解析学概論II

大阿久 俊則

1　1変数関数の定積分

多変数関数の積分について考察する準備として，まず1変数関数の定積分の定義を見直しておこう．

$f(x)$ を有界閉区間 $[a,b]$ で定義された有界関数，すなわち，ある定数 M があって $|f(x)| \le M$ $(a \le \forall x \le b)$ が成り立つような関数とする（連続であることは仮定しない）．

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

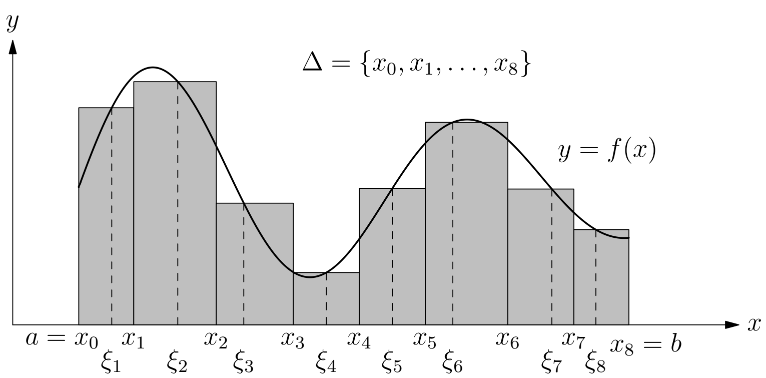
を区間 $[a,b]$ の分割とする．$x_0, x_1, \ldots, x_n$ を分割 Δ の**分点**という．逆に分点を与えれば $[a,b]$ の分割が定まるので，以下では分割と分点の集合を同一視して，$\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ とみなすことにする．$|\Delta| := \max\{x_i - x_{i-1} \mid i = 1, \ldots, n\}$ を小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ の幅の最大値とする．各々の $i = 1, \ldots, n$ に対して, $x_{i-1} \le \xi_i \le x_i$ を満たす実数 ξ_i を任意に選び，f の $[a,b]$ における Riemann（リーマン）和を

$$S_\Delta(f) = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)(x_i - x_{i-1})$$

で定義する．分割 Δ を限りなく細かく，すなわち $|\Delta|$ が限りなく小さくなるようにするとき $S_\Delta(f)$ が ξ_i の選び方によらずある1つの実数 S に収束すれば，関数 $f(x)$ は区間 $[a,b]$ で**積分可能**または**可積分** (integrable) であるという．このとき，関数 f の区間 $[a,b]$ における定積分は

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{|\Delta|\to 0} S_\Delta(f) = S$$

で定義される．



以上のリーマン和による定積分の定義では，ξ_i の取り方に任意性（曖昧さ）がある．そこで，ξ_i の選び方によらない定義を考えてみよう．そのために，まず上限と下限という概念を導入する．

定義 1.1 一般に A を実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合とする．実数 a が集合 A の**下限 (infimum)** であるとは，

(1) 任意の $x \in A$ に対して $a \le x$ が成立する．

(2) 実数 a' も性質 (1)「任意の $x \in A$ に対して $a' \le x$」を満たせば，$a' \le a$ である．

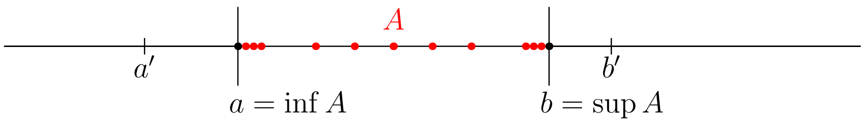
という 2 つの性質を満たすこと，すなわち性質 (1) を満たすような最大の a のことである．このとき $a = \inf A$ と表す．

また，実数 b が集合 A の**上限 (supremum)** であるとは，

(3) 任意の $x \in A$ に対して $x \le b$ が成立する．

(4) 実数 b' も性質 (3)「任意の $x \in A$ に対して $x \le b'$」を満たせば，$b \le b'$ である．

という 2 つの性質を満たすこと，すなわち性質 (3) を満たすような最小の b のことである．このとき $b = \sup A$ と表す．



例 1.1 A が開区間 (a, b) のときは，$\inf A = a$, $\sup A = b$ である．しかし A の最小値と最大値は存在しない (a と b は A に属さないので）．

例 1.2 $A = \left\{ \dfrac{1}{n} \mid n = 1, 2, 3, \dots \right\}$ とすると，$\inf A = 0$, $\sup A = 1$ である．1 は A の最大値であるが，0 は A に属さないので A の最小値ではない．

定義 1.2 一般に区間 I で定義された関数 f に対して，f の I における下限と上限は，f の値域 $f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$ の下限と上限のことと定義する．

例 1.3 関数 $f(x) = x^2$ の開区間 $I = (0, 1)$ における下限と上限は，

$$\inf f(x) = \inf\{x^2 \mid 0 < x < 1\} = \inf(0, 1) = 0, \qquad \sup f(x) = \sup(0, 1) = 1$$

である．しかし f は開区間 I において最大値も最小値も持たない．

さて，関数 f の各小区間 $[x_{i-1}, x_i]$ における上限と下限を

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

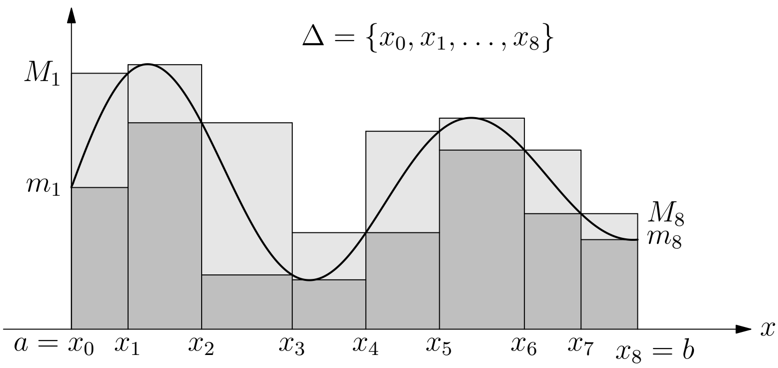
とおく．このとき，

$$U(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} M_i(x_i - x_{i-1}), \qquad L(f, \Delta) = \sum_{i=1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1})$$

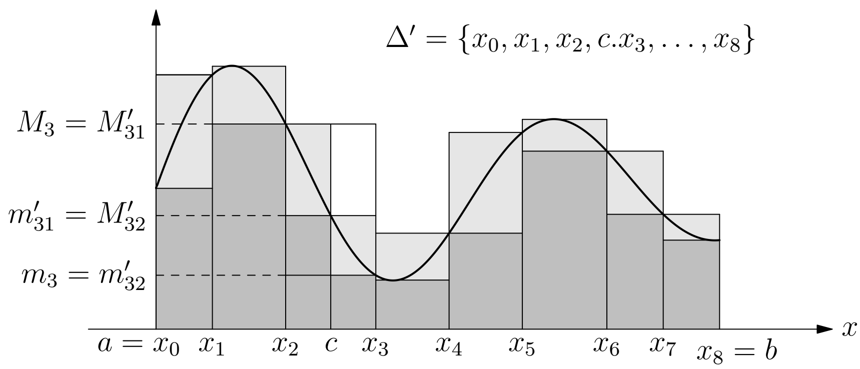
とおき，それぞれ f の分割 Δ に関する**上限和**，**下限和**と呼ぼう．$m_i \leq f(\xi_i) \leq M_i$ より

$$L(f,\Delta) \leq S_\Delta(f) \leq U(f,\Delta)$$

が成立することがわかる．



さて，Δ と Δ' を区間 $[a,b]$ の 2 つの分割とする．Δ' が Δ の**細分**であるとは，分割を分点の集合とみなしたとき，$\Delta' \supset \Delta$ となること，すなわち Δ' は Δ の分点を増やしてできる分割（または $\Delta' = \Delta$）であることである．



補題 1.1 このとき，

$$L(f,\Delta) \leq L(f,\Delta') \leq U(f,\Delta') \leq U(f,\Delta)$$

が成立する．すなわち $L(f,\Delta)$ は分割を細分すれば増加し，$U(f,\Delta)$ は分割を細分すれば減少する．

証明: Δ' が Δ に分点を 1 個増やしてできる分割のときに示せばよい．(一般の場合は，この操作を何回か繰り返せばよい．) $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ として新しい分点 c は $x_{k-1} < c < x_k$ をみたすとすると，$\Delta' = \{x_0, x_1, \ldots, x_{k-1}, c, x_k, \ldots, x_n\}$ である．

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\} \quad (i = 1, 2, \ldots, n),$$
$$M'_{k1} = \sup\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq c\}, \quad m'_{k1} = \inf\{f(x) \mid x_{k-1} \leq x \leq c\},$$
$$M'_{k2} = \sup\{f(x) \mid c \leq x \leq x_k\}, \quad m'_{k2} = \inf\{f(x) \mid c \leq x \leq x_k\}$$

とおくと，$m_k \le m'_{k1}$, $m_k \le m'_{k2}$ より，

$$\begin{aligned}
L(f,\Delta') &= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m'_{k1}(c - x_{k-1}) + m'_{k2}(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&\ge \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(c - x_{k-1}) + m_k(x_k - c) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) \\
&= \sum_{i=1}^{k-1} m_i(x_i - x_{i-1}) + m_k(x_k - x_{k-1}) + \sum_{i=k+1}^{n} m_i(x_i - x_{i-1}) = L(f,\Delta)
\end{aligned}$$

が成立する．$M_k \ge M'_{k1}$, $M_k \ge M'_{k2}$ より，$U(f,\Delta') \le U(f,\Delta)$ も同様に示せる．□

補題 1.2 Δ と Δ' を区間 $[a,b]$ の任意の 2 つの分割とすると，$L(f,\Delta) \le U(f,\Delta')$ が成立する．

証明: Δ の分点と Δ' の分点を合わせた分点で定義される分割を Δ'' とする．すなわち分点の集合としては $\Delta'' = \Delta \cup \Delta'$ である．このとき，Δ'' は Δ と Δ' の双方の細分であるから，上の補題より

$$L(f,\Delta) \le L(f,\Delta'') \le U(f,\Delta'') \le U(f,\Delta')$$

となり証明された．□

定義 1.3 区間 $[a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ に対して，その**上積分**と**下積分**をそれぞれ，

$$\begin{aligned}
u &= \overline{\int_a^b} f(x)\,dx := \inf\{U(f,\Delta) \mid \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\} \\
\ell &= \underline{\int_a^b} f(x)\,dx := \sup\{L(f,\Delta) \mid \Delta \text{ は } [a,b] \text{ の分割 }\}
\end{aligned}$$

で定義する．すなわち，ℓ は $[a,b]$ の任意の分割 Δ に対して $\ell \ge L(f,\Delta)$ が成立するような最小の実数であり，u は $[a,b]$ の任意の分割 Δ' に対して $u \le U(f,\Delta')$ が成立するような最大の実数である．補題 1.2 より $L(f,\Delta) \le U(f,\Delta')$ であるから，まず Δ を固定して Δ' を動かして右辺の下限をとると，$L(f,\Delta) \le u$ となることがわかる．次に Δ を動かして左辺の上限をとると $\ell \le u$ を得る．従って

$$L(f,\Delta) \le \underline{\int_a^b} f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \le U(f,\Delta')$$

が任意の分割 Δ, Δ' について成立する．$f(x)$ の下積分と上積分が一致するとき，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で**可積分**であるという．このとき，この両辺の値を $f(x)$ の $[a,b]$ 上の**定積分**といい，

$$\int_a^b f(x)\,dx \quad \left(= \underline{\int_a^b} f(x)\,dx = \overline{\int_a^b} f(x)\,dx \right)$$

で表す．

例 1.4 $f(x)=x$ の区間 $[0,1]$ 上の定積分を考察しよう．区間 $[0,1]$ を n 等分する分割を Δ_n とする．すなわち Δ_n の分点は $\dfrac{i}{n}$ $(0 \le i \le n)$ である．$f(x)$ は単調増加なので，

$$M_i = \sup\{f(x)=x \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = x_i, \quad m_i = \inf\{f(x)=x \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = x_{i-1}$$

であり，上限和と下限和は

$$U(f,\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right),$$
$$L(f,\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} x_{i-1}(x_i - x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{i-1}{n}\frac{1}{n} = \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$$

よって任意の自然数 n について

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right) = L(f,\Delta_n) \le \underline{\int_0^1} x\,dx \le \overline{\int_0^1} x\,dx \le U(f,\Delta_n) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

が成立するから，$n \to \infty$ とすると

$$\underline{\int_0^1} x\,dx = \overline{\int_0^1} x\,dx = \frac{1}{2}$$

が成立することがわかる．よって上積分と下積分が一致するから，$f(x)$ は $[0,1]$ 上で可積分であり，積分の値は $\dfrac{1}{2}$ である．

問題 1 関数 $f(x)=e^x$ は区間 $[0,1]$ 上で可積分であることを，上の例のように上積分と下積分の定義に従って示し，積分値を求めよ．

命題 1.1 区間 $[a,b]$ で有界な関数 $f(x)$ が $[a,b]$ で可積分であるための必要十分条件は，任意の正の実数 ε に対して $U(f,\Delta)-L(f,\Delta)<\varepsilon$ を満たすような $[a,b]$ の分割 Δ が存在すること（すなわち，分割をうまく選べば上限和と下限和の差をいくらでも小さくできること）である．($U(f,\Delta)-L(f,\Delta)$ は 3 ページの図で薄い灰色の部分の面積に相当する．)

証明: 任意の正の ε に対して，$U(f,\Delta)-L(f,\Delta)<\varepsilon$ を満たすような $[a,b]$ の分割 Δ が存在すると仮定する．$f(x)$ の下積分を ℓ, 上積分を u とすると，定義より

$$L(f,\Delta) \le \ell \le u \le U(f,\Delta)$$

が成立する．よって $0 \le u-\ell \le U(f,\Delta)-L(f,\Delta) < \varepsilon$ となる．ε はいくらでも小さくとれるから $u=\ell$ でなければならない．よって $f(x)$ は可積分である．

逆に $f(x)$ が可積分であると仮定する．下積分と上積分の定義により，任意の $\varepsilon>0$ に対して，

$$L(f,\Delta) > \ell - \frac{1}{2}\varepsilon, \qquad U(f,\Delta') < u + \frac{1}{2}\varepsilon$$

をみたす $[a,b]$ の分割 Δ と Δ' が存在する．$f(x)$ が可積分，すなわち $\ell=u$ と仮定すると，

$$U(f,\Delta') - L(f,\Delta) < u + \frac{1}{2}\varepsilon - (\ell - \frac{1}{2}\varepsilon) = u - \ell + \varepsilon = \varepsilon$$

が成り立つ．$\Delta'' = \Delta \cup \Delta'$ とすると，補題 1.1 により $L(f,\Delta) \le L(f,\Delta'') \le U(f,\Delta'') \le U(f,\Delta')$ であるから，

$$U(f,\Delta'') - L(f,\Delta'') \le U(f,\Delta') - L(f,\Delta) < \varepsilon$$

が成立する．□

例 1.5 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で有界かつ広義単調増加 ($a \le x_1 < x_2 \le b$ ならば $f(x_1) \le f(x_2)$) であるとする.（連続であることは仮定しない.）区間 $[a,b]$ を n 等分する分割を Δ_n とする．すなわち Δ_n の分点は $x_i = a + \dfrac{(b-a)i}{n}$ $(0 \le i \le n)$ である．$f(x)$ は単調増加だから

$$M_i = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_i), \quad m_i = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} = f(x_{i-1})$$

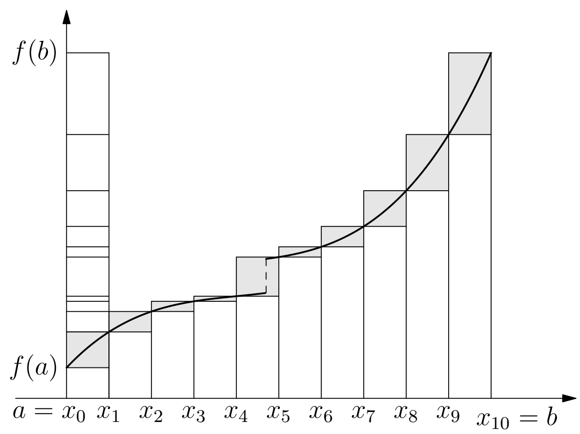
となるので，上限和と下限和は

$$U(f,\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_i),$$
$$L(f,\Delta_n) = \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})(x_i - x_{i-1}) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$$

となる．従って

$$U(f,\Delta_n) - L(f,\Delta_n) = \frac{b-a}{n}\sum_{i=1}^{n}(f(x_i) - f(x_{i-1})) = \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a))$$

であり，これは n を大きくすればいくらでも小さくできるから，$f(x)$ は $[a,b]$ 上で可積分である．(次の図を参照．図から可積分であることが計算なしでも読み取れる.）



定理 1.1 $f(x)$ が区間 $[a,b]$ で連続ならば $f(x)$ は $[a,b]$ 上可積分である．このとき，リーマン和 $S_\Delta(f)$ は $|\Delta| \to 0$ のとき $\int_a^b f(x)\,dx$ に収束する．

証明: ε を（小さい）正の実数とする．$f(x)$ は有界閉区間 $I = [a,b]$ において連続であるから，一様連続になる．すなわち，ある正の実数 δ が存在して

$$x, y \in I \text{ かつ } |x-y| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x) - f(y)| < \varepsilon \tag{1}$$

が成立する.(これは「連続と極限」で証明する.)

区間 $[a,b]$ の分割 Δ であって $|\Delta| < \delta$ をみたすものをとる．Δ の分点を $x_0, x_1, \ldots, x_n$ とする．$x, y \in [x_{i-1}, x_i]$ のとき $|x-y| < \delta$ であるから，もし x, y が小区間 $I_i := [x_{i-1}, x_i]$ に含まれれば $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ が成立する．よって，$[x_{i-1}, x_i]$ における $f(x)$ の下限（最小値）を m_i, 上限（最大値）を M_i とすれば $M_i - m_i \leq \varepsilon$ が成立する．従って，

$$U(f,\Delta) - L(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{n} (M_i - m_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \varepsilon (x_i - x_{i-1}) = (a-b)\varepsilon$$

が成立し，この右辺はいくらでも小さくできるから，$f(x)$ は可積分である．このとき，積分とリーマン和の定義により，

$$L(f,\Delta) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f,\Delta), \qquad L(f,\Delta) \leq S_\Delta(f) \leq U(f,\Delta)$$

が成立するから，以上の議論により $|\Delta| < \delta$ ならば

$$\left| S_\Delta(f) - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leq U(f,\Delta) - L(f,\Delta) \leq \varepsilon$$

が成立することが示された．よって $|\Delta| \to 0$ のとき $S_\Delta(f,\Delta)$ は $\int_a^b f(x)\,dx$ に収束する．
□

例 1.6 関数 $f(x)$ を x が有理数のとき $f(x) = 1$, x が無理数のとき $f(x) = 0$ と定義すると， $f(x)$ は区間 $[a,b]$ $(a < b)$ で可積分でない．実際 $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を $[a,b]$ の任意の分割とすると，任意の $i = 1, \ldots, n$ について，$m_i = 0$, $M_i = 1$ となるから，$\underline{\int_a^b} f(x)\,dx = 0$, $\overline{\int_a^b} f(x)\,dx = b - a$ である．($f(x)$ はすべての点で不連続である．)

命題 1.2 $f(x)$ と $g(x)$ は区間 $[a,b]$ で有界であり，$[a,b]$ 上で可積分であるとすると，次が成立する．

(1) $f(x)+g(x)$ は $[a,b]$ 上で可積分であり，$\displaystyle\int_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx.$

(2) 任意の実数 c に対して $cf(x)$ は $[a,b]$ 上で可積分であり，$\displaystyle\int_a^b cf(x)\,dx = c\int_a^b f(x)\,dx.$

(3) 任意の $x \in [a,b]$ について $f(x) \leq g(x)$ ならば，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b g(x)\,dx.$

(4) $a < c < b$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$

(5) $|f(x)|$ は $[a,b]$ 上で可積分であり，$\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,dx$

証明: (1) $\Delta = \{x_1, x_1, \ldots, x_n\}$ を区間 $[a, b]$ の分割として，

$$M_i(f) = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}, \qquad M_i(g) = \sup\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\}$$

とおくと，$x_{i-1} \le x \le x_i$ のとき $f(x) + g(x) \le M_i(f) + M_i(g)$ だから，

$$M_i(f+g) := \sup\{f(x) + g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_i\} \le M_i(f) + M_i(g)$$

