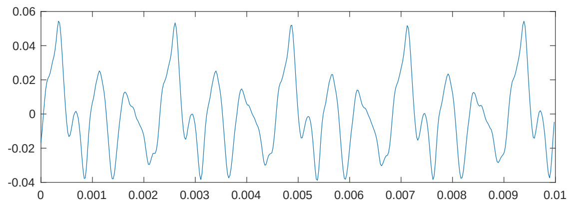
音と数学

東京女子大学 現代教養学部 数理科学科 数学専攻
大阿久俊則

1. 音の高さとは？

バイオリンの音の波形の例．横軸が時間 t（秒単位），縦軸は空気密度の変位（電気信号に変換）を表す．これを t の関数 $f(t)$ とみなす．

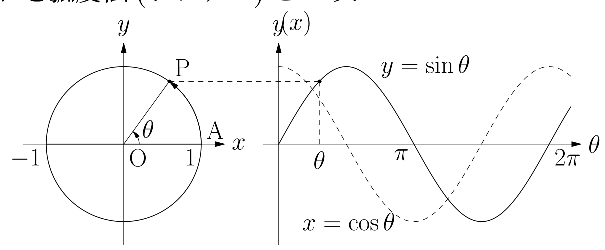


波形がほぼ $T = 0.00226$ 秒ごと (1 秒間に 442 回）の繰り返しになっている．すなわち $f(t+T) = f(t)$.

このように，ある正の定数 T があって $f(t+T) = f(t)$ がすべての t について成立するような関数 $f(t)$ を**周期関数**といい，T を $f(t)$ の**周期**という．

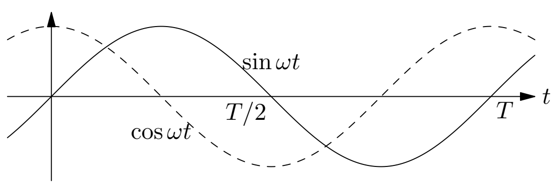
• **単振動（正弦波）**：一つの決まった高さを持つ音

座標平面で単位円周上の点 P を考え $\theta = \angle\mathrm{AOP}$ とするとき，P の y 座標が $\sin\theta$，P の x 座標が $\cos\theta$ となる．角度 $\theta = \angle\mathrm{AOP}$ を弧 AP の長さで表す．これを弧度法 (ラジアン) という．



たとえば $\angle\mathrm{AOP} = 90^\circ$ のとき弧 AP $= \dfrac{\pi}{2}$ より $90^\circ = \dfrac{\pi}{2}$. 一周は $360^\circ = 2\pi$ である．

点 P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω（オメガ）で動いているとする．出発してからの時間を t とすると $\theta = \omega t$ であるから，P の y 座標は $\sin\omega t$ (下図の実線)，x 座標は $\cos\omega t$ (破線) となる．



このサインとコサインの表す振動は，最も単純な振動であり，**角周波数** ω の**単振動**または**正弦波**と呼ばれる．たとえば，ばねにぶらさげた「おもり」を少し引っ張って離すと，おもりは単振動をする．「音さ」の音は単振動に近い．$\omega t = 2\pi$ すなわち $t = \dfrac{2\pi}{\omega}$ となるとき，P は円周を 1 周するので，この単振動の**周期**は $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ である．**周波数（振動数）**は周期の逆数で $\nu = \dfrac{\omega}{2\pi}$ と表される．音の場合は周波数が高さに対応する．時間を秒単位で測ったときの周波数をヘルツ (Hz) という単位で表す．たとえば交流電源（コンセント）は 50Hz の単振動（低い音）.

2. 音階（純正律と平均律）

音楽では音の高さはラ (A) の音が基準．ラの周波数を 440Hz (1 秒間に 440 回繰り返す波形) とする（実際には 442Hz にすることも多い）.

中央のラの音の周波数を 440Hz とすると，1 オクターブ上のラの音は 880Hz，1 オクターブ下のラの音は 220Hz．このように 1 オクターブとは 1:2 の周波数の比を表している．

音階は 1 オクターブを更に細かく分割することで成り立つ．分数を用いる**純正律**と，対数を用いる**平均律**という 2 通りの音階の決め方がある．

• **純正律**：1 オクターブ違う音の周波数の比は $1:2$. 完全 5 度（たとえばドとソなど半音 7 つの差）の周波数の比を $2:3$ とする．完全 4 度（たとえばドとファなど半音 5 つの差）の周波数の比は $3:4$，など と周波数の比が簡単な分数になるようにする．

純正律でのハ長調の音階の周波数

音階	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
Hz	264	297	330	352	396	440	495	528
比	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2

純正律では振動数の比が整数であるため，和音が正確に協和するという特徴がある．ただし移調が難しい．

• **平均律**：半音違いの音の周波数の比 r を一定にとる．1 オクターブは 12 の半音からなるので，

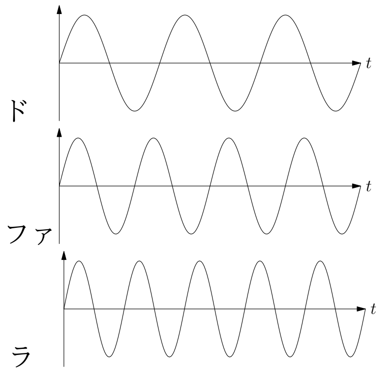
$$r^{12} = 2 \quad \text{すなわち} \quad r = 2^{1/12} = 1.05946\ldots$$

