解析学概論 I

大阿久 俊則

1　ユークリッド空間とその位相

1.1　ユークリッド空間

$\mathbb{R}$ で実数全体の集合を表す．n を自然数として

$$\mathbb{R}^n = \{\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) \mid x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}\}$$

を n 次元ユークリッド空間 (n-dimensional Euclidean space) という．集合 $\mathbb{R}^n$ の元を n 次元ユークリッド空間の**点** (point)，または n 次元**ベクトル** (vector) と呼び，$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ のように太字で表すことにする．$n = 2$ のときは (x_1, x_2) の代わりに (x, y), $n = 3$ のときは (x_1, x_2, x_3) の代わりに (x, y, z) と表すことが多い．特に $\mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ は原点またはゼロベクトルを表す．

$\mathbb{R}^n$ の 2 つの元 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ と $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ をベクトルとみなしたとき，和・差および $c \in \mathbb{R}$ によるスカラー倍

$$\mathbf{x}+\mathbf{y} = (x_1+y_1, \ldots, x_n+y_n), \qquad \mathbf{x}-\mathbf{y} = (x_1-y_1, \ldots, x_n-y_n), \qquad c\mathbf{x} = (cx_1, \ldots, cx_n)$$

が定義される．さらに，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の**内積** (inner product) を

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = x_1y_1 + \cdots + x_ny_n$$

で定義する．$\mathbf{x}, \mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \mathbf{y}, \mathbf{y}_1, \mathbf{y}_2$ を $\mathbb{R}^n$ の元，c_1, c_2 を実数とすると，

$$\mathbf{x} \cdot (c_1\mathbf{y}_1 + c_2\mathbf{y}_2) = c_1\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_1 + c_2\,\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}_2, \qquad (c_1\mathbf{x}_1 + c_2\mathbf{x}_2) \cdot \mathbf{y} = c_1\,\mathbf{x}_1 \cdot \mathbf{y} + c_2\,\mathbf{x}_2 \cdot \mathbf{y}$$

が成立する．

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$$

を $\mathbf{x}$ の**ノルム** (norm) という．ノルムは次の性質を満たす．

命題 1　(1) $\|\mathbf{x}\| \geq 0$ であり等号は $\mathbf{x} = \mathbf{0} = (0, \ldots, 0)$ のときのみ成立する．

(2) $\|c\mathbf{x}\| = |c|\|\mathbf{x}\|$ が任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ と $c \in \mathbb{R}$ について成立する．

(3) $|\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ が任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について成立する (Cauchy-Schwarz の不等式)．等号が成立するのは，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のうち少なくとも一方が $\mathbf{0}$ であるか，または $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$ を満たす実数 c が存在するときである．$c \ge 0$ のときは $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ が，$c \le 0$ のときは $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ が成立する．

(4) $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ が任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について成立する（三角不等式）．等号が成立するのは，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ のうち少なくとも一方が $\mathbf{0}$ であるか，または $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$ を満たす<u>正の</u>実数 c が存在するときである．

(5) $\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| \le \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$ が任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について成立する．

証明: (1) $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \ge 0$ と平方根の定義より $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} \ge 0$ が成立する．$x_1^2 \ge 0, \ldots, x_n^2 \ge 0$ より $\|\mathbf{x}\|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 = 0$ となるのは $x_1 = \cdots = x_n = 0$，すなわち $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のときである．

(2) 平方根の定義より $\sqrt{c^2} = |c|$ となることに注意すると，

$$\|c\mathbf{x}\| = \sqrt{c^2(x_1^2+\cdots+x_n^2)} = |c|\sqrt{x_1^2+\cdots+x_n^2} = |c|\|\mathbf{x}\|$$

(3) $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のときは (3) の両辺が 0 で等式が成立する．次に $\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ と仮定して t を任意の実数とすると

$$0 \le \|\mathbf{y} - t\mathbf{x}\|^2 = (\mathbf{y}-t\mathbf{x})\cdot(\mathbf{y}-t\mathbf{x}) = \|\mathbf{y}\|^2 - 2t(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}) + t^2\|\mathbf{x}\|^2 \tag{1.1}$$

が常に成立する．(1.1) 式の右辺は t の 2 次式であるから，常に 0 以上であるためには判別式が 0 以下，すなわち

$$(\mathbf{x}\cdot\mathbf{y})^2 - \|\mathbf{x}\|^2\|\mathbf{y}\|^2 \le 0$$

となる必要がある．移項して平方根をとれば (3) が導かれる．(3) で等号が成立する，すなわち (1.1) の右辺の判別式が 0 と仮定すると，(1.1) の右辺の 2 次関数のグラフは x 軸と接するから，$\|\mathbf{y} - t\mathbf{x}\|^2 = 0$ となる実数 t が存在する．この実数を c とおけば $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$ となる．このとき $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = c\mathbf{x}\cdot\mathbf{x} = c\|\mathbf{x}\|^2$，$\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| = |c|\|\mathbf{x}\|^2$ であるから，$c \ge 0$ ならば $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$, $c \le 0$ ならば $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = -\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ が成立する．

(4) $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} \le |\mathbf{x}\cdot\mathbf{y}| \le \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ を用いると

$$\begin{aligned}\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\|^2 &= (\mathbf{x}+\mathbf{y})\cdot(\mathbf{x}+\mathbf{y}) = \|\mathbf{x}\|^2 + 2\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} + \|\mathbf{y}\|^2 \le \|\mathbf{x}\|^2 + 2\|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{y}\|^2 \\ &= (\|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|)^2\end{aligned}$$

が成立するから，平方根をとって $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \le \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ が示された．等号が成立するのは $\mathbf{x}\cdot\mathbf{y} = \|\mathbf{x}\|\|\mathbf{y}\|$ となるときである．これは (3) から，$\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の少なくとも一方がゼロベクトルか，または $\mathbf{y} = c\mathbf{x}$ となる非負実数 $c \ge 0$ が存在するときである．$c = 0$ のときは $\mathbf{y} = \mathbf{0}$ であるから，$c > 0$ としてよい．

(5) 三角不等式より

$$\|\mathbf{x}\| = \|\mathbf{y} + (\mathbf{x}-\mathbf{y})\| \le \|\mathbf{y}\| + \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$$

が成立する．移項して $\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ を得る．さらに $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ を入れ替えれば，$\|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\| \leq \|\mathbf{y} - \mathbf{x}\| = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ も成立する．以上により

$$\big|\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|\big| = \max\{\|\mathbf{x}\| - \|\mathbf{y}\|, \|\mathbf{y}\| - \|\mathbf{x}\|\} \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

が示された．□

$\mathbb{R}^n$ の 2 点 $\mathbf{x}$ と $\mathbf{y}$ の**距離** (distance) は $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ で定義される．

命題 2 (1) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ であり等号は $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ のときのみ成立する．

(2) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ が任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n$ について成立する．

(3) $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$ が任意の $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathbb{R}^n$ について成立する (三角不等式).

証明: (1) と (2) は定義から明らかなので (3) を示す．命題 1 の (4) より

$$d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| = \|(\mathbf{x} - \mathbf{z}) + (\mathbf{z} - \mathbf{y})\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{z}\| + \|\mathbf{z} - \mathbf{y}\| = d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) + d(\mathbf{z}, \mathbf{y})$$

□

1.2 開集合と閉集合

$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ と正の実数 ε （イプシロン）に対して集合

$$U(\mathbf{a}; \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\}$$

を $\mathbf{a}$ の ε **近傍** (ε-neighborhood) と呼ぶ．$n = 2$ ならば $\mathbf{a}$ を中心とする半径 ε の円の内部，$n = 3$ ならば $\mathbf{a}$ を中心とする半径 ε の球の内部を表す．

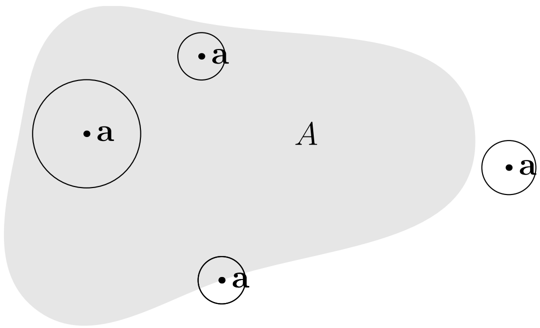
定義 1 A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合，$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ とする．

(1) $\mathbf{a}$ が A の**内点** (interior point) とは，ある正の実数 ε があって，$U(\mathbf{a}; \varepsilon) \subset A$ となること．このとき特に $\mathbf{a} \in A$ である．A の内点全体の集合を A の**内部** (interior) といい A° で表す．A の内点は A に属するから $A^\circ \subset A$ である.（記号 $\subset$ は $=$ の場合も含むことに注意.）

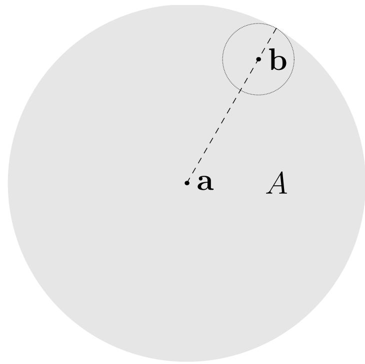
(2) $\mathbf{a}$ が A の**外点** (exterior point) とは，ある $\varepsilon > 0$ があって，$U(\mathbf{a}; \varepsilon) \cap A = \emptyset$ (空集合) となること．このとき特に $\mathbf{a} \notin A$ である．

(3) $\mathbf{a}$ が A の**境界点** (boundary point) とは，$\mathbf{a}$ が A の内点でも外点でもないこと，すなわち，すべての $\varepsilon > 0$ について $U(\mathbf{a}; \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$ かつ $U(\mathbf{a}; \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset$ となること．ここで $A^c = \mathbb{R}^n \setminus A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbf{x} \notin A\}$ は A の補集合を表す．A の境界点の全体を A の**境界** (boundary) といい ∂A で表す.

(4) A とその境界の和集合 $A \cup \partial A$ を A の**閉包** (closure) といい $\overline{A}$ で表す.



定義 1



例 1

定義 2 A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．

(1) A が ($\mathbb{R}^n$ の) **開集合** (open set) とは，$A^\circ = A$ であること．言い換えれば，A のすべての点が A の内点であること．これは更に A の境界点が A に属さないことと同値である．

(2) A が ($\mathbb{R}^n$ の) **閉集合** (closed set) とは，$\overline{A} = A$ であること．言い換えれば，A のすべての境界点が A に属すること．

定義より A が閉集合であることと補集合 A^c が開集合であることは同値であることがわかる．特に $\mathbb{R}^n$ 全体と空集合 $\emptyset$ はともに開集合かつ閉集合である．

例 1 $\mathbf{a}$ を $\mathbb{R}^n$ の任意の点，r を正の実数として集合 $A = U(\mathbf{a}; r)$ を考える．$\mathbf{b}$ を A の任意の点とする．$\varepsilon = r - \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ とおくと $\varepsilon > 0$ であり，$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ が $U(\mathbf{b}; \varepsilon)$ に属せば

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq \|\mathbf{x} - \mathbf{b}\| + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| < \varepsilon + \|\mathbf{b} - \mathbf{a}\| = r$$

となるから $\mathbf{x}$ は $A = U(\mathbf{a}; r)$ に属する．よって $U(\mathbf{b}; \varepsilon) \subset A$ であるから $\mathbf{b}$ は A の内点である．従って A のすべての点は A の内点だから A は開集合である．また A の境界は $\partial A = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| = r\}$, A の閉包は $\overline{A} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| \leq r\}$ である．

例 2 一般に I と J を $\mathbb{R}$ の部分集合とするとき，直積集合 $I \times J$ は

$$I \times J = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I,\, y \in J\}$$

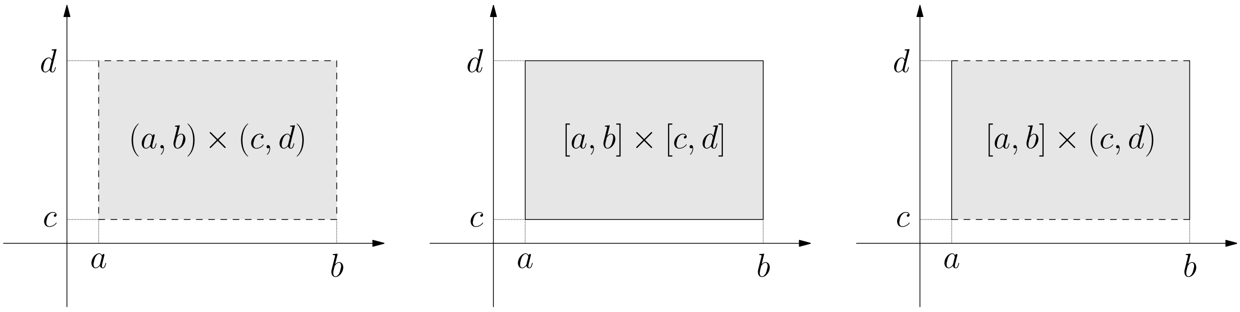
で定義される $\mathbb{R}^2$ の部分集合である．$a < b$ かつ $c < d$ のとき

(1) $(a, b) \times (c, d)$ は $(a, c), (b, c), (b, d), (a, d)$ を頂点とする長方形の内部であり開集合である．

(2) $[a, b] \times [c, d]$ は $(a, c), (b, c), (b, d), (a, d)$ を頂点とする長方形の内部と辺を合わせた集合であり閉集合である．

(3) $[a, b] \times (c, d)$ は開集合でも閉集合でもない．

これらの 3 つの集合の閉包は $[a, b] \times [c, d]$ であり，内部は $(a, b) \times (c, d)$ である．



2　多変数関数とその連続性

2.1　多変数関数

D を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．D から $\mathbb{R}$ への写像 $f : D \to \mathbb{R}$ を D で定義された（または D を定義域とする）n 変数関数という．変数 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ を明示するときは，$f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ と表す．$n = 2$ のときは $f(x, y)$, $n = 3$ のときは $f(x, y, z)$ と表すことが多い．

例 3 $a_1, \ldots, a_n, b$ を実数の定数とするとき

$$f(x_1, \ldots, x_n) = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$$

は $\mathbb{R}^n$ で定義された n 変数関数である．これを 1 次関数という．

例 4 $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ は開集合 $D = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid (x, y) \neq (0, 0)\}$ (平面から原点を除いた集合) で定義された 2 変数関数である．

例 5 $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{xy}$ は開集合 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0,\ y \neq 0\}$ (平面から x 軸と y 軸を除いた集合) で定義された 2 変数関数である．

問題 1 (基本) 次の各々の 2 変数関数の定義域 D を求めて図示せよ．ただし，定義域は関数が定義できる限り広く取ることとする．

(1) $f(x, y) = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$　(2) $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 - y^2}$　(3) $f(x, y) = \dfrac{x^2 + y^2}{x^2 + xy + y^2}$

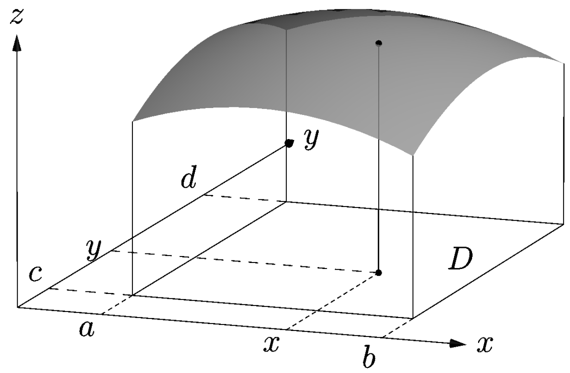
(4) $f(x, y) = \log(x^2 + y^2)$　(5) $f(x, y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x}$　(6) $f(x, y) = \sin^{-1}\dfrac{y}{x}$

2.2　多変数関数のグラフ

集合 $D \subset \mathbb{R}^n$ で定義された n 変数関数 $f(x_1, \ldots, x_n)$ の**グラフ** (graph) とは，$\mathbb{R}^{n+1}$ の部分集合

$$\{(x_1, \ldots, x_n, f(x_1, \ldots, x_n)) \mid (x_1, \ldots, x_n) \in D\}$$

のことである．特に $n=2$ のときは 2 変数関数 (x,y) のグラフは $\{(x,y,f(x,y)) \mid (x,y) \in D\}$ と表され，一般に $\mathbb{R}^3$ の中の曲面になる．下図は $D=[a,b]\times[c,d]$ で定義された関数 $f(x,y)$ のグラフの例である．



2.3 ユークリッド空間の (超) 平面

$\mathbb{R}^n$ の $n-1$ 次元部分空間 V を平行移動した集合 S のことを $\mathbb{R}^n$ の超平面 (hyperplane) という．ただし $n=3$ のときは平面, $n=2$ のときは直線と呼ぶ．ゼロベクトルではないあるベクトル $\mathbf{n}\in\mathbb{R}^n$ が存在して，

$$V=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=0\}$$

と表すことができる．一方，S は V をあるベクトル $\mathbf{a}$ で平行移動した集合だから

$$S=V+\mathbf{a}=\{\mathbf{x}+\mathbf{a} \mid \mathbf{x}\in V\}$$

と表される．$\mathbf{x}\in V$ として $\mathbf{y}=\mathbf{a}+\mathbf{x}\in S$ とおくと，$0=\mathbf{n}\cdot\mathbf{x}=\mathbf{n}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{a})$ より

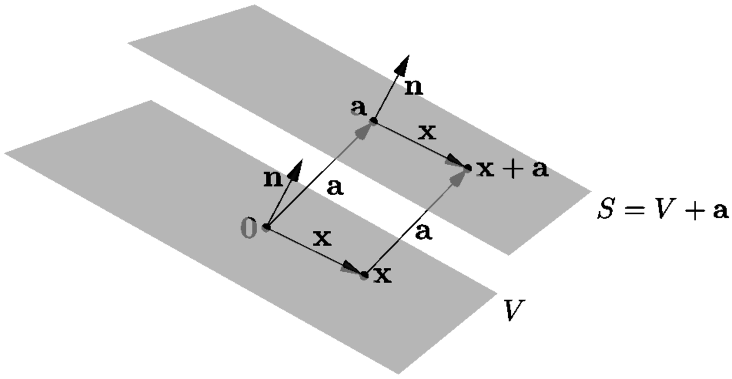
$$S=\{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{n}\cdot(\mathbf{y}-\mathbf{a})=0\}=\{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n \mid \mathbf{n}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})=0\}$$

となる．$\mathbf{n}$ を S の**法線ベクトル** (normal vector) という．法線ベクトルのうちノルムが 1 のものを**単位法線ベクトル**という．単位法線ベクトルはちょうど 2 つあり，互いに向きが反対である．そのどちらを選んでもよい.（超平面の表と裏を区別するときはどちらか一つに決める必要がある.）一般に $\mathbf{n}$ を S の法線ベクトルとすると，$\pm\dfrac{1}{\|\mathbf{n}\|}\mathbf{n}$ が単位法線ベクトルである．

特に $n=3$ のときは $\mathbf{n}=(a,b,c)$, $\mathbf{a}=(x_0,y_0,z_0)$ とすれば $\mathbb{R}^3$ の平面 S は方程式

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$$

を満たす点 (x,y,z) の全体である．これは S が (x_0,y_0,z_0) を通りベクトル $\mathbf{n}$ に垂直な平面であることを意味している．



例 6 1 次関数 $x_{n+1} = a_1x_1 + \cdots + a_nx_n + b$ のグラフは $\mathbb{R}^{n+1}$ においてベクトル $(a_1, \ldots, a_n, -1)$ に垂直であり点 $(0, \ldots, 0, b)$ を通る超平面である．実際，上の式を内積を用いて書き換えれば

$$(a_1, \ldots, a_n, -1) \cdot (x_1, \ldots, x_n, x_{n+1} - b) = 0$$

となる．特に $n = 2$ とすると，1 次関数 $z = ax + by + c$ のグラフは $\mathbb{R}^3$ において $(a, b, -1)$ に垂直で $(0, 0, c)$ を通るような平面である．このとき $\mathbf{n} = (a, b, -1)$ は $z = ax + by + c$ のグラフの下向きの法線ベクトルである．

問題 2 (基本) $\mathbb{R}^3$ において次の各々の式で定義される平面の単位法線ベクトルを求めよ．（$\mathbb{R}^3$ の座標を (x, y, z) とする．）

(1) $z = 2x + y$　(2) $z = 2x - 3y + 1$　(3) $z = -x - y + 2$　(4) $z = x - 1$

問題 3 (基本) 次の各々の条件を満たす平面の式を $z = ax + by + c$ の形で表せ (a, b, c は適当な定数).