が成立する．これから

$$U(f+g, \Delta) \le U(f, \Delta) + U(g, \Delta)$$

がわかる．同様にして

$$L(f+g, \Delta) \ge L(f, \Delta) + L(g, \Delta)$$

であることもわかる．よって任意の分割 Δ について

$$L(f, \Delta) + L(g, \Delta) \le L(f+g, \Delta) \le U(f+g, \Delta) \le U(f, \Delta) + U(g, \Delta)$$

が成立する． $f(x)$ と $g(x)$ は可積分だから，命題 1.1 により，任意の正の実数 ε に対して，$[a, b]$ の分割 Δ と Δ' が存在して

$$U(f, \Delta) - L(f, \Delta) < \frac{\varepsilon}{2}, \quad U(g, \Delta') - L(g, \Delta') < \frac{\varepsilon}{2}$$

が成り立つ．従って，$\Delta'' = \Delta \cup \Delta'$ とすれば，

$$\begin{aligned}
&(U(f, \Delta'') + U(g, \Delta'')) - (L(f, \Delta'') + L(g, \Delta'')) \\
&= (U(f, \Delta'') - L(f, \Delta'')) + (U(g, \Delta'') - L(g, \Delta'')) \\
&\le (U(f, \Delta) - L(f, \Delta)) + (U(g, \Delta') - L(g, \Delta')) < \varepsilon
\end{aligned}$$

となる．これと

$$L(f, \Delta'') + L(g, \Delta'') \le L(f+g, \Delta'') \le U(f+g, \Delta'') \le U(f, \Delta'') + U(g, \Delta'')$$

より，

$$U(f+g, \Delta'') - L(f+g, \Delta'') < \varepsilon$$

を得る．よって命題 1.1 より $f+g$ は R 上で可積分であり，

$$L(f, \Delta'') + L(g, \Delta'') \le \int_a^b (f(x) + g(x))\, dx \le U(f, \Delta'') + U(g, \Delta''),$$

が成立する．一方，$f(x)$ と $g(x)$ の積分の定義より

$$L(f, \Delta'') + L(g, \Delta'') \le \int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \le U(f, \Delta'') + U(g, \Delta'')$$

であるから，

$$\left| \int_a^b (f(x) + g(x))\, dx - \left(\int_a^b f(x)\, dx + \int_a^b g(x)\, dx \right) \right| < \varepsilon$$

が成立する．ε は任意の正の実数であったから，(1) の等式が成り立つことが示された．

(2) $c > 0$ のときは $M_i(cf) = cM_i(f)$, $m_i(cf) = cm_i(f)$ より明らかなので，$c = -1$ のときに示せばよい．$M_i(-f) = -m_i(f)$, $m_i(-f) = -M_i(f)$ より

$$U(-f, \Delta) = -L(f, \Delta), \quad L(-f, \Delta) = -U(f, \Delta)$$

が成立するから，

$$-U(f, \Delta) = L(-f, \Delta) \leq \underline{\int_a^b}(-f(x))\,dx \leq \overline{\int_a^b}(-f(x))\,dx \leq U(-f, \Delta) = -L(f, \Delta)$$

となる．ここで Δ を動かせば $-L(f, \Delta) + U(f, \Delta)$ はいくらでも小さくできるから，$-f(x)$ は可積分であることがわかる．一方，定義により

$$-U(f, \Delta) \leq -\int_a^b f(x)\,dx \leq -L(f, \Delta)$$

も成立するから，$\int_a^b (-f(x))\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$ が示された．

(3) $m_i(f) \leq m_i(g)$, $M_i(f) \leq M_i(g)$ より明らか．

(4) Δ' を区間 $[a, c]$ の分割，Δ'' を区間 $[c, b]$ の分割とする．このとき，$\Delta = \Delta' \cup \Delta''$ は区間 $[a, b]$ の分割となり，上限和，下限和の定義から，

$$U(f, \Delta) = U(f, \Delta') + U(f, \Delta''), \qquad L(f, \Delta) = L(f, \Delta') + L(f, \Delta'')$$

が成立することがわかる．

$$(U(f, \Delta') - L(f, \Delta')) + (U(f, \Delta'') - L(f, \Delta'')) = U(f, \Delta) - L(f, \Delta)$$

より，

$$0 \leq U(f, \Delta') - L(f, \Delta') \leq U(f, \Delta) - L(f, \Delta), \quad 0 \leq U(f, \Delta'') - L(f, \Delta'') \leq U(f, \Delta) - L(f, \Delta)$$

となることがわかるから，f は区間 $[a, c]$ 上と $[c, b]$ 上で可積分である．さらに，

$$L(f, \Delta) = L(f, \Delta') + L(f, \Delta'') \leq \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx \leq U(f, \Delta') + U(f, \Delta'') = U(f, \Delta)$$

と $L(f, \Delta) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq U(f, \Delta)$ が成り立つから，(4) が示された．

(5) $\Delta = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ を区間 $[a, b]$ の分割とする．$M_i(f) = \sup\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$, $m_i(f) = \inf\{f(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$ とおくと，$x_{i-1} \leq x, y \leq x_i$ のとき

$$|f(x)| - |f(y)| \leq |f(x) - f(y)| \leq M_i(f) - m_i(f)$$

が成立するので，

$$M_i(|f|) - m_i(|f|) \leq M_i(f) - m_i(f)$$

を得る．これから，

$$
\begin{aligned}
U(|f|,\Delta)-L(|f|,\Delta) &= \sum_{i=1}^{n}(M_i(|f|)-m_i(|f|))(x_i-x_{i-1}) \\
&\le \sum_{i=1}^{n}(M_i(f)-m_i(f))(x_i-x_{i-1}) = U(f,\Delta)-L(f,\Delta)
\end{aligned}
$$

という不等式が導かれる．$f(x)$ が可積分なことと命題1.1より $|f(x)|$ も可積分であることがわかる．次に (5) の不等式を示そう．$x_{i-1}\le x\le x_i$ のとき，$-M_i(|f|)\le f(x)\le M_i(|f|)$ であるから，

$$
-U(|f|,\Delta)\le L(f,\Delta)\le \int_a^b f(x)\,dx \le U(f,\Delta)\le U(|f|,\Delta)
$$

を得る．ここで $U(|f|,\Delta)$ の Δ を動かしたときの下限をとれば，

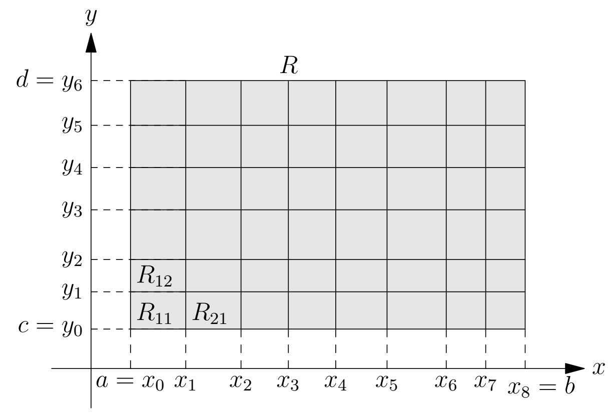
$$
-\int_a^b |f(x)|\,dx = -\overline{\int_a^b}|f(x)|\,dx \le \int_a^b f(x)\,dx \le \overline{\int_a^b}|f(x)|\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx
$$

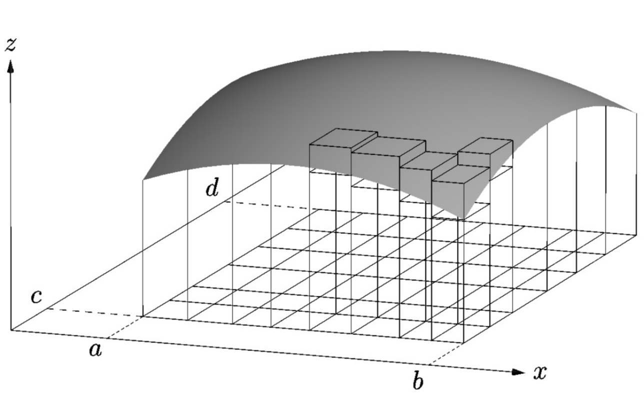
となり，(5) が示された．□

2　長方形上の2重積分

$f(x,y)$ を長方形 $R=[a,b]\times[c,d]\subset\mathbb{R}^2$ で定義された有界関数，すなわち，ある正の実数 M があって，$|f(x,y)|\le M$ が任意の $(x,y)\in R$ について成立するとする．(長方形 R と実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を混同しないこと．) R の分割 Δ とは，$a=x_0<x_1<\cdots<x_p=b$ を満たす区間 $[a,b]$ の分点 $x_0,x_1,\ldots,x_p$ (x 分点と呼ぶ）と $c=y_0<y_1<\cdots<y_q=d$ を満たす区間 $[c,d]$ の分点 $y_0,y_1,\ldots,y_q$ (y 分点と呼ぶ）を合わせたもののことである．

この分割 Δ によって pq 個の小長方形 $R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ $(i=1,\ldots,p,\ j=1,\ldots,q)$ が定まる．R_{ij} の面積を $|R_{ij}|=(x_i-x_{i-1})(y_j-y_{j-1})$ とする．





$$
M_{ij}=\sup\{f(x,y)\mid (x,y)\in R_{ij}\},\qquad m_{ij}=\inf\{f(x,y)\mid (x,y)\in R_{ij}\}
$$

とおいて，$f(x,y)$ の R 上の**上限和**と**下限和**をそれぞれ

$$U(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}M_{ij}|R_{ij}|,\qquad L(f,\Delta)=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}m_{ij}|R_{ij}|$$

で定義する．

次の補題は 1 次元の場合 (補題 1.2) と同様に証明できる．

補題 2.1 R の任意の 2 つの分割 Δ,Δ' に対して，$L(f,\Delta)\le U(f,\Delta')$ が成立する．

そこで，$f(x,y)$ の R 上の**上積分**と**下積分**をそれぞれ

$$\overline{\iint_R} f(x,y)\,dxdy=\inf\{U(f,\Delta)\mid \Delta \text{ は } R \text{ の分割}\},$$

$$\underline{\iint_R} f(x,y)\,dxdy=\sup\{L(f,\Delta)\mid \Delta \text{ は } R \text{ の分割}\}$$

と定義すると，下積分の値は上積分の値以下である．上積分と下積分の値が一致するとき，$f(x,y)$ は R 上で**可積分**であるといい，上積分（= 下積分) の値を $f(x,y)$ の R 上の **(2 重）積分**といい，

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy=\underline{\iint_R} f(x,y)\,dxdy=\overline{\iint_R} f(x,y)\,dxdy$$

と表す.（ここでは，2 重積分であることを強調するために積分記号を 2 本並べているが，1 変数のときと同じく 1 本で済ませる場合も多い.）

例 2.1 $R=[0,1]\times[0,1]$ として，$f(x,y)=x+y$ とおく．Δ_n を R を n^2 等分する分割，すなわち x 分点 $x_i=i/n$ $(i=0,1,\dots,n)$, y 分点 $y_j=j/n$ $(j=0,1,\dots,n)$ から決まる分割とする．$f(x,y)$ は一つの変数を固定するとき，他の変数について単調増加であるから，

$$M_{ij}=\sup\{f(x,y)\mid (x,y)\in R_{ij}\}=x_i+y_j,\quad m_{ij}=\inf\{f(x,y)\mid (x,y)\in R_{ij}\}=x_{i-1}+y_{j-1}$$

となる．よって上限和と下限和は

$$\begin{aligned}
U(f,\Delta_n)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_i+y_j)|R_{ij}|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{n}\frac{1}{n^2}=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}i+\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}j\\
&=\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}ni+\frac{1}{n^3}\sum_{i=1}^{n}\frac{n(n+1)}{2}=\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}+\frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2}=1+\frac{1}{n},\\
L(f,\Delta_n)&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(x_{i-1}+y_{j-1})|R_{ij}|=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j-2}{n}\frac{1}{n^2}\\
&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{i+j}{n}\frac{1}{n^2}-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{2}{n}\frac{1}{n^2}=U(f,\Delta_n)-\frac{2}{n}=1-\frac{1}{n}
\end{aligned}$$

従って，

$$1-\frac{1}{n}=L(f,\Delta_n)\le \underline{\iint_R}(x+y)\,dxdy\le \overline{\iint_R}(x+y)\,dxdy\le U(f,\Delta_n)=1+\frac{1}{n}$$

が任意の自然数 n について成立するから，$n\to\infty$ とすれば，上積分と下積分の値は共に 1 であり，$f(x,y)$ は R 上で可積分で，

$$\iint_R(x+y)\,dxdy=\underline{\iint_R}(x+y)\,dxdy=\overline{\iint_R}(x+y)\,dxdy=1$$

となることがわかる．

問題 2 関数 $f(x,y)=e^{x+y}$ は $R=[0,1]\times[0,1]$ 上で可積分であることを定義に従って示し，積分の値を求めよ．

次の命題も 1 変数の場合 (命題 1.1) と同様に証明できる．

命題 2.1 長方形 R で有界な関数 $f(x,y)$ が R 上で可積分であるための必要十分条件は，任意の正の実数 ε に対して $U(f,\Delta)-L(f,\Delta)<\varepsilon$ を満たすような R の分割 Δ が存在することである．

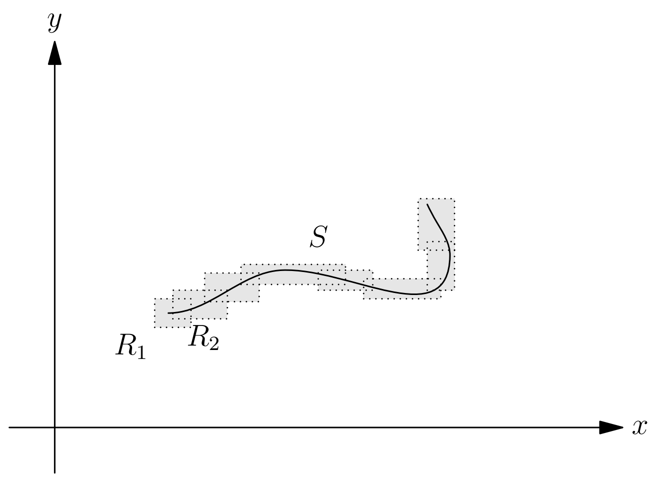
関数 $f(x,y)$ が R 上可積分になるための（十分）条件を考察しよう．そのために，まず面積 0 の集合を定義する．$\mathbb{R}^2$ の一般の部分集合の面積は，後で重積分を用いて定義する．

定義 2.1 S を $\mathbb{R}^2$ の有界集合，すなわち $\mathbb{R}^2$ のある長方形に含まれるような集合とする．S が**面積** 0 であるとは，任意の正の実数 $\varepsilon>0$ に対して，有限個の（辺が座標軸に平行であるような）長方形 $R_1,\dots,R_N$ が存在して，

(1) $S\subset R_1^\circ\cup R_2^\circ\cup\cdots\cup R_N^\circ$ 　　(R_k° は R_k の内部（境界を除いた集合）を表す)

(2) $|R_1|+|R_2|+\cdots+|R_N|<\varepsilon$

が成立することと定義する．すなわち，面積の和がいくらでも小さくなるように有限個の長方形（の内部）で S を覆えることである．なお，(1) において $R_1^\circ,\dots,R_N^\circ$ を $R_1,\dots,R_N$ としても同値な条件となる．



定理 2.1 $f(x,y)$ を長方形 R で有界な関数とする．R の部分集合 S であって面積 0 であるようなものが存在して，$f(x,y)$ は $R\setminus S$ で連続であるとすると，$f(x,y)$ は R 上可積分である．

証明: $f(x,y)$ は R で有界だから，ある実数 $M \geq 0$ があって，$|f(x,y)| \leq M$ が任意の $(x,y) \in R$ について成立する．ε を任意の正の実数とする．S は面積 0 だから，

$$S \subset R_1^\circ \cup R_2^\circ \cup \cdots \cup R_N^\circ, \qquad |R_1| + |R_2| + \cdots + |R_N| < \frac{\varepsilon}{4M}$$

を満たすような長方形 $R_1, \ldots, R_N \subset R$ が存在する．

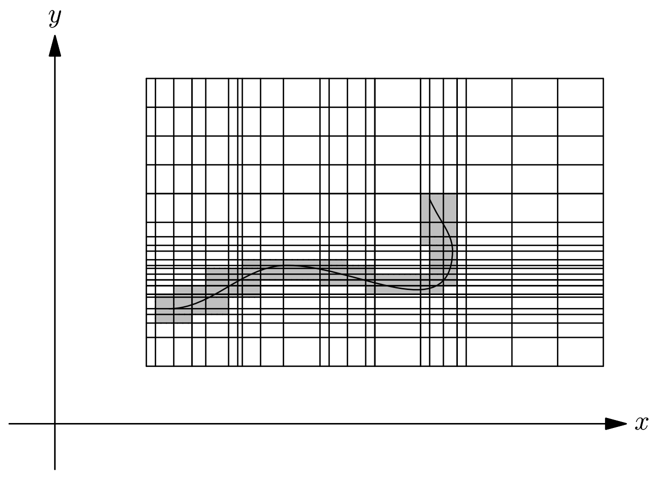
$f(x,y)$ は有界閉集合

$$R' := R \setminus (R_1^\circ \cup \cdots \cup R_N^\circ)$$

で連続だから，R' で一様連続であり（「連続と極限」で証明する），ある正の実数 δ が存在して，

$$(x,y) \in R',\ (x',y') \in R',\ \|(x,y)-(x',y')\| < \delta \quad \Rightarrow \quad |f(x,y)-f(x',y')| < \frac{\varepsilon}{2|R|}$$

が成立する．R の分割 Δ を，x 分点は $R_1, \ldots, R_N$ の頂点の x 座標を含み，y 分点は $R_1, \ldots, R_N$ の頂点の y 座標を含み，この分割 Δ でできる小長方形 R_{ij} $(1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q)$ の対角線の長さがどれも δ より小さくなるようにとる．



R_{ij} が R' に含まれるとき，$(x,y),(x',y') \in R_{ij}$ ならば $\|(x,y)-(x',y')\| < \delta$ より $|f(x,y)-f(x',y')| < \dfrac{\varepsilon}{2|R|}$ であるから，

$$M_{ij} - m_{ij} \leq \frac{\varepsilon}{2|R|}$$

が成立する．また R_{ij} が $R_1, \ldots, R_N$ のどれかに含まれるときは $-M \leq m_{ij} \leq M_{ij} \leq M$ より $M_{ij} - m_{ij} \leq 2M$ である．$R_{ij} \subset R_1 \cup \cdots \cup R_N$ となるような R_{ij} の面積の和は

$|R_1|+\cdots+|R_N|$ 以下であるから，

$$\begin{aligned} U(f,\Delta)-L(f,\Delta) &= \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}(M_{ij}-m_{ij})|R_{ij}| \\ &\le \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\frac{\varepsilon}{2|R|}|R_{ij}|+2M(|R_1|+\cdots+|R_N|) \\ &\le \frac{\varepsilon}{2|R|}|R|+2M\frac{\varepsilon}{4M}=\varepsilon \end{aligned}$$

を得る．よって命題 2.1 により $f(x,y)$ は R 上可積分である．□

次の命題は 1 変数の場合と同様に証明できる．

命題 2.2 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ は長方形 R で有界であり，R 上で可積分であるとすると，次が成立する．

(1) $f(x,y)+g(x,y)$ は R 上で可積分であり，
$$\iint_R (f(x,y)+g(x,y))\,dxdy=\iint_R f(x,y)\,dxdy+\iint_R g(x,y)\,dxdy.$$

(2) 任意の実数 c に対して $cf(x,y)$ は R 上で可積分であり，
$$\iint_R cf(x,y)\,dxdy=c\iint_R f(x,y)\,dxdy.$$

(3) 任意の $(x,y)\in R$ について $f(x,y)\le g(x,y)$ ならば，
$$\iint_R f(x,y)\,dxdy\le\iint_R g(x,y)\,dxdy.$$

(4) $|f(x,y)|$ は R 上で可積分であり，$\left|\iint_R f(x,y)\,dxdy\right|\le\iint_R |f(x,y)|\,dxdy$

3 一般の有界領域上の 2 重積分

D を $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合とし，$f(x,y)$ を D で有界な関数とする．D を含むような長方形 R を 1 つ固定する．R 上の関数 $\tilde{f}(x,y)$ を

$$\tilde{f}(x,y)=\begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\in D \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y)\in R\setminus D \text{ のとき}) \end{cases}$$