平均律では完全 5 度の周波数の比は $1 : 2^{7/12} = 1 : 1.498307\ldots$ で $2:3 = 1:1.5$ ではない．

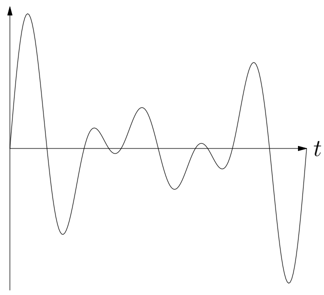
3. 和音

以下，純正律で考える．簡単のため一つ一つの音は単振動と思う．たとえばドファラの音の周波数は 264Hz, 352Hz, 440Hz なので，比は $3:4:5$ となる．($264 = 88 \times 3$, $352 = 88 \times 4$, $440 = 88 \times 5$)

1/88 秒間のドファラの音の波形



この 3 つの音 (単振動) を同時に鳴らす (つまり上の 3 つのグラフを足し合わせる) と



4. 楽器の音色や母音の違い

実は楽器でたとえばラ (440Hz) の音を出した時，その音には，440Hz の単振動の他に 2×440Hz の単振動 (1 オクターブ上のラ)，3×440Hz の単振動 (2 オクターブ上のミ)，一般に 440Hz の整数倍の音が含まれている．つまり楽器の「単音」は実は和音である．

言語では継続する音を母音と呼ぶ．母音の体系は言語によって異なり，日本語では「あいうえお」の 5 つ．母音の音は純正律の（少し複雑な）和音である．単音（単振動）の組み合わせの違いが「あいうえお」の違いを生み出す．

子音は瞬間的な音であり，数学的には母音よりもずっと難しい．

5. フーリエ解析

以上のような問題を数学的に考える方法が「フーリエ解析」である．フランスの数学者・物理学者のフーリエ (Joseph Fourier, 1768–1830) が 1822 年に「熱の解析的理論」を出版した．これがフーリエ解析の発祥である．フーリエは熱伝導の問題を扱ったが，音や電磁波，地震，心電図，脳波，画像の圧縮や加工など、広範囲の応用がある。以下でフーリエ解析のエッセンスを音に即して解説します．

- **フーリエ級数**：角周波数 ω の単振動は一般に

$$c\sin(\omega t + \theta_0)$$

と表せる．ここで c は正の数で**振幅**と呼ばれる．θ_0 は実数の定数で**初期位相**と呼ばれる．三角関数の加法定理を用いると単振動は

$$\begin{aligned} c\sin(\omega t + \theta_0) &= c\sin\theta_0 \cos\omega t + c\cos\theta_0 \sin\omega t \\ &= \underline{a\cos\omega t + b\sin\omega t} \end{aligned}$$

と表せる．ただし $a = c\sin\theta_0$, $b = c\cos\theta_0$ とおいた．従ってこの単振動の振幅は $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ となる．

基準になる単振動を $a_1\cos\omega t + b_1 \sin\omega t$ とするとき，周波数がその 2 倍，3 倍，4 倍，... の単振動と定数項を加えて

$$\frac{1}{2}a_0 + (a_1\cos\omega t + b_1\sin\omega t) + (a_2\cos 2\omega t + b_2 \sin 2\omega t) + (a_3\cos 3\omega t + b_3\sin 3\omega t) + \cdots$$

という式を**フーリエ級数**という．一般には無限の項からなる無限級数である．有限の項のみからなるとき有限フーリエ級数という．純正律の和音は有限フーリエ級数である．たとえばドファラの和音を式で表すと $\omega = 2\pi \times 88$ （88Hz を基準）として

$$(a_3\cos 3\omega t + b_3\sin 3\omega t) + (a_4\cos 4\omega t + b_4 \sin 4\omega t) + (a_5\cos 5\omega t + b_5\sin 5\omega t)$$

となる.（基準音 (88Hz) とその倍音 (176Hz) は含まない.）

<u>フーリエの発見</u>

(1) 周期 T の（$f(t+T) = f(t)$ をみたす）関数 $f(t)$ はフーリエ級数で表すことができる.（正確には条件や意味づけが必要）

(2) a_n と b_n はもとの関数 $f(t)$ から

$$a_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\cos n\omega t\, dt \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$
$$b_n = \frac{2}{T}\int_0^T f(t)\sin n\omega t\, dt \quad (n = 1, 2, \dots)$$

によって定まる ($\omega = 2\pi/T$ は $f(t)$ の角周波数).

数列 $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ $(n = 1, 2, 3, \dots)$ はその音に含まれる基準の n 倍の周波数の単振動の振幅を表している．この数列（の棒グラフ）を**スペクトル**という．

バイオリン（ラの音）のスペクトル