(1) 点 $(2, 1, 3)$ を通り，ベクトル $(-1, 3, 1)$ に垂直な平面.

(2) 点 $(-1, 1, 2)$ を通り，平面 $z = x + 2y$ に平行な平面.

(3) 2 つのベクトル $(1, 1, 1)$ と $(1, -2, -1)$ で張られる $\mathbb{R}^3$ の部分空間 V (この 2 つのベクトルを含む平面）を $(1, -1, 0)$ だけ平行移動してできる平面 $V + (1, -1, 0)$.

問題 4 (発展) $\mathbb{R}^n$ において $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$ と単位ベクトル (ノルムが 1 のベクトル) $\mathbf{n}$ により $\mathbf{n} \cdot (\mathbf{x} - \mathbf{a}) = 0$ で定義される超平面を S とする．このとき $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^n$ と S との距離 ($\mathbf{x}$ が S を動くときの $d(\mathbf{b}, \mathbf{x})$ の最小値) $L = d(\mathbf{b}, S)$ を求めよう.

(1) $\mathbf{b} + t\mathbf{n}$ が S に属するような実数 t を求めよ．このときの t を t_0 とする.

(2) $\mathbf{c} = \mathbf{b} + t_0\mathbf{n}$ とおく．$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ に対して $\mathbf{x} + \mathbf{c}$ が S に属するための必要十分条件は $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x} = 0$ であることを示せ.

(3) $\mathbf{x} + \mathbf{c}$ が S に属するとき $\|\mathbf{x} + \mathbf{c} - \mathbf{b}\| \geq \|\mathbf{c} - \mathbf{b}\|$ であり，等号は $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ のときに限り成立することを示せ.

(4) $L = |\mathbf{n} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{a})|$ であることを示せ.

2.4　多変数関数の極限と連続性

定義 3 A を $\mathbb{R}^n$ の部分集合とする．$\mathbb{R}^n$ の点 $\mathbf{a}$ が A の**集積点** (cluster point) とは，$\mathbf{a}$ にいくらでも近い ($\mathbf{a}$ 以外の)A の点が存在すること，すなわち，任意の正の実数 ε に対して $U(\mathbf{a};\varepsilon)\cap A$ が $\mathbf{a}$ 以外の点を含むことである．A の集積点は A の閉包 $\overline{A}$ に属する．しかし，A の点が A の集積点とは限らない．A の点であって A の集積点でない点は A の**孤立点** (isolated point) と呼ばれる．

定義 4 $f(\mathbf{x})=f(x_1,\ldots,x_n)$ を $D\subset\mathbb{R}^n$ で定義された関数とし $\mathbf{a}$ を D の集積点とする．このとき

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=\alpha$$

($\mathbf{x}$ が $\mathbf{a}$ に近づくときの $f(\mathbf{x})$ の**極限** (limit) が α) とは，D の点 $\mathbf{x}$ が限りなく $\mathbf{a}$ に近づく（すなわち $d(\mathbf{x},\mathbf{a})$ が限りなく小さくなる）とき $|f(\mathbf{x})-\alpha|$ が限りなく小さくなることである．正確に述べると，任意の正の実数 ε に対してある正の実数 δ が存在して，

$$(\mathbf{x}\in D \text{ かつ } 0<d(\mathbf{x},\mathbf{a})<\delta) \quad\Rightarrow\quad |f(\mathbf{x})-\alpha|<\varepsilon$$

が成立することである．

例 7 $D=\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$ を考える．原点 $(0,0)$ は D の集積点であり，

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$$

が成立する．(証明) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0)$ とおくと，

$$|f(x,y)-0|=|f(r\cos\theta,r\sin\theta)|=r|\cos^3\theta+\sin^3\theta|\le 2r$$

は $r=d((x,y),(0,0))$ が限りなく小さくなるとき限りなく小さくなる．

例 8 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\mid x\neq 0\}$ で定義された関数 $f(x,y)=\dfrac{y}{x}$ を考える．原点 $(0,0)$ は D の集積点であるが，極限 $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=0$ は存在しない．(証明) $x=r\cos\theta$, $y=r\sin\theta$ $(r>0)$ とおくと，

$$f(x,y)=\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta}=\tan\theta$$

は θ によって変わるから，r が限りなく小さくなるとき，一定の値には近づかない ((x,y) が $(0,0)$ に近づく方向によって近づく値が異なる)．よって極限は存在しない．

定理 1 $f(\mathbf{x})$ と $g(\mathbf{x})$ を $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D で定義された関数として $\mathbf{a}$ を D の集積点とする．$\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})=\alpha$ かつ $\displaystyle\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} g(\mathbf{x})=\beta$ ならば

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\{f(\mathbf{x})\pm g(\mathbf{x})\}=\alpha\pm\beta, \qquad \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}} f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})=\alpha\beta$$

$$\lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{a}}\frac{f(\mathbf{x})}{g(\mathbf{x})}=\frac{\alpha}{\beta} \quad (\text{ただし } \beta\neq 0 \text{ とする})$$

定義 5 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $D \subset \mathbb{R}^n$ で定義された関数とする．$f(\mathbf{x})$ が D の点 $\mathbf{a}$ において**連続** (continuous) であるとは，$\mathbf{a}$ が D の集積点ならば

$$\lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{a}} f(\mathbf{x}) = f(\mathbf{a})$$

が成立することである．($\mathbf{a}$ が D の孤立点のときは上の極限は定義できないが，このときは無条件に連続であると定義する．微積分では孤立点を持つような集合は通常考えないので孤立点は無視しても差し支えない．) 正確に述べると，$f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}$ で連続であるとは，任意の正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ が存在して

$$\mathbf{x} \in D \cap U(\mathbf{a}; \delta) \quad \Rightarrow \quad |f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{a})| < \varepsilon$$

が成立することである．$f(\mathbf{x})$ が D のすべての点 $\mathbf{a}$ において連続であるとき，$f(\mathbf{x})$ は D で連続であるという．

定理 2 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 D で定義された関数 $f(\mathbf{x})$ と $g(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a} \in D$ で連続ならば $f(\mathbf{x}) \pm g(\mathbf{x})$ と $f(\mathbf{x})g(\mathbf{x})$ も $\mathbf{a}$ で連続である．さらに $g(\mathbf{a}) \neq 0$ ならば $f(\mathbf{x})/g(\mathbf{x})$ も $\mathbf{a}$ で連続である．

問題 5 (基本) 次の極限値を求めよ．(もし極限値がなければ，その理由を述べよ．)

$$(1)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \qquad (2)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{(x+y)^2}{x^2 + y^2} \qquad (3)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\log(x^2 + y^2)$$

問題 6 (発展) 次の極限値を求めよ．(もし極限値がなければ，その理由を述べよ．)

$$(1)\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^5 + y^5}{x^4 + y^4} \qquad (2)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \qquad (3)\ \lim_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \frac{xyz}{x^2 + y^2}$$

問題 7 (発展) $\mathbb{R}^2$ で定義された次の関数の連続性 ($\mathbb{R}^2$ の各点で連続かどうか) を調べよ．($\exp(x) = e^x$)

$$(1)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^x - 1}{x^2 + y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$$

$$(2)\ f(x,y) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{y^2}{x}\right) & (x > 0 \text{ のとき}) \\ 0 & (x \leq 0 \text{ のとき}) \end{cases}$$

3 多変数関数の微分

3.1 偏微分係数と偏導関数

$f = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された関数とする．D の点 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ における $f(x_1, \ldots, x_n)$ の x_k に関する**偏微分係数**とは，

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \ldots, a_n) = f_{x_k}(a_1, \ldots, a_n) \\
&\qquad = \lim_{h \to 0} \frac{f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, \ldots, a_n) - f(a_1, \ldots, a_{k-1}, a_k, a_{k+1}, \ldots, a_n)}{h}
\end{aligned}
$$

のことである．この極限が存在するとき f は $\mathbf{a}$ において x_k に関して**偏微分可能**という．f がすべての $\mathbf{a} \in D$ において x_k に関して偏微分可能であるとき，f は D において x_k に関して偏微分可能であるという．このとき，$f_{x_k}(x_1, \ldots, x_n)$ は D で定義された n 変数関数となる．これを f の x_k に関する**偏導関数 (partial derivative)** という．すなわち，x_k 以外の変数は固定して x_k のみを変数とみなして微分することが x_k に関する偏微分 (partial differentiation with respect to x_k) である．

特に 2 変数関数 $f(x, y)$ の (a, b) における x, y に関する偏微分係数は

$$
\begin{aligned}
f_x(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h} \\
f_y(a, b) &= \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a, b + h) - f(a, b)}{h}
\end{aligned}
$$

例 9 $f(x, y) = x^3 - 3xy + y^2 + 5x - 4y + 7$ の x と y に関する偏導関数は

$$
f_x(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 3x^2 - 3y + 5, \qquad f_y(x, y) = \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = -3x + 2y - 4
$$

例 10 $\mathbb{R}^2$ を定義域とする 2 変数関数 $f(x, y)$ を

$$
f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 + y^2}{x^2 + y^2} & ((x, y) \neq (0, 0) \text{ のとき}) \\[2ex] 0 & ((x, y) = (0, 0) \text{ のとき}) \end{cases}
$$

で定義する．偏微分係数 $f_x(0, 0)$ と $f_y(0, 0)$ を定義に従って求めよう.（最初（上）の式は $(x, y) \neq (0, 0)$ のときのみ定義されているので，その式の偏導関数を計算してから $(x, y) = (0, 0)$ を代入することはできない.）

$$
f_x(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \left(\frac{h^3}{h^2} - 0 \right) = 1
$$

一方

$$
\frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = \frac{1}{h} \left(\frac{h^2}{h^2} - 0 \right) = \frac{1}{h}
$$

であるから $f_y(0, 0)$ は存在しない．

問題 8 (基本) 次の多変数関数の各々の変数に関する偏導関数を求めよ．

(1) $f(x,y) = x^3y^2 - 5xy^2 + 3xy + x - 4y + 2$

(2) $f(x,y) = \dfrac{xy+1}{x^2+y^2+1}$

(3) $f(x,y) = x\exp(x^2 + xy - y^2)$

(4) $f(x,y) = \tan^{-1}\dfrac{y}{x} \qquad (x \neq 0)$

(5) $f(x,y,z) = (x+2y+3z)^{10}$

(6) $f(x,y,z) = xyz\log(x^2+y^2+z^2) \qquad ((x,y,z) \neq (0,0,0))$

問題 9 (基本) 次で定義される関数に対して偏微分係数 $f_x(0,0)$ と $f_y(0,0)$ が存在するかどうか判定し，存在すればその値を求めよ．

(1) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & ((x,y) \neq (0,0) \text{ のとき}) \\ 0 & ((x,y) = (0,0) \text{ のとき}) \end{cases}$

(2) $f(x,y) = \sqrt{x^2+|y|^3}$

3.2　高次（高階）導関数

$f(x_1,\ldots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された関数とする．f の x_i に関する偏導関数 f_{x_i} が D で存在し，f_{x_i} が x_j に関して D で偏微分可能とすると，

$$f_{x_ix_j} = (f_{x_i})_{x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)$$

が D 上の関数として定まる．これを f の 2 次（2 階）偏導関数という．$1 \leq i,j \leq n$ を動かすと f の n^2 個の 2 次偏導関数が定まる．

例 11 $f(x,y) = x^3 - 3xy + y^2 + 5x - 4y + 7$ の 2 次偏導関数は

$$f_{xx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 - 3y + 5) = 6x, \qquad f_{xy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 - 3y + 5) = -3,$$
$$f_{yx}(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(-3x + 2y - 4) = -3, \qquad f_{yy}(x,y) = \frac{\partial}{\partial y}(-3x + 2y - 4) = 2$$

同様にして f の m 次偏導関数が定義される．たとえば 2 変数関数 $f(x,y)$ の 3 次偏導関数は

$$f_{xxx}, \quad f_{xxy}, \quad f_{xyx}, \quad f_{yxx}, \quad f_{xyy}, \quad f_{yxy}, \quad f_{yyx}, \quad f_{yyy}$$

の $2^3 = 8$ 通りある．

定義 6 $f(x_1,\dots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された関数とする．D において f の m 次以下のすべての偏導関数が存在して，それらの偏導関数が D で連続となるとき，f は D において C^m 級であるという．f が任意の自然数 m について C^m 級であるとき，f は C^∞ 級であるという．

定理 3 $f(x_1,\dots,x_n)$ が開集合 $D\subset\mathbb{R}^n$ において C^2 級であるとき，1 以上 n 以下の任意の自然数 i と j について

$$f_{x_ix_j}(x_1,\dots,x_n)=f_{x_jx_i}(x_1,\dots,x_n)$$

がすべての $(x_1,\dots,x_n)\in D$ について成立する．すなわち，2 次偏導関数は偏微分の順序によらない．さらに f が C^m 級ならば，f の m 次以下の偏導関数は，偏微分の順序によらない．

証明: $f_{x_ix_j}$ と $f_{x_jx_i}$ の計算の際には x_i と x_j 以外の変数は固定されるから，2 変数の場合に示せば十分である．そこで $f(x,y)$ を開集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ で C^2 級の関数として，$f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ が任意の $(a,b)\in D$ について成立することを示す．

$$F(h)=f(a+h,b+h)-f(a+h,b)-f(a,b+h)+f(a,b)$$

とおく．$g(x)=f(x,b+h)-f(x,b)$ とおいて平均値の定理を用いると，$0<\theta_1<1$ をみたす実数 θ_1 が存在して

$$F(h)=g(a+h)-g(a)=hg'(a+\theta_1h)=h\left\{f_x(a+\theta_1h,b+h)-f_x(a+\theta_1h,b)\right\}\tag{3.2}$$

が成立する．次に y の関数 $f_x(a+\theta_1h,y)$ に平均値の定理を適用すると

$$f_x(a+\theta_1h,b+h)-f_x(a+\theta_1h,b)=hf_{xy}(a+\theta_1h,b+\theta_2h)\qquad(0<\exists\theta_2<1)\tag{3.3}$$

(3.2) と (3.3) より，

$$F(h)=h^2f_{xy}(a+\theta_1h,b+\theta_2h)\tag{3.4}$$

一方，$\varphi(y)=f(a+h,y)-f(a,y)$ として平均値の定理を用いると，

$$\begin{aligned}F(h)&=\varphi(b+h)-\varphi(b)=h\varphi'(b+\theta_1'h)=h\left\{f_y(a+h,b+\theta_1'h)-f_y(a,b+\theta_1'h)\right\}\\&=h^2f_{yx}(a+\theta_2'h,b+\theta_1'h)\qquad(0<\exists\theta_1',\theta_2'<1)\end{aligned}\tag{3.5}$$

(3.4) と (3.5) より

$$f_{xy}(a+\theta_1h,b+\theta_2h)=f_{yx}(a+\theta_2'h,b+\theta_1'h)$$

ここで $h\to0$ とすると，

$$(a+\theta_1h,b+\theta_2h)\to(a,b),\quad(a+\theta_2'h,b+\theta_1'h)\to(a,b)$$

となる．仮定により f_{xy} と f_{yx} は (a,b) で連続であるから，

$$\begin{gathered}\lim_{h\to0}f_{xy}(a+\theta_1h,b+\theta_2h)=f_{xy}(a,b)\\ \|\\ \lim_{h\to0}f_{yx}(a+\theta_2'h,b+\theta_1'h)=f_{yx}(a,b)\end{gathered}$$

よって $f_{xy}(a,b)=f_{yx}(a,b)$ が示された．

3 次以上の偏導関数については，これを順に用いれば良い．たとえば $f(x_1,\dots,x_n)$ が C^3 級とすると，$f_{x_ix_j}=f_{x_jx_i}$ より

$$f_{x_ix_jx_k}=(f_{x_ix_j})_{x_k}=(f_{x_jx_i})_{x_k}=f_{x_jx_ix_k}$$

また f_{x_i} は C^2 級だから

$$f_{x_ix_jx_k}=(f_{x_i})_{x_jx_k}=(f_{x_i})_{x_kx_j}=f_{x_ix_kx_j}$$

よって x_i,x_j,x_k の隣同士の互換（入れ替え）を行っても偏導関数は不変である．これから x_i,x_j,x_k の任意の置換について偏導関数が不変であることが導かれる．4 次以上の偏導関数についても同様に示せる．□