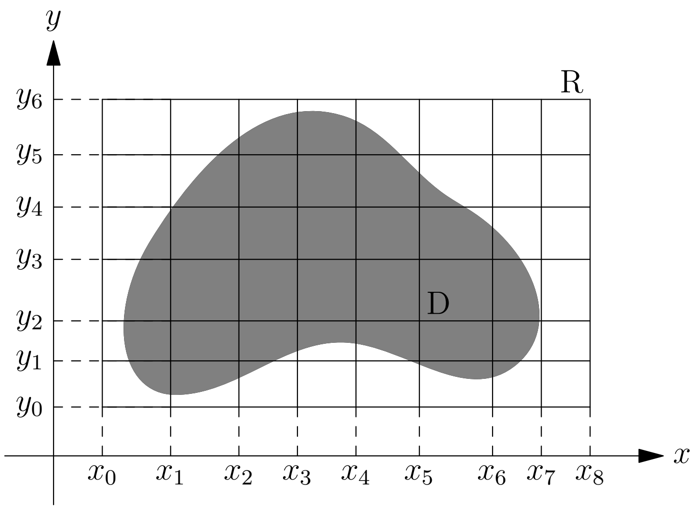
と定義する．そして，$f(x,y)$ の D 上の上積分と下積分を

$$\overline{\iint_D} f(x,y)\,dxdy=\overline{\iint_R}\tilde{f}(x,y)\,dxdy,\qquad \underline{\iint_D} f(x,y)\,dxdy=\underline{\iint_R}\tilde{f}(x,y)\,dxdy$$

で定義する．この両者が一致するとき，$f(x,y)$ は D 上で**可積分**であるといい，この上積分 (=下積分) の値を $f(x,y)$ の D 上の**（2 重）積分**と呼び，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy$$

と表す．以上の定義が D を含むような長方形 R の選び方によらないことは，$\tilde{f}(x,y)$ の値が $R\setminus D$ で 0 であることから明らかであろう．



まず，D の面積を正確に定義しよう．

定義 3.1 D を $\mathbb{R}^2$ の有界集合とする．D の**特性関数** $\chi_D(x,y)$ を

$$\chi_D(x,y) = \begin{cases} 1 & ((x,y) \in D \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus D \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．D を含む長方形 R を 1 つ固定する．$\chi_D(x,y)$ が R 上可積分であるとき，D は**面積確定**であるといい，

$$|D| := \iint_R \chi_D(x,y)\,dxdy = \iint_D 1\,dxdy$$

のことを D の**面積**（または 2 次元測度）と定義する．

D を含む長方形 $R = [a,b]\times[c,d]$ の分割 Δ による小長方形を R_{ij} $(1 \le i \le p, 1 \le j \le q)$ とすると，

$$M_{ij}(\chi_D) := \sup\{\chi_D(x,y) \mid (x,y) \in D\} = \begin{cases} 1 & (R_{ij} \cap D \neq \emptyset \text{ のとき}) \\ 0 & (R_{ij} \cap D = \emptyset \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$m_{ij}(\chi_D) := \inf\{\chi_D(x,y) \mid (x,y) \in D\} = \begin{cases} 1 & (R_{ij} \subset D \text{ のとき}) \\ 0 & (R_{ij} \not\subset D \text{ のとき}) \end{cases}$$

であるから，χ_D の上限和と下限和はそれぞれ

$$U(\chi_D, \Delta) = \sum_{R_{ij} \cap D \neq \emptyset} |R_{ij}| \quad (D \text{ と交わるような } R_{ij} \text{ の面積の和}),$$

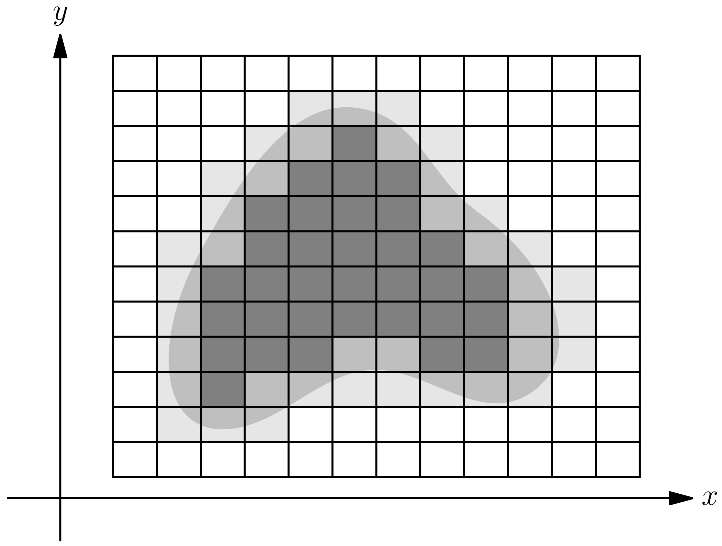
$$L(\chi_D, \Delta) = \sum_{R_{ij} \subset D} |R_{ij}| \quad (D \text{ に含まれるような } R_{ij} \text{ の面積の和}),$$

となる．従って，D が面積確定であるための必要十分条件は，任意の正の実数 ε に対して，D と交わるが D には含まれないような小長方形 R_{ij} の面積の和が ε よりも小さくなるような R の分割 Δ が存在することである． このとき，D の境界 ∂D は，このよう

な小長方形で覆われるから，∂D は面積 0 である．またこのとき，R の任意の分割 Δ について

$$L(\chi_D, \Delta) \leq |D| \leq U(\chi_D, \Delta)$$

が成立する．



$L(\chi_D, \Delta) =$ 濃い灰色の部分の面積
$U(\chi_D, \Delta) =$ (薄い灰色 + 濃い灰色) の部分の面積

定理 3.1 関数 $f(x, y)$ が $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合 D で連続であり D の境界 ∂D が面積 0 ならば，$f(x, y)$ は D 上で可積分である．

証明: D を含む長方形 R をとると，$\tilde{f}(x, y)$ は R 上で有界であり，D の境界 ∂D 以外では連続である．よって定理 2.1 より $\tilde{f}(x, y)$ は R 上で可積分であるから，$f(x, y)$ は D 上で可積分である． □

系 3.1 $\mathbb{R}^2$ の有界な部分集合 D が面積確定であるための必要十分条件は，D の境界 ∂D が面積 0 であることである．

証明: D が面積確定ならば ∂D が面積 0 であることは上で示した．逆に ∂D が面積 0 ならば，定理により χ_D は D を含む長方形 R 上で可積分である．従って定義により D は面積確定である．□

次の命題は命題 2.2 と D 上の積分の定義から容易に導くことができる．

命題 3.1 D は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合で面積確定とする．D で定義された有界関数 $f(x, y)$ と $g(x, y)$ が D 上で可積分であるとすると，次が成立する．

(1) $f(x, y) + g(x, y)$ は D 上で可積分であり，
$$\iint_D (f(x, y) + g(x, y))\, dxdy = \iint_D f(x, y)\, dxdy + \iint_D g(x, y)\, dxdy.$$

(2) 任意の実数 c に対して $cf(x, y)$ は D 上で可積分であり，
$$\iint_D cf(x, y)\, dxdy = c \iint_D f(x, y)\, dxdy.$$

(3) 任意の $(x,y)\in D$ について $f(x,y)\le g(x,y)$ ならば，
$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy \le \iint_D g(x,y)\,dxdy.$

(4) $|f(x,y)|$ は D 上で可積分であり，$\displaystyle\left|\iint_D f(x,y)\,dxdy\right| \le \iint_D |f(x,y)|\,dxdy$

問題 3

$$D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1\}$$

とおく．(D は正方形 $R=[0,1]\times[0,1]$ に含まれる．)

(1) D は面積確定であることを示し，その面積を定義に従って求めよ.（ヒント: $[0,1]$ と $[0,1]$ をそれぞれ n 等分してできる R の分割 Δ_n を用いる.）

(2) $f(x,y)=x+y$ は D 上で積分可能であることを示し，$\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ の値を定義に従って求めよ.

4 累次積分

重積分の値を定義に従って求めることは一般には困難である．そこで，適当な条件の下で，重積分を 1 変数関数の定積分を 2 回行うこと（累次積分）により計算できることを示す.

定理 4.1 (Fubini の定理) $f(x,y)$ を長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ で定義された有界関数として，次の 2 つの条件を仮定する.

(1) $f(x,y)$ は 2 変数関数として R 上可積分である.

(2) 任意の $x\in[a,b]$ を固定したとき，$f(x,y)$ はy の関数として区間 $[c,d]$ で可積分である.

このとき，$g(x)=\displaystyle\int_c^d f(x,y)\,dy$ とおくと， $g(x)$ は区間 $[a,b]$ で可積分であり次の公式（累次積分）が成立する.

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy=\int_a^b g(x)\,dx=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx$$

証明: x 分点 $a=x_0<x_1<\cdots<x_p=b$ と y 分点 $c=y_0<y_1<\cdots<y_q=d$ から定まる R の分割を Δ とする．$R_{ij}=[x_{i-1},x_i]\times[y_{j-1},y_j]$ として

$$M_{ij}=\sup\{f(x,y)\mid (x,y)\in R_{ij}\},\qquad m_{ij}=\inf\{f(x,y)\mid (x,y)\in R_{ij}\}$$

とおく．$x_{i-1}\le x\le x_i$ かつ $y_{j-1}\le y\le y_j$ のとき，

$$m_{ij}\le f(x,y)\le M_{ij}$$

であるから，変数 y について $[y_{j-1}, y_j]$ 上の積分を考えると

$$m_{ij}(y_j - y_{j-1}) = \int_{y_{j-1}}^{y_j} m_{ij}\,dy \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy \leq \int_{y_{j-1}}^{y_j} M_{ij}\,dy = M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

が成立する．ここで $j = 1, \ldots, q$ として和をとれば，$x_{i-1} \leq x \leq x_i$ のとき

$$\sum_{j=1}^{q} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq \sum_{j=1}^{q} \int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x,y)\,dy = \int_c^d f(x,y)\,dy = g(x) \leq \sum_{j=1}^{q} M_{ij}(y_j - y_{j-1})$$

が成立することがわかる．よって，

$$m_i(g) = \inf\{g(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}, \quad M_i(g) = \sup\{g(x) \mid x_{i-1} \leq x \leq x_i\}$$

とおけば，

$$\sum_{j=1}^{q} m_{ij}(y_j - y_{j-1}) \leq m_i(g) \leq M_i(g) \leq \sum_{j=1}^{q} M_{ij}(y_{j-1} - y_j)$$

となる．これに $x_i - x_{i-1}$ を掛けて $i = 1, \ldots, p$ とした和をとれば，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} m_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) &\leq \sum_{i=1}^{p} m_i(g)(x_i - x_{i-1}) \\ &\leq \sum_{i=1}^{p} M_i(g)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q} M_{ij}(x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})\end{aligned}$$

すなわち

$$L(f, \Delta) \leq L(g, \Delta_1) \leq U(g, \Delta_1) \leq U(f, \Delta) \tag{2}$$

が成立する．ただし，Δ_1 は $x_0, x_1, \ldots, x_p$ の定める区間 $[a, b]$ の分割を表す．

仮定により $f(x,y)$ は R 上で可積分であるから，任意の正の実数 ε に対して，$U(f,\Delta) - L(f,\Delta) < \varepsilon$ となるような R の分割 Δ が存在する．このとき，(2) より

$$U(g, \Delta_1) - L(g, \Delta_1) \leq U(f, \Delta) - L(f, \Delta) < \varepsilon$$

が成立する．従って $g(x)$ は $[a, b]$ 上で可積分である．(2) より，

$$L(f, \Delta) \leq L(g, \Delta_1) \leq \int_a^b g(x)\,dx \leq U(g, \Delta_1) \leq U(f, \Delta)$$

が成立し，また 2 重積分の定義より

$$L(f, \Delta) \leq \iint_R f(x,y)\,dxdy \leq U(f, \Delta)$$

も成立するから，

$$\left| \int_a^b g(x)\,dx - \iint_R f(x,y)\,dxdy \right| < \varepsilon,$$

を得る．$\varepsilon > 0$ はいくらでも小さくとれるから，

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy = \int_a^b g(x)\,dx$$

が示された．□

系 4.1 (累次積分) $f(x,y)$ が長方形 $R=[a,b]\times[c,d]$ で連続ならば,

$$\iint_R f(x,y)\,dxdy=\int_a^b\left(\int_c^d f(x,y)\,dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_a^b f(x,y)\,dx\right)dy$$

が成立する.

証明: $f(x,y)$ は連続だから R 上で可積分である．また，x (または y) を止めたとき，y (または x）について連続であるから，y（または x) について $[a,b]$ 上で（または $[c,d]$ 上で）可積分である．よって Fubini の定理により最初の等式が成り立つ．x と y を入れ替えて Fubini の定理を用いれば 2 番目の等式が導かれる．□

例 4.1 $f(x,y)=(x-y)^2$, $R=[0,2]\times[0,1]$ とする．$f(x,y)$ は R で連続だから累次積分により,

$$\begin{aligned}\iint_R f(x,y)\,dxdy&=\int_0^2\left(\int_0^1 f(x,y)\,dy\right)dx=\int_0^2\left(\int_0^1(x-y)^2\,dy\right)dx\\&=\int_0^2\left[-\frac{1}{3}(x-y)^3\right]_{y=0}^{y=1}dx=-\frac{1}{3}\int_0^2\left\{(x-1)^3-x^3\right\}dx\\&=-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{4}(x-1)^4-\frac{1}{4}x^4\right]_0^2=\frac{4}{3}\end{aligned}$$

問題 4 累次積分を用いて次の 2 重積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\iint_R e^{x+y}\,dxdy, \qquad R=[0,1]\times[0,1]$

(2) $\displaystyle\iint_R \frac{1}{x+y+1}\,dxdy, \qquad R=[0,a]\times[0,b] \quad (a,b>0)$

(3) $\displaystyle\iint_R \sin(x-y)\,dxdy, \qquad R=\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$

(4) $\displaystyle\iint_R \log(x+y)\,dxdy, \qquad R=[0,1]\times[1,2]$

次に一般の有界領域上の 2 重積分を考察しよう.

定義 4.1 D を $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合とする.

(1) D が**縦線領域**であるとは，ある区間 $[a,b]$ で連続な 2 つの関数 $g_1(x)$ と $g_2(x)$ であって，$g_1(x)\le g_2(x)$ $(a\le\forall x\le b)$ を満たすものが存在して

$$D=\{(x,y)\mid a\le x\le b,\ g_1(x)\le y\le g_2(x)\}$$

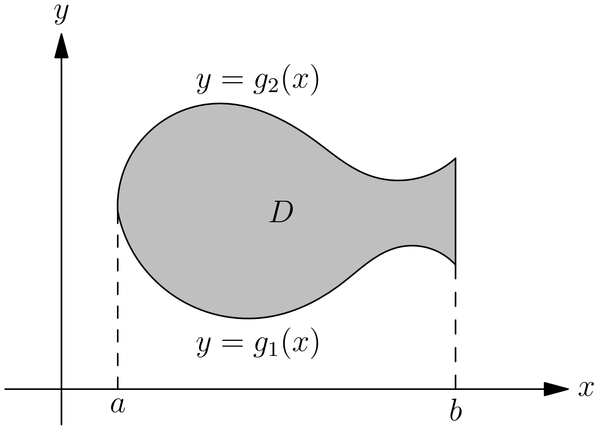
と表されることである.

(2) D が**横線領域**であるとは，ある区間 $[c,d]$ で連続な 2 つの関数 $h_1(y)$ と $h_2(y)$ であって，$h_1(y) \le h_2(y)$ $(c \le \forall y \le d)$ を満たすものが存在して

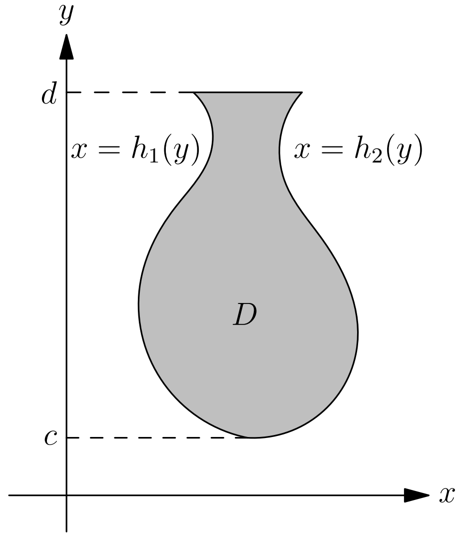
$$D = \{(x,y) \mid c \le y \le d,\ h_1(y) \le x \le h_2(y)\}$$

と表されることである．

縦線領域



横線領域



例 4.2 原点を中心とする半径 $a > 0$ の閉円板（円周とその内部） D は

$$\begin{aligned} D &= \{(x,y) \mid -a \le x \le a,\ g_1(x) = -\sqrt{a^2-x^2} \le y \le \sqrt{a^2-x^2} = g_2(x)\} \\ &= \{(x,y) \mid -a \le y \le a,\ h_1(y) = -\sqrt{a^2-y^2} \le x \le \sqrt{a^2-y^2} = h_2(y)\} \end{aligned}$$

と表せるから，縦線領域かつ横線領域である．

命題 4.1 $g(x)$ を区間 $[a,b]$ で定義された連続関数とすると，$y = g(x)$ のグラフ

$$G = \{(x, g(x)) \mid a \le x \le b\}$$

は面積 0 である．

証明: ε を任意の正の実数とする．$g(x)$ は区間 $[a,b]$ で一様連続であるから，ある正の実数 δ が存在して

$$x_1, x_2 \in [a,b] \text{ かつ } |x_1 - x_2| < \delta \text{ ならば } |g(x_1) - g(x_2)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

が成立する．$(b-a)/n < \delta$ となるような自然数 n をとって，$x_i = a + (b-a)\dfrac{i}{n}$ $(0 \le i \le n)$ として，

$$M_i = \max\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_k\}, \qquad m_i = \min\{g(x) \mid x_{i-1} \le x \le x_k\} \qquad (1 \le i \le n)$$

とおくと，$M_i - m_i \le \varepsilon/(b-a)$ である．$x_{i-1} \le x \le x_i$ のとき

$$(x, g(x)) \in R_i := [x_{i-1}, x_i] \times [m_i, M_i]$$

となるから

$$G \subset R_1 \cup R_2 \cup \cdots \cup R_n, \qquad \sum_{i=1}^{n} |R_i| = \sum_{i=1}^{n} \frac{b-a}{n}(M_i - m_i) < (b-a)\frac{\varepsilon}{b-a} = \varepsilon$$

が成立する．従って G は面積 0 である．(正確には，各 R_i を少し膨らませて G が R_i $(i=1,\ldots,n)$ の内部で覆われるようにする必要がある．) □

命題 4.2 D が縦線領域または横線領域ならば，D は面積確定である．

証明: D を縦線領域とすると，区間 $[a,b]$ で連続な 2 つの関数 $g_1(x)$ と $g_2(x)$ であって，$g_1(x) \le g_2(x)$ $(a \le \forall x \le b)$ を満たすものが存在して

$$D = \{(x,y) \mid a \le x \le b,\ g_1(x) \le y \le g_2(x)\}$$

と表される．D の境界が面積 0 であることを示せばよい．D の境界 ∂D は 4 つの部分からなる．そのうち

$$\{(x, g_1(x)) \mid a \le x \le b\}, \quad \{(x, g_2(x)) \mid a \le x \le b\}$$

の 2 つは命題4.1によって面積0である．他の 2 つの部分は線分 $\{(a,y) \mid g_1(a) \le y \le g_2(a)\}$ と $\{(b,y) \mid g_1(b) \le y \le g_2(b)\}$ であり，x と y を入れ替えれば定数関数のグラフになっているから，やはり命題4.1により面積0である．□

定理 4.2 (1) D を定義 4.1 の (1) のように表示される縦線領域とする．$f(x,y)$ が D で連続であれば，$f(x,y)$ は D 上で可積分であり，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy \right) dx$$

が成立する．

(2) D を定義 4.1 の (2) のように表示される横線領域とする．$f(x,y)$ が D で連続であれば，$f(x,y)$ は D 上で可積分であり，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \int_c^d \left(\int_{h_1(x)}^{h_2(x)} f(x,y)\,dx \right) dy$$

が成立する．

証明: (1) を証明すれば十分である．((2) は (1) で x と y を入れ替えればよい．)

$$M := \max\{g_2(x) \mid a \le x \le b\}, \quad m := \min\{g_1(x) \mid a \le x \le b\}$$

として $R = [a,b] \times [m,M]$ とおき，R 上の関数 $\tilde{f}(x,y)$ を

$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ((x,y) \in D \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) \in R \setminus D \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．$\tilde{f}(x,y)$ は $R \setminus \partial D$ で連続であり，∂D は命題 4.2 により面積 0 であるから，定理 2.1 により $\tilde{f}(x,y)$ は R 上で可積分である．$a \leq x \leq b$ の範囲で x を固定すると $\tilde{f}(x,y)$ は y の関数として区間 $[m,M]$ において $y = g_1(x)$ と $y = g_2(x)$ の 2 点を除いて連続である．従って定理 1.1 により $\tilde{f}(x,y)$ は y について区間 $[m,M]$ で可積分である．以上のことと定理 4.1 により，

$$\begin{aligned}
\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_R \tilde{f}(x,y)\,dxdy = \int_a^b \left(\int_m^M \tilde{f}(x,y)\,dy\right)dx \\
&= \int_a^b \left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)\,dy\right)dx
\end{aligned}$$

