する. $f_N(x)$ は a で連続だから, ある $\delta > 0$ があって $|x - a| < \delta$ かつ $x \in I$ ならば $|f_N(x) - f_N(a)| < \varepsilon$ が成立する. 以上により, $|x - a| < \delta$ かつ $x \in I$ ならば

$$\begin{aligned} |f(x) - f(a)| &= |f(x) - f_N(x) + f_N(x) - f_N(a) + f_N(a) - f(a)| \\ &\leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(a)| + |f_N(a) - f(a)| < 3\varepsilon \end{aligned}$$

となるから $f(x)$ は a で連続である. $\square$

問題 34 次の関数列 $\{f_n(x)\}$ は区間 I である関数 $f(x)$ に各点収束することを示し, I で $f(x)$ に一様収束するかどうか判定せよ.

$$(1) \quad f_n(x) = e^{-nx}, \quad I = [0, \infty) \qquad (2) \quad f_n(x) = \frac{x^n}{n}, \quad I = [0, 1]$$

定理 5.2 (優級数定理) 区間 I 上の関数列 $\{f_n(x)\}$ に対して, ある数列 $a_n \geq 0$ があって $|f_n(x)| \leq a_n$ が任意の $x \in I$ と $n \in \mathbb{N}$ について成り立つとする. このとき正項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$

(優級数という) が収束すれば, 関数項級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ はある関数 $F(x)$ に I で一様収束する. さらに, 任意の $n \in \mathbb{N}$ について $f_n(x)$ が I で連続ならば $F(x)$ も I で連続である.

証明: 命題 3.2 により, 任意の正の実数 ε に対してある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば任意の自然数 p について

$$a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

が成立する. このとき, 任意の $x \in I$ について

$$|f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

が成立するから, 任意の $x \in I$ に対して無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ はある $F(x)$ に収束する.

$S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ とおくと, $n \geq N$ ならば任意の自然数 p と任意の $x \in I$ について

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| = |f_{n+1}(x) + \cdots + f_{n+p}(x)| \leq |f_{n+1}(x)| + \cdots + |f_{n+p}(x)| \leq a_{n+1} + \cdots + a_{n+p} < \varepsilon$$

であるから, $p \rightarrow \infty$ とすれば,

$$|F(x) - S_n(x)| \leq \varepsilon$$

となる. よって $S_n(x)$ は I で $F(x)$ に一様収束する. $f_n(x)$ が I で連続ならば $S_n(x)$ も I で連続であるから, 定理 5.1 により $F(x)$ は I で連続である. $\square$

例 5.4 任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $\frac{1}{n^2} |\sin nx| \leq \frac{1}{n^2}$ であり $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ は収束するから, 定理 5.2

により $F(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} \sin kx$ は $\mathbb{R}$ で一様収束し, $F(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続である.

問題 35 次の関数項級数は区間 I で一様収束することを示せ.

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k^2}, \quad I = [-1, 1] \quad (2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}} \cos kx, \quad I = \mathbb{R} \quad (3) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+x^k}, \quad I = [2, \infty)$$

定理 5.3 (項別積分) 有界閉区間 $I = [a, b]$ で定義された連続な関数項級数 $\{f_n(x)\}_{n \in \mathbb{N}}$ が I で関数 $S(x)$ に一様収束すれば,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b S(x) dx$$

証明: $S_n(x) = \sum_{k=1}^n f_k(x)$ とおき, ε を任意の正の実数とする. 仮定より, ある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば任意の $x \in I$ について $|S_n(x) - S(x)| < \varepsilon$ が成立する. このとき,

$$\left| \sum_{k=1}^n \int_a^b f_k(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| = \left| \int_a^b S_n(x) dx - \int_a^b S(x) dx \right| \leq \int_a^b |S_n(x) - S(x)| dx < (b-a)\varepsilon$$

が成立する. よって定理の主張が示された. $\square$

例 5.5 関数項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ を考察しよう. $0 < r < 1$ を満たす任意の実数 r を固定する. $|x| \leq r$ のとき, $|x^k| \leq r^k$ であり, 等比級数 $\sum_{k=0}^{\infty} r^k$ は収束するので, 優級数定理により $\sum_{k=0}^{\infty} x^k$ は区間 $[-r, r]$ で一様収束する. これと等比級数の和の公式より, $[-r, r]$ において

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$$

が成立し, 左辺は $[-r, r]$ で一様収束する. よって項別積分定理により

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k+1} x^{k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x t^k dt = \int_0^x \frac{1}{1-t} dt = -\log(1-x)$$

が $[-r, r]$ で成立する. $0 < r < 1$ は任意であったから, この等式は开区間 $(-1, 1)$ で成立する.

例 5.6 関数項級数 $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ を考察しよう. $0 < r < 1$ を満たす任意の実数 r を固定する. $|x| \leq r$ のとき, $|(k+1)x^k| \leq (k+1)r^k$ であり, d'Alembert の判定法より級数 $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)r^k$ は収束することがわかるので, 優級数定理により $\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$ は区間 $[-r, r]$ である連続関数 $f(x)$ に一様収束する. すなわち

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k$$

が成立し, 右辺は $[-r, r]$ で一様収束する. よって項別積分定理により

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x (k+1)t^k dt = \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+1} = \frac{x}{1-x} = \frac{1}{1-x} - 1$$

が $[-r, r]$ で成立する. 最左辺と最右辺を微分して

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = f(x) = \frac{1}{(1-x)^2}$$

が $(-r, r)$ で成立することがわかる. $0 < r < 1$ は任意であったから, この等式は开区間 $(-1, 1)$ で成立する. またこれから

$$\sum_{k=1}^{\infty} kx^k = x \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = x \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)x^k = \frac{x}{(1-x)^2} \quad (-1 < x < 1)$$

を得る.

問題 36 $|x| < 1$ のとき次の無限級数の和を求めよ. (例 5.5 と例 5.6 の結果は用いてよい.)

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k(k+1)} \quad (2) \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)(k+2)x^k \quad (3) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 x^k$$