例 12 2 変数関数 $f(x,y)$ が開集合 $D\subset\mathbb{R}^2$ において C^2 級ならば，$f_{xy}(x,y)=f_{yx}(x,y)$ が成立する．さらに $f(x,y)$ が C^3 級ならば

$$f_{xxy}=f_{xyx}=f_{yxx}, \qquad f_{xyy}=f_{yxy}=f_{yyx}$$

よって f の 3 次偏導関数のうち異なるものは f_{xxx}, f_{xxy}, f_{xyy}, f_{yyy} の 4 つである．

問題 10 (基本) 次の関数の 2 次偏導関数をすべて求めよ.（定理 3 から等しいことがわかる偏導関数どうしは，そのうちの 1 つを求めればよい.）

(1) $f(x,y)=x^2y^3-2x^3+3xy+y^2+x-4y+2$

(2) $f(x,y,z)=(x+2y+3z)^{10}$

(3) $f(x,y,z)=\log|xyz| \qquad (xyz\neq 0)$

(4) $f(x,y)=\tan^{-1}\dfrac{y}{x} \qquad (x\neq 0)$

問題 11 (発展) a を実数の定数として $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)$ の関数 $f(\mathbf{x})$ を $f(\mathbf{x})=\|\mathbf{x}\|^a$ で定義する．$\mathbf{x}\neq\mathbf{0}$ のとき

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}+\cdots+\frac{\partial^2}{\partial x_n^2}\right)f(\mathbf{x})=\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(\mathbf{x})+\cdots+\frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(\mathbf{x})$$

を計算せよ．(これを $f(\mathbf{x})$ の Laplacian といい $\Delta f(\mathbf{x})$ とも表す．) またこれが 0 になるような a を求めよ．

3.3 全微分可能性と方向微分

一般に，$f(x_1,\ldots,x_n)$ が $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ ですべての変数 $x_1,\ldots,x_n$ に関して偏微分可能であっても f が $\mathbf{a}$ で連続になるとは限らない．たとえば問題 9(1) の関数 $f(x,y)$ は $(0,0)$ で x, y に関して偏微分可能であるが，$(0,0)$ で連続ではない．これは，偏微分が 1 つの変数のみに着目した概念であり，すべての変数を同時には扱っていないことによる．そこですべての変数を同時に扱った微分可能性の定義を導入する．

定義 7 $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された関数 $f(\mathbf{x})=f(x_1,\ldots,x_n)$ が D の点 $\mathbf{a}$ で **(全）微分可能** ((totally) differentiable) とは，あるベクトル $\mathbf{A}=(A_1,\ldots,A_n)\in\mathbb{R}^n$ が存在して

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{1}{\|\mathbf{h}\|}(f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-\mathbf{A}\cdot\mathbf{h})=0$$

が成立することである．特に 2 変数関数 $f(x,y)$ が (a,b) において（全）微分可能とは，ある定数 $A,B\in\mathbb{R}$ が存在して

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(f(a+h,b+k)-f(a,b)-Ah-Bk)=0$$

が成立することである．

$n=1$ のときは，1 変数関数 $f(x)$ が a において全微分可能であるとは

$$\lim_{h\to 0}\left|\frac{1}{h}\left(f(a+h)-f(a)-Ah\right)\right|=\lim_{h\to 0}\left|\frac{f(a+h)-f(a)}{h}-A\right|=0$$

が成立することと同値であるが，これは $f(x)$ が a において微分可能で，微分係数が $A=f'(a)$ であることを意味する．

一般の n については，1 次関数 $g(\mathbf{x})=g(x_1,\ldots,x_n)$ を

$$g(x_1,\ldots,x_n)=\mathbf{A}\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})+f(\mathbf{a})=A_1(x_1-a_1)+\cdots+A_n(x_n-a_n)+f(a_1,\ldots,a_n)$$

で定義すると，全微分可能の条件は

$$\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}}\frac{1}{\|\mathbf{h}\|}|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-g(\mathbf{a}+\mathbf{h})|=0$$

と書き直すことができる．これは，$\mathbf{x}=\mathbf{a}+\mathbf{h}$，すなわち $\mathbf{h}=\mathbf{x}-\mathbf{a}$ とおくとき，関数 $f(\mathbf{x})$ と 1 次関数 $g(\mathbf{x})$ の差の絶対値が $\|\mathbf{h}\|$ よりも更に小さい (比が限りなく小さくなる）ことを意味している．このとき，$\mathbb{R}^{n+1}$ の超平面 $x_{n+1}=g(x_1,\ldots,x_n)$ のことを $x_{n+1}=f(x_1,\ldots,x_n)$ の（グラフの）$(\mathbf{a},f(\mathbf{a}))$ における**接超平面** (tangent hyperplane) という．$n=2$ のときは**接平面** (tangent plane) という．

定理 4 n 変数関数 $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ で全微分可能ならば $f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ で連続である．

証明:

$$\varepsilon(\mathbf{h}) = \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}(f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{A}\cdot\mathbf{h})$$

とおくと，

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \mathbf{A}\cdot\mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})$$

であり $\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ とすると，$\mathbf{A}\cdot\mathbf{h}\to 0$, $\varepsilon(\mathbf{h})\to 0$ であるから，

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) \to f(\mathbf{a}) \qquad (\mathbf{h}\to\mathbf{0})$$

となり，$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ で連続であることが示された．□

$x_{n+1} = f(\mathbf{x})$ のグラフを G, $x_{n+1} = g(\mathbf{x})$ のグラフ（接超平面）を S とする．単位ベクトル（長さ 1 のベクトル）$\mathbf{n}\in\mathbb{R}^n$ を 1 つ固定する．t をパラメータとして $\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{n}$ と表される点は $\mathbf{a}$ を通りベクトル $\mathbf{n}$ に平行な直線上を動く．$\mathbf{n}$ と $(0,\dots,0,1)\in\mathbb{R}^{n+1}$ で張られる（生成される）$\mathbb{R}^{n+1}$ の 2 次元部分空間を V として，$H = V + \mathbf{a}$ とおく．H の点は実数 t と x_{n+1} により

$$(\mathbf{a},0) + t(\mathbf{n},0) + x_{n+1}(0,\dots,0,1)$$

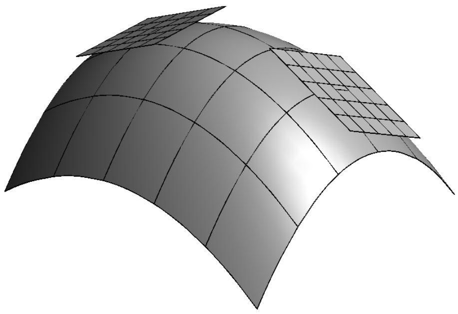
と表されるから，(t, x_{n+1}) を平面 H の座標と考えることができる．このとき，$G\cap H$ は $x_{n+1} = f(\mathbf{a}+t\mathbf{n})$ で定義される曲線である．一方 $S\cap H$ は

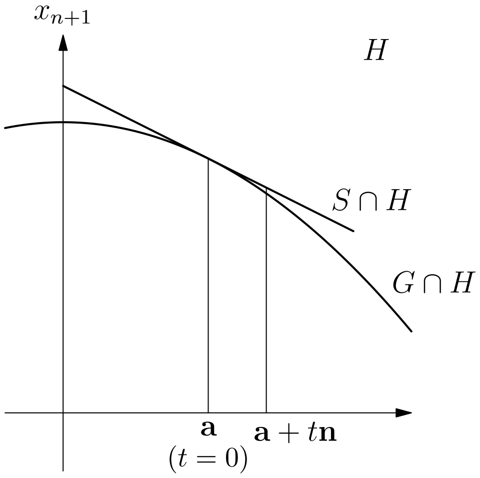
$$x_{n+1} = g(\mathbf{a}+t\mathbf{n}) = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{a}+t\mathbf{n}-\mathbf{a}) + f(\mathbf{a}) = t(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}) + f(\mathbf{a})$$

で表される直線である（下右図）．$\mathbf{h} = t\mathbf{n}$ とおいて全微分可能性の定義式を用いると

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\left|\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{n}) - f(\mathbf{a})}{t} - \mathbf{A}\cdot\mathbf{n}\right| &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{|t|}\left|f(\mathbf{a}+t\mathbf{n}) - f(\mathbf{a}) - t(\mathbf{A}\cdot\mathbf{n})\right| \\ &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{\|t\mathbf{n}\|}\left|f(\mathbf{a}+t\mathbf{n}) - f(\mathbf{a}) - \mathbf{A}\cdot(t\mathbf{n})\right| = 0\end{aligned}$$

となる．これは t の（1 変数）関数 $f(\mathbf{a}+t\mathbf{n})$ の $t=0$ における微分係数が $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ であることを示している．これを n 変数関数 $f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{a}$ における $\mathbf{n}$ に沿っての**方向微分係数**または $\mathbf{n}$ 方向の微分係数といい，$\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{a})$ で表す．これは $\mathbf{A}\cdot\mathbf{n}$ に等しい．





特に $\mathbf{n}$ として，第 k 成分のみ 1 で他の成分がすべて 0 であるようなベクトル $\mathbf{e}_k$ をとれば

$$f(\mathbf{a}+t\mathbf{e}_k)=f(a_1,\dots,a_{k-1},a_k+t,a_{k+1},\dots,a_n)$$

となるから，f の $\mathbf{a}$ における $\mathbf{e}_k$ 方向の微分係数は偏微分係数 $f_{x_k}(\mathbf{a})$ に一致することがわかる．一方これは $\mathbf{A}\cdot\mathbf{e}_k=A_k$ （$\mathbf{A}$ の第 k 成分）に等しい．特に，f は $\mathbf{a}$ において各変数について偏微分可能である．以上をまとめると，

定理 5 $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}$ において全微分可能であれば，$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ において $x_1,\dots,x_n$ の各々に関して偏微分可能であり，全微分可能性の定義におけるベクトル $\mathbf{A}$ は

$$\mathbf{A}=(f_{x_1}(\mathbf{a}),\dots,f_{x_n}(\mathbf{a}))=\mathrm{grad}f(\mathbf{a})=\nabla f(\mathbf{a})$$

で与えられる．この n 次元ベクトルを関数 $f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{a}$ における**勾配ベクトル** (gradient) という．(∇ はナブラ (nabla) と読む．）$f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{a}$ における単位ベクトル $\mathbf{n}$ に沿っての方向微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{a})=\lim_{t\to0}\frac{f(\mathbf{a}+t\mathbf{n})-f(\mathbf{a})}{t}=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}$$

で与えられる．また $x_{n+1}=f(\mathbf{x})$ の $(\mathbf{a},f(\mathbf{a}))$ における接超平面は

$$x_{n+1}=\nabla f(\mathbf{a})\cdot(\mathbf{x}-\mathbf{a})+f(\mathbf{a})$$

で与えられる．特に 2 変数関数 $z=f(x,y)$ が (a,b) において全微分可能であるとき，$\nabla f(a,b)=(f_x(a,b),f_y(a,b))$ であるから，$(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式は

$$z=f_x(a,b)(x-a)+f_y(a,b)(y-b)+f(a,b)$$

となる．

例 13 $f(x,y)=x+2y+(x^2+y^2)^{\frac{2}{3}}$ の $(0,0)$ における全微分可能性を調べよう．

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}(h+|h|^{\frac{4}{3}})=\lim_{h\to0}(1\pm|h|^{\frac{1}{3}})=1,$$
$$f_y(0,0)=\lim_{h\to0}\frac{1}{h}(2h+|h|^{\frac{4}{3}})=\lim_{h\to0}(2\pm|h|^{\frac{1}{3}})=2$$

であるから，もし全微分可能であれば $\mathbf{A}=(A,B)=(1,2)$ である．

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|f(h,k)-f(0,0)-h-2k|=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}(h^2+k^2)^{\frac{2}{3}}=(h^2+k^2)^{\frac{1}{6}}$$

は $(h,k)\to(0,0)$ のとき 0 に収束するから，$f(x,y)$ は $(0,0)$ において全微分可能である．$f(x,y)$ の $(0,0)$ における勾配ベクトルは $\nabla f(0,0)=(1,2)$ であり，$z=f(x,y)$ の $(0,0,0)$ における接平面は $z=x+2y$ である．たとえば，$\mathbf{n}=\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ 方向の微分係数は

$$\frac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}(0,0)=(1,2)\cdot\left(\frac{1}{2},-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}-\sqrt{3}$$

である．

例 14 $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)=\dfrac{x^2y}{x^2+y^2}$, $(x,y)=(0,0)$ のとき $f(x,y)=0$ で定義される関数 $f(x,y)$ の $(0,0)$ における全微分可能性を調べよう．

$$f_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{h^2\cdot 0}{h^2+0^2}=0,\qquad f_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\frac{0^2\cdot h}{0^2+h^2}=0$$

であるから

$$\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}|f(h,k)-f(0,0)|=\frac{1}{\sqrt{h^2+k^2}}\frac{h^2k}{h^2+k^2}=\frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}$$

が 0 に収束するかどうか判定すればよい．極座標を用いて $h=r\cos\theta$, $k=r\sin\theta$ $(r>0)$ とおくと，

$$\frac{h^2k}{(h^2+k^2)^{\frac{3}{2}}}=\cos^2\theta\sin\theta$$

は r によらず（従って $r\to 0$ としても変わらず），θ によって値が異なるから，$(h,k)\to(0,0)$ のときの極限は存在しない．よって $f(x,y)$ は $(0,0)$ において全微分可能でない．

問題 12 (基本) 次の関数 $f(x,y)$ は $(0,0)$ において全微分可能かどうか判定せよ．全微分可能ならば $(0,0,f(0,0))$ における接平面の方程式を求めよ．

(1) $f(x,y)=x+|y|^3$

(2) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)=\dfrac{xy}{x^2+y^2}$, $(x,y)=(0,0)$ のとき $f(x,y)=0$.

(3) $(x,y)\neq(0,0)$ のとき $f(x,y)=\dfrac{x^3-y^3}{x^2+y^2}$, $(x,y)=(0,0)$ のとき $f(x,y)=0$.

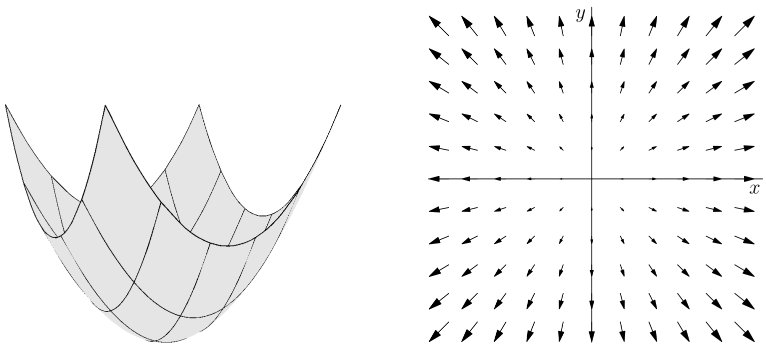
$\nabla f(\mathbf{a})$ がゼロベクトルでないと仮定すると，単位ベクトル $\mathbf{n}$ を動かすとき，$f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{n}$ 方向の微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial \mathbf{n}}(\mathbf{a})=\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}$ は，$\mathbf{n}$ が勾配ベクトル $\nabla f(\mathbf{a})$ と同じ向きのときに最大値 $\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ をとり，$\mathbf{n}$ が勾配ベクトル $\nabla f(\mathbf{a})$ と反対の向きのときに最小値 $-\|\nabla f(\mathbf{a})\|$ をとることがわかる．実際，Cauchy-Schwarz の不等式より

$$|\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{n}|\leq\|\nabla f(\mathbf{a})\|\cdot\|\mathbf{n}\|=\|\nabla f(\mathbf{a})\|$$

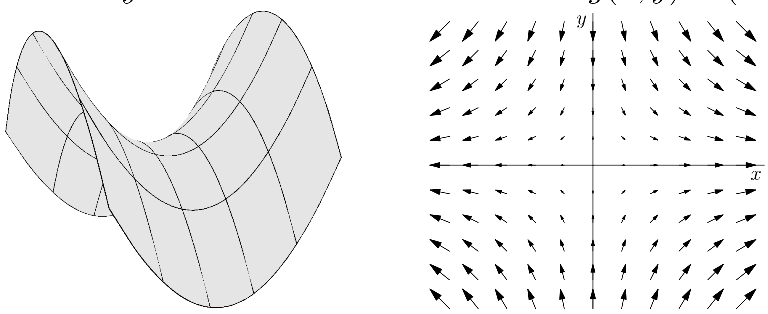
であり，等号は $\nabla f(\mathbf{a})$ と $\mathbf{n}$ が同じ向きまたは反対の向きのときに成立する．

$f(\mathbf{x})$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合 D の各点で全微分可能とすると，$\mathbf{x}\in D$ に対してベクトル $\nabla f(\mathbf{x})$ を対応させることにより D から $\mathbb{R}^n$ への写像が得られる．これを $f(\mathbf{x})$ の**勾配ベクトル場** (gradient vector field) という．

$f(x,y)=x^2+y^2$ のグラフと勾配ベクトル場 $\nabla f(x,y)=(2x,2y)$



$g(x,y)=x^2-y^2$ のグラフと勾配ベクトル場 $\nabla g(x,y)=(2x,-2y)$



定理 6 $f(\mathbf{x})$ が $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で C^1 級ならば，$f(\mathbf{x})$ は D の各点で全微分可能である．

証明: $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in D$, $\mathbf{h}=(h_1,\dots,h_n)$ とすると，

$$\begin{aligned}
f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a}) &= (f(a_1+h_1,\dots,a_n+h_n)-f(a_1+h_1,\dots,a_{n-1}+h_{n-1},a_n)) \\
&\quad+(f(a_1+h_1,\dots,a_{n-1}+h_{n-1},a_n)-f(a_1+h_1,\dots,a_{n-2}+h_{n-2},a_{n-1},a_n)) \\
&\quad+\cdots \\
&\quad+(f(a_1+h_1,a_2,\dots,a_n)-f(a_1,a_2,\dots,a_n)) \\
&=\sum_{k=1}^{n}(f(a_1+h_1,\dots,a_k+h_k,a_{k+1},\dots,a_n) \\
&\qquad -f(a_1+h_1,\dots,a_{k-1}+h_{k-1},a_k,a_{k+1},\dots,a_n))
\end{aligned}$$

ここで変数 x_k について平均値の定理を用いると，$0<\theta_k<1$ をみたすある実数 θ_k が存在して

$$\begin{aligned}
f(a_1+h_1,\dots,a_k+h_k,a_{k+1},\dots,a_n)-f(a_1+h_1,\dots,a_{k-1}+h_{k-1},a_k,a_{k+1},\dots,a_n)& \\
=f_{x_k}(a_1+h_1,\dots,a_{k-1}+h_{k-1},a_k+\theta_k h_k,a_{k+1},\dots,a_n)h_k&
\end{aligned}$$

が成立する．よって

$$c_k=f_{x_k}(a_1+h_1,\dots,a_{k-1}+h_{k-1},a_k+\theta_k h_k,a_{k+1},\dots,a_n)-f_{x_k}(a_1,\dots,a_n)$$