が成立する．この最後の等式は，$g_1(x) \leq y \leq g_2(x)$ のとき $\tilde{f}(x,y) = f(x,y)$ であり，そうでないときは $\tilde{f}(x,y) = 0$ であることからわかる．□

例 **4.3** a, b を正の実数として，

$$\iint_D (x+y)\,dxdy, \qquad D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\, \frac{x}{a} + \frac{y}{b} \leq 1\right\}$$

を求めよう．

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq a,\, 0 \leq y \leq b\left(1 - \frac{x}{a}\right)\right\}$$

と表せるから，累次積分（定理 4.2 の (1)）により

$$\begin{aligned}
\iint_D (x+y)\,dxdy &= \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} (x+y)\,dy\right)dx = \int_0^a \left[xy + \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=b(1-\frac{x}{a})} dx \\
&= \int_0^a \left\{b\left(1-\frac{x}{a}\right)x + \frac{1}{2}b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2\right\}dx \\
&= \int_0^a \left\{\left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{b}{a}\right)x^2 + \left(b - \frac{b^2}{a}\right)x + \frac{1}{2}b^2\right\}dx \\
&= \frac{1}{3}\left(\frac{b^2}{2a^2} - \frac{b}{a}\right)a^3 + \frac{1}{2}\left(b - \frac{b^2}{a}\right)a^2 + \frac{1}{2}ab^2 = \frac{1}{6}ab(a+b)
\end{aligned}$$

となる．この計算はかなり煩雑である．次のように工夫すると少し簡単になる．まず，

$$\begin{aligned}
\iint_D y\,dxdy &= \int_0^a \left(\int_0^{b(1-\frac{x}{a})} y\,dy\right)dx = \int_0^a \frac{1}{2}b^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^2 dx \\
&= \left[-\frac{1}{6}ab^2\left(1-\frac{x}{a}\right)^3\right]_0^a = \frac{1}{6}ab^2
\end{aligned}$$

次に $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq y \leq b,\, 0 \leq x \leq a\left(1 - \frac{y}{b}\right)\right\}$ と表せることに注意して，最初に x について積分すると，

$$\begin{aligned}
\iint_D x\,dxdy &= \int_0^b \left(\int_0^{a(1-\frac{y}{b})} x\,dx\right)dy = \int_0^b \frac{1}{2}a^2\left(1-\frac{y}{b}\right)^2 dy \\
&= \left[-\frac{1}{6}a^2b\left(1-\frac{y}{b}\right)^3\right]_0^b = \frac{1}{6}a^2b
\end{aligned}$$

を得る.（これは上の積分で x と y, a と b を入れ替えたものであるから，計算しなくてもわかる.）以上により

$$\iint_D (x+y)\,dxdy = \iint_D x\,dxdy + \iint_D y\,dxdy = \frac{1}{6}a^2b + \frac{1}{6}ab^2 = \frac{1}{6}ab(a+b)$$

積分領域 D が縦線領域かつ横線領域である場合には，上の例のように 2 重積分を 2 通りの累次積分で計算することができる．これを逆に用いると累次積分の順序交換ができる．

例 4.4 累次積分 $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right) dy$ はこのままでは計算できないが，

$$D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \le y \le x \le 1\}$$

とおくと，

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(\int_y^1 e^{x^2}\,dx\right) dy &= \iint_D e^{x^2}\,dxdy = \int_0^1 \left(\int_0^x e^{x^2}\,dy\right) dx \\ &= \int_0^1 xe^{x^2}\,dx = \left[\frac{1}{2}e^{x^2}\right]_0^1 = \frac{e-1}{2}\end{aligned}$$

問題 5 累次積分により次の 2 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D e^{x+y}\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x+y \le 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D xe^{y}\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ x+y \le 1,\ x-y \le 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D x^2y\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le 1,\ x^2 \le y \le x\}$

(4) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{x+y}\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x+y \ge 1,\ x \le 1,\ y \le 1\}$

(5) $\displaystyle\iint_D \sqrt{y-x}\,dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid x+y \le 1,\ y \ge x \ge 0\}$

問題 6 積分順序を交換して次の累次積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\int_0^1 \left(\int_x^1 \sqrt{1-y^2}\,dy\right) dx \qquad$ (2) $\displaystyle\int_0^{\pi/2} \left(\int_y^{\pi/2} \frac{\sin x}{x}\,dx\right) dy$

問題 7 D を定義 4.1 の (1) のように表される縦線領域とするとき，D の面積 $|D|$ は

$$|D| = \int_a^b \{g_2(x) - g_1(x)\}\,dx$$

と表されることを 2 重積分による面積の定義と累次積分を用いて証明せよ．

問題 8 D を $\mathbb{R}^2$ の面積確定の有界閉集合，$f(x,y)$ を D 上で可積分な関数とするとき，$E(f,D) := \dfrac{1}{|D|}\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ を $f(x,y)$ の D における**平均値**という．定義により

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = E(f,D)|D| = \iint_D E(f,D)\,dxdy$$

が成立するから，$f(x,y)$ の D 上の積分は定数関数 $E(f,D)$ の D 上の積分に等しい．

次の関数 $f(x,y)$ の D における平均値を求めよ．

(1) $f(x,y) = \sin(x+y), \quad D = \{(x,y) \mid 0 \le x \le \dfrac{\pi}{2},\, 0 \le y \le \dfrac{\pi}{2}\}$

(2) $f(x,y) = x^2 + y^2, \quad D = \{(x,y) \mid x \ge 0,\, y \ge 0,\, x + y \le a\} \quad (a > 0)$

問題 9 D を $\mathbb{R}^2$ の面積確定の有界集合とするとき，点 $(E(x,D), E(y,D))$（D に属する点の x 座標の平均値と y 座標の平均値）を D の**重心**という．たとえば例 4.3 の三角形 D の重心は

$$\iint_D x\,dxdy = \frac{1}{6}a^2b, \quad \iint_D y\,dxdy = \frac{1}{6}ab^2, \quad |D| = \iint_D 1\,dxdy = \frac{1}{2}ab$$

より，$\left(\dfrac{1}{3}a, \dfrac{1}{3}b\right)$ である．次の集合 D の重心を求めよ．

(1) $D = \{(x,y) \mid 0 \le y \le 1 - x^2\}$

(2) $D = ([0,a] \times [0,b]) \setminus \left([0, \dfrac{a}{2}] \times [0, \dfrac{b}{2}]\right) \quad (a, b > 0)$

5 積分変数の変換

1 変数関数の置換積分の公式を 2 重積分の場合に拡張するのが目標である．最初はアフィン変換，すなわち 1 次変換（線形写像）と平行移動による変数変換を考察する．

補題 5.1 2 行 2 列の正則行列 A は次の形の行列（基本行列）のいくつかの積で表すことができる:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \alpha \end{pmatrix} \quad (\alpha \ne 0), \quad \begin{pmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \beta & 1 \end{pmatrix} \quad (\beta \in \mathbb{R})$$

証明: 正則行列 A は，行基本変形により単位行列にできる．行基本変形は基本行列を左から掛けることに相当するから，いくつかの基本行列 $P_1, \ldots, P_m$ があって，

$$P_m \cdots P_2 P_1 A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{すなわち} \quad A = P_1^{-1} P_2^{-1} \cdots P_m^{-1}$$

が成立する．基本行列の逆行列も基本行列なので，補題が示された．□

定理 5.1 (アフィン変換による積分変数の変換) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ を正則行列，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ を任意のベクトルとする．uv 平面から xy 平面への写像 $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ を

$$\Phi(u,v) = (x,y) \quad \text{ただし} \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \mathbf{b}$$

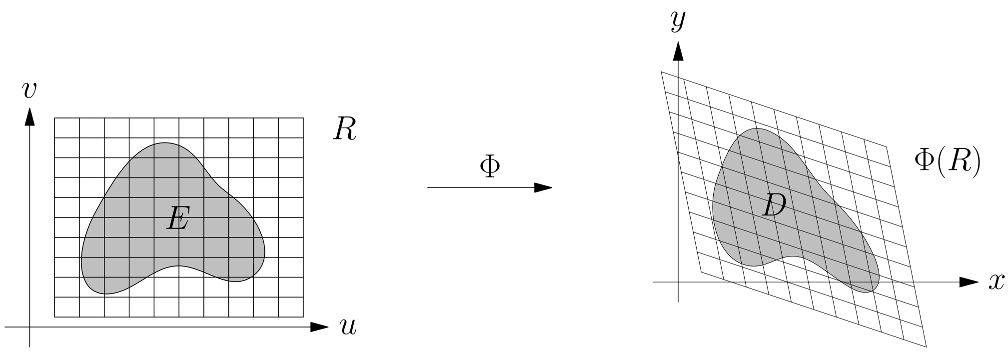
により定義する.（このような写像をアフィン変換という.）E を uv 平面における面積確定の有界閉集合として，$D := \Phi(E)$ とおく．$f(x,y)$ を D 上で定義された有界関数として，E を定義域とする関数 $g(u,v)$ を

$$g(u,v) := (f \circ \Phi)(u,v) = f(a_{11}u + a_{12}v + b_1,\, a_{21}u + a_{22}v + b_2)$$

により定義する．このとき，$f(x,y)$ が D 上で可積分であることと $g(u,v)$ が E 上で可積分であることは同値であり，そのとき

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = |\det A| \iint_E g(u,v)\,dudv$$

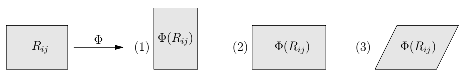
が成立する．特に，集合 D は面積確定であり $|D| = |\det A||E|$ が成立する．



証明: $R = [a,b] \times [c,d]$ を uv 平面において E を含むような長方形とする．

ステップ 1 $E = R = [a,b] \times [c,d]$ (長方形）で A が基本行列の場合：

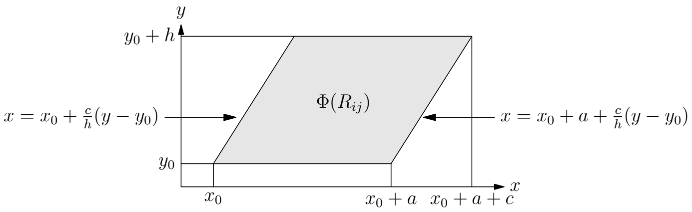
$a = u_0 < x_1 < \cdots < u_p = b$, $c = v_0 < y_1 < \cdots < v_q = d$ で決まる R の分割を Δ とする．A を基本行列の一つとして，A により定まる線形写像を Φ とする．



(1) $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ の場合は $\Phi(R_{ij})$ は辺が座標軸に平行な長方形であり，x 座標と y 座標が入れ替わるから，$\Phi(R_{ij})$ の面積は $|R_{ij}| = |\det A||R_{ij}|$ である．

(2) $A = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ の場合は $\Phi(R_{ij})$ は辺が座標軸に平行な長方形であり，x 座標のみ $|\alpha|$ 倍されるから，$\Phi(R_{ij})$ の面積は $|\alpha||R_{ij}| = |\det A||R_{ij}|$ である．

(3) $A=\begin{pmatrix}1 & \beta \\ 0 & 1\end{pmatrix}$ の場合は $\Phi(R_{ij})$ は 2 辺が x 軸に平行な平行四辺形であり，底辺と高さは変わらないから，$\Phi(R_{ij})$ の面積は $|R_{ij}|=|\det A||R_{ij}|$ である．ただし，論理的にはここで平行四辺形の面積の公式を使うと循環論法になるので，次のように示す．



$\Phi(R_{ij})$ の左下の頂点を (x_0,y_0) として，この頂点を始点とする 2 つのベクトル $(a,0)$ と (c,h) が $\Phi(R_{ij})$ の 2 辺になっているとすると，

$$\Phi(R_{ij})=\left\{(x,y)\mid y_0\le y\le y_0+h,\ x_0+\frac{c}{h}(y-y_0)\le x\le x_0+a+\frac{c}{h}(y-y_0)\right\}$$

と表示できるから累次積分により，

$$|\Phi(R_{ij})|=\iint_{\Phi(R_{ij})}1\,dxdy=\int_{y_0}^{y_0+h}\left(\int_{x_0+\frac{c}{h}(y-y_0)}^{x_0+a+\frac{c}{h}(y-y_0)}1\,dx\right)dy=\int_{y_0}^{y_0+h}a\,dy=ah$$

よって R_{ij} の面積は底辺と高さの積である.（一つの辺が座標軸に平行な平行四辺形についてはこれで面積の公式が証明できたことになる.）

(4) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ 0 & \alpha\end{pmatrix}$ の場合は (2) と同様.

(5) $A=\begin{pmatrix}1 & 0 \\ \beta & 1\end{pmatrix}$ の場合は (3) と同様.

以上によりいずれの場合にも $|\Phi(R_{ij})|=|\det A||R_{ij}|$ となることがわかった.

$$m_{ij}=\inf\{g(u,v)\mid(u,v)\in R_{ij}\},\quad M_{ij}=\sup\{g(u,v)\mid(u,v)\in R_{ij}\}$$

とおくと，$(x,y)=\Phi(u,v)$ のとき $f(x,y)=g(u,v)$ だから

$$(x,y)\in\Phi(R_{ij})\quad\Rightarrow\quad m_{ij}\le f(x,y)\le M_{ij}$$

が成り立つ．よって

$$\begin{aligned}|\det A|\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}m_{ij}|R_{ij}|&=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}m_{ij}|\Phi(R_{ij})|\le\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\underline{\iint_{\Phi(R_{ij})}}f(x,y)\,dxdy\\&\le\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\overline{\iint_{\Phi(R_{ij})}}f(x,y)\,dxdy\le\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}M_{ij}|\Phi(R_{ij})|=|\det A|\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}M_{ij}|R_{ij}|\end{aligned}$$

すなわち，

$$|\det A| L(g,\Delta) \leq \underline{\iint_{\Phi(R)}} f(x,y)\,dxdy \leq \overline{\iint_{\Phi(R)}} f(x,y)\,dxdy \leq |\det A| U(g,\Delta) \tag{3}$$

を得る．$g(u,v)$ は R 上で可積分であると仮定しよう．すると，任意の正の実数 ε に対して $U(g,\Delta)-L(g,\Delta)<\varepsilon$ を満たすような R の分割 Δ が存在する．よって

$$0 \leq \overline{\iint_{\Phi(R)}} f(x,y)\,dxdy - \underline{\iint_{\Phi(R)}} f(x,y)\,dxdy < |\det A|\varepsilon$$

が成り立つが，$\varepsilon>0$ は任意であったから，

$$\overline{\iint_{\Phi(R)}} f(x,y)\,dxdy - \underline{\iint_{\Phi(R)}} f(x,y)\,dxdy = 0$$

すなわち，$f(x,y)$ は $\Phi(R)$ 上で可積分である．

$$|\det A| L(g,\Delta) \leq |\det A| \iint_R g(u,v)\,dudv \leq |\det A| U(g,\Delta)$$

と (3) より

$$\left| \iint_{\Phi(R)} f(x,y)\,dxdy - |\det A| \int_R g(u,v)\,dudv \right| < |\det A|\varepsilon$$

が任意の $\varepsilon>0$ について成り立つから，

$$\iint_{\Phi(R)} f(x,y)\,dxdy = |\det A| \int_R g(u,v)\,dudv$$

を得る．

ステップ 2 A が基本行列で $E \subset R$ が一般の面積確定の有界閉集合の場合：
$f(x,y)$ の代わりに

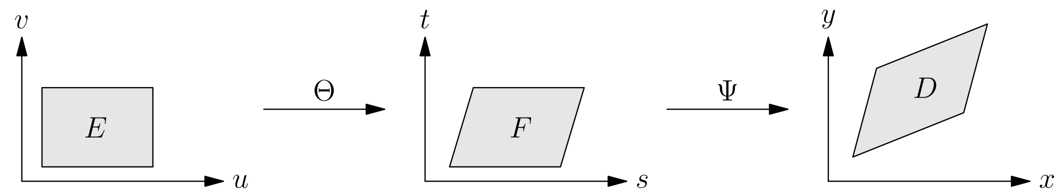
$$\tilde{f}(x,y) = \begin{cases} f(x,y) & ((x,y)\in D=\Phi(E) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y)\notin D \text{ のとき}) \end{cases}$$

に対してステップ 1 の結果を適用すれば，

$$\begin{aligned} \iint_D f(x,y)\,dxdy &= \iint_{\Phi(R)} \tilde{f}(x,y)\,dxdy = |\det A| \iint_R (\tilde{f}\circ\Phi)(u,v)\,dudv \\ &= |\det A| \int_E g(u,v)\,dudv \end{aligned}$$

を得る．A^{-1} も基本行列であるから，Φ の逆写像 Φ^{-1} にこの結果を適用すれば，$f(x,y)$ が D 上で可積分であれば $g(u,v)$ は E 上で可積分であることもわかる．

ステップ 3 A が任意の正則行列で $E=R$ (長方形）の場合：



A はいくつかの基本行列の積で表される．簡単のため，基本行列 P, Q によって $A = PQ$ と表される場合を考えよう．$g(u, v)$ は E 上で可積分であると仮定する．行列 P, Q によって定まる線形写像をそれぞれ Ψ, Θ とする．Ψ は st 平面から xy 平面への写像，Θ は uv 平面から st 平面への写像とみなすと，

$$(s,t) = \Theta(u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}, \qquad (x,y) = \Psi(s,t) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} s \\ t \end{pmatrix}$$

であり $\Phi = \Psi \circ \Theta$ が成立する．$F = \Theta(E)$ とおくと，

$$D = \Phi(E) = (\Psi \circ \Theta)(E) = \Psi(\Theta(E)) = \Psi(F)$$

である．$h(s,t) = (f \circ \Psi)(s,t)$, $(s,t) = \Theta(u,v)$ とおくと，

$$g(u,v) = (f \circ \Phi)(u,v) = (f \circ \Psi \circ \Theta)(u,v) = (f \circ \Psi)(\Theta(u,v)) = (f \circ \Psi)(s,t) = h(s,t)$$

となり，P と Q は基本行列だから，ステップ 1 より $h(s,t)$ は F 上で可積分で

$$\iint_F h(s,t)\,dsdt = |\det Q| \iint_E g(u,v)\,dudv$$

が成立する．従って，$f(x,y)$ は D 上で可積分であり，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = |\det P| \iint_F h(s,t)\,dsdt$$

が成立する．以上により

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = |\det P||\det Q| \iint_U g(u,v)\,dudv = |\det A| \iint_E g(u,v)\,dudv$$

を得る．

ステップ 4 A が一般の正則行列で $E \subset R$ が一般の面積確定の有界閉集合の場合：
$\tilde{f}(x,y)$ についてステップ 3 の結果を適用すればよい．

ステップ 5 面積の公式の証明：
E 上の 1 という定数関数についてステップ 4 を適用すれば D 上の 1 という定数関数は D 上で可積分であり

$$|D| = \iint_D 1\,dxdy = |\det A| \iint_E 1\,dudv = |\det A||E|$$

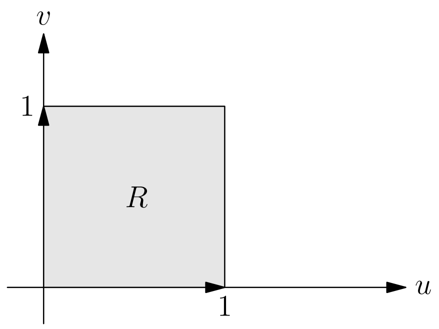
を得る．□

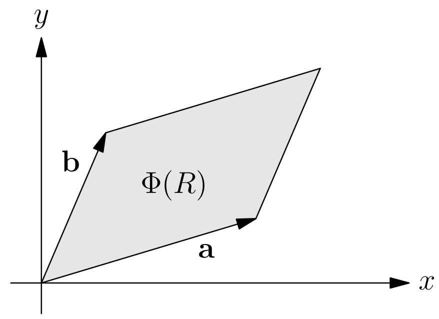
特に $A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ の場合は，Φ は原点のまわりの角度 θ の回転 (+ 平行移動) を表し，$\det A = 1$ であるから，面積確定であるような集合の面積は回転と平行移動で不変であることがわかる．面積の重積分による定義では辺が座標軸に平行な長方形を用いているので，回転によって面積が不変なことは自明ではなく，このように積分の変数変換を用いて示される．

系 5.1 2 つのベクトル $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a \\ c \end{pmatrix}$ と $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b \\ d \end{pmatrix}$ を 2 辺とする平行四辺形の面積 S は

$$S = |ad - bc| = |\det(\mathbf{a}\ \mathbf{b})| = \left| \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \right|$$

