

情報解析学II（フーリエ解析と偏微分方程式）

大阿久 俊則

1 フーリエ変換

1.1 フーリエ級数の復習

$f(x)$ を周期 $T = 2L$ の区分的に連続な関数とします．角周波数を $\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{L}$ とし
て，フーリエ係数 a_n, b_n を

$$a_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \cos n\omega x \, dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(x) \sin n\omega x \, dx \quad (n \geq 1) \quad (1)$$

で定めると，

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x) \quad (2)$$

が成立します．この右辺を $f(x)$ のフーリエ級数展開といいます．ここで記号 $\sim$ は正確
には

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left\{ \int_0^T |f(x) - f_N(x)|^2 \, dx \right\}^{\frac{1}{2}} = 0,$$

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x)$$

を意味します．例外的な点 x を除いて「ほとんどすべての」 x について (2) 式で $=$ が成
立します．このとき $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は，(2) のフーリエ展開に含まれる基本角
周波数が $n\omega$ であるような正弦波 $a_n \cos n\omega x + b_n \sin n\omega x$ の振幅を表しており， $f(x)$ のス
ペクトルと呼ばれます．これが音の特徴（楽器ならば音色，言葉なら母音の違い）を表し
ています．

オイラーの等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いると，複素フーリエ級数

$$f(x) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega x} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega x} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega x} \quad (3)$$

が得られます．ここで，複素フーリエ係数 c_n はすべての整数 n について

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(x) e^{-in\omega x} \, dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-in\omega x} \, dx \quad (4)$$

与えられます． $f(x)$ が実数値であることから $c_{-n} = \overline{c_n}$ が成立することがわかるので，
 $c_0, c_1, c_2, \dots$ を求めれば十分です．

1.2 フーリエ級数からフーリエ変換へ

今までは周期関数のみを考えましたが、周期関数にならないような振動現象もたくさんあります。たとえば地震波は有限時間の間だけ振動するので、厳密には周期関数ではありません。言葉の音で言えば、母音は周期関数ですが、子音は継続しないので、周期関数にはなりません。また、振動数の比が無理数であるような2つの単振動(正弦波)を合わせた波、つまり a/b が有理数でないとき

$$f(x) = \sin ax + \sin bx$$

は周期関数になりません。たとえば平均率では、音階の振動数の比は無理数なので、和音も厳密には周期関数にはならないはずです。

以上のように周期関数にはならないような振動を考えるために、フーリエ展開で周期 $T = 2L$ を無限大にした極限を考えてみましょう。 $f(x)$ は実数全体 $\mathbb{R}$ で定義された関数とします。 $L > 0$ として、 $f(x)$ を区間 $[-L, L]$ で考え、周期 $2L$ で $\mathbb{R}$ に拡張した関数を $f_L(x)$ とします。 $f_L(x)$ は区間 $[-L, L]$ では $f(x)$ に一致しますが、この区間の外では一般には $f(x)$ とは異なります。 $f_L(x)$ の複素フーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) e^{-i\pi n x / L} dx = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) e^{-i\pi n x / L} dx$$

となります。ここで ξ を新しい変数として

$$F_L(\xi) := \int_{-L}^L f(x) e^{-i\xi x} dx, \quad \xi_n = \frac{\pi n}{L}$$

とおけば

$$c_n = \frac{1}{2L} F_L(\xi_n)$$

という関係が得られます。複素フーリエ展開の式(3)から、 $-L < x < L$ のとき、

$$f(x) = f_L(x) \sim \frac{1}{2\pi} \frac{\pi}{L} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\xi_n) e^{i\xi_n x} = \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} F_L(\xi_n) e^{i\xi_n x} (\xi_n - \xi_{n-1}) \quad (5)$$

が導かれます。この式は、区間 $[-L, L]$ において $f(x)$ を角周波数が $\xi_n = n\pi/L$ (周波数は $\xi_n/2\pi = n/2L$) の単振動の和に分解していると考えられます。この単振動の角周波数は離散的(とびとび)で、間隔が π/L になっていることに注意しましょう。ここで L を限りなく大きくすると、この角周波数の間隔は限りなく小さくなり、すべての実数値をとるようになると考えられます。そこで

$$F(\xi) = \lim_{L \rightarrow \infty} F_L(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

を $f(x)$ のフーリエ変換と呼び $F(\xi) = \widehat{f}(\xi)$ または $F(\xi) = \mathcal{F}[f](\xi)$ (略して $F = \mathcal{F}[f]$) などと表します。 $f(x)$ が実数値でも $F(\xi)$ は一般には実数値ではなく複素数値の関数になります。

積分のリーマン和による定義を思い出せば、 $F(\xi)$ の定義の式と (5) で $L \rightarrow \infty$ として

$$f(x) = \lim_{L \rightarrow \infty} f_L(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (6)$$

が成立すると予想できます。(実際には、広義積分が収束するかどうかも含めて、もう少し厳密な議論(と条件)が必要になります。) 式(6)は、 $F(\xi)e^{i\xi x}$ という、角周波数が ξ で複素振幅が $F(\xi)$ の単振動を、 ξ について積分することで $f