とおくと，

$$
\begin{aligned}
f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a}) &= \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(a_1+h_1,\dots,a_{k-1}+h_{k-1},a_k+\theta_k h_k,a_{k+1},\dots,a_n)h_k \\
&= \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(a_1,\dots,a_n)h_k + \sum_{k=1}^{n} c_k h_k = \nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h} + \sum_{k=1}^{n} c_k h_k
\end{aligned}
$$

従って Cauchy-Schwarz の不等式より

$$
|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h}| = \left|\sum_{k=1}^{n} c_k h_k\right| \le \left(c_1^2+\cdots+c_n^2\right)^{\frac{1}{2}}\|\mathbf{h}\|
$$

以上により

$$
0 \le \frac{1}{\|\mathbf{h}\|}|f(\mathbf{a}+\mathbf{h})-f(\mathbf{a})-\nabla f(\mathbf{a})\cdot\mathbf{h}| \le \left(c_1^2+\cdots+c_n^2\right)^{\frac{1}{2}}
$$

が成立し，f_{x_k} が連続であることから，$\mathbf{h}\to\mathbf{0}$ のとき $c_k \to 0$ となるので，f が $\mathbf{a}$ で全微分可能であることが示された．□

問題 13 (基本) 次の関数が表す曲面の点 $(a,b,f(a,b))$ における接平面の方程式を求めよ．

(1) $z = x^2 - xy + y^3, \qquad (a,b)=(2,1)$

(2) $z = e^{-x^2-y^2}\cos x, \qquad (a,b)=(0,1)$

(3) $z = \log(e^x+e^y), \qquad (a,b)=(1,0)$

問題 14 (基本) $f(x,y)=\tan^{-1}(x^2-y^2)$ とおく．

(1) $a,b\in\mathbb{R}$ として，$(a,b,f(a,b))$ における $z=f(x,y)$ の接平面の方程式を求めよ．

(2) $0 \leqq \theta < 2\pi$ として，$\mathbf{n}=(\cos\theta,\sin\theta)$ とおく．関数 $f(x,y)$ の点 $(a,b)\in D$ における $\mathbf{n}$ 方向の方向微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}(a,b)$ を求めよ．

(3) θ を動かしたときの $\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}(a,b)$ の最大値と最小値を求めよ．

(4) θ を動かしたとき，$\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}(1,1)$ が最大になるような θ と最小になるような θ を求めよ．

問題 15 (発展) n,p を $1\le p<n$ を満たす自然数として

$$
f(\mathbf{x}) = f(x_1,\dots,x_n) = x_1^2+\cdots+x_p^2-x_{p+1}^2-\cdots-x_n^2
$$

とおく．

(1) $\mathbf{a}=(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ とおくとき，$(\mathbf{a},f(\mathbf{a}))$ における $x_{n+1}=f(\mathbf{x})$ の接超平面の方程式を求めよ．

(2) $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$ （ただし $\mathbf{a}\neq\mathbf{0}$ とする）を固定して単位ベクトル $\mathbf{n}$ を動かすとき，方向微分係数 $\dfrac{\partial f}{\partial\mathbf{n}}(\mathbf{a})$ の最大値とそのときの $\mathbf{n}$ を求めよ．

3.4 合成関数の微分法

多変数関数の合成関数の微分について考察しよう．まず，多変数関数に（複数個の）1 変数関数を代入した場合を扱う．

定理 7 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された n 変数関数であり，D の各点で全微分可能であるとする．また，$g_1(t), \ldots, g_n(t)$ を $\mathbb{R}$ の開区間 I で微分可能な関数として，$\mathbf{g}(t) = (g_1(t), \ldots, g_n(t))$ とおく．これを I から $\mathbb{R}^n$ への写像とみなしたとき，$\mathbf{g}(t) \in D$ が任意の $t \in I$ について成立すると仮定する．このとき，合成関数として 1 変数関数

$$F(t) = f(\mathbf{g}(t)) = f(g_1(t), \ldots, g_n(t))$$

が定義され，$t \in I$ のとき

$$F'(t) = \frac{d}{dt}F(t) = \nabla f(\mathbf{g}(t)) \cdot \mathbf{g}'(t) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_k}(g_1(t), \ldots, g_n(t)) \frac{dg_k}{dt}(t)$$

が成立する．ここで $\mathbf{g}'(t) = (g_1'(t), \ldots, g_n'(t))$ と表した．

証明: $t_0 \in I$ を一つ固定して $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$, $a_k = g_k(t_0)$ $(k = 1, \ldots, n)$ とおく．$f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}$ で全微分可能なことから，$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ の関数 $\varepsilon(\mathbf{h})$ があって

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}), \qquad \lim_{\mathbf{h} \to \mathbf{0}} \varepsilon(\mathbf{h}) = 0 \tag{3.6}$$

が成立する（定理 4 の証明を参照）．ここで $\mathbf{h} = \mathbf{g}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{g}(t_0)$ とおくと，1 変数関数 $g_k(t)$ は t_0 で微分可能なことから連続であるから，$\Delta t \to 0$ のとき $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ となる．$\mathbf{g}(t_0 + \Delta t) = \mathbf{a} + \mathbf{h}$ に注意して式 (3.6) に代入すれば，

$$\begin{aligned} F(t_0 + \Delta t) &= f(\mathbf{g}(t_0 + \Delta t)) = f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) \\ &= f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot (\mathbf{g}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{g}(t_0)) + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}) \\ &= F(t_0) + \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\mathbf{a})\{g_k(t_0 + \Delta t) - g_k(t_0)\} + \|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h}) \end{aligned}$$

よって

$$\frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\mathbf{a}) \frac{g_k(t_0 + \Delta t) - g_k(t_0)}{\Delta t} + \frac{\|\mathbf{h}\|\varepsilon(\mathbf{h})}{\Delta t}$$

ここで $\Delta t \to 0$ とすると，

$$\frac{\|\mathbf{h}\|}{|\Delta t|} = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \left(\frac{g_k(t_0 + \Delta t) - g_k(t_0)}{\Delta t} \right)^2} \longrightarrow \|(g_1'(t_0), \ldots, g_n'(t_0))\|$$

かつ $\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ よって $\varepsilon(\mathbf{h}) \to 0$ であるから，

$$F'(t_0) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{F(t_0 + \Delta t) - F(t_0)}{\Delta t} = \sum_{k=1}^{n} f_{x_k}(\mathbf{a}) g_k'(t_0) = \nabla f(\mathbf{g}(t_0)) \cdot \mathbf{g}'(t_0).$$

□

例 15 $f(x,y)$ を $D=\{(x,y)\mid \frac{1}{2}<x^2+y^2<\frac{3}{2}\}$ で定義された C^1 級関数とする．$t\in\mathbb{R}$ のとき $(\cos t,\sin t)\in D$ であるから，$F(t)=f(\cos t,\sin t)$ が $\mathbb{R}$ 上の関数として定義される．$f(x,y)$ は D の各点で全微分可能であるから，

$$F'(t)=\nabla f(\cos t,\sin t)\cdot(-\sin t,\cos t)=-f_x(\cos t,\sin t)\sin t+f_y(\cos t,\sin t)\cos t$$

次に，多変数関数に（複数個の）多変数関数を代入した場合を考えよう．

定理 8 $f(\mathbf{x})=f(x_1,\ldots,x_n)$ は $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された n 変数関数であり，D の各点で全微分可能であるとする．また，$\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_m)$ として，$g_1(\mathbf{t}),\ldots,g_n(\mathbf{t})$ を $\mathbb{R}^m$ の開集合 U の各点で $t_1,\ldots,t_m$ について偏微分可能な関数とする．$\mathbf{g}(\mathbf{t})=(g_1(\mathbf{t}),\ldots,g_n(\mathbf{t}))$ とおく．$\mathbf{x}=\mathbf{g}(\mathbf{t})$ を U から $\mathbb{R}^n$ への写像とみなしたとき，$\mathbf{g}(\mathbf{t})\in D$ が任意の $\mathbf{t}\in U$ について成立すると仮定する．このとき，合成関数として m 変数関数

$$F(\mathbf{t})=f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))=f(g_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,g_n(t_1,\ldots,t_m))$$

が定義され，$\mathbf{t}\in U$ のとき

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t})=\nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_j}(\mathbf{t})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(g_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,g_n(t_1,\ldots,t_m))\frac{\partial g_k}{\partial t_j}(t_1,\ldots,t_m)$$

が成立する．ここで $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_j}(\mathbf{t})=\left(\frac{\partial g_1}{\partial t_j}(\mathbf{t}),\ldots,\frac{\partial g_n}{\partial t_j}(\mathbf{t})\right)$ と表した．さらに，$f(\mathbf{x})$ が D で C^k 級 $(k\geq 1)$，$g_1(\mathbf{t}),\ldots,g_n(\mathbf{t})$ が U で C^k 級ならば，$F(\mathbf{t})$ は U で C^k 級である．

証明: $t_1,\ldots,t_{j-1},t_{j+1},\ldots,t_n$ を固定して $g_1(\mathbf{t}),\ldots,g_n(\mathbf{t})$ を t_j のみの関数とみなして定理 7 を用いれば，

$$\frac{\partial F}{\partial t_j}(\mathbf{t})=\nabla f(\mathbf{g}(\mathbf{t}))\cdot\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial t_j}(\mathbf{t})=\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial f}{\partial x_k}(g_1(t_1,\ldots,t_m),\ldots,g_n(t_1,\ldots,t_m))\frac{\partial g_k}{\partial t_j}(t_1,\ldots,t_m)$$

が成立する．この公式を繰り返し用いれば，$f(\mathbf{x})$ と $g_1(\mathbf{t}),\ldots,g_n(\mathbf{t})$ が C^k 級ならば $F(\mathbf{t})$ も C^k 級であることがわかる．□

例 16 $z=f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級関数として $x=u^2-v^2$, $y=uv$ を代入して得られる関数を $F(u,v)=f(u^2-v^2,uv)$ とすると，

$$\begin{aligned}F_u(u,v)&=2uf_x(u^2-v^2,uv)+vf_y(u^2-v^2,uv),\\F_v(u,v)&=-2vf_x(u^2-v^2,uv)+uf_y(u^2-v^2,uv).\end{aligned}$$

が任意の $(u,v)\in\mathbb{R}^2$ において成立する．

例 17 (2 次元極座標) $z=f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$ で定義された C^1 級関数として $F(r,\theta)=f(r\cos\theta,r\sin\theta)$ とおくと，

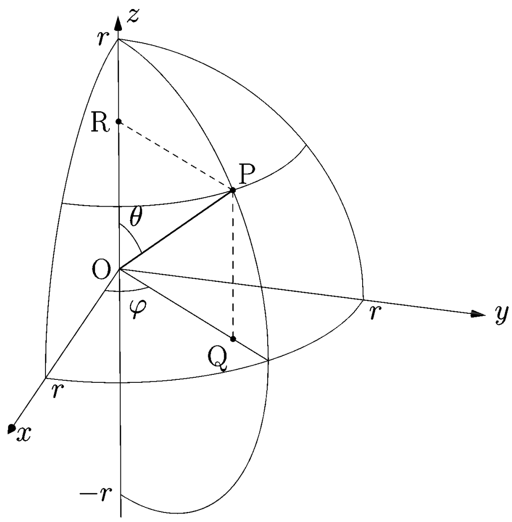
$$\begin{aligned}F_r(r,\theta)&=f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)\cos\theta+f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)\sin\theta\\F_\theta(r,\theta)&=-f_x(r\cos\theta,r\sin\theta)r\sin\theta+f_y(r\cos\theta,r\sin\theta)r\cos\theta\end{aligned}$$

が $r>0$ と任意の $\theta\in\mathbb{R}$ について成立する．

例 18 (3 次元極座標) $(x,y,z) \in D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid (x,y) \neq (0,0)\}$ に対して $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$ とおく $(r>0)$．点 (x,y,z) と z 軸のなす角を θ とする $(0<\theta<\pi)$．また，xy 平面において点 (x,y) と x 軸の正の部分とのなす角を φ とする $(0 \leq \varphi < 2\pi)$．このとき，

$$x = r\sin\theta\cos\varphi, \quad y = r\sin\theta\sin\varphi, \quad z = r\cos\theta$$

となることがわかる．これによって D の点を (r,θ,φ) を用いて一意的に表すことができる．これを 3 次元極座標という．(r,θ,φ) の範囲を $r \geq 0$, $\theta, \varphi \in \mathbb{R}$ としても点 $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ を表すことができる．ただし表し方は一意的ではなくなる．



さて $f(x,y,z)$ を $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ で定義された C^1 級関数として，

$$F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

とおくと，$\{(r,\theta,\varphi) \in \mathbb{R}^3 \mid r>0\}$ において

$$\begin{aligned}
F_r(r,\theta,\varphi) &= f_x(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\sin\theta\cos\varphi \\
&\quad + f_y(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\sin\theta\sin\varphi \\
&\quad + f_z(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)\cos\theta, \\
F_\theta(r,\theta,\varphi) &= f_x(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r\cos\theta\cos\varphi \\
&\quad + f_y(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r\cos\theta\sin\varphi \\
&\quad - f_z(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r\sin\theta, \\
F_\varphi(r,\theta,\varphi) &= -f_x(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r\sin\theta\sin\varphi \\
&\quad + f_y(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)r\sin\theta\cos\varphi
\end{aligned}$$

合成関数の微分の公式を何回も適用することにより，合成関数の高次導関数を計算することができる．

例 19 $z = f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義された C^2 級関数として $F(r,\theta) = f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ とおく．

$$\begin{aligned}
F_r(r,\theta) &= f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta \\
F_\theta(r,\theta) &= -f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta + f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta
\end{aligned}$$

に対して，定理 8 をもう一度適用すれば，

$$
\begin{aligned}
F_{rr}(r,\theta) &= \{f_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + f_{xy}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\}\cos\theta \\
&\quad + \{f_{yx}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta + f_{yy}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin\theta\}\sin\theta \\
&= f_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos^2\theta + 2f_{xy}(r\cos\theta, r\sin\theta)\cos\theta\sin\theta \\
&\quad + f_{yy}(r\cos\theta, r\sin\theta)\sin^2\theta, \\
F_{\theta\theta}(r,\theta) &= -\{-f_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta + f_{xy}(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta\}r\sin\theta \\
&\quad + \{-f_{yx}(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta + f_{yy}(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta\}r\cos\theta \\
&\quad - f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta - f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta \\
&= f_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta)r^2\sin^2\theta - 2f_{xy}(r\cos\theta, r\sin\theta)r^2\cos\theta\sin\theta \\
&\quad + f_{yy}(r\cos\theta, r\sin\theta)r^2\cos^2\theta \\
&\quad - f_x(r\cos\theta, r\sin\theta)r\cos\theta - f_y(r\cos\theta, r\sin\theta)r\sin\theta
\end{aligned}
$$

が $r>0$ と任意の $\theta\in\mathbb{R}$ について成立する．これから特に，

$$
F_{rr}(r,\theta) + \frac{1}{r}F_r(r,\theta) + \frac{1}{r^2}F_{\theta\theta}(r,\theta) = f_{xx}(r\cos\theta, r\sin\theta) + f_{yy}(r\cos\theta, r\sin\theta)
$$

が導かれる．これは 2 次元極座標による Laplacian の表示である．

問題 16 (基本) $f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ で定義された C^1 級関数とする．$x+y=u$, $x-y=v$ として $f(x,y)$ を u,v で表した関数を $F(u,v)$ とおく．

(1) $F_u(u,v)$ と $F_v(u,v)$ を $f(x,y)$ の偏導関数を用いて表せ．

(2) ある微分可能な 1 変数関数 $g(t)$ があって $f(x,y)=g(x+y)$ が成立しているとき，f の偏導関数を g の導関数を用いて表せ．

(3) ある微分可能な 1 変数関数 $g(t)$ があって $f(x,y)=g(x+y)$ と表されるための必要十分条件を $f(x,y)$ の偏導関数を用いて与えよ．（ヒント: $F(u,v)$ が u のみの関数となればよい．）

問題 17 (基本) $z=f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ で定義された C^2 級関数として $F(u,v)=f(u^2-v^2,uv)$ とおくとき，$F_{uu}(u,v)$, $F_{uv}(u,v)$, $F_{vv}(u,v)$ を $f(x,y)$ の偏導関数を用いて表せ．

問題 18 (発展) $f(\mathbf{x})=f(x_1,\ldots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ で定義された C^1 級関数とする．

(1) t を正の実数として，$f(t\mathbf{x})$ を $x_1,\ldots,x_n,t$ を変数とする $n+1$ 変数関数とみなしたとき，$\dfrac{\partial}{\partial t}f(t\mathbf{x})$ を $f(\mathbf{x})$ の偏導関数を用いて表せ．

(2) ある実数 a が存在して，任意の正の実数 t と任意の $\mathbf{x}\in\mathbb{R}^n\setminus\{\mathbf{0}\}$ について

$$
f(t\mathbf{x}) = t^a f(\mathbf{x})
$$

が成立すると仮定する．このとき，

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) = a f(\mathbf{x}) \qquad (\mathbf{x} \neq \mathbf{0}) \tag{$\star$}$$

が成立することを示せ．

(3) 逆に $(\star)$ が成立すると仮定すると，$f(t\mathbf{x}) = t^a f(\mathbf{x})$ が任意の $t > 0$ と任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\}$ について成立することを示せ．（ヒント：$t^{-a} f(t\mathbf{x})$ が t によらないことを示す．）

問題 19 (発展) $f(x,y,z)$ を $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ で定義された C^2 級関数として，

$$F(r,\theta,\varphi) = f(r\sin\theta\cos\varphi, r\sin\theta\sin\varphi, r\cos\theta)$$

と定義する．

(1) $F_{rr}(r,\theta,\varphi)$, $F_{\theta\theta}(r,\theta,\varphi)$, $F_{\varphi\varphi}(r,\theta,\varphi)$ を $f(x,y,z)$ の偏導関数を用いて表せ．

(2) $r = \sqrt{x^2+y^2+z^2} > 0$, $\sin\theta \neq 0$ のとき，

$$\begin{aligned} F_{rr}(r,\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2} F_{\theta\theta}(r,\theta,\varphi) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta} F_{\varphi\varphi}(r,\theta,\varphi) + \frac{2}{r} F_r(r,\theta,\varphi) + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta} F_\theta(r,\theta,\varphi) \\ = f_{xx}(x,y,z) + f_{yy}(x,y,z) + f_{zz}(x,y,z) \end{aligned}$$

が成立することを示せ．ただし，$x = r\sin\theta\cos\varphi$, $y = r\sin\theta\sin\varphi$, $z = r\cos\theta$ とする．