である．





証明: $A = (\mathbf{a}\ \mathbf{b})$ とおく．$\det A = 0$ のときは $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ は 1 次従属であるから $S = 0$ であり $S = |\det A|$ は成立する．$\det A \neq 0$ のときは，行列 A の定義する 1 次変換を Φ として，$R = [0,1] \times [0,1]$ とおくと，$\Phi(R)$ は $\mathbf{a}$ と $\mathbf{b}$ を 2 辺とする平行四辺形である．よって定理 5.1 により

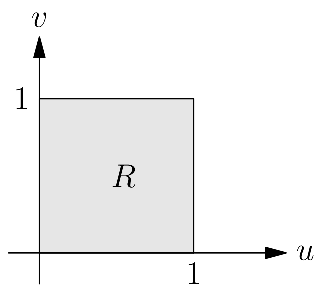
$$S = |\Phi(R)| = |\det A||R| = |\det A|$$

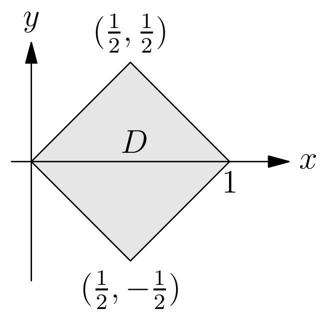
となる．□

例 5.1 2 重積分

$$\iint_D (x^2 - y^2) e^{-x-y}\, dxdy, \qquad D = \{(x,y) \mid 0 \leq x + y \leq 1,\ 0 \leq x - y \leq 1\}$$

の値を求めよう．このまま累次積分を行うと計算が複雑になるので，$x + y = u$, $x - y = v$ とおいて積分変数の変換を行う．





$(x,y)=\Phi(u,v)$ とすると，

$$(x,y)=\Phi(u,v) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

であり，この行列の行列式は $-\dfrac{1}{2}$ である．$R=\{(u,v) \mid 0 \leq u \leq 1,\, 0 \leq v \leq 1\}$ とおけば $D=\Phi(R)$ であるから，定理 5.1 により，

$$\begin{aligned}\iint_D (x^2-y^2)e^{-x-y}\,dxdy &= \frac{1}{2}\iint_R uve^{-u}\,dudv = \frac{1}{2}\int_0^1 \left(\int_0^1 uve^{-u}\,dv\right)du \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \left[\frac{1}{2}uv^2e^{-u}\right]_{v=0}^{v=1} du = \frac{1}{4}\int_0^1 ue^{-u}\,du \\ &= \frac{1}{4}\left\{\left[-ue^{-u}\right]_0^1 + \int_0^1 e^{-u}\,du\right\} = \frac{1}{4}\left(1-\frac{2}{e}\right)\end{aligned}$$

問題 10 変数変換を用いて次の 2 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D (x-y)\sin(x+y)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y) \mid 0 \leq x-y \leq 1,\ 0 \leq x+y \leq \pi\}$

(2) $\displaystyle\iint_D e^{(x+y)^2}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y) \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\, x+y \leq a\} \quad (a>0)$

問題 11 定理 5.1 の仮定のもとで，集合 E の重心を (α,β) とすると，集合 D の重心は $\Phi(\alpha,\beta)$ であることを示せ．

次に一般の写像による変数変換を考察しよう．U を uv 平面の開集合，$\varphi(u,v)$ と $\psi(u,v)$ を U で定義された C^1 級関数，すなわち，偏導関数が U で存在して連続になるような関数とする．U から xy 平面への写像 Φ を

$$(x,y)=\Phi(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

で定義する．このとき，U で定義された関数

$$J(\Phi)(u,v)=\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}=\begin{vmatrix} \varphi_u(u,v) & \varphi_v(u,v) \\ \psi_u(u,v) & \psi_v(u,v) \end{vmatrix} = \varphi_u(u,v)\psi_v(u,v)-\varphi_v(u,v)\psi_u(u,v)$$

のことを写像 Φ の **Jacobian** (ヤコビアンまたはヤコビ行列式) という．

定理 5.2 (2 重積分の変数変換公式) E を uv 平面の面積確定の有界閉集合，$\varphi(u,v)$ と $\psi(u,v)$ を E を含む開集合 U で定義された C^1 級関数として，写像 $\Phi : E \to \mathbb{R}^2$ を

$$(x,y)=\Phi(u,v)=(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

で定義する．Φ は単射 (1 対 1 写像) であり更に

$$J(\Phi)(u,v) \neq 0 \qquad (\forall (u,v) \in E)$$

が成立すると仮定する．$f(x,y)$ を $D=\Phi(E)$ で定義された連続関数として，E を定義域とする関数 $g(u,v)$ を

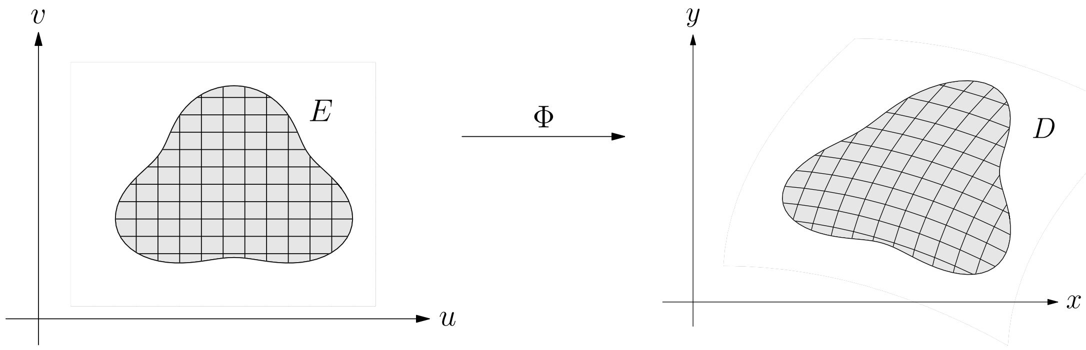
$$g(u,v)=(f\circ\Phi)(u,v)=f(\varphi(u,v),\psi(u,v))$$

により定める．このとき $f(x,y)$ は D 上で可積分，$g(u,v)|J(\Phi)(u,v)|$ は E 上で可積分であり，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy=\iint_E g(u,v)|J(\Phi)(u,v)|\,dudv$$

が成立する．特に D の面積は

$$|D|=\iint_E |J(\Phi)(u,v)|\,dudv$$



証明: $f(x,y)$ は面積確定の集合 D 上で連続だから可積分，$g(u,v)$ と $J(\Phi)(u,v)$ は共に E で連続であるから，$g(u,v)|J(\Phi)(u,v)|$ は E 上で可積分である．定理の等式を 4 ステップに分けて証明しよう．

ステップ 1 $E=R$ が小さな長方形の場合の $\Phi(R)$ の面積:

$a,b>0$ を固定して h を正の実数（後で限りなく小さくする）として，長方形 $R=[u_0,u_0+ah]\times[v_0,v_0+bh]$ は E に含まれているとする．$\varphi(u,v)$ と $\psi(u,v)$ は C^1 級だから (u_0,v_0) で全微分可能であり，

$$\varphi(u,v)=\varphi(u_0,v_0)+\varphi_u(u_0,v_0)(u-u_0)+\varphi_v(u_0,v_0)(v-v_0)+r_1(u,v)\|(u,v)-(u_0,v_0)\|,$$
$$\psi(u,v)=\psi(u_0,v_0)+\psi_u(u_0,v_0)(u-u_0)+\psi_v(u_0,v_0)(v-v_0)+r_2(u,v)\|(u,v)-(u_0,v_0)\|,$$
$$\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} r_1(u,v)=\lim_{(u,v)\to(u_0,v_0)} r_2(u,v)=0$$

と表される（解析学概論 I のプリントの 3.3 節, p. 14–15）．アフィン写像 Φ_0 を

$$(x,y)=\Phi_0(u,v)\quad\Leftrightarrow\quad\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi_u(u_0,v_0)&\varphi_v(u_0,v_0)\\\psi_u(u_0,v_0)&\psi_v(u_0,v_0)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u-u_0\\v-v_0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\varphi(u_0,v_0)\\\psi(u_0,v_0)\end{pmatrix}$$

で定義すると，

$$\Phi(u,v)=\Phi_0(u,v)+\|(u,v)-(u_0,v_0)\|(r_1(u,v),r_2(u,v))$$

となる．よって $(u,v)\in R$ のとき

$$\|\Phi(u,v)-\Phi_0(u,v)\|=\|(u,v)-(u_0,v_0)\|\|(r_1(u,v),r_2(u,v))\|\le h\|(a,b)\|\|(r_1(u,v),r_2(u,v))\|$$

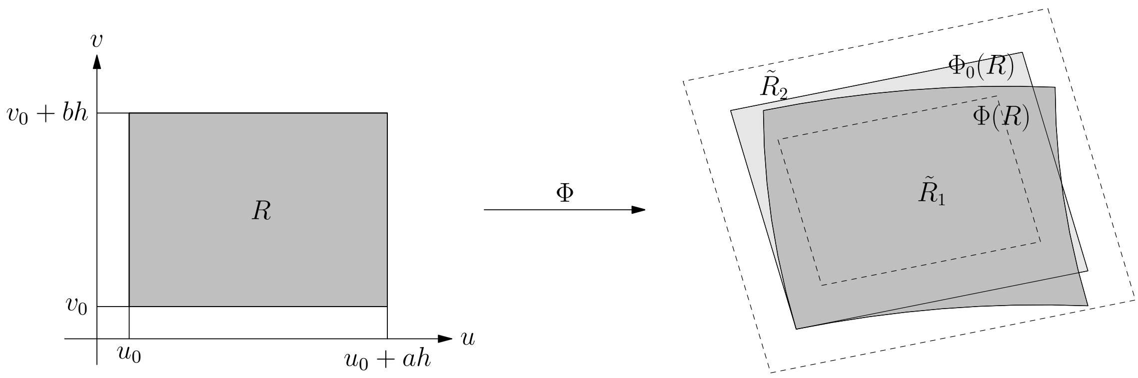
が成立する．ここで

$$r(h) = \sup\{\|(r_1(u,v), r_2(u,v))\| \mid (u,v) \in R\}$$

とおくと，$h \to 0$ のとき（すなわち R を限りなく小さくするとき）$r(h) \to 0$ となる．$A = \|(a,b)\|$ とおけば，

$$\|\Phi(u,v) - \Phi_0(u,v)\| \leq Ah\,r(h) \tag{4}$$

が成立する．



$\Phi(R)$ の面積について考察しよう．定理 5.1 により，$\Phi_0(R)$ の面積は

$$|\Phi_0(R)| = \left|\det\begin{pmatrix} \varphi_u(u_0,v_0) & \varphi_v(u_0,v_0) \\ \psi_u(u_0,v_0) & \psi_v(u_0,v_0) \end{pmatrix}\right| |R| = |J(\Phi)(u_0,v_0)||R| = |J(\Phi)(u_0,v_0)|abh^2$$

で与えられる．(4) より，$\Phi(R)$ の境界は平行四辺形 $\Phi_0(R)$ の辺から $d(h) := Ahr(h)$ 以内の距離にあることがわかる．平行四辺形 $\Phi_0(R)$ の辺に平行に内側と外側へ距離 $d(h)$ だけ離れた直線を引いてできる 2 つの平行四辺形（図の点線）のうち $\Phi_0(R)$ の内側にあるものを $\tilde{R}_1$, 外側にあるものを $\tilde{R}_2$ とすると，$\tilde{R}_1 \subset \Phi(R) \subset \tilde{R}_2$ より $|\tilde{R}_1| \leq |\Phi(R)| \leq |\tilde{R}_2|$ が成立する．$|\tilde{R}_1| \leq |\Phi_0(R)| \leq |\tilde{R}_2|$ も成立するから，$\Phi(R)$ と $\Phi_0(R)$ の面積の差は

$$\big|\,|\Phi(R)| - |\Phi_0(R)|\,\big| \leq |\tilde{R}_2| - |\tilde{R}_1|$$

という不等式を満たす．平行四辺形 $\Phi_0(R)$ の周の長さは h に比例するから lh（l は正の定数） と表される．このとき $|\tilde{R}_2| - |\tilde{R}_1| = 2lhd(r) = 2Alh^2r(h)$ となるので，

$$\big|\,|\Phi(R)| - |\Phi_0(R)|\,\big| \leq 2Alh^2r(h)$$

が成立する．以上により

$$\frac{\big|\,|\Phi(R)| - |\Phi_0(R)|\,\big|}{|\Phi_0(R)|} \leq \frac{2Alh^2r(h)}{|J(\Phi)(u_0,v_0)|abh^2} = \frac{2Al}{|J(\Phi)(u_0,v_0)|ab}r(h)$$

を得る．この最右辺（一番右側の式）は $r(h)$ の定数倍だから，これを改めて $r(h)$ と定義すれば，

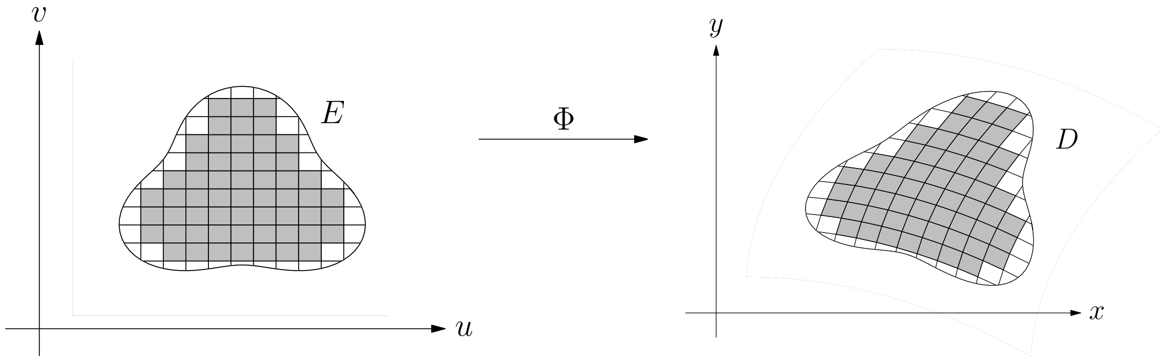
$$\left|\frac{|\Phi(R)|}{|\Phi_0(R)|} - 1\right| = \left|\frac{|\Phi(R)|}{|J(\Phi)(u_0,v_0)||R|} - 1\right| \leq r(h)$$

すなわち

$$(1-r(h))|J(\Phi)(u_0,v_0)||R| \le |\Phi(R)| \le (1+r(h))|J(\Phi)(u_0,v_0)||R|, \quad \lim_{h\to 0} r(h) = 0 \quad (5)$$

が成立する．

ステップ 2 E が長方形の場合への帰着：



$|g(u,v)J(\Phi)(u,v)|$ の E における最大値を M とする．R を E を含む長方形として，R の分割 Δ による小長方形を R_{ij} $(1 \le i \le p,\ 1 \le j \le q)$ とする．E は面積確定であるから，$R_{ij} \not\subset E$ かつ $R_{ij} \cap E \neq \emptyset$ であるような R_{ij} の面積の和は，分割 Δ を細かくすればいくらでも小さくできる．このとき，

$$\left| \iint_{R_{ij}\cap D} g(u,v)|J(\Phi)(u,v)|\,dudv \right| \le \iint_{R_{ij}\cap D} |g(u,v)J(\Phi)(u,v)|\,dudv \le M|R_{ij}|$$

であるから，$R_{ij} \not\subset D$ となるような $R_{ij} \cap D$ 上の積分の和（図の白い部分の積分）はいくらでも小さくできる．従って，分割 Δ を限りなく細かくすれば，$R_{ij} \subset E$ となるような R_{ij} 上の積分の和について

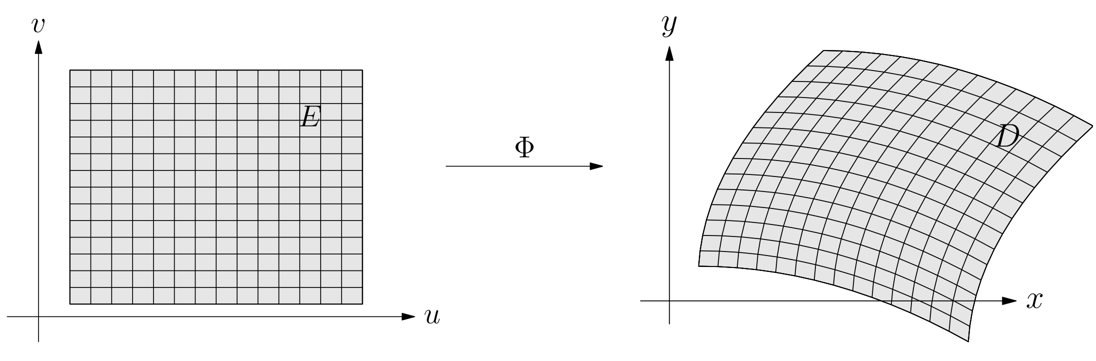
$$\sum_{R_{ij}\subset E} \iint_{R_{ij}} g(u,v)|J(\Phi)|(u,v)\,dudv \longrightarrow \iint_E g(u,v)|J(\Phi)|(u,v)\,dudv$$

が成立する．従って $R_{ij} \subset E$ のとき

$$\iint_{R_{ij}} g(u,v)|J(\Phi)|(u,v)\,dudv = \iint_{\Phi(R_{ij})} f(x,y)\,dxdy$$

が成立することを示せばよい．

ステップ 3 $E = R$ が長方形の場合の $\Phi(R)$ の面積：



$R = [u_0, u_0 + a] \times [v_0, v_0 + b]$ として，

$$u_i = u_0 + \frac{i}{n} a \quad (i = 0, 1, \ldots, n), \qquad v_j = v_0 + \frac{j}{n} b \quad (j = 0, 1, \ldots, n)$$

で定まる R の分割を Δ_n として

$$M_{ij}(|J(\Phi)|) := \sup\{|J(\Phi)(u,v)| \mid (u,v) \in R_{ij}\},$$
$$m_{ij}(|J(\Phi)|) := \inf\{|J(\Phi)(u,v)| \mid (u,v) \in R_{ij}\}$$

とおく．$h = \dfrac{1}{n}$ とすると，ステップ 1 で定義した $r(h)$ を用いて (5) より任意の i, j について

$$\Big(1 - r\big(\frac{1}{n}\big)\Big)|J(\Phi)(u_{i-1}, v_{j-1})||R_{ij}| \leq |\Phi(R_{ij})| \leq \Big(1 + r\big(\frac{1}{n}\big)\Big)|J(\Phi)(u_{i-1}, v_{j-1})||R_{ij}|,$$
$$\lim_{n\to\infty} r\big(\frac{1}{n}\big) = 0$$

が成立することがわかる．（ここで，$|J(\Phi)(u,v)|$ が R 上で一様連続かつ正であることを用いている．）上の不等式と $M_{ij}(|J(\Phi)|), m_{ij}(|J(\Phi)|)$ の定義より

$$\Big(1 - r\big(\frac{1}{n}\big)\Big)m_{ij}(|J(\Phi)|)|R_{ij}| \leq |\Phi(R_{ij})| \leq \Big(1 + r\big(\frac{1}{n}\big)\Big)M_{ij}(|J(\Phi)|)|R_{ij}|$$

が成立するから，i, j についての和をとれば，

$$\Big(1 - r\big(\frac{1}{n}\big)\Big)L(|J(\Phi)|, \Delta_n) \leq |\Phi(R)| \leq \Big(1 + r\big(\frac{1}{n}\big)\Big)U(|J(\Phi)|, \Delta_n)$$

を得る．ここで $|J(\Phi)(u,v)|$ は連続関数なので R 上で可積分であり，

$$\lim_{n\to\infty} L(|J(\Phi)|, \Delta_n) = \lim_{n\to\infty} U(|J(\Phi)|, \Delta_n) = \iint_R |J(\Phi)(u,v)|\, dudv$$

が成立する．よって，はさみうちの論法により，

$$|\Phi(R)| = \iint_R |J(\Phi)(u,v)|\, dudv$$

を得る．これとステップ 2 により，任意の面積確定の有界閉集合 E と $D := \Phi(E)$ について

$$|D| = \iint_E |J(\Phi)(u,v)|\, dudv \tag{6}$$

が示されたことになる．

ステップ 4 E が長方形 R の場合の変数変換公式：ステップ 3 と同じ R の分割 Δ_n をとる．

$$M_{ij}(g) := \sup\{g(u,v) \mid (u,v) \in R_{ij}\} = \sup\{f(x,y) \mid (x,y) \in \Phi(R_{ij})\},$$
$$m_{ij}(g) := \inf\{g(u,v) \mid (u,v) \in R_{ij}\} = \inf\{f(x,y) \mid (x,y) \in \Phi(R_{ij})\}$$