4 多変数関数に対する Taylor の定理と極大極小問題

4.1 Taylor の定理

$f(\mathbf{x}) = f(x_1,\ldots,x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された C^m 級関数とする．$\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_n) \in D$ を固定して，$\mathbf{x}$ が $\mathbf{a}$ に近いとき，$f(\mathbf{x})$ の値を $x_1 - a_1, \ldots, x_n - a_n$ の多項式で近似することを考える．n 次元ベクトル $\mathbf{h} = (h_1,\ldots,h_n)$ を $0 \le t \le 1$ のとき $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in D$ となるようにとり，

$$F(t) = f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

とおく．このとき $F(t)$ は区間 $[0,1]$ を含むある開区間で定義された C^m 級関数である．定理 7 により，

$$F'(t) = \nabla f(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(\mathbf{a}+t\mathbf{h}) h_k = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n} \right) f(\mathbf{a}+t\mathbf{h})$$

が成立する．一方，1 変数関数に対する Taylor の定理より，

$$F(1) = F(0) + F'(0) + \frac{1}{2}F''(0) + \cdots + \frac{1}{(m-1)!}F^{(m-1)}(0) + \frac{1}{m!}F^{(m)}(\theta) \quad (0 < \exists\theta < 1)$$

が成立する．ここで $1 \leq k \leq m$ のとき，

$$F^{(k)}(t) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(\mathbf{a} + t\mathbf{h})$$

と表せる．たとえば $k = 2$ のときは，

$$F''(t) = \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^2 f(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a} + t\mathbf{h}) h_j h_k$$

となる．以上により，次の定理が示された．

定理 9 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された C^m 級関数とする．$\mathbf{a} \in D$ を固定して，$\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ を $0 \leq t \leq 1$ のとき $\mathbf{a} + t\mathbf{h} \in D$ となるようにとれば，$0 < \theta < 1$ をみたすある実数 θ が存在して，

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{k!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^k f(\mathbf{a}) + R_m(\mathbf{h}),$$

$$R_m(\mathbf{h}) = \frac{1}{m!} \left(h_1 \frac{\partial}{\partial x_1} + \cdots + h_n \frac{\partial}{\partial x_n}\right)^m f(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h})$$

が成立する．これを $f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{x} = \mathbf{a}$ における（$\mathbf{a}$ を中心とする）$m - 1$ 次の Taylor 展開，$R_m(\mathbf{h})$ を m 次の剰余項という．特に，$m = 2$ のときは，

$$f(\mathbf{a} + \mathbf{h}) = f(\mathbf{a}) + \nabla f(\mathbf{a}) \cdot \mathbf{h} + R_2(\mathbf{h}),$$

$$R_2(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_k}(\mathbf{a} + \theta\mathbf{h}) h_j h_k$$

特に $n = m = 2$ のときは，

$$\begin{aligned}
&f(a+h, b+k) = f(a,b) + h f_x(a,b) + k f_y(a,b) + R_2(h,k),\\
&\qquad R_2(h,k) = \frac{1}{2}\left\{ f_{xx}(a+\theta h, b+\theta k)h^2 + 2 f_{xy}(a+\theta h, b+\theta k)hk + f_{yy}(a+\theta h, b+\theta k)k^2 \right\}\\
&\qquad\qquad\qquad (0 < \exists\theta < 1)
\end{aligned}$$

となる．

例 20 $f(x,y) = \sqrt{1 + x + 2y}$ の $(0,0)$ における 1 次の Taylor 展開を求めよう．

$$f_x(x,y) = \frac{1}{2\sqrt{1+x+2y}}, \qquad f_y(x,y) = \frac{1}{\sqrt{1+x+2y}},$$

$$f_{xx}(x,y) = -\frac{1}{4(1+x+2y)^{\frac{3}{2}}}, \qquad f_{xy}(x,y) = -\frac{1}{2(1+x+2y)^{\frac{3}{2}}},$$

$$f_{yy}(x,y) = -\frac{1}{(1+x+2y)^{\frac{3}{2}}}$$

より，$0 < \theta < 1$ をみたす実数 θ が存在して，

$$\sqrt{1+h+2k} = 1 + \frac{1}{2}h + k + R_2(h,k),$$
$$R_2(h,k) = -\frac{h^2}{8(1+\theta(h+2k))^{\frac{3}{2}}} - \frac{hk}{2(1+\theta(h+2k))^{\frac{3}{2}}} - \frac{k^2}{2(1+\theta(h+2k))^{\frac{3}{2}}}$$

問題 20 (基本) 次の関数 $f(x,y)$ の $(x,y)=(0,0)$ における 1 次の Taylor 展開を求めよ．2 次の剰余項 $R_2(h,k)$ も具体的に表せ．

(1) $f(x,y) = e^x \cos y$　(2) $f(x,y) = \dfrac{1+y}{1+x}$　(3) $f(x,y) = \log(1+2x-y)$

4.2 2 次形式

n 個の変数 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ に関する 2 次同次式 (2 次の項のみからなる多項式)

$$F(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_ix_j \qquad (a_{ij} \in \mathbb{R})$$

のことを（実数係数の）**2 次形式** (quadratic form) という．$i \neq j$ のときは x_ix_j の項が 2 つずつ現れて，

$$a_{ij}x_ix_j + a_{ji}x_ix_j = (a_{ij}+a_{ji})x_ix_j$$

となるから，$a_{ij} = a_{ji}$ と仮定しても一般性を失わない．以下ではこれを常に仮定する．a_{ij} を (i,j) 成分とする（実）対称行列を A として，$\mathbf{x}$ を縦ベクトルとみなすと，

$$F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = (x_1, \cdots, x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

と表すことができる．このとき $F(\mathbf{x})$ を対称行列 A で定義される 2 次形式という．たとえば 2 変数 x, y に関する 2 次形式は一般に実数 a, b, c によって

$$F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x,y)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

と表される．

ここで以下で必要となる線形代数の事項をまとめておこう．

定義 8 実数を成分とする n 次正方行列 $A = (a_{ij})$ が**対称行列** (symmetric matrix) とは，${}^tA = A$，すなわち $a_{ji} = a_{ij}$ が成立することである．また，A が**直交行列** (orthogonal matrix) とは，${}^tAA = I_n$ （I_n は n 次単位行列）が成立することである．

定義 9 n 次元数ベクトル空間 $\mathbb{R}^n$ の基底 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ が**正規直交基底** (normal orthogonal basis) であるとは，$\mathbf{v}_i \cdot \mathbf{v}_j = \delta_{ij}$ （δ_{ij} はクロネッカーのデルタ）が成立することである．（後者の性質がなりたてば基底となる．）

補題 1 n 次行列 P の第 i 列からなる縦ベクトルを $\mathbf{p}_i$ とすると，P が直交行列であるための必要十分条件は $\mathbf{p}_1, \cdots, \mathbf{p}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底となることである．

証明: P の第 (i,j) 成分を p_{ij} とおくと，${}^tPP$ の第 (i,j) 成分は $\sum_{k=1}^n p_{ki}p_{kj} = \mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j$ であるから，${}^tPP = I_n$ と $\mathbf{p}_i \cdot \mathbf{p}_j = \delta_{ij}$ は同値である．□

補題 2 P が n 次直交行列であるとき，任意の $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ について $\|P\mathbf{x}\| = \|\mathbf{x}\|$ が成立する．

証明: $\|P\mathbf{x}\|^2 = (P\mathbf{x}) \cdot (P\mathbf{x}) = {}^t(P\mathbf{x})(P\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}({}^tPP)\mathbf{x} = {}^t\mathbf{x}\mathbf{x} = \|\mathbf{x}\|^2$. □

命題 3 A を n 次対称行列とすると，A の固有値はすべて実数である．

証明: 一般に複素数 $\alpha = a + bi$ $(a, b \in \mathbb{R})$ に対して，その絶対値を $|\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ で，共役複素数を $\overline{\alpha} = a - bi$ で定義する．α が実数であるための必要十分条件は $\overline{\alpha} = \alpha$ となることである．また，$\alpha\overline{\alpha} = a^2 + b^2 = |\alpha|^2$ が成立する．

さて，λ を A の固有値，すなわち $\det(\lambda I_n - A) = 0$ をみたす複素数とする．このとき，$\lambda I_n - A$ の階数は $n-1$ 以下であるから，複素数を成分とする行列の基本変形（簡約化）により，$(\lambda I_n - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$，すなわち $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ を満たす複素数ベクトル $\mathbf{v} = {}^t(v_1, \ldots, v_n)$ であってゼロベクトルでないものが存在することがわかる．このとき，$\overline{\mathbf{v}}$ で $\mathbf{v}$ の各成分の共役複素数を成分とするベクトルを表すと，

$$A\mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{v}} = \lambda\mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{v}} = \lambda(v_1\overline{v}_1 + \cdots + v_n\overline{v}_n) = \lambda(|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2)$$

となる．一方 A の成分が実数であることと ${}^tA = A$ より，

$$A\mathbf{v} \cdot \overline{\mathbf{v}} = {}^t(A\mathbf{v})\overline{\mathbf{v}} = {}^t\mathbf{v}{}^tA\overline{\mathbf{v}} = {}^t\mathbf{v}A\overline{\mathbf{v}} = {}^t\mathbf{v}\overline{A\mathbf{v}} = \overline{\lambda}{}^t\mathbf{v}\overline{\mathbf{v}} = \overline{\lambda}(|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2)$$

ここで $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ より $|v_1|^2 + \cdots + |v_n|^2 > 0$ であるから，$\overline{\lambda} = \lambda$ でなければならない．よって A の固有値 λ は実数である．□

定理 10 A を n 次対称行列とすると，n 次直交行列 P が存在して，$P^{-1}AP = {}^tPAP$ は対角行列となる．

証明: n に関する帰納法で示す．$n = 1$ のときは A は対角行列であるから OK．$n \geq 2$ として $n-1$ 次対称行列については定理は正しいと仮定する．A の一つの固有値 $\lambda_1 \in \mathbb{R}$ とそれに対する固有ベクトル $\mathbf{p}_1 \in \mathbb{R}^n$ をとる．$\mathbf{p}_1$ に $1/\|\mathbf{p}_1\|$ を掛けることにより，$\|\mathbf{p}_1\| = 1$ としてよい．このとき，ベクトル $\mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ を $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots, \mathbf{p}_n$ が $\mathbb{R}^n$ の正規直交基底になるようにとれる．(たとえば $\mathbf{p}_1$ を含む $\mathbb{R}^n$ の基底からシュミットの直交化法を用いて構成すればよい.）縦ベクトル $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ を並べてできる n 次正方行列を P とすると，P は直交行列である．$\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ は $\mathbb{R}^n$ の基底であるから，ある実数 b_{ij} があって

$$A\mathbf{p}_i = \sum_{j=1}^n b_{ji}\mathbf{p}_j \qquad (i = 1, \ldots, n)$$

と表される．P の第 (i,j) 成分を p_{ij} とおくと，これは

$$\sum_{m=1}^{n} a_{km}p_{mi} = \sum_{j=1}^{n} p_{kj}b_{ji} \qquad (k=1,\ldots,n)$$

を意味する．従って，b_{ij} を第 (i,j) 成分とする行列を $B=(b_{ij})$ とおくと

$$AP = PB, \quad \text{すなわち } P^{-1}AP = B$$

が成立する．このとき

$${}^tB = {}^t(P^{-1}AP) = {}^t({}^tPAP) = {}^tP{}^tA{}^{tt}P = {}^tPAP = P^{-1}AP = B$$

であるから，B も対称行列である．さらに $A\mathbf{p}_1 = \lambda_1\mathbf{p}_1$ より，$b_{11} = \lambda_1$ かつ $b_{1i} = b_{i1} = 0$ $(i=2,\ldots,n)$ が成立する．よって B は

$$B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & B' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

とブロック分解され，B' は $n-1$ 次対称行列である．帰納法の仮定により $n-1$ 次の直交行列 Q' が存在して $Q'^{-1}B'Q'$ は対角行列になる．

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & Q' & \\ 0 & & & \end{pmatrix}$$

とすれば，$(PQ)^{-1}A(PQ) = Q^{-1}(P^{-1}AP)Q = Q^{-1}BQ$ は対角行列となる．□

問題 21 次の対称行列 A に対して，${}^tPAP = \Lambda$ が対角行列となるような直交行列 P と Λ を求めよ.（正規直交基底となるような固有ベクトルを求めればよい．必要ならシュミットの直交化法を用いる.）

$$(1)(\text{基本}) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad (2)(\text{発展}) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

さて，2 次形式の話に戻ろう．A を n 次対称行列として，2 次形式

$$F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$$

を考察する．上の定理により，n 次直交行列 P が存在して

$${}^tPAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{pmatrix}$$

となる．ここで $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ は A の固有値である．$\lambda_1 \ge \lambda_2 \ge \cdots \ge \lambda_{n-1} \ge \lambda_n$ と仮定しても一般性を失わない．

定義 10 対称行列 A の固有値 $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ のうち λ_i が正であるような添字 i の個数を p, λ_i が負であるような添字 i の個数を q とする（同じ固有値が複数ある場合には重複して数える）．このとき (p, q) のことを 2 次形式 $F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ の**符号** (signature) という．

定義 11 (1) 2 次形式 $F(\mathbf{x})$ が**正定値** (positive definite) とは，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ならば $F(\mathbf{x}) > 0$ が成立することである．

(2) 2 次形式 $F(\mathbf{x})$ が**負定値** (negative definite) とは，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ ならば $F(\mathbf{x}) < 0$ が成立することである．

(3) 2 次形式 $F(\mathbf{x})$ が**不定符号**とは，$F(\mathbf{x}) > 0$ なる $\mathbf{x}$ と $F(\mathbf{y}) < 0$ なる $\mathbf{y}$ がともに存在することである．

命題 4 (1) 2 次形式 $F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が正定値であるための必要十分条件は，符号が $(n, 0)$, すなわち A の固有値がすべて正であることである．

(2) 2 次形式 $F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が負定値であるための必要十分条件は，符号が $(0, n)$, すなわち A の固有値がすべて負であることである．

(3) 2 次形式 $F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が不定符号であるための必要十分条件は，符号 (p, q) が $p \ge 1$ かつ $q \ge 1$ を満たすこと，すなわち A が正と負の固有値を共に持つことである．

証明: 定理 10 の直交行列 P をとり，$\mathbf{y} = {}^t(y_1, \dots, y_n)$ を $\mathbf{x} = P\mathbf{y}$ ，すなわち $\mathbf{y} = {}^tP\mathbf{x}$ で定義すると，

$$F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x} = {}^t(P\mathbf{y})AP\mathbf{y} = {}^t\mathbf{y}{}^tPAP\mathbf{y} = \lambda_1 y_1^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2$$

となる．よって $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ のときこれが正となるための必要条件は $\lambda_i > 0$ $(i = 1, \dots, n)$ である．実際 $\lambda_i \le 0$ となるような i があれば $y_i = 1$, $j \neq i$ のとき $y_j = 0$ とすれば，上の式は 0 以下となるので正定値でない．ここで，P は正則だから，$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}$ と $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$ は同値であることに注意する．負定値についても同様に示せる．

$\lambda_1, \dots, \lambda_n$ がすべて 0 以上，またはすべて 0 以下であれば不定符号ではないことは明らかである．たとえば $\lambda_1 > 0$ ならば $\mathbf{x} = P{}^t(1, 0, \dots, 0)$ のとき $F(\mathbf{x}) = \lambda_1 > 0$ である．また，$\lambda_n < 0$ ならば $\mathbf{x} = P{}^t(0, \dots, 0, 1)$ のとき $F(\mathbf{x}) = \lambda_n < 0$ であるから，$F(\mathbf{x})$ は不定符号である．□

例 21 3 変数の 2 次形式 $F(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2 + 2xz + 2yz$ の符号を求めよう．

$$F(x, y, z) = \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

と表されるから，この対称行列 A の固有値（の符号）を求めればよい．特性方程式（固有方程式）を計算すると

$$
\begin{aligned}
0 &= \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & -1 \\ 0 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} = (\lambda-1)\begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 \\ -1 & \lambda+1 \end{vmatrix} + (-1)\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ \lambda-1 & -1 \end{vmatrix} \\
&= (\lambda-1)(\lambda^2-2) - (\lambda-1) = (\lambda-1)(\lambda^2-3)
\end{aligned}
$$

となるので，A の固有値は $1, \pm\sqrt{3}$ である．よって $F(x,y,z)$ の符号は $(2,1)$ である．

問題 22 (基本) 次の 2 次形式の符号を求めよ．

(1) $F(x,y) = xy$

(2) $F(x,y) = x^2 - 3xy + 2y^2$

(3) $F(x,y,z) = xy + yz + zx$

一般に 2 次形式 $F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ が正定値，負定値，あるいはそのいずれでもないかを判定する一つの方法は，A の固有値をすべて求めることであるが，次の定理を用いると固有値を求めずに行列式の計算だけで判定することもできる．まず 2 変数の場合を考察しよう．

命題 5 2 変数の 2 次形式 $F(x,y) = ax^2 + 2bxy + cy^2$ に対して

(1) 正定値であるための必要十分条件は $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ が成立することである．

(2) 負定値であるための必要十分条件は $a < 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ が成立することである．

証明: $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ の固有値を α, β とすると，α, β は 2 次方程式

$$
(\lambda - a)(\lambda - c) - b^2 = \lambda^2 - (a+c)\lambda + ac - b^2 = 0
$$

の 2 つの根（解）である．A は対称行列だから，α, β は常に実数である（これは判別式が $(a+c)^2 - 4(ac-b^2) = (a-c)^2 + 4b^2 \geq 0$ となることからもわかる）．よって α, β が正であるための必要十分条件は $\alpha + \beta = a + c > 0$ かつ $\alpha\beta = ac - b^2 > 0$ となることである．このとき $ac = (ac - b^2) + b^2 > 0$ であるから，$a + c > 0$ と合わせて $a > 0$ となることがわかる．逆に $a > 0$ かつ $ac - b^2 > 0$ ならば，$ac > b^2 \geq 0$ より $c > 0$ であるから，$a + c > 0$ となる．以上により (1) が示された．

$F(x,y)$ が負定値であるための必要十分条件は $-F(x,y) = -ax^2 - 2bxy - cy^2$ が正定値であることだから，(1) より $(-a)(-c) - (-b)^2 > 0$ かつ $-a > 0$，すなわち $ac - b^2 > 0$ かつ $a < 0$ と同値である．$\square$

この判定法は n 変数の場合に拡張できる．

定理 11 $A=(a_{ij})$ を n 次対称行列として，2 次形式 $F(\mathbf{x})={}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ を考える．$1\le k\le n$ を満たす自然数 k に対して，A の第 1 行から第 k 行，第 1 列から第 k 列までをとってできる k 次正方行列を $A_k=(a_{ij})_{1\le i,j\le k}$ とする．