とおくと，$(x,y)\in\Phi(R_{ij})$ のとき $m_{ij}(g)\leq f(x,y)\leq M_{ij}(g)$ であるから，$\Phi(R_{ij})$ 上で積分して

$$m_{ij}(g)|\Phi(R_{ij})|\leq\iint_{\Phi(R_{ij})}f(x,y)\,dxdy\leq M_{ij}(g)|\Phi(R_{ij})|$$

を得る．i,j についての和をとれば

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(g)|\Phi(R_{ij})|\leq\iint_{\Phi(R)}f(x,y)\,dxdy\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{q}M_{ij}(g)|\Phi(R_{ij})|$$

ここでステップ 3 の式 (6) を R_{ij} に適用すれば

$$|\Phi(R_{ij})|=\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv$$

となるから，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(g)\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv&\leq\iint_{\Phi(R)}f(x,y)\,dxdy\\&\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(g)\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv\end{aligned}\tag{7}$$

が成り立つ．一方，$(u,v)\in R_{ij}$ のとき，$m_{ij}(g)\leq g(u,v)\leq M_{ij}(g)$ であるから，

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(g)\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv&\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\iint_{R_{ij}}g(u,v)|J(\Phi)(u,v)|\,dudv\\&=\iint_{R}g(u,v)|J(\Phi)(u,v)|\,dudv\leq\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(g)\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv\end{aligned}\tag{8}$$

ここで $g(u,v)$ が一様連続なことから，任意の正の ε に対してある自然数 N が存在して，$n\geq N$ のとき $M_{ij}(g)-m_{ij}(g)<\varepsilon$ が成立するので

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}M_{ij}(g)\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv-\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}m_{ij}(g)\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv\\&=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(M_{ij}(g)-m_{ij}(g))\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv\\&<\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\iint_{R_{ij}}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv=\varepsilon\iint_{R}|J(\Phi)(u,v)|\,dudv\end{aligned}$$

を得る．よって，(7) と (8) の最右辺と最左辺は $n\to\infty$ とすると同じ極限値に収束するから，はさみうちの論法より (7) と (8) それぞれの中央の式も同一の極限値に収束し

$$\iint_{\Phi(R)}f(x,y)\,dxdy=\iint_{R}g(u,v)|J(\Phi)(u,v)|\,dudv$$

が成り立つ．以上により定理が証明された．□

この定理を極座標 $x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta$ による変数変換に適用してみよう．α, β を $0 < \beta - \alpha \le 2\pi$ を満たす実数，$h_1(\theta)$ と $h_2(\theta)$ を区間 $[\alpha, \beta]$ で定義された連続関数で

$$0 \le h_1(\theta) \le h_2(\theta) \qquad (\alpha \le \forall\theta \le \beta)$$

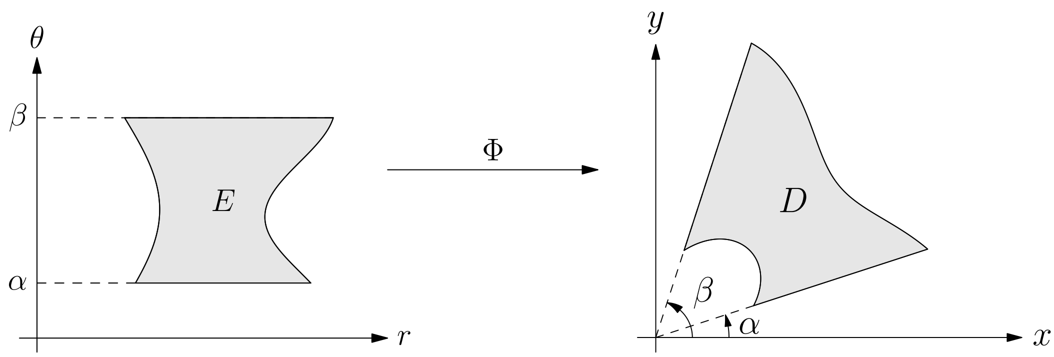
を満たすものとする．このとき $r\theta$ 平面の集合 E を

$$E = \{(r,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta,\ h_1(\theta) \le r \le h_2(\theta)\}$$

で定義し，E から xy 平面への写像 Φ を

$$(x,y) = \Phi(r,\theta) \quad \Leftrightarrow \quad (x = r\cos\theta,\ y = r\sin\theta)$$

で定義する．



Φ のヤコビアンは

$$J(\Phi)(r,\theta) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(r,\theta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial r} & \dfrac{\partial x}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial r} & \dfrac{\partial y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r$$

となる．$f(x,y)$ を $D := \Phi(E)$ 上の連続関数とすると，定理 5.2 により，

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta) r\,drd\theta$$

が成立する．特に D の面積はこれと累次積分を用いて

$$|D| = \iint_E r\,drd\theta = \int_\alpha^\beta \left(\int_{h_1(\theta)}^{h_2(\theta)} r\,dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\int_\alpha^\beta \left\{ h_2(\theta)^2 - h_1(\theta)^2 \right\} d\theta$$

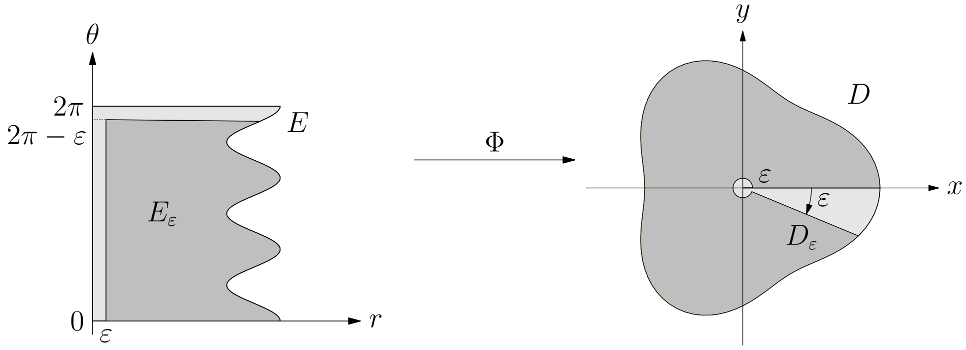
で与えられる．

注意 5.1 たとえば $\alpha = 0,\ \beta = 2\pi,\ h_1(\theta) = 0$ の場合は，

(1) $J(\Phi)(r,\theta) = r$ が E の左側の辺 $\{(0,\theta) \mid \alpha \le \theta \le \beta\}$ 上で 0 になる．

(2) $(r,0) \in E$ のとき $(r,2\pi) \in E$ であるが，$\Phi(r,0) = \Phi(r,2\pi)$ となるから，写像 $\Phi : E \to \mathbb{R}^2$ は 1 対 1 でない．

という 2 つの理由で定理 5.2 の条件を満たしていない．この場合でも上記の公式が成立することは次のようにして証明できる．



正の実数 ε に対して

$$E_\varepsilon := \{(r,\theta) \in E \mid \varepsilon \le r,\ 0 \le \theta \le 2\pi - \varepsilon\}, \qquad D_\varepsilon := \Phi(E_\varepsilon)$$

とおくと，E_ε については定理 5.2 の仮定が満たされるので，$f(x,y)$ が D 上で連続ならば，

$$\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dxdy = \iint_{E_\varepsilon} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta$$

が成立する．$\varepsilon \to +0$ とすれば，$E \setminus E_\varepsilon$ と $D \setminus D_\varepsilon$ の面積は 0 に収束するので，

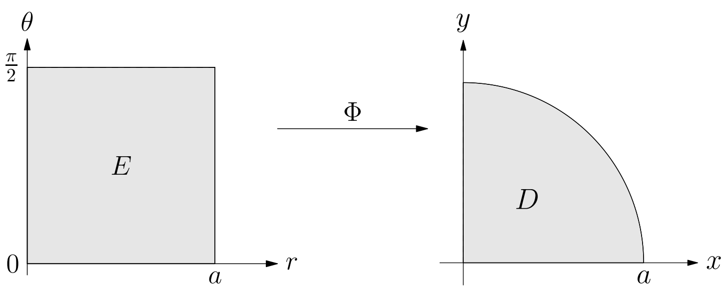
$$\begin{aligned}\iint_D f(x,y)\,dxdy &= \lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{D_\varepsilon} f(x,y)\,dxdy = \lim_{\varepsilon\to+0}\iint_{E_\varepsilon} f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta \\ &= \iint_E f(r\cos\theta, r\sin\theta)r\,drd\theta\end{aligned}$$

を得る．

例 5.2 a を正の実数として，$D = \{(x,y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x^2+y^2 \le a^2\}$ とおき，

$$I(a) = \iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

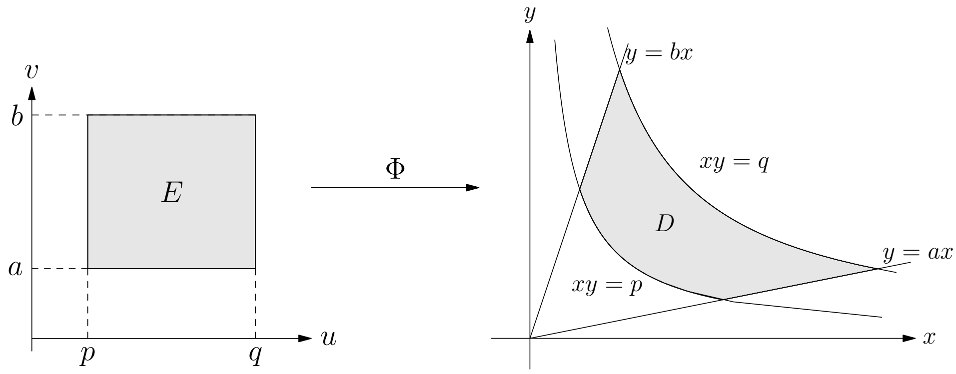
を求めよう．



$E = \left\{(r,\theta) \mid 0 \le r \le a,\ 0 \le \theta \le \dfrac{\pi}{2}\right\}$ が極座標による写像 $(x,y) = \Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$ によって D にうつる $(\Phi(E) = D)$ から，変数変換公式によって（注意 5.1 も参照）

$$I(a) = \iint_E re^{-r^2}\,drd\theta = \int_0^a \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} re^{-r^2}\,d\theta\right) dr = \frac{\pi}{2}\int_0^a re^{-r^2}\,dr$$
$$= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^a = \frac{\pi}{4}(1-e^{-a^2})$$

例 5.3 $0 < a < b$, $0 < p < q$ として，xy 平面の第 I 象限において 4 つの曲線 $y = ax$, $y = bx$, $xy = p$, $xy = q$ で囲まれる閉集合 D の面積を求めよう.（D の境界の 4 つの部分は，それぞれ連続関数のグラフになっているから D は面積確定である.）



$u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$ とおくと，

$$(x,y) \in D \quad \Leftrightarrow \quad p \le u \le q,\ a \le v \le b$$

となる．そこで，uv 平面の長方形 E を

$$E := \{(u,v) \mid p \le u \le q,\ a \le v \le b\}$$

で定義する．$u = xy$, $v = \dfrac{y}{x}$ より $uv = y^2$ であり，D は xy 平面の第 I 象限にあるから，

$$y = \sqrt{uv}, \quad x = \frac{u}{y} = \sqrt{\frac{u}{v}}$$

を得る．よって，写像 $\Phi : E \to \mathbb{R}^2$ を $(x,y) = \Phi(u,v) = \left(\sqrt{\dfrac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right) = (u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}, u^{\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}})$ で定義すれば，u,v が x,y から一意的（一通り）に決まるので Φ は単射であり，

$$J(\Phi)(u,v) = \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}} \\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}$$

より，$D = \Phi(E)$ の面積は

$$|D| = \iint_D 1\,dxdy = \iint_E |J(\Phi)(u,v)|\,dudv = \int_p^q \left(\int_a^b \frac{1}{2v}\,dv\right) du = \frac{1}{2}(q-p)\log\frac{b}{a}$$

問題 12 変数変換により次の 2 重積分の値を求めよ．

(1) $\displaystyle\iint_D \sqrt{1-x^2-y^2}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{x}{1+x^2+y^2}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ x^2+y^2\leq 1\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid a^2\leq x^2+y^2\leq 1\} \qquad (0<a<1)$

(4) $\displaystyle\iint_D x^2\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid (x-1)^2+y^2\leq 1\}$

(5) $\displaystyle\iint_D y\,dxdy,$

D は極座標で $0\leq r\leq a(1+\cos\theta),\ 0\leq\theta\leq\pi$ により表される集合 (a は正の定数)

問題 13 次の集合 D の重心を求めよ．

(1) $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ a^2\leq x^2+y^2\leq b^2\} \quad (0\leq a<b)$

(2) $D=\left\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leq 1\right\} \quad (a,b>0)$

(3) $D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\ y\geq 0,\ \sqrt{x}+\sqrt{y}\leq 1\}$

6 広義積分

積分領域 D が有界閉集合でない場合の積分を考えよう．たとえば

$$\iint_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2}\,dxdy$$

において $\mathbb{R}^2$ は閉集合であるが，有界でない．また，

$$\iint_D \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\mid x\geq 0, y\geq 0, 0<x^2+y^2\leq 1\}$$

において，D は有界であるが，境界のうち原点 $(0,0)$ を含まないので閉集合ではない．$\dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}$ は $(0,0)$ で定義できないので，$(0,0)$ を積分領域 D に含められない．

定義 6.1 D を $\mathbb{R}^2$ の部分集合とする．D の部分集合の列 $K_1,K_2,\ldots$ が D の**近似集合列**とは，

(1) K_n は面積確定の有界閉集合

(2) $K_1\subset K_2\subset K_3\subset\cdots$

(3) D に含まれる任意の有界閉集合 K に対して，ある自然数 n があって $K \subset K_n$

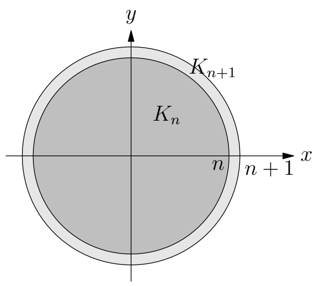
が成立することと定義する.

条件 (3) のチェックのためには，次の定理が有用である.(「連続と極限」で証明する.)

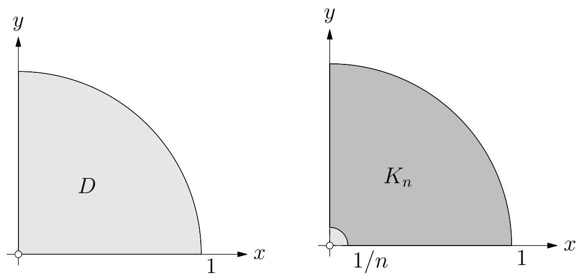
定理 6.1 (Weierstrass) ユークリッド空間 $\mathbb{R}^n$ の有界閉集合 K で連続な関数は K において最大値と最小値を持つ.

例 6.1 (1) $K_n = \{(x,y) \mid x^2+y^2 \leq n^2\}$ $(n \in \mathbb{N})$ は $\mathbb{R}^2$ の近似集合列である．実際，条件 (1),(2) は明らかに成り立つ．K を $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合とすれば，連続関数 x^2+y^2 は K で最大値 M を持つ．そこで $n^2 \geq M$ をみたすような自然数 n をとれば $K \subset K_n$ となる.

(2) $D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\ 0 < x^2+y^2 \leq 1\}$ の近似集合列として，$K_n = \left\{(x,y) \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\ \dfrac{1}{n^2} \leq x^2+y^2 \leq 1\right\}$ $(n \geq 2)$ がとれる．実際 K を D に含まれる任意の有界閉集合として，x^2+y^2 の K における最小値を m とすると，$(0,0) \notin D$ より $m > 0$ であり，$n^2 \geq \dfrac{1}{m}$ を満たす自然数 n をとれば $K \subset K_n$ となる.



(1)



(2)

任意の集合が近似集合列を持つとは限らないが，以下では，近似集合列を持つような集合 D における積分を考察する．まずは簡単のため，$f(x,y) \geq 0$ の場合を扱う.

定義 6.2 $f(x,y)$ は $\mathbb{R}^2$ の部分集合 D で定義された連続関数であり，$f(x,y) \geq 0$ が任意の D について成立すると仮定する．$K_1, K_2, \ldots$ を D の近似集合列とする．このとき，$f(x,y)$ の D 上の**広義積分**を

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty} \iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy = \sup_{n\in\mathbb{N}} \iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy \tag{9}$$

で定義する（ $f(x,y) \geq 0$ より，K_n 上の積分は n について単調増加だから極限値と上限は一致する）．この極限が存在するとき，$f(x,y)$ は D 上で**広義積分可能**または，この**広義積分は収束する**という.

定理 6.2 上の定義において極限 (9) の値 (無限大に発散する場合も含む）は，D の近似集合列 $K_1, K_2, \ldots$ の選び方によらない.

証明: $L_1, L_2, \ldots$ を D の別の近似集合列とする．(9) の極限値を I とする．定義により，任意の自然数 n に対して，ある自然数 m があって，$L_n \subset K_m$ が成立する． これと $f(x,y) \geq 0$ であることから，

$$\iint_{L_n} f(x,y)\,dxdy \leq \iint_{K_m} f(x,y)\,dxdy \leq I$$

が成立するから $n \to \infty$ とすると，

$$\lim_{n\to\infty} \iint_{L_n} f(x,y)\,dxdy \leq I$$

であることがわかる．K_n と L_n を入れ替えれば逆の不等式も成立するから，主張が示された．□

定理 6.3 $f(x,y)$ と $g(x,y)$ は集合 D で定義された連続関数であり，任意の $(x,y) \in D$ について $0 \leq f(x,y) \leq g(x,y)$ が成立すると仮定する．このとき，$g(x,y)$ が D 上で広義積分可能ならば $f(x,y)$ も D 上で広義積分可能である．

証明: $K_1, K_2, \ldots$ を D の近似集合列とする．仮定より

$$\iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy \leq \iint_{K_n} g(x,y)\,dxdy \leq \iint_{D} g(x,y)\,dxdy < \infty$$

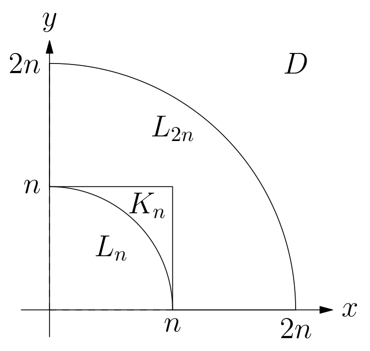
よって，数列 $\displaystyle\iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy$ は単調増加かつ上に有界であるから収束する．□

例 6.2 広義積分

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy, \quad D = \{(x,y) \mid x \geq 0,\, y \geq 0\}$$

を考えよう．自然数 n に対して

$$K_n = \{(x,y) \mid 0 \leq x \leq n,\, 0 \leq y \leq n\}, \quad L_n = \{(x,y) \mid x \geq 0,\, y \geq 0,\, x^2+y^2 \leq n^2\}$$



とおくと，$K_1, K_2, \ldots$ と $L_2, L_2, \ldots$ は共に D の近似集合列であり，

$$L_n \subset K_n \subset L_{2n} \quad (\forall n \in \mathbb{N})$$

となることがわかる．従って

$$\iint_{L_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \le \iint_{K_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \le \iint_{L_{2n}} e^{-x^2-y^2}\,dxdy \tag{10}$$

が成立する．累次積分により

$$\begin{aligned}\iint_{K_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_0^n \left(\int_0^n e^{-x^2}e^{-y^2}\,dy\right)dx = \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)\left(\int_0^n e^{-y^2}\,dy\right)\\ &= \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2\end{aligned}$$

となる．一方，極座標による変数変換により

$$\begin{aligned}\iint_{L_n} e^{-x^2-y^2}\,dxdy &= \int_0^n \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-r^2} r\,d\theta\right)dr = \frac{\pi}{2}\int_0^n e^{-r^2} r\,dr\\ &= \frac{\pi}{2}\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^n = \frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2})\end{aligned}$$

を得る．これらを (10) に代入して

$$\frac{\pi}{4}(1-e^{-n^2}) \le \left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2 \le \frac{\pi}{4}(1-e^{-4n^2})$$

$n\to\infty$ とすれば，はさみうちの論法で

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\left(\int_0^n e^{-x^2}\,dx\right)^2 = \frac{\pi}{4}$$

を得る．これから特に，

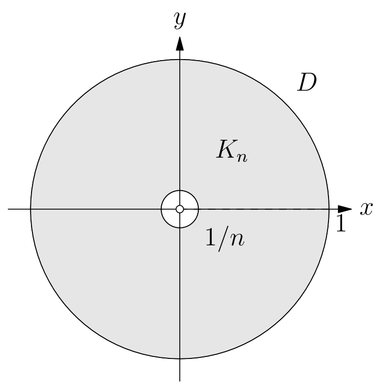
$$\int_0^\infty e^{-x^2}\,dx = \lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x^2}\,dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}, \qquad \int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