(1) $F(\mathbf{x})$ が正定値であるための必要十分条件は $\det A_k>0$ $(k=1,\dots,n)$ が成立することである．

(2) $F(\mathbf{x})$ が負定値であるための必要十分条件は $(-1)^k\det A_k>0$ $(k=1,\dots,n)$ が成立することである．

上の定理における $\det A_k$ を A の k 次**主小行列式** (principal minor) という．
証明: n についての帰納法により (1) を示そう．$n=1$ のときは $F(x_1)=a_{11}x_1^2$ であるから (1) は明らかに成立する．$n\ge 2$ として，$n-1$ 個以下の変数の場合には (1) が成立すると仮定する．$F(\mathbf{x})$ が正定値であるとする．$\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)$ とすれば k 変数の 2 次形式

$$F(x_1,\dots,x_k,0,\dots,0)=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^k a_{ij}x_ix_j$$

は正定値であるから，帰納法の仮定により $1\le k\le n-1$ のとき $\det A_k>0$ が成り立つ．また正定値の仮定より A の固有値 $\lambda_1,\dots,\lambda_n$ はすべて正であるから，$\det A_n=\lambda_1\cdots\lambda_n>0$ となる．

逆に $\det A_k>0$ $(k=1,\dots,n)$ を仮定する．特に $a_{11}=\det A_1>0$ である．平方完成により $F(x_1,x_2,\dots,x_n)$ における $x_1x_2,\dots,x_1x_n$ の項を消去すると，

$$\begin{aligned}F(x_1,x_2\dots,x_n)&=a_{11}x_1^2+2\sum_{i=2}^n a_{1i}x_1x_i+\sum_{i=2}^n\sum_{j=2}^n a_{ij}x_ix_j\\&=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+\sum_{i=2}^n\sum_{j=2}^n\left(a_{ij}-\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}\right)x_ix_j\end{aligned}$$

となる．ここで

$$b_{ij}=a_{ij}-\frac{a_{1i}a_{1j}}{a_{11}}=a_{ij}-\frac{a_{i1}a_{1j}}{a_{11}}\qquad(2\le i,j\le n)$$

とおき，$x_2,\dots,x_n$ についての 2 次形式

$$G(x_2,\dots,x_n)=\sum_{i=2}^n\sum_{j=2}^n b_{ij}x_ix_j$$

を考える．(ここで $b_{ij}=b_{ji}$ が成立することに注意しよう．)

$$F(x_1,x_2,\dots,x_n)=a_{11}\left(x_1+\frac{a_{12}}{a_{11}}x_2+\cdots+\frac{a_{1n}}{a_{11}}x_n\right)^2+G(x_2,\dots,x_n)$$

かつ $a_{11}>0$ であるから，$G(x_2,\dots,x_n)$ が正定値であることを示せば $F(\mathbf{x})$ も正定値となって証明が完了する．

さて，$2 \leq k \leq n$ なる k を任意に固定し，$i = 2, \ldots, k$ について，行列 A_k の第 1 行の $-\dfrac{a_{i1}}{a_{11}}$ 倍を行列 A_k の第 i 行に加えるという操作を行うと $\det A_k$ の値は変化せず，

$$0 < \det A_k = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kk} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1k} \\ 0 & b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} b_{22} & \cdots & b_{2k} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ b_{k2} & \cdots & b_{kk} \end{vmatrix}$$

となることがわかる．$a_{11} > 0$ であるから，これは b_{ij} を第 $(i-1, j-1)$ 成分とする $n-1$ 次正方行列 B の主小行列式がすべて正であることを意味する．従って帰納法の仮定により B の定める 2 次形式 $G(x_2, \ldots, x_n)$ は正定値である．以上により $F(\mathbf{x})$ が正定値であることが証明された．

(2) については $F(\mathbf{x})$ が負定値であることと $-F(\mathbf{x})$ が正定値であることは同値であることと，$-F(\mathbf{x})$ は行列 $-A$ で定義される 2 次形式であることに注意すればよい．□

定理 12 A を n 次対称行列として，A の k 次小行列式を $\det A_k$ とする．$1 < 2k \leq n$ をみたすある偶数 $2k$ について $\det A_{2k} < 0$ ならば 2 次形式 $F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ は不定符号である．

証明: A_{2k} の固有値を $\mu_1, \ldots, \mu_{2k}$ とする．(これらは A の固有値とは一般には異なる．) 仮定により $\mu_1 \cdots \mu_{2k} = \det A_{2k} < 0$ であるから，$\mu_1, \ldots, \mu_{2k}$ のうち負のものと正のものがそれぞれ奇数個ずつ（よって一つ以上）あることになる．よって 2 次形式

$$F(x_1, \ldots, x_{2k}, 0, \ldots, 0) = (x_1, \ldots, x_{2k})A_{2k}{}^t(x_1, \ldots, x_{2k})$$

は不定符号である．従って $F(x_1, \ldots, x_{2k}, \ldots, x_n)$ も不定符号である．□

注意 1 対称行列 A の固有値を大きい順に並べて $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ としたとき，$\lambda_1 = 0$ または $\lambda_n = 0$ であれば，2 次形式 $F(\mathbf{x}) = {}^t\mathbf{x}A\mathbf{x}$ は正定値，負定値，不定符号のいずれでもない．

4.3 多変数関数の極大と極小

定義 12 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された関数とする．D の点 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ において $f(\mathbf{x})$ が**極大値**（**極小値**）をとる，または**極大** (maximal)（**極小** (minimal)）となるとは，ある正の実数 ε があって，$U(\mathbf{a}; \varepsilon) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x} - \mathbf{a}\| < \varepsilon\} \subset D$ かつ

$$\mathbf{x} \in U(\mathbf{a}; \varepsilon) \text{ かつ } \mathbf{x} \neq \mathbf{a} \text{ ならば } f(\mathbf{x}) < f(\mathbf{a}) \quad (f(\mathbf{x}) > f(\mathbf{a}))$$

が成立することである．このとき $f(\mathbf{a})$ のことを $f(\mathbf{x})$ の**極大値** (maximum) または**極小値** (minimum) という．極大値と極小値を合わせて極値という．

定義 13 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D （の各点）で全微分可能な関数とする．D の点 $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ が $f(\mathbf{x})$ の**停留点** (stationary point) とは，$\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$ となることである．

命題 6 $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で全微分可能な関数 $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}\in D$ で極大または極小ならば $\mathbf{a}$ は $f(\mathbf{x})$ の停留点である．

証明: $f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}=(a_1,\ldots,a_n)$ で極大であるとすると，ある正の実数 ε が存在して

$$0<|x_1-a_1|<\varepsilon \text{ ならば } f(x_1,a_2,\ldots,a_n)<f(a_1,a_2,\ldots,a_n)$$

が成立するから，1 変数関数 $f(x_1,a_2,\ldots,x_n)$ は $x_1=a_1$ のとき極大となる．よって $f_{x_1}(a_1,\ldots,a_n)=0$ である．同様に $f_{x_j}(\mathbf{a})=0$ $(j=1,\ldots,n)$ であることがわかる．極小の場合も同様．□

停留点であることは，そこで関数が極大または極小となるための必要条件ではあるが，十分条件ではない．たとえば $(0,0)$ は 2 変数関数 $f(x,y)=x^2-y^2$ の停留点であるが，$f(x,y)$ の値は $(0,0)$ の近くで正にも負にもなり得るから（p. 18 のグラフを参照），$f(x,y)$ は $(0,0)$ で極大にも極小にもならない．

定理 13 $f(\mathbf{x})$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で C^2 級の関数，$\mathbf{a}\in D$ を $f(\mathbf{x})$ の停留点とする．$\mathbf{h}=(h_1,\ldots,h_n)\in\mathbb{R}^n$ を変数とする 2 次形式

$$Q(\mathbf{h})=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{a})h_ih_j$$

を考える．（$f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{a}$ におけるヘッシアン (Hessian) と呼ばれる．）

(1) $Q(\mathbf{h})$ が正定値ならば，$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ で極小となる．

(2) $Q(\mathbf{h})$ が負定値ならば，$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ で極大となる．

(3) $Q(\mathbf{h})$ が不定符号ならば，$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ で極大にも極小にもならない．

証明: $\mathbf{a}$ が $f(\mathbf{x})$ の停留点であることに注意すると，Taylor の定理により $0<\theta<1$ を満たす実数 θ が存在して

$$\begin{aligned} f(\mathbf{a}+\mathbf{h})&=f(\mathbf{a})+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h})h_ih_j\\ &=f(\mathbf{a})+\frac{1}{2}Q(\mathbf{h})+R_3(\mathbf{h}), \qquad (4.7)\\ R_3(\mathbf{h})&=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h})-\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}(\mathbf{a})\right)h_ih_j \end{aligned}$$

が成立する．$f_{x_ix_j}(\mathbf{a})$ を第 (i,j) 成分とする n 次対称行列を A とする（$f(\mathbf{x})$ の $\mathbf{a}$ におけるヘッセ行列と呼ばれる）と，n 次直交行列 P が存在して ${}^tPAP$ は $\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots\geq\lambda_n$ を対角成分とする対角行列となる．このとき ${}^tP\mathbf{h}=\tilde{\mathbf{h}}={}^t(\tilde{h}_1,\ldots,\tilde{h}_n)$ とおけば

$$Q(\mathbf{h})=\lambda_1\tilde{h}_1^2+\cdots+\lambda_n\tilde{h}_n^2$$

が成立する．一方，

$$r(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a}+\theta\mathbf{h}) - \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{a})\right|$$

とおくと，$|h_i h_j| \leq \dfrac{1}{2}(h_i^2 + j_j^2) \leq \|\mathbf{h}\|^2$ より

$$|R_3(\mathbf{h})| \leq \frac{1}{2}r(\mathbf{h})\|\mathbf{h}\|^2 \tag{4.8}$$

が成立する．$f(\mathbf{x})$ は C^2 級であるから，$\mathbf{h} \to \mathbf{0}$ のとき $r(\mathbf{h})$ は 0 に収束することに注意する．

(1) $Q(\mathbf{h})$ が正定値であると仮定する．$\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n > 0$ より，

$$Q(\mathbf{h}) = \lambda_1 \tilde{h}_1^2 + \cdots + \lambda_n \tilde{h}_n^2 \geq \lambda_n \tilde{h}_1^2 + \cdots + \lambda_n \tilde{h}_n^2 = \lambda_n \|\tilde{\mathbf{h}}\|^2 = \lambda_n \|P\mathbf{h}\|^2 = \lambda_n \|\mathbf{h}\|^2$$

であるから (4.7) と (4.8) により

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}Q(\mathbf{h}) + R_3(\mathbf{h}) \geq \frac{1}{2}Q(\mathbf{h}) - |R_3(\mathbf{h})| \geq \frac{1}{2}(\lambda_n - r(\mathbf{h}))\|\mathbf{h}\|^2$$

が成立する．ここで $\lim_{\mathbf{h}\to\mathbf{0}} r(\mathbf{h}) = 0$ と $\lambda_n > 0$ より，上式の最右辺は $\|\mathbf{h}\|$ が十分小さいとき，すなわち，十分小さな実数 ε に対して $0 < \|\mathbf{h}\| < \varepsilon$ であるとき，正となる．このとき上の不等式により $f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a})$ も正となるから，$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ で極小であることが示された．

(2) は $-f(\mathbf{x})$ について (1) を適用すれば示される．

(3) $Q(\mathbf{h})$ が不定符号であるとする．$\lambda_1 > 0$ かつ $\lambda_n < 0$ としてよい．$\tilde{\mathbf{h}} = (t, 0, \ldots, 0)$，すなわち $\mathbf{h} = {}^tP^t(t, 0, \ldots, 0)$ のとき

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 + R_3(\mathbf{h}) \geq \frac{1}{2}\lambda_1 t^2 - |R_3(\mathbf{h})| \geq \frac{1}{2}(\lambda_1 - r(\mathbf{h}))\|\mathbf{h}\|^2 = \frac{1}{2}(\lambda_1 - r(\mathbf{h}))t^2$$

は t が十分小さく 0 ではないとき，正となることがわかる．

一方，$\tilde{\mathbf{h}} = (0, \ldots, 0, t)$，すなわち $\mathbf{h} = {}^tP^t(0, \ldots, 0, t)$ のときは，

$$f(\mathbf{a}+\mathbf{h}) - f(\mathbf{a}) = \frac{1}{2}\lambda_n t^2 + R_3(\mathbf{h}) \leq \frac{1}{2}\lambda_n t^2 + |R_3(\mathbf{h})| \leq \frac{1}{2}(\lambda_n + r(\mathbf{h}))\|\mathbf{h}\|^2 = \frac{1}{2}(\lambda_n + r(\mathbf{h}))t^2$$

は t が十分小さく 0 ではないとき，負となる．以上により $f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a}$ において極大でも極小でもない． □

注意 2 $f(\mathbf{x})$ の停留点 $\mathbf{a}$ においてヘッシアン $Q(\mathbf{h})$ が正定値，負定値，不定符号のいずれでもないときは，$f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}$ で極大となるか極小となるか，あるいはそのいずれでもないかは，ヘッシアンだけからは判定できない．

例 22 $\mathbb{R}^2$ で定義された 2 変数関数 $f(x, y) = x^4 - 4xy + 2y^2$ の極値を求めよう．まず停留点を求める．

$$f_x(x, y) = 4x^3 - 4y = 4(x^3 - y) = 0, \quad f_y(x, y) = -4x + 4y = 4(y - x) = 0$$

をみたす x, y を求めればよい．後の式から $y = x$. これを最初の式に代入すると

$$x^3 - x = x(x^2 - 1) = x(x-1)(x+1) = 0$$

よって $x = y = 0$ または $x = y = 1$ または $x = y = -1$. 逆にこのとき $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ であることもわかる．よって $f(x, y)$ の停留点は $(0, 0)$, $(1, 1)$, $(-1, -1)$ の 3 点である．

$$f_{xx}(x, y) = 12x^2, \quad f_{xy}(x, y) = -4, \quad f_{yy}(x, y) = 4$$

より，$(0, 0)$ におけるヘッシアンは $Q(h, k) = -8hk + 4k^2$. ヘッセ行列は $A = \begin{pmatrix} 0 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ である．A の固有方程式は $\lambda^2 - 4\lambda - 16 = 0$ であり，2 次方程式の根（解）と係数の関係から固有値は正と負であることがわかる.（または $\det A = -16 < 0$ と定理 12 から.）よって $Q(h, k)$ は不定符号であるから $f(x, y)$ は $(0, 0)$ において極大でも極小でもない．

$(\pm 1, \pm 1)$ (複号同順）におけるヘッシアンは $Q(h, k) = 12h^2 - 8hk + 4k^2$. ヘッセ行列は $A = \begin{pmatrix} 12 & -4 \\ -4 & 4 \end{pmatrix}$ である．A の固有方程式は $\lambda^2 - 16\lambda + 32 = 0$ であるから，固有値は共に正である.（または $\det A_1 = 12 > 0$, $\det A = 32 > 0$ と命題 5 から.） よって $Q(h, k)$ は正定値であるから，$f(x, y)$ は $(\pm 1, \pm 1)$ において極小値 $f(\pm 1, \pm 1) = -1$ をとる．

2 変数関数の極大極小の判定法をまとめておこう．

定理 14 $f(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の領域 D で C^2 級の関数, $(a, b) \in D$ を $f(x, y)$ の停留点とする．ヘッセ行列の行列式 (ヘッセ行列式）を $\Delta(x, y) = f_{xx}(x, y) f_{yy}(x, y) - f_{xy}(x, y)^2$ とおく．

(1) $\Delta(a, b) > 0$ ならば $f_{xx}(a, b) > 0$ または $f_{xx}(a, b) < 0$ のいずれかであり，

  (i) $f_{xx}(a, b) > 0$ ならば $f(x, y)$ は (a, b) で極小，

  (ii) $f_{xx}(a, b) < 0$ ならば $f(x, y)$ は (a, b) で極大である．

(2) $\Delta(a, b) < 0$ ならば $f(x, y)$ は (a, b) で極大でも極小でもない（峠点）．

(3) $\Delta(a, b) = 0$ のときは，これだけからは判定できない．

証明: $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) - f_{xy}(a, b)^2 > 0$ ならば $f_{xx}(a, b) f_{yy}(a, b) > f_{xy}(a, b)^2 \geq 0$ より $f_{xx}(a, b)$ は 0 ではないから正または負である．他の主張は命題 5，定理 12, および定理 13 から従う．□

例 23 $\mathbb{R}^2$ で定義された関数 $f(x, y) = xy - x^2 y - xy^2$ を考える．

$$f_x(x, y) = y - 2xy - y^2 = y(1 - 2x - y), \quad f_y(x, y) = x(1 - x - 2y) = 0$$

より $f_x(x, y) = f_y(x, y) = 0$ が成立するための必要十分条件は

$(x = y = 0)$ or $(x = 1 - 2x - y = 0)$ or $(y = 1 - x - 2y = 0)$ or $(1 - 2x - y = 1 - x - 2y = 0)$

である．それぞれの連立方程式を解いて，停留点は

$$(0,0),\quad (0,1),\quad (1,0),\quad \left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$$

の 4 点であることがわかる．

$$f_{xx}(x,y)=-2y,\quad f_{xy}(x,y)=1-2x-2y,\quad f_{yy}(x,y)=-2x$$

と定理 14 を用いて各停留点での極大極小を判定しよう．

- $(0,0)$ では，$\Delta(0,0)=-1<0$ だから極大でも極小でもない (峠点である)．
- $(0,1)$ では，$\Delta(0,1)=-1<0$ だから極大でも極小でもない (峠点である)．
- $(1,0)$ も同様に峠点である．
- $\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)$ では，$f_{xx}\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=-\frac{2}{3}$ かつ $\Delta\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}>0$ だから極大である．極大値は $f\left(\frac{1}{3},\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{27}$.

例 24 $\mathbb{R}^3$ で定義された関数 $f(x,y,z)=x^4+y^4+z^4-4xyz$ を考える．まず停留点を求めよう．

$$f_x=4(x^3-yz)=0,\quad f_y=4(y^3-xz)=0,\quad f_z=4(z^3-xy)=0$$

より，$x^3y^3z^3-x^2y^2z^2=x^2y^2z^2(xyz-1)=0$ が導かれるので，$xyz=0$ または $xyz=1$ でなければならない．$xyz=0$ のときは x,y,z の少なくとも一つ，たとえば x は 0 となるが，このとき $y^3=xz=0$, $z^3=xy=0$ から $y=z=0$ となる．よって $xyz=0$ のときは $x=y=z=0$ となる．逆に $(0,0,0)$ が停留点であることも明らかである．

次に $xyz=1$ とすると，

$$0=x^3-yz=x^3-\frac{1}{x}=\frac{x^4-1}{x}=\frac{(x-1)(x+1)(x^2+1)}{x}$$

より $x=\pm1$ となる．同様に $y=\pm1$, $z=\pm1$ となることがわかる．複号を $x^3=yz$, $y^3=zx$, $z^3=xy$ となるように選ぶと，(x,y,z) は $(1,1,1),(1,-1,-1),(-1,1,-1),(-1,-1,1)$ のいずれかであることがわかる．以上により $f(x,y,z)$ の停留点は $(0,0,0)$, $(1,1,1)$, $(1,-1,-1)$, $(-1,1,-1)$, $(-1,-1,1)$ の 5 点である． 2 次偏導関数は

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(x,y,z)=12x^2,\quad f_{yy}(x,y,z)=12y^2,\quad f_{zz}(x,y,z)=12z^2\\
&f_{xy}(x,y,z)=-4z,\quad f_{xz}(x,y,z)=-4y,\quad f_{yz}(x,y,z)=-4x
\end{aligned}$$

- $(0,0,0)$ ではヘッセ行列はゼロ行列であり，固有値はすべて 0 だから 2 次偏導関数だけからは判定不能である．しかし，たとえば $x=y=z=t$ とすると $g(t)=f(t,t,t)=3t^4-4t^3=t^3(3t-4)$ は $0<t<\frac{4}{3}$ のとき負，$t<0$ のとき正であるから，$f(x,y,z)$ は $(0,0,0)$ で極大でも極小でもないことがわかる．

- $(1,1,1)$ ではヘッセ行列は $A = 4\begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -1 & 3 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ であり，主小行列式はすべて正なので（または固有値が $4, 16, 16$ であることから）$f(x,y,z)$ は極小となる．
- $(1,-1,-1)$ ではヘッセ行列は $A = 4\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ であり，主小行列式はすべて正なので（または固有値が $4, 16, 16$ であることから）$f(x,y,z)$ は極小となる．
- $(-1,1,-1)$ と $(-1,-1,1)$ でも上と同様に（または $f(x,y,z)$ が対称式であることから）極小となることがわかる．

問題 23 (基本) $\mathbb{R}^2$ で定義された次の各々の関数 $f(x,y)$ が極大または極小になる点をすべて求めよ.（極大か極小かの判定もすること.）

(1) $f(x,y) = (x^2 + y^2)e^x$

(2) $f(x,y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$

問題 24 (発展) 関数 $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$ が領域

$$D = \{(x,y) \mid -\pi < x < \pi,\ -\pi < y < \pi\}$$

において極大または極小になる点をすべて求めよ．

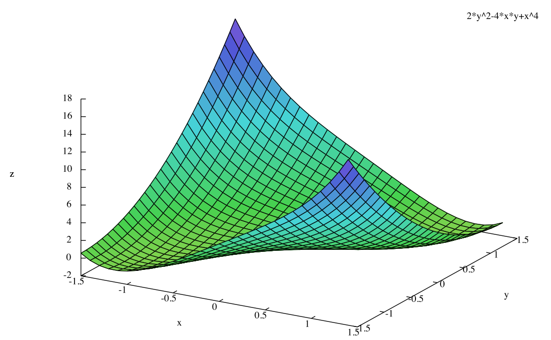
問題 25 (基本) 例 24 においてヘッセ行列についての主張を確かめよ．

問題 26 (基本) $f(x,y,z) = xy(x^2 + y^2 + z^2 - 4)$ とおく．

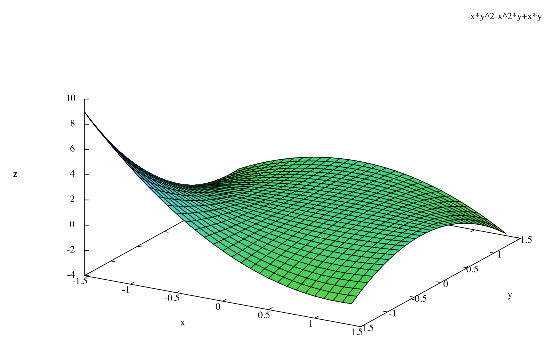
(1) 点 $(1,1,0)$ は $f(x,y,z)$ の停留点であることを示し，ここで $f(x,y,z)$ が極大か極小かそのいずれでもないか判定せよ．

(2) 点 $(1,-1,0)$ は $f(x,y,z)$ の停留点であることを示し，ここで $f(x,y,z)$ が極大か極小かそのいずれでもないか判定せよ．

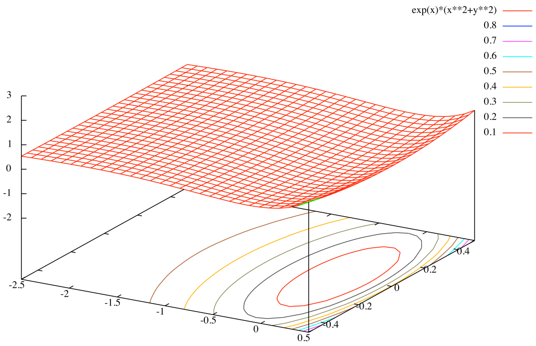
例 22 $f(x,y) = x^4 - 4xy + 2y^2$



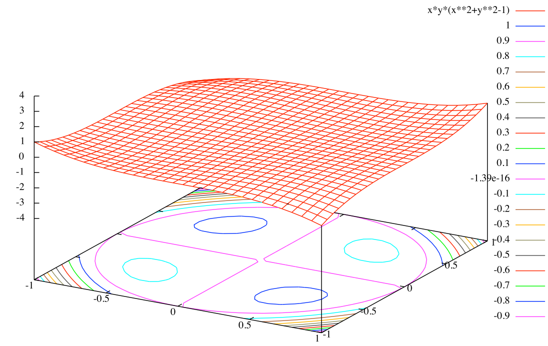
例 23 $f(x,y) = xy - x^2y - xy^2$



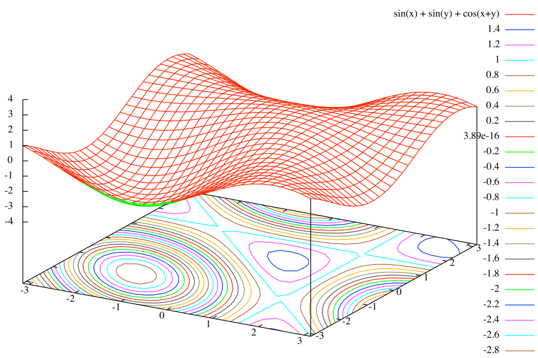
問題 23 (1) $f(x,y) = (x^2+y^2)e^x$



問題 23 (2) $f(x,y) = xy(x^2+y^2-1)$



問題 24 $f(x,y) = \sin x + \sin y + \cos(x+y)$



4.4 最大最小問題

多変数関数の最大値と最小値を求める問題を考察しよう．

定義 14 $\mathbb{R}^n$ の部分集合 A が**有界** (bounded) であるとは，ある正の実数 R が存在して

$$A \subset U(\mathbf{0}; R) = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\mathbf{x}\| \leq R\}$$

となることである．有界な閉集合を有界閉集合（またはコンパクト集合）という．

次の定理が最大最小問題の理論的な基礎となる．

定理 15 (Weierstrass(ワイヤストラス) の定理) 関数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ が有界閉集合 A で連続ならば，$f(\mathbf{x})$ は A において最大値と最小値をとる．すなわち，

$$f(\mathbf{a}) \leq f(\mathbf{x}) \leq f(\mathbf{b}) \qquad (\forall \mathbf{x} \in A)$$

が成立するような $\mathbf{a} \in A$ と $\mathbf{b} \in A$ が存在する．

定理 16 関数 $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ は閉集合 A で連続であり，A の内部 A° では C^1 級の関数とする．$f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a} \in A$ において最大値または最小値をとれば，次の (1),(2) のいずれかが成立する．

(1) $\mathbf{a}$ は A の内点であり，かつ $f(\mathbf{x})$ の停留点である．

(2) $\mathbf{a}$ は A の境界点である．

証明: $\mathbf{a}$ が A の境界点でないとすると，$\mathbf{a}$ は A の内点であるから，ある正の実数 ε があって $U(\mathbf{a};\varepsilon)$ は A に含まれる．$f(\mathbf{x})$ は $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ で最小値をとると仮定しよう．$a_1 - \varepsilon < x_1 < a_1 + \varepsilon$ のとき，$f(x_1, a_2, \ldots, a_n) \geq f(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ であるから，$0 < h < \varepsilon$ のとき

$$\frac{f(a_1 + h, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{h} \geq 0, \quad \frac{f(a_1 - h, a_2, \ldots, a_n) - f(a_1, a_2, \ldots, a_n)}{-h} \leq 0$$

が成立する．ここで $h \to 0$ とすれば，どちらの式も $f_{x_1}(\mathbf{a})$ に収束するから，$f_{x_1}(\mathbf{a}) = 0$ でなければならない．同様にして $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$，すなわち $\mathbf{a}$ は $f(\mathbf{x})$ の停留点であることがわかる．$f(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}$ で最大値をとるときも同様である．□

例 25 3 辺の長さ（幅，奥行き，高さ）の和が一定であるような直方体の中で体積が最大になるものを求めよう．3 辺の長さを x, y, z とする．a を正の定数として $x + y + z = a$ としてよい．このとき $z = a - x - y$ であるから，直方体の体積を x と y で表すと

$$f(x, y) = xyz = xy(a - x - y) = axy - x^2y - xy^2$$

となる．題意より $x > 0,\ y > 0,\ z = a - x - y > 0$ でなければならないが，これだと閉集合にならないので，

$$A = \{(x, y) \mid x \geq 0,\ y \geq 0,\ x + y \leq a\}$$

とおくと，A は有界閉集合である．$f(x, y)$ の停留点は

$$f_x(x, y) = (a - 2x - y)y = 0, \quad f_y(x, y) = (a - x - 2y)x = 0$$

を満たす点 (x, y) であるが，そのうち A の内部にあるのは，$x > 0,\ y > 0$ より

$$2x + y = x + 2y = a \quad \text{すなわち} \quad (x, y) = \left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$$

のみである．さらに

$$f\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right) = \frac{a^3}{27} > 0$$

である．一方，(x, y) が A の境界点であるとき，$x = 0$ または $y = 0$ または $z = a - x - y = 0$ であるから，$f(x, y) = 0$ となる．従って $f(x, y)$ は A の内点かつ $f(x, y)$ の停留点となるような点で最大値をとる．ところがそのような点は上の 1 点しかないから，$f(x, y)$ は点 $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ において最大値 $\frac{a^3}{27}$ をとる．従って体積が最大となるのは立方体のときである．なお，ヘッシアンから $f(x, y)$ は $\left(\frac{a}{3}, \frac{a}{3}\right)$ で極大となることがわかるが，以上のようにこのことは不要であった．

例 26 平面上の n 個の点 $\mathrm{P}_k(x_k, y_k)$ $(k = 1, \ldots, n)$ を考える．点 $\mathrm{P}(x, y)$ とこれらの n 個の点との距離の 2 乗の和

$$f(x,y) = \sum_{k=1}^{n} \{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2\}$$

が最小となるような点 (a, b) を求めよう．(x, y) は平面 $\mathbb{R}^2$ 全体を動き $\mathbb{R}^2$ は有界ではないので $f(x, y)$ の最大値と最小値は存在するとは限らない．実際 (x, y) と原点との距離 $\sqrt{x^2 + y^2}$ が限りなく大きくなるとき $f(x, y)$ の値は限りなく大きくなるから，$f(x, y)$ の最大値は存在しない．一方，このことから R を十分大きな正の実数とすると，$f(x, y)$ は有界閉集合

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

の内点 (a, b) において最小値をとることがわかる．よって (a, b) は f の停留点である．

$$f_x(x,y) = \sum_{k=1}^{n} 2(x - x_k) = 2\Big(nx - \sum_{k=1}^{n} x_k\Big), \qquad f_y(x,y) = \sum_{k=1}^{n} 2(y - y_k) = 2\Big(ny - \sum_{k=1}^{n} y_k\Big)$$

と $f_x(a, b) = f_y(a, b) = 0$ より

$$a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k, \qquad b = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} y_k.$$

すなわち (a, b) は点 P_1, …, P_n の重心である．（これは平方完成によって導くこともできる．）

問題 27 (基本) $f(x, y) = xy(x^2 + y^2 - 1)$ の $A = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ における最大値と最小値を求めよ．

5 陰関数と条件付き極値

5.1 陰関数

2 変数関数 $f(x, y)$ が与えられたとき，方程式 $f(x, y) = 0$ は一般に xy 平面における曲線を表す．この曲線上の点 (x, y) に対して y を x の関数で表すことを考える．たとえば $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ のとき，$f(x, y) = 0$ は単位円を表す．$f(x, y) = 0$ を y について解くと $y = \sqrt{1 - x^2}$ と $y = -\sqrt{1 - x^2}$ という 2 つの関数が得られる．これらはそれぞれ単位円の上半分と下半分を表している．一般には，たとえば $y^3 - xy - 1 = 0$ のような式を解いて y を x の式で具体的に表すことは困難なので，理論的な考察が必要となる．

定理 17 (陰関数定理) $f(\mathbf{x}) = f(x_1, \ldots, x_n)$ を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された C^1 級関数とする．$\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n)$ を $f(\mathbf{a}) = 0$ を満たすような D の点として $f_{x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ と

仮定する．このとき $(a_1,\dots,a_{n-1})$ を含む $\mathbb{R}^{n-1}$ の開集合 U で定義された $n-1$ 変数の C^1 級関数 $\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ であって

$$f(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}))=0 \quad (\forall(x_1,\dots,x_{n-1})\in U), \qquad \varphi(a_1,\dots,a_{n-1})=a_n$$

を満たすものがただ一つ存在する．すなわち，集合 $S=\{\mathbf{x}\in D \mid f(\mathbf{x})=0\}$ は，S の点 $\mathbf{a}$ の近傍 $U\times(a_n-\varepsilon,a_n+\varepsilon)$ では $x_n=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ という関数のグラフと一致する．関数 $x_n=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ を $f(\mathbf{x})=0$ から定まる**陰関数**という．さらにこのとき，$x_n=\varphi(x_1,\dots,x_{n-1})$ の x_k $(1\le k\le n-1)$ についての偏導関数は

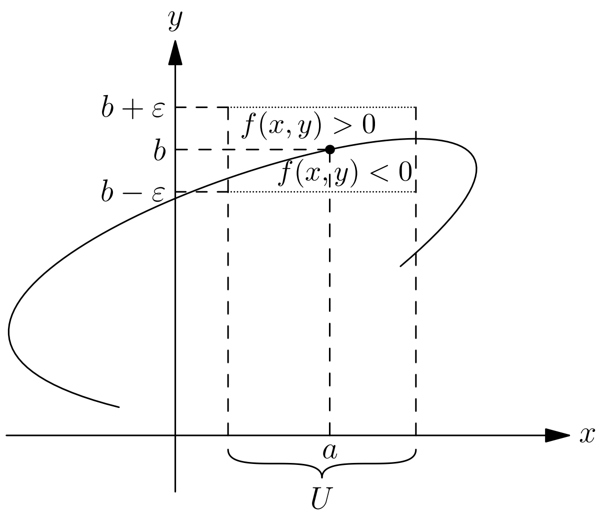
$$\frac{\partial\varphi}{\partial x_k}(x_1,\dots,x_{n-1})=-\frac{f_{x_k}(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}))}{f_{x_n}(x_1,\dots,x_{n-1},\varphi(x_1,\dots,x_{n-1}))}=-\frac{f_{x_k}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)}{f_{x_n}(x_1,\dots,x_{n-1},x_n)}$$

で与えられる．

証明: 簡単のため $n=2$ の場合に証明する．$f(x,y)$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 D で C^1 級の関数，$\mathbf{a}=(a,b)\in D$ として， $f(a,b)=0$ かつ $f_y(a,b)\neq 0$ とする．$f_y(a,b)>0$ としても一般性を失わない（$f_y(a,b)<0$ の場合は $-f(x,y)$ を考えればよいから）．$f_y(a,b)>0$ と $f_y(x,y)$ が連続なことから，a を含むある開区間 U と，ある正の実数 ε があって

$$(x\in U,\ b-\varepsilon<y<b+\varepsilon) \quad\Rightarrow\quad f_y(x,y)>0$$

が成立する．特に y の関数 $f(a,y)$ は区間 $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ で単調増加で $f(a,b)=0$ だから $f(a,b+\varepsilon)>0$ かつ $f(a,b-\varepsilon)<0$ である．$f(x,y)$ は連続だから，U を小さく取り直せば，$x\in U$ のとき $f(x,b+\varepsilon)>0$ かつ $f(x,b-\varepsilon)<0$ が成立するとしてよい．



$x\in U$ を固定して y について中間値の定理を用いると

$$f(x,c)=0, \qquad b-\varepsilon<c<b+\varepsilon$$

を満たす実数 c が存在する．$f(x,y)$ は y の関数として区間 $(b-\varepsilon,b+\varepsilon)$ で単調増加だから，このような c はただ一つである．そこで $\varphi(x)=c$ と定めれば φ は区間 U で定義された 1 変数関数であり，$f(a,b)=0$ に注意すると

$$f(x,\varphi(x))=0 \quad (\forall x\in U), \qquad \varphi(a)=b$$

を満たす．これで定理の前半が示された．

x_0 を区間 U の点として $y_0=\varphi(x_0)$ とおく．$f(x,y)$ に 0 次の Taylor の公式を適用すると h,k を絶対値が十分小さい実数とするとき

$$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)+hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k) \qquad (0<\exists\theta<1)$$

が成立する．ここで $y_0+k=\varphi(x_0+h)$ すなわち $k=\varphi(x_0+h)-y_0=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)$ とすると，$f(x_0+h,y_0+k)=f(x_0,y_0)=0$ であるから

$$hf_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)+kf_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)=0$$

すなわち

$$\frac{k}{h}=-\frac{f_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}{f_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}$$

が成立する．$h\to 0$ のとき $k=\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)\to 0$ となるから

$$\varphi'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{k}{h}=-\lim_{h\to 0}\frac{f_x(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}{f_y(x_0+\theta h,y_0+\theta k)}=-\frac{f_x(x_0,y_0)}{f_y(x_0,y_0)}=-\frac{f_x(x_0,\varphi(x_0))}{f_y(x_0,\varphi(x_0))}$$

が成立する．$f(x,y)$ は C^1 級だから，これから $\varphi'(x)$ が連続，すなわち φ が C^1 級であることもわかる．$\square$