となることがわかる．e^{-x^2} の原始関数は既知の関数（初等関数という）では表されない（ことが証明できる）ので，通常の 1 変数の積分の計算からこの式を導くのは困難である．

例 6.3 a を正の実数として広義積分

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\mid 0<x^2+y^2\le 1\}$$

を考えよう．



D の近似集合列として，

$$K_n = \left\{(x,y) \mid \frac{1}{n^2} \le x^2+y^2 \le 1\right\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

がとれる．極座標による変数変換により

$$\begin{aligned}\iint_{K_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy &= \int_{\frac{1}{n}}^{1}\left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{r^{2a}} r\,d\theta\right)dr = 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{1-2a}\,dr \\ &= 2\pi\Big[\frac{1}{2-2a}r^{2-2a}\Big]_{\frac{1}{n}}^{1} = \frac{\pi}{1-a}(1-n^{2a-2}) \qquad (a \ne 1 \text{ のとき})\end{aligned}$$

$a=1$ のときは

$$\iint_{K_n} \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy = 2\pi\int_{\frac{1}{n}}^{1}\frac{1}{r}\,dr = 2\pi\log n$$

となる．以上により，この広義積分が収束するための条件は $a<1$ であり，このとき，

$$\iint_D \frac{1}{(x^2+y^2)^a}\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{1-a}(1-n^{2a-2}) = \frac{\pi}{1-a}$$

となる．

最後に，$f(x,y)$ が正と負の両方の値を取り得るような一般の場合について考察しておこう．

定理 6.4 D を近似集合列 $K_1, K_2, \ldots$ を持つような集合として，$f(x,y)$ を D 上の連続関数とする．このとき広義積分 $\displaystyle\iint_D f(x,y)\,dxdy$ が**絶対収束**するとは，広義積分 $\displaystyle\iint_D |f(x,y)|\,dxdy$ が収束することと定義する．このとき，数列 $\displaystyle\iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy$ は収束し，その極限値は D の近似集合列 $K_1, K_2, \ldots$ の選び方によらない．そこで，$f(x,y)$ の D 上の広義積分の値を

$$\iint_D f(x,y)\,dxdy = \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy$$

と定義する．

証明: D 上の非負値（0 以上の値をとる）関数 $f_+(x,y)$ と $f_-(x,y)$ を

$$f_+(x,y) = \max\{f(x,y), 0\}, \qquad f_-(x,y) = \max\{-f(x,y), 0\}$$

によって定義すると，$f_+(x,y) - f_-(x,y) = f(x,y)$, $f_+(x,y) + f_-(x,y) = |f(x,y)|$ が成立する．仮定より $|f(x,y)|$ は D で広義積分可能だから，定理 6.3 によって $f_+(x,y)$ と $f_-(x,y)$ も D で広義積分可能である．従って

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f(x,y)\,dxdy &= \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f_+(x,y)\,dxdy - \lim_{n\to\infty}\iint_{K_n} f_-(x,y)\,dxdy \\ &= \iint_D f_+(x,y)\,dxdy - \iint_D f_-(x,y)\,dxdy\end{aligned}$$

であり，極限は D の近似集合列 $K_1, K_2, \ldots$ の選び方によらない．□

例 6.4 広義積分

$$\iint_D e^{-x^2-y^2}\cos(x+y)\,dxdy, \quad D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\,y\geq 0\}$$

は絶対収束する.（例 6.2 と $|\cos(x+y)|\leq 1$ より）

問題 14 次の広義積分の値を求めよ.（計算に用いた近似集合列を明示すること.）

(1) $\displaystyle\iint_D e^{-x-y}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\,y\geq 0\}$

(2) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2+y^2)^2}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\,y\geq 0\}$

(3) $\displaystyle\iint_D \frac{1}{(1+x^2)(1+y^2)}\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\,y\geq 0\}$

(4) $\displaystyle\iint_D \log(x^2+y^2)\,dxdy, \qquad D=\{(x,y)\mid x\geq 0,\,y\geq 0,\,0<x^2+y^2\leq 1\}$

問題 15 $D=\{(x,y)\mid x^2+y^2\geq 1\}$ とおき，a を正の実数とする.

(1) 広義積分 $\displaystyle\iint_D (x^2+y^2)^{-a}\,dxdy$ が収束するような a の範囲を求めよ.

(2) 広義積分 $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2} (1+x^2+y^2)^{-a}\,dxdy$ が収束するような a の範囲を求めよ.（ヒント：被積分関数は単位閉円板 $U=\{(x,y)\mid x^2+y^2\leq 1\}$ では連続だから U で可積分である．よって D で広義積分可能となる条件を求めればよい．$(x,y)\in D$ のとき $x^2+y^2<1+x^2+y^2\leq 2(x^2+y^2)$ が成立することを用いる.）

7 積分と確率分布

X を実数の値をランダムにとる確率変数とする．X の確率密度関数が $f(x)$ であるとは，a,b を $a<b$ を満たす任意の実数とするとき，$a\leq X\leq b$ となる確率が

$$P(a\leq X\leq b)=\int_a^b f(x)\,dx$$

で与えられることである．特に $a\to-\infty$, $b\to\infty$ とすると

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx=P(X\in\mathbb{R})=1$$

でなければならない（正規化条件）．X の期待値 μ と分散 σ^2 （$\sigma>0$ は標準偏差と呼ばれる）はそれぞれ

$$\mu=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx, \qquad \sigma^2=\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2 f(x)\,dx$$

で与えられる．また，

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$$

を X の（累積）分布関数という．$f(x)$ が連続であれば，微分積分の基本公式により

$$F'(x) = \frac{d}{dx}\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt = \frac{d}{dx}\left(\int_{-\infty}^{0} f(t)\, dt + \frac{d}{dx}\int_{0}^{x} f(t)\, dt\right) = f(x)$$

となる．すなわち分布関数の導関数が確率密度関数となる．

期待値 μ, 分散 σ^2 の（1 次元）**正規分布**の確率密度関数は

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Bigr)$$

である．$\mu = 0$，$\sigma = 1$ のときは標準正規分布と呼ばれる．$y = \dfrac{x-\mu}{\sqrt{2}\sigma}$ として置換積分を行うと，例 6.2 より

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Bigl(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Bigr)\, dx = \frac{\sqrt{2}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-y^2}\, dy = \frac{\sqrt{2}\sigma\sqrt{\pi}}{\sqrt{2\pi}\sigma} = 1$$

となり正規化条件を満たしていることがわかる．

次に 2 次元（2 変量）の確率分布を考える．X と Y を 2 つの確率変数とするとき，ベクトル (X, Y) の（同時）確率密度関数が $f(x, y)$ であるとは，$\mathbb{R}^2$ の任意の面積確定の集合（またはそのような近似列を持つ集合） D に対して，$(X, Y) \in D$ となる確率が

$$P((X, Y) \in D) = \iint_D f(x, y)\, dxdy$$

で表されることである．たとえば，2 次元の標準正規分布の密度関数は

$$f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Bigl(-\frac{1}{2}x^2\Bigr)\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\Bigl(-\frac{1}{2}y^2\Bigr) = \frac{1}{2\pi}\exp\Bigl(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Bigr)$$

で与えられる．さらに一般の 2 次元正規分布を考えるため，(X, Y) が 2 次元標準正規分布に従う，すなわち確率密度関数がこの $f(x, y)$ であるとき，B を 2 次正則行列，$\mathbf{m} = {}^t(\mu_1, \mu_2)$ を任意の 2 次元ベクトルとして，新たな確率変数のベクトル (U, V) を

$$\begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} + \mathbf{m}$$

で定義する．このとき (U, V) の確率密度関数を求めよう．アフィン変換 $(u, v) = \Phi(x, y)$ を

$$(u, v) = \Phi(x, y) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = B\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \mathbf{m}$$

で定義する．Φ の逆写像 Φ^{-1} もアフィン変換であり，$C = B^{-1}$ とおくと

$$(x, y) = \Phi^{-1}(u, v) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = C\left(\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - \mathbf{m}\right) = C\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} - C\mathbf{m}$$

となることに注意する．$\mathbb{R}^2$ の面積確定の集合 D に対して $(U,V)\in D$ と $(X,Y)\in\Phi^{-1}(D)$ は同値だから

$$P((U,V)\in D)=P((X,Y)\in\Phi^{-1}(D))=\frac{1}{2\pi}\iint_{\Phi^{-1}(D)}\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)\,dxdy.$$

ここで変数変換 $(u,v)=\Phi^{-1}(x,y)$ を用いる．$\boldsymbol{x}={}^t(x,y)$, $\mathbf{v}={}^t(u,v)$ とおくと，

$$x^2+y^2={}^t\boldsymbol{x}\,\boldsymbol{x}={}^t(C(\mathbf{v}-\mathbf{m}))\,C(\mathbf{v}-\mathbf{m})={}^t(\mathbf{v}-\mathbf{m}){}^tCC(\mathbf{v}-\mathbf{m})$$

となり，さらに $A={}^tCC=\begin{pmatrix}a_{11}&a_{12}\\a_{21}&a_{22}\end{pmatrix}$ とおくと，${}^tA=A$ より A は対称行列であるから $a_{12}=a_{21}$ となることに注意すると，x^2+y^2 は

$$x^2+y^2={}^t(\mathbf{v}-\mathbf{m})A(\mathbf{v}-\mathbf{m})=a_{11}(u-\mu_1)^2+2a_{12}(u-\mu_1)(v-\mu_2)+a_{22}(v-\mu_2)^2$$

という 2 次形式で表される．よってアフィン変換 Φ^{-1} による変数変換公式から

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2\pi}\iint_{\Phi^{-1}(D)}\exp\Big(-\frac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)\,dxdy\\&=\frac{|\det C|}{2\pi}\iint_D\exp\Big(-\frac{1}{2}\big(a_{11}(u-\mu_1)^2+2a_{12}(u-\mu_1)(v-\mu_2)+a_{22}(v-\mu_2)^2\big)\Big)\,dudv\end{aligned}$$

を得る．$\det A=(\det C)^2$ に注意して，変数 (u,v) をあらためて (x,y) とすれば，

$$f(x,y)=\frac{\sqrt{|\det A|}}{2\pi}\exp\Big(-\frac{1}{2}\big(a_{11}(x-\mu_1)^2+2a_{12}(x-\mu_1)(y-\mu_2)+a_{22}(y-\mu_2)^2\big)\Big)\quad(11)$$

が (U,V) の確率密度関数であることがわかる．これが一般の 2 次元正規分布である．

問題 16 $f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\Big(-\dfrac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\Big)$ のとき置換積分と部分積分を用いて次を示せ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx=\mu,\qquad\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx=\sigma^2$$

問題 17 a を正の定数として，関数 $f(x)$ を $x\geq 0$ のとき $f(x)=ae^{-ax}$, $x<0$ のとき $f(x)=0$ と定義する（指数分布）．このとき次の積分を求めよ．

$$\int_{-\infty}^{\infty}f(x)\,dx,\qquad\mu=\int_{-\infty}^{\infty}xf(x)\,dx,\qquad\int_{-\infty}^{\infty}(x-\mu)^2f(x)\,dx$$

問題 18 確率変数のベクトル (X,Y) の確率密度関数が $f(x,y)=\dfrac{1}{2\pi}\exp\Big(-\dfrac{1}{2}(x^2+y^2)\Big)$ のとき，正の実数 t に対して $X^2+Y^2\leq t$ となる確率

$$F(t)=P(X^2+Y^2\leq t)=\iint_{D_t}f(x,y)\,dxdy,\qquad D_t=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x^2+y^2\leq t\}$$

と $F'(t)$ を求めよ（ヒント：極座標による変数変換公式を用いる）．

問題 19 式 (11) の $f(x,y)$ に対して $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}uf(u,v)\,dudv$ と $\displaystyle\iint_{\mathbb{R}^2}vf(u,v)\,dudv$ を求めよ．

8　3変数関数の積分

2変数のときと同様にして，3次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^3$ の部分集合で定義された3変数関数 $f(x,y,z)$ の積分を定義し，その計算法を導こう．

8.1　直方体上の積分

$f(x,y,z)$ を直方体

$$R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2] \subset \mathbb{R}^3$$

で定義された有界関数，すなわち，ある正の実数 M があって，$|f(x,y,z)| \leq M$ が任意の $(x,y,z) \in R$ について成立するような関数とする．区間 $[a_1, a_2]$, $[b_1, b_2]$, $[c_1, c_2]$ の分割

$$\Delta: \ a_1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_p = a_2, \quad b_1 = y_0 < y_1 < \cdots < y_q = b_2, \quad c_1 = z_0 < z_1 < \cdots < z_r = c_2$$

を決めると，直方体 R が pqr 個の小直方体

$$R_{ijk} := [x_{i-1}, x_i] \times [y_{j-1}, y_j] \times [z_{k-1}, z_k] \qquad (1 \leq i \leq p,\ 1 \leq j \leq q,\ 1 \leq k \leq r)$$

に分割される．それぞれの小直方体の体積を

$$|R_{ijk}| = (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})(z_k - z_{k-1})$$

と表す．

$$M_{ijk} = \sup\{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in R_{ijk}\}, \qquad m_{ijk} = \inf\{f(x,y,z) \mid (x,y,z) \in R_{ijk}\}$$

とおいて，$f(x,y,z)$ の R 上の**上限和**と**下限和**をそれぞれ

$$U(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} M_{ijk}|R_{ijk}|, \qquad L(f,\Delta) = \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{k=1}^{r} m_{ijk}|R_{ijk}|,$$

で定義する．

次の補題は1次元の場合 (補題 1.2) と同様に証明できる．

補題 8.1 R の任意の2つの分割 Δ, Δ' に対して，$L(f,\Delta) \leq U(f,\Delta')$ が成立する．

そこで，$f(x,y,z)$ の R 上の**上積分**と**下積分**をそれぞれ

$$\overline{\iiint_R} f(x,y,z)\,dxdydz = \inf\{U(f,\Delta) \mid \Delta \text{ は } R \text{ の分割 }\},$$

$$\underline{\iiint_R} f(x,y,z)\,dxdydz = \sup\{L(f,\Delta) \mid \Delta \text{ は } R \text{ の分割 }\}$$

と定義すると，下積分の値は上積分の値以下である．上積分と下積分の値が一致するとき，$f(x,y,z)$ は R 上で**可積分**であるという．このとき，上積分（= 下積分）の値を $f(x,y,z)$ の R 上の **(3 重）積分**といい，

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \underline{\iiint_R} f(x,y,z)\,dxdydz = \overline{\iiint_R} f(x,y,z)\,dxdydz$$

と表す.（ここでは，3 重積分であることを強調するために積分記号を 3 本並べているが，1 変数のときと同じく 1 本で済ませる場合も多い.）

8.2 一般の領域上の 3 重積分

Ω を $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合とし，$f(x,y,z)$ を Ω で有界な関数とする．Ω を含むような直方体 R を 1 つ固定する．$\mathbb{R}^3$ 上の関数 $\tilde{f}(x,y,z)$ を

$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & ((x,y,z) \in \Omega \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ のとき}) \end{cases}$$

と定義する．$\tilde{f}(x,y,z)$ が R 上で可積分であるとき，$f(x,y,z)$ は Ω 上で**可積分**であるといい，このとき

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz := \iiint_R \tilde{f}(x,y,z)\,dxdydz$$

と定義して $f(x,y,z)$ の Ω 上の（3 重）積分という．

定義 8.1 Ω を $\mathbb{R}^3$ の有界集合とする．Ω の**特性関数** $\chi_\Omega(x,y,z)$ を

$$\chi_\Omega(x,y,z) = \begin{cases} 1 & ((x,y,z) \in \Omega \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \Omega \text{ のとき}) \end{cases}$$

で定義する．$\chi_\Omega(x,y,z)$ は $f(x,y,z) = 1$ のときの $\tilde{f}(x,y,z)$ に相当する．

Ω を含む直方体 R を 1 つ固定する．関数 1 が Ω 上で可積分，すなわち $\chi_\Omega(x,y,z)$ が R 上可積分であるとき，Ω は**体積確定**であるといい，

$$|\Omega| := \iiint_\Omega 1\,dxdydz = \iiint_R \chi_\Omega(x,y,z)\,dxdydz$$

のことを Ω の**体積**（または 3 次元測度）と定義する．

次の定理と命題は 2 重積分のときと同様に証明できる．

定理 8.1 Ω を $\mathbb{R}^3$ の体積確定の有界閉集合とする．関数 $f(x,y,z)$ が Ω で連続ならば，$f(x,y,z)$ は Ω 上で可積分である．

命題 8.1 Ω は $\mathbb{R}^3$ の有界閉集合で体積確定とする．Ω で定義された有界関数 $f(x,y,z)$ と $g(x,y,z)$ が Ω 上で可積分であるとすると，次が成立する．

(1) $f(x,y,z)+g(x,y,z)$ は Ω 上で可積分であり，

$$\iiint_\Omega (f(x,y,z)+g(x,y,z))\,dxdydz = \iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz + \iiint_\Omega g(x,y,z)\,dxdydz.$$

(2) 任意の実数 c に対して $cf(x,y,z)$ は Ω 上で可積分であり，
$\displaystyle\iiint_\Omega cf(x,y,z)\,dxdydz = c\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz.$

(3) 任意の $(x,y,z)\in\Omega$ について $f(x,y,z)\le g(x,y,z)$ ならば，
$\displaystyle\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz \le \iiint_\Omega g(x,y,z)\,dxdydz.$

(4) $|f(x,y,z)|$ は Ω 上で可積分であり，

$$\left|\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz\right| \le \iiint_\Omega |f(x,y,z)|\,dxdydz$$

8.3 累次積分

次の定理は 2 重積分のときと同様に証明できる．

定理 8.2 (Fubini の定理) $f(x,y,z)$ は直方体 $R=[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]$ で定義された有界関数であり，R 上可積分であるとする．

(1) 任意の $(x,y)\in[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]$ を固定したとき，$f(x,y,z)$ が z の関数として $[c_1,c_2]$ 上で可積分ならば，

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]}\left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz\right)dxdy$$

が成立する．

(2) 任意の $x\in[a_1,a_2]$ を固定したとき，$f(x,y,z)$ が (y,z) の関数として $[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]$ 上可積分ならば，

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{a_2}\left(\iint_{[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]} f(x,y,z)\,dydz\right)dx$$

系 8.1 $f(x,y,z)$ が直方体 $R=[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]$ で連続ならば，

$$\iiint_R f(x,y,z)\,dxdydz = \int_{a_1}^{a_2}\left(\int_{b_1}^{b_2}\left(\int_{c_1}^{c_2} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx$$

が成立する．累次積分の順序は入れ替えてもよい．

定理 8.3 D を xy 平面の面積確定の有界閉集合，$g_1(x,y)$ と $g_2(x,y)$ を D で定義された連続関数で任意の $(x,y) \in D$ について $g_1(x,y) \leq g_2(x,y)$ を満たすものとして，

$$\Omega = \{(x,y,z) \mid (x,y) \in D,\ g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y)\}$$

とおく．このとき Ω は体積確定であり，Ω で定義された連続関数 $f(x,y,z)$ に対して

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy$$

が成立する．特に Ω の体積は

$$|\Omega| = \iint_D \{g_2(x,y) - g_1(x,y)\}\,dxdy$$

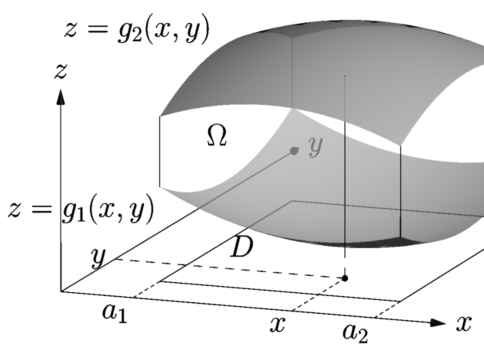
証明: $R = [a_1,a_2] \times [b_1,b_2] \times [c_1,c_2]$ を Ω を含む直方体とする．Ω が体積確定であることは 2 次元の縦線領域の場合と同様に証明できる．(x,y の連続関数のグラフは体積 0 であることから.) $(x,y) \in D$ を固定したとき $\tilde{f}(x,y,z)$ は z の関数として $z = g_1(x,y)$ と $z = g_2(x,y)$ の高々2 点以外では連続であるから z について区間 $[c_1,c_2]$ で可積分である．また

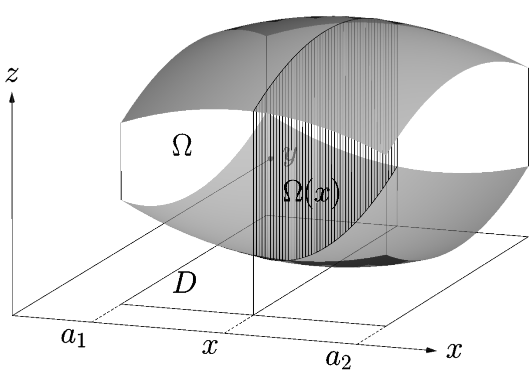
$$\tilde{f}(x,y,z) = \begin{cases} f(x,y,z) & ((x,y) \in D \text{ かつ } g_1(x,y) \leq z \leq g_2(x,y) \text{ のとき}) \\ 0 & (\text{それ以外のとき}) \end{cases}$$

であるから定理 8.2 の (1) より，

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_R \tilde{f}(x,y,z)\,dxdydz \\
&= \iint_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} \left(\int_{c_1}^{c_2} \tilde{f}(x,y,z)\,dz \right) dxdy = \iint_{[a_1,a_2]\times[b_1,b_2]} \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} \tilde{f}(x,y,z)\,dz \right) dxdy \\
&= \iint_D \left(\int_{g_1(x,y)}^{g_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz \right) dxdy
\end{aligned}$$

が成立する．特に $f(x,y,z) = 1$ とすれば Ω の体積となる．□





定理 8.4 Ω を $\mathbb{R}^3$ の体積確定の有界閉集合で直方体 $R = [a_1, a_2] \times [b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ に含まれるものとする．$a_1 \le x \le a_2$ を満たす任意の x に対して yz 平面の集合 (Ω の断面)

$$\Omega(x) := \{(y, z) \mid (x, y, z) \in \Omega\}$$

は面積確定であると仮定する．このとき Ω で連続な任意の関数 $f(x, y, z)$ について，

$$\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \int_{a_1}^{a_2} \left(\iint_{\Omega(x)} f(x, y, z)\, dydz \right) dx$$

が成立する．特に Ω の体積は

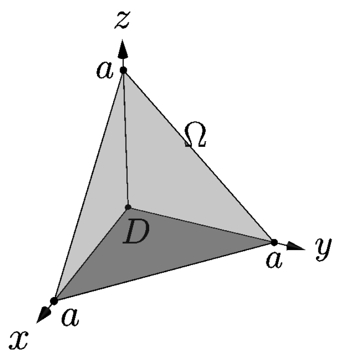
$$|\Omega| = \int_{a_1}^{a_2} |\Omega(x)|\, dx$$

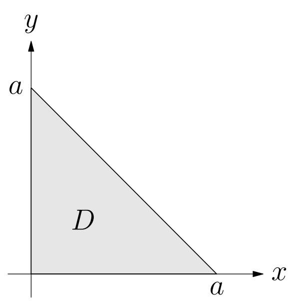
証明: $x \in [a_1, a_2]$ を固定したとき $\tilde{f}(x, y, z)$ は (y, z) の関数として $[b_1, b_2] \times [c_1, c_2]$ 上で可積分である（定理 2.1）．よって定理 8.2 の (2) より，

$$\begin{aligned}
&\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz = \iiint_R \tilde{f}(x, y, z)\, dxdydz \\
&= \int_{a_1}^{a_2} \left(\iint_{[b_1,b_2]\times[c_1,c_2]} \tilde{f}(x, y, z)\, dydz \right) dx = \int_{a_1}^{a_2} \left(\iint_{\Omega(x)} f(x, y, z)\, dydz \right) dx
\end{aligned}$$

が成立する．特に $f(x, y, z) = 1$ とすれば Ω の体積となる．□

例 8.1 $a > 0$ として四面体 $\Omega = \{(x, y, z) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ z \ge 0,\ x + y + z \le a\}$ 上の 3 重積分を考える．$D = \{(x, y) \mid x \ge 0,\ y \ge 0,\ x + y \le a\}$ とおくと，





$$\Omega = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in D,\ 0 \le z \le a - x - y\}$$

と表されることがわかるので，定理 8.3 より，Ω 上の連続関数 $f(x, y, z)$ について

$$\begin{aligned}
\iiint_\Omega f(x, y, z)\, dxdydz &= \iint_D \left(\int_0^{a-x-y} f(x, y, z)\, dz \right) dxdy \\
&= \int_0^a \left(\int_0^{a-x} \left(\int_0^{a-x-y} f(x, y, z)\, dz \right) dy \right) dx
\end{aligned}$$

特に Ω の体積は

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega 1\,dxdydz &= \int_0^a \left(\int_0^{a-x}\left(\int_0^{a-x-y} 1\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^a\left(\int_0^{a-x}(a-x-y)\,dy\right)dx \\ &= \int_0^a \left[(a-x)y - \frac{1}{2}y^2\right]_{y=0}^{y=a-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2\,dx = \frac{1}{6}a^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\iiint_\Omega x\,dxdydz &= \int_0^a \left(\int_0^{a-x}\left(\int_0^{a-x-y} x\,dz\right)dy\right)dx = \int_0^a\left(\int_0^{a-x}(a-x-y)x\,dy\right)dx \\ &= \int_0^a \left[(a-x)xy - \frac{1}{2}xy^2\right]_{y=0}^{y=a-x} dx = \frac{1}{2}\int_0^a (a-x)^2x\,dx = \frac{1}{24}a^4\end{aligned}$$

累次積分の順序を入れ替えれば，

$$\iiint_\Omega y\,dxdydz = \iiint_\Omega z\,dxdydz = \frac{1}{24}a^4$$

であることもわかるから Ω の重心は $\left(\frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a, \frac{1}{4}a\right)$ である．

問題 20 次の 3 重積分を累次積分を用いて計算せよ．

(1) $\displaystyle\iiint_\Omega (x+y+z)\,dxdydz, \qquad \Omega = [0,a]\times[0,b]\times[0,c] \quad (a,b,c>0)$

(2) $\displaystyle\iiint_\Omega 1\,dxdydz, \qquad \Omega = \{(x,y,z) \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1,\ 1-x-y\le z\le 1\}$

(3) $\displaystyle\iiint_\Omega z\,dxdydz, \qquad \Omega = \{(x,y,z) \mid x\ge 0,\ y\ge 0,\ x+y\le 1,\ 1-x-y\le z\le 1\}$

8.4 積分変数の変換

定理 8.5 (アフィン変換による積分変数の変換) $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ を正則行列，$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3\end{pmatrix}$ を任意のベクトルとする．uvw 空間から xyz 空間への写像 $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ を

$$(x,y,z) = \Phi(u,v,w) \quad \Leftrightarrow \quad \begin{pmatrix} x \\ y \\ z\end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \\ w\end{pmatrix} + \mathbf{b}$$

により定義する．(このような写像をアフィン変換という．) Ω' を uvw 空間における有界閉集合として，$\Omega := \Phi(\Omega')$ とおく．$f(x,y,z)$ を Ω 上で定義された有界関数として，Ω' を定義域とする関数 $g(u,v,w)$ を

$$\begin{aligned} g(u,v,w) &:= (f\circ\Phi)(u,v,w) \\ &= f(a_{11}u + a_{12}v + a_{13}w + b_1,\ a_{21}u + a_{22}v + a_{23}w + b_2,\ a_{31}u + a_{32}v + a_{33}w + b_3)\end{aligned}$$

により定義する．このとき，$f(x,y,z)$ が Ω 上で可積分であることと $g(u,v,w)$ が Ω' 上で可積分であることは同値であり，そのとき

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = |\det A| \iiint_{\Omega'} g(u,v,w)\,dudvdw$$

が成立する．特に，Ω が体積確定であることと Ω' が体積確定であることは同値であり，そのとき $|\Omega| = |\det A||\Omega'|$ という関係が成立する．

証明: 2 変数のときと同様に行列 A を基本行列の積で表せるから，A が基本行列のときに示せばよい．これも 2 変数のときと同様にできる．□

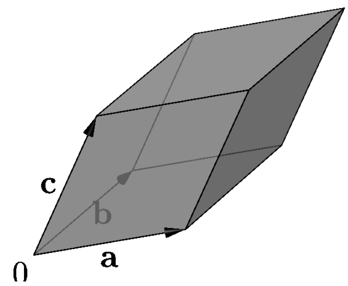
系 8.2 3 つの 3 次元縦ベクトル $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ を 3 辺とする平行 6 面体

$$V := \{x\mathbf{a} + y\mathbf{b} + z\mathbf{c} \mid 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1\}$$

の体積は $|V| = \left|\det \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix}\right|$ である．

証明: $\Omega' = [0,1] \times [0,1] \times [0,1]$,

$\Phi(u,v,w) = u\mathbf{a} + v\mathbf{b} + w\mathbf{c} = \begin{pmatrix} \mathbf{a} & \mathbf{b} & \mathbf{c} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}$ として上の定理を用いればよい．□



次の定理も定理 8.5 を用いて 2 変数のときと同様に証明できる．

定理 8.6 (3 重積分の変数変換公式) Ω' を uvw 空間の体積確定の有界閉集合，$\varphi_1(u,v,w)$, $\varphi_2(u,v,w)$, $\varphi_3(u,v,w)$ を Ω' を含む開集合で定義された C^1 級関数として，写像 $\Phi : \Omega' \to \mathbb{R}^3$ を

$$(x,y,z) = \Phi(u,v,w) = (\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w))$$

で定義する．Φ は単射 (1 対 1 写像) であり，$\Omega := \Phi(\Omega')$ は体積確定であると仮定する．写像 Φ の Jacobian（ヤコビアン）を

$$J(\Phi)(u,v,w) = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u,v,w)} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial u}\varphi_1(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial v}\varphi_1(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial w}\varphi_1(u,v,w) \\ \frac{\partial}{\partial u}\varphi_2(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial v}\varphi_2(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial w}\varphi_2(u,v,w) \\ \frac{\partial}{\partial u}\varphi_3(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial v}\varphi_3(u,v,w) & \frac{\partial}{\partial w}\varphi_3(u,v,w) \end{pmatrix}$$

で定義して，

$$J(\Phi)(u,v,w) \ne 0 \qquad (\forall (u,v,w) \in \Omega')$$

を仮定する．$f(x,y,z)$ を Ω で定義された連続関数として，Ω' を定義域とする関数 $g(u,v,w)$ を

$$g(u,v,w) = (f \circ \Phi)(u,v,w) = f(\varphi_1(u,v,w), \varphi_2(u,v,w), \varphi_3(u,v,w))$$

により定める．このとき $f(x,y,z)$ は Ω 上で可積分，$g(u,v,w)|J(\Phi)(u,v,w)|$ は Ω' 上で可積分であり，

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \iiint_{\Omega'} g(u,v,w)|J(\Phi)(u,v,w)|\,dudvdw$$

が成立する．特に Ω の体積は

$$|\Omega| = \iiint_{\Omega'} |J(\Phi)(u,v,w)|\,dudvdw$$

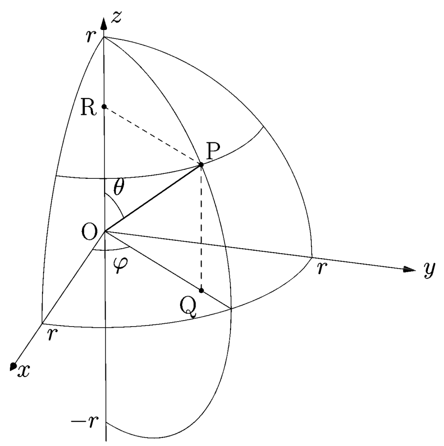
で与えられる．

3 次元極座標による変数変換公式

xyz 空間における点 P の座標を (x,y,z) とする．$r=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおき，点 P と z 軸のなす角を θ とする $(0\le\theta\le\pi)$．また，点 P の xy 平面への射影を Q とする．$(x,y)\ne(0,0)$ のとき，点 Q と x 軸の正の部分とのなす角を φ とする $(0\le\varphi<2\pi)$．このとき，

$$x=r\sin\theta\cos\varphi,\quad y=r\sin\theta\sin\varphi,\quad z=r\cos\theta$$

となることがわかる．(r,θ,φ) を 3 次元極座標という．



写像 $(x,y,z)=\Phi(r,\theta,\varphi)=(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta)$ のヤコビアンは

$$\begin{aligned}
J(\Phi)(r,\theta,\varphi) &= \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(r,\theta,\varphi)} = \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{vmatrix} \\
&= -r\sin\theta\sin\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} - r\sin\theta\cos\varphi \begin{vmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta \end{vmatrix} \\
&= r^2\sin\theta\sin^2\varphi + r^2\sin\theta\cos^2\varphi = r^2\sin\theta
\end{aligned}$$

となる．E を $[0,\pi]\times[0,2\pi]$ に含まれる面積確定の集合として，$g_1(\theta,\varphi)$ と $g_2(\theta,\varphi)$ は E で連続な関数であり E 上で $0\le g_1(\theta,\varphi)\le g_2(\theta,\varphi)$ を満たすとする．

$$\Omega' = \{(r,\theta,\varphi)\mid(\theta,\varphi)\in E,\ g_1(\theta,\varphi)\le r\le g_2(\theta,\varphi)\},$$
$$\Omega = \{(r\sin\theta\cos\varphi,\, r\sin\theta\sin\varphi,\, r\cos\theta)\mid(r,\theta,\varphi)\in\Omega'\}$$

とおくと，Ω で連続な関数 $f(x,y,z)$ に対して

$$
\begin{aligned}
&\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz \\
&= \iiint_{\Omega'} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi \\
&= \iint_E \left(\int_{g_1(\theta,\varphi)}^{g_2(\theta,\varphi)} f(r\sin\theta\cos\varphi,\ r\sin\theta\sin\varphi,\ r\cos\theta)\,r^2\,dr\right)\sin\theta\,d\theta d\varphi
\end{aligned}
$$

が成立する．

例 8.2 $\Omega = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$ とおく．$\Omega' = \Big\{(r,\theta,\varphi) \mid 0 \leq r \leq 1,\ 0 \leq \theta \leq \dfrac{\pi}{2},\ 0 \leq \varphi \leq \dfrac{\pi}{2}\Big\}$ が極座標変換で Ω にうつされるから，

$$
\begin{aligned}
\iiint_\Omega z^2\,dxdydz &= \iiint_{\Omega'} (r\cos\theta)^2 r^2\sin\theta\,drd\theta d\varphi = \int_0^1 r^4\,dr\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin\theta\,d\theta\int_0^{\frac{\pi}{2}} 1\,d\varphi \\
&= \frac{\pi}{10}\Big[-\frac{1}{3}\cos^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{30}
\end{aligned}
$$

問題 21 変数変換により次の 3 重積分の値を求めよ．ただし a,b,c は正の定数とする．

(1) $\displaystyle\iiint_\Omega \frac{1}{1+x^2+y^2+z^2}\,dxdydz, \qquad \Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2\}$

(2) $\displaystyle\iiint_\Omega (x^2+y^2+z^2)\,dxdydz, \qquad \Omega = \Big\{(x,y,z) \mid \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2} \leq 1\Big\}$

問題 22 次の集合の重心を求めよ．

(1) $\Omega = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0,\ x^2+y^2+z^2 \leq 1\}$

(2) $\Omega = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ 0 \leq z \leq 1-x^2-y^2\}$

問題 23 a を正の実数とするとき，集合

$$\Omega = \Big\{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2+z^2 \leq a^2,\ z \geq \sqrt{x^2+y^2}\Big\}$$

（半径 a の球と z 軸を中心軸とする円錐との共通部分）の体積を求めよ．

問題 24 D を xy 平面の上半分（$y>0$ の部分）に含まれる面積確定の領域とする．D を x 軸のまわりに回転させてできる xyz 空間の集合を Ω とする．写像 $\Phi : D\times\mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^3$ を $\Phi(x,y,\theta) = (x, y\cos\theta, y\sin\theta)$ で定義すると，$\Omega = \Phi(D\times[0,2\pi])$ である．

(1) 写像 Φ のヤコビアンを求めよ．

(2) 写像 Φ による変数変換を用いて，Ω の体積は $|\Omega| = 2\pi\displaystyle\iint_D y\,dxdy$ で与えられることを示せ．

(3) D の重心を (x_0,y_0) とするとき，$|\Omega| = 2\pi y_0|D|$ を示せ．ただし $|D|$ は D の面積を表す．

8.5 広義積分

定義 8.2 Ω を $\mathbb{R}^3$ の部分集合とする．Ω の部分集合の列 $K_1, K_2, \ldots$ が Ω の**近似集合列**（取りつくし集合列）とは，

(1) K_n は体積確定の有界閉集合

(2) $K_1 \subset K_2 \subset K_3 \subset \cdots$

(3) Ω に含まれる任意の有界閉集合 K に対して，ある自然数 n があって $K \subset K_n$

が成立することと定義する．

定義 8.3 $f(x,y,z)$ は $\mathbb{R}^3$ の部分集合 Ω で定義された連続関数であり，$f(x,y,z) \geq 0$ が任意の Ω について成立すると仮定する．$K_1, K_2, \ldots$ を Ω の近似集合列とする．このとき，$f(x,y,z)$ の Ω 上の**広義積分**を

$$\iiint_\Omega f(x,y,z)\,dxdydz = \lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} f(x,y,z)\,dxdydz \tag{12}$$

で定義する．この極限が存在するとき，$f(x,y,z)$ は Ω 上で**広義積分可能**または，この**広義積分は収束する**という．以上の定義は Ω の近似集合列 $K_1, K_2, \ldots$ の選び方によらないことは 2 重積分のときと同様に証明できる．

例 8.3 $K_n = [-n,n] \times [-n,n] \times [-n,n]$ は $\mathbb{R}^3$ の近似集合列であるから，

$$\begin{aligned}\iiint_{\mathbb{R}^3} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz &= \lim_{n\to\infty} \iiint_{K_n} e^{-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz \\ &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} e^{-x^2}\,dx \int_{-n}^{n} e^{-y^2}\,dy \int_{-n}^{n} e^{-z^2}\,dz = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,dx\right)^3 = \pi^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

例 8.4 a を正の実数，$\Omega = \{(x,y,z) \mid 0 < x^2+y^2+z^2 \leq 1\} = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \setminus \{(0,0,0)\}$ とし広義積分

$$I(a) = \iiint_\Omega \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}\,dxdydz$$

を考察しよう．Ω の近似集合列として

$$K_n = \{(x,y,z) \mid \frac{1}{n^2} \leq x^2+y^2+z^2 \leq 1\} \quad (n = 1,2,3,\ldots)$$

を取ることができる．$L_n = [\frac{1}{n}, 1] \times [0,\pi] \times [0,2\pi]$ とおくと 3 次元極座標による積分変数の変換で

$$\begin{aligned}\iiint_{K_n} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}\,dxdydz &= \iiint_{L_n} \frac{r^2 \sin\theta}{r^{2a}}\,drd\theta d\varphi = \int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{2-2a}\,dr \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi \\ &= \left[\frac{1}{3-2a} r^{3-2a}\right]_{\frac{1}{n}}^{1} \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot 2\pi = \frac{4\pi}{3-2a}\left(1 - n^{2a-3}\right)\end{aligned}$$

となる．ただし $a \neq \dfrac{3}{2}$ とした．$a = \dfrac{3}{2}$ のときは

$$\iiint_{K_n} \frac{1}{(x^2+y^2+z^2)^a}\,dxdydz = \int_{\frac{1}{n}}^{1} r^{-1}\,dr \int_0^{\pi} \sin\theta\,d\theta \int_0^{2\pi} 1\,d\varphi$$
$$= 4\pi\Big[\log r\Big]_{\frac{1}{n}}^{1} = 4\pi\log n$$

以上により広義積分 $I(a)$ が収束するための条件は $a < \dfrac{3}{2}$ であり，このとき

$$I(a) = \frac{4\pi}{3-2a}$$

となる．

$f(x,y,z) \geq 0$ とは限らない一般の場合については，2 変数の広義積分と同様に次の定理が成立する．

定理 8.7 $f(x,y,z)$ が体積確定の集合 $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ で連続であり，広義積分 $\displaystyle\iiint_{\Omega} |f(x,y,z)|\,dxdydz$ が収束すると仮定する．このとき Ω の任意の近似集合列 $K_1, K_2, \ldots$ に対して極限

$$\lim_{n\to\infty}\iiint_{K_n} f(x,y,z)\,dxdyz = \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\,dxdydz$$

が存在して近似集合列 $K_1, K_2, \ldots$ の取り方によらない．これを $f(x,y,z)$ の Ω 上の広義積分という．

問題 25 次の広義積分の値を求めよ．

$$\iiint_{\Omega} xe^{-x^2-y^2-z^2}\,dxdydz, \qquad \Omega = \{(x,y,z) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

問題 26 次の広義積分が収束するような実数 a の範囲と，そのときの広義積分の値を求めよ．

$$\iiint_{\Omega} (x^2+y^2+z^2)^a\,dxdydz, \qquad \Omega = \{(x,y,z) \mid x^2+y^2+z^2 \geq 1\}$$

目 次