注意 3 $\varphi(x)$ が微分可能であることを仮定すれば，$\varphi'(x)$ は恒等式 $f(x,\varphi(x))=0$ を x について微分して

$$0=\frac{d}{dx}f(x,\varphi(x))=f_x(x,\varphi(x))+f_y(x,\varphi(x))\varphi'(x)$$

から導くこともできる．

例 27 $n=2$, $D=\mathbb{R}^2$ として $f(x,y)=x^2+y^2-1$ とおくと $f_y(x,y)=2y$ であるから，円 $f(x,y)=0$ 上の点 $\mathbf{a}=(a,b)$ は $b\neq 0$ ならば定理の条件を満たす．このとき $-1<a<1$ であることに注意する．もし $b>0$ ならば $\varphi(x)=\sqrt{1-x^2}$ は区間 $U=(-1,1)$ で C^1 級であり

$$f(x,\varphi(x))=0, \qquad \varphi(a)=\sqrt{1-a^2}=b$$

を満たす．一方 $b<0$ の場合は，$\varphi(x)=-\sqrt{1-x^2}$ は区間 $(-1,1)$ で C^1 級であり

$$f(x,\varphi(x))=0, \qquad \varphi(a)=-\sqrt{1-a^2}=b$$

を満たす．$y=\varphi(x)$ が上のいずれの場合にも ($y\neq 0$ ならば)

$$\frac{dy}{dx}=\varphi'(x)=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{x}{y}$$

が成立する．

一般に $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された C^1 級関数 f に対して集合

$$S = \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$$

は，$n = 2$ のときは曲線，$n = 3$ のときは曲面を表し，$n \geq 4$ のときは超曲面と呼ばれる．S の点 $\mathbf{a}$ は

$$\nabla f(\mathbf{a}) = (f_{x_1}(\mathbf{a}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{a})) = (0, \dots, 0) = \mathbf{0}$$

を満たすとき S の**特異点**と呼ばれる．$\mathbf{a}$ が S の特異点でないとき，すなわち

$$\nabla f(\mathbf{a}) = (f_{x_1}(\mathbf{a}), \dots, f_{x_n}(\mathbf{a})) \neq (0, \dots, 0)$$

のとき，$\mathbf{a}$ は S の**正則点**または非特異点と呼ばれる．$\mathbf{a}$ が S の正則点ならば，陰関数定理により（たとえば $f_{x_1}(\mathbf{a}) \neq 0$ ならば変数 x_1 と x_n を取り替えて適用すればよい），S は $\mathbf{a}$ の近傍では $n-1$ 変数の C^1 級関数のグラフと一致するので，なめらかな曲線（$n = 2$ のとき）または曲面 ($n = 3$ のとき）または超曲面（$n \geq 4$ のとき）となる．

例 28 $f(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ とすると $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ は単位円周である．$(a, b) \in S$ のとき

$$\nabla f(a, b) = (2a, 2b) \neq (0, 0)$$

であるから，S の点はすべて S の正則点である．同様にして，双曲線 $x^2 - y^2 - 1 = 0$ のすべての点は正則点である．

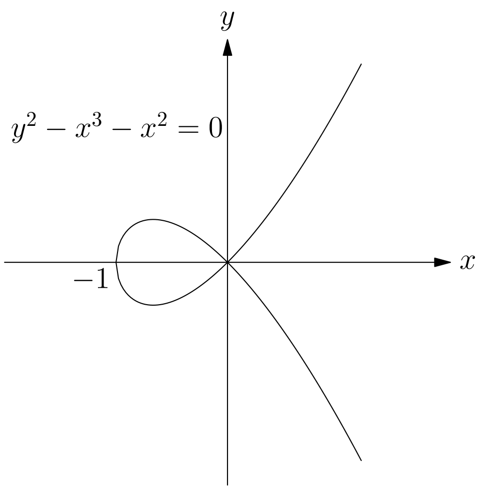
例 29 $f(x, y) = y^2 - x^3 - x^2$ として曲線 $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ を考える．$(a, b) \in S$ が

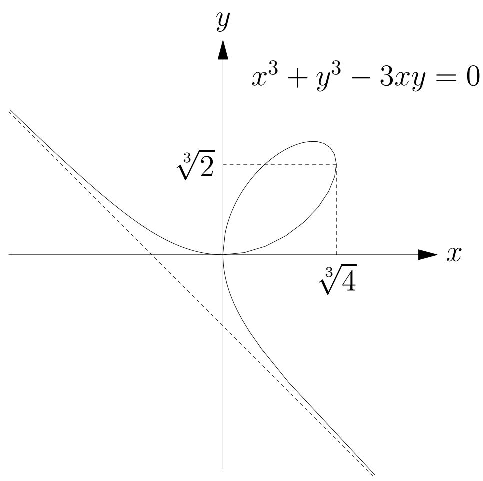
$$\nabla f(a, b) = (-3a^2 - 2a, 2b) = (0, 0)$$

を満たすのは，$b = 0$ かつ $-3a^2 - 2a = -a(3a + 2) = 0$，すなわち $(a, b) = (0, 0)$ または $(a, b) = (-2/3, 0)$ のときである．後者の点は S には属さないから，S の特異点は $(0, 0)$ のみであり，その他の S の点は正則点である．S の点 (x, y) で $f_y(x, y) = 2y = 0$ となるのは $(0, 0)$ と $(-1, 0)$ の 2 点である．それ以外の点の近傍では y は x の陰関数として $y = \varphi(x)$ と表されて

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{f_x(x, y)}{f_y(x, y)} = \frac{3x^2 + 2x}{2y}$$

が成立する．





例 30 $f(x,y)=x^3+y^3-3xy=0$ で定まる曲線 S を考える．$f_x(x,y)=3x^2-3y$, $f_y(x,y)=3y^2-3x$ が共に 0 になる点は $y=x^2$ かつ $x=y^2$ より $x^4-x=x(x-1)(x^2+x+1)=0$. よって $(x,y)=(0,0)$ または $(x,y)=(1,1)$ であるが $f(0,0)=0$, $f(1,1)\neq 0$ なので S の特異点は $(0,0)$ のみである．

$f_y(x,y)=f(x,y)=0$ を満たす (x,y) は，$x=y^2$ を f に代入して

$$y^6-2y^3=y^3(y^3-2)=0$$

より，$(x,y)=(0,0)$ または $(x,y)=(\sqrt[3]{4},\sqrt[3]{2})$ である．この 2 点以外の S の各点の近傍では，y は x の陰関数 $y=\varphi(x)$ で表されて

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{f_x(x,y)}{f_y(x,y)}=-\frac{x^2-y}{y^2-x}$$

が成立する．

問題 28 (基本) 次の曲線の特異点を（もしあれば）求めよ．また y を x の陰関数として表したとき $\dfrac{dy}{dx}$ を x と y の式で表せ.

(1) $x^3-y^2=0$　(2) $x^3-y^2-1=0$　(3) $y^3-xy+1=0$　(4) $y^3-xy+x^2=0$

5.2 条件付き極値問題と最大最小問題

変数 $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_n)$ が n 変数関数 f による制約条件 $f(\mathbf{x})=0$ を満たすとき，別の n 変数関数 g の極値または最大値・最小値を求めることを考える．たとえば (x,y) が $x^2+y^2-1=0$ を満たすときに関数 xy の極値を求めることを考える．この場合はパラメータ表示によって $x=\cos t$, $y=\sin t$ と表されることに注意すれば，$xy=\cos t\sin t$ の極大値（最大値）は 1/2, 極小値（最小値）は −1/2 であることがわかる．しかし一般には制約条件 $f(\mathbf{x})=0$ からパラメータ表示を求めることは困難である．一般の場合の問題設定は以下のようになる．

> f と g を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された C^1 級関数とする．
>
> $$S=\{\mathbf{x}\in D \mid f(\mathbf{x})=0\}$$
>
> とおき，$\mathbf{x}\in S$ という条件のもとでの $g(\mathbf{x})$ の極値あるいは最大値・最小値を求めること.

定理 18 (Lagrange（ラグランジュ）の未定乗数法) $\mathbf{a}$ が S の正則点であり，$\mathbf{x}\in S$ という条件のもとで $g(\mathbf{x})$ が $\mathbf{a}$ において極値または最大（小）値をとるとすると，ある定数 λ （Lagrange 乗数と呼ばれる）が存在して

$$\nabla g(\mathbf{a})=\lambda\nabla f(\mathbf{a}) \quad かつ \quad f(\mathbf{a})=0$$

が成立する．

証明: 仮定より $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ だから $f_{x_k}(\mathbf{a}) \neq 0$ となる k が存在する．$k = n$ として一般性を失わない．このとき陰関数定理により，$(a_1, \ldots, a_{n-1})$ を含むある開集合 U で定義された C^1 級関数 $\varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$ があって，点 $\mathbf{a}$ の近傍 $U \times (a_n - \varepsilon, a_n + \varepsilon)$ では S の点 $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ は

$$x_n = \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})$$

と表される．従って U で定義された $n-1$ 変数関数

$$G(x_1, \ldots, x_{n-1}) = g(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

は $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ で極値または最大最小値をとるから，$(a_1, \ldots, a_{n-1})$ は G の停留点であり

$$\frac{\partial G}{\partial x_k}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1)$$

が成立する．$1 \leq k \leq n-1$ のとき合成関数の微分の公式より

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1}) &= g_{x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) \\ &\qquad + g_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}))\varphi_{x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1})\end{aligned}$$

が成立するから，$a_n = \varphi(a_1, \ldots, a_{n-1})$ に注意して

$$g_{x_k}(\mathbf{a}) + g_{x_n}(\mathbf{a})\varphi_{x_k}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0 \qquad (1 \leq k \leq n-1) \tag{5.9}$$

を得る．一方 $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) = 0$ を x_k について微分すると

$$f_{x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1})) + f_{x_n}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \varphi(x_1, \ldots, x_{n-1}))\varphi_{x_k}(x_1, \ldots, x_{n-1}) = 0$$

となるから

$$f_{x_k}(\mathbf{a}) + f_{x_n}(\mathbf{a})\varphi_{x_k}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = 0 \qquad (1 \leq k \leq n-1) \tag{5.10}$$

が成立する．$f_{x_n}(\mathbf{a}) \neq 0$ であるから，(5.10) より

$$\varphi_{x_k}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = -\frac{f_{x_k}(\mathbf{a})}{f_{x_n}(\mathbf{a})}$$

これを (5.9) に代入して

$$g_{x_k}(\mathbf{a}) = \frac{g_{x_n}(\mathbf{a})}{f_{x_n}(\mathbf{a})} f_{x_k}(\mathbf{a}) \qquad (1 \leq k \leq n-1)$$

を得る．この等式は $k = n$ のときも成立することに注意する．従って $\lambda = \dfrac{g_{x_n}(\mathbf{a})}{f_{x_n}(\mathbf{a})}$ とおけば，

$$\nabla g(\mathbf{a}) = \lambda \nabla f(\mathbf{a}) \tag{5.11}$$

が成立する．逆に (5.11) を仮定すれば $g_{x_j}(\mathbf{a}) = \lambda f_{x_j}(\mathbf{a})$ と (5.10) より

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x_k}(\mathbf{a}) &= g_{x_k}(\mathbf{a}) + g_{x_n}(\mathbf{a})\varphi_{x_k}(a_1, \ldots, a_{n-1}) = \lambda f_{x_k}(\mathbf{a}) + \lambda f_{x_n}(\mathbf{a})\varphi_{x_k}(a_1, \ldots, a_{n-1}) \\ &= 0 \qquad (k = 1, \ldots, n-1)\end{aligned}$$

となるから $(a_1, \ldots, a_{n-1})$ は G の停留点である．□

系 1 f と g を $\mathbb{R}^n$ の開集合 D で定義された C^1 級関数として

$$S = \{\mathbf{x} \in D \mid f(\mathbf{x}) = 0\}$$

とおく．もし $g(\mathbf{x})$ が $\mathbf{x} \in S$ という条件の下で $\mathbf{a} \in S$ において極値または最大最小値をとったとすると，

(1) ある定数 λ が存在して $\nabla g(\mathbf{a}) = \lambda \nabla f(\mathbf{a})$

(2) $\nabla f(\mathbf{a}) = \mathbf{0}$

の少なくとも一方が成立する．

証明: 定理 18 により $\mathbf{a}$ が S の正則点，すなわち $\nabla f(\mathbf{a}) \neq \mathbf{0}$ （$\Leftrightarrow$ (2) が成立しない）ならば (1) が成立する．□

例 31 3 辺の長さ x, y, z の和が一定 a であるような直方体で体積が最大になるものを求めよう．例 25 では $x + y + z = a$ から z を消去して x, y についての 2 変数関数 $xyz = xy(1 - x - y)$ の最大値を求めたが，ここでは $D = \mathbb{R}^3$ で C^1 級の関数

$$f(x, y, z) = x + y + z - a, \qquad g(x, y, z) = xyz$$

に対して Lagrange の未定乗数法を用いる．Weierstrass の定理により，$g(x, y, z)$ は有界閉集合

$$A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = a,\ x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0\}$$

のある点 (x_0, y_0, z_0) で正の最大値 $x_0 y_0 z_0$ をとる．よって $x_0, y_0, z_0 > 0$ でなければならないから，$g(x, y, z)$ は $x + y + z = a$ という条件のもとで (x_0, y_0, z_0) において極大値をとる．$\nabla f(x, y, z) = (1, 1, 1) \neq (0, 0, 0)$ だから，ある λ があって

$$\nabla g(x_0, y_0, z_0) = (y_0 z_0, z_0 x_0, x_0 y_0) = \lambda \nabla f(x_0, y_0, z_0) = \lambda(1, 1, 1)$$

が成立する．これから $y_0 z_0 = z_0 x_0 = x_0 y_0$ を得る．x_0, y_0, z_0 は正であることに注意すると，これから $x_0 = y_0 = z_0$ であることがわかる．これと $x_0 + y_0 + z_0 = a$ より $x_0 = y_0 = z_0 = \dfrac{a}{3}$ を得る．

例 32 $x^2 - xy + y^2 = 1$ という条件のもとで $x^2 + y^2$ の最大値と最小値を求めよう．これは $x^2 - xy + y^2 = 1$ で定義される曲線上の点と原点との距離の最大値と最小値を求めることと同値である．$f(x, y) = x^2 - xy + y^2 - 1$, $g(x, y) = x^2 + y^2$ とおく．まず $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) = 0\}$ は $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であることを示そう．$(x, y) \in S$ のとき

$$x^2 - xy + y^2 = \left(x - \frac{y}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}y^2 = 1$$

より，$|y| \leq \dfrac{2}{\sqrt{3}}$ かつ $\left|x - \dfrac{y}{2}\right| \leq 1$ でなければならない．三角不等式より

$$|x| = \left|x - \frac{y}{2} + \frac{y}{2}\right| \leq \left|x - \frac{y}{2}\right| + \frac{|y|}{2} \leq 1 + \frac{1}{\sqrt{3}}$$

を得る．よって S は有界である．連続関数の等式で定義されるから S は閉集合である．よって Weierstrass の定理により $g(x,y)=x^2+y^2$ は S で最大値と最小値をとる．

また，$f_x(x,y)=2x-y=0$ かつ $f_y(x,y)=2y-x=0$ を満たす (x,y) は $(0,0)$ のみであり，$(0,0)$ は S には属さないから S は特異点を持たない．以上により x^2+y^2 が最大最小になる S の点は Lagrange の乗数法によって求めることができる．

$$\nabla g(x,y)=(2x,2y)=\lambda(2x-y,2y-x)$$

を x と y についての連立 1 次方程式とみなすと

$$\begin{pmatrix}2(\lambda-1) & -\lambda \\ -\lambda & 2(\lambda-1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

ここで $(x,y)\neq(0,0)$ であるから，この行列式は 0 でなければならない:

$$0=\begin{vmatrix}2(\lambda-1) & -\lambda \\ \lambda & 2(\lambda-1)\end{vmatrix}=4(\lambda-1)^2-\lambda^2=3\lambda^2-8\lambda+4=(\lambda-2)(3\lambda-2)$$

従って $\lambda=2$ または $\lambda=\dfrac{2}{3}$ である．

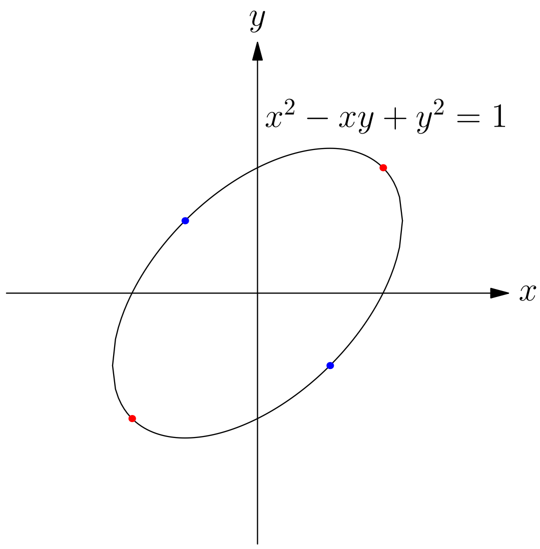
$\lambda=2$ のとき，上の連立 1 次方程式から $y=x$ を得るので，$0=f(x,x)=x^2-1$ より $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ （複号同順）．

$\lambda=\dfrac{2}{3}$ のとき，上の連立 1 次方程式から $y=-x$ を得るので，$0=f(x,-x)=3x^2-1$ より $(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ （複号同順）．

これと

$$g(1,1)=2,\qquad g\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}},\mp\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{2}{3}$$

より，$x^2-xy+y^2=1$ という条件のもとで，x^2+y^2 は $(x,y)=(\pm1,\pm1)$ のとき最大値 2 をとり，$(x,y)=\left(\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}},\mp\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ のとき最小値 $\dfrac{2}{3}$ をとる．



問題 29 (基本)

(1) $x^2 - xy + y^2 = 1$ という条件のもとで $2x + y$ の最大値と最小値，およびそのときの (x, y) を求めよ．

(2) $3x + 2y + z = 1$ という条件のもとで $x^2 + y^2 + z^2$ の最小値とそのときの (x, y, z) を求めよ．

目 次

1 ユークリッド空間とその位相 1
1.1 ユークリッド空間 1
1.2 開集合と閉集合 3

2 多変数関数とその連続性 5
2.1 多変数関数 5
2.2 多変数関数のグラフ 5
2.3 ユークリッド空間の (超) 平面 6
2.4 多変数関数の極限と連続性 8

3 多変数関数の微分 10
3.1 偏微分係数と偏導関数 10
3.2 高次（高階）導関数 11
3.3 全微分可能性と方向微分 14
3.4 合成関数の微分法 20

4 多変数関数に対する Taylor の定理と極大極小問題 24
4.1 Taylor の定理 24
4.2 2 次形式 26
4.3 多変数関数の極大と極小 32
4.4 最大最小問題 38

5 陰関数と条件付き極値 40
5.1 陰関数 40
5.2 条件付き極値問題と最大最小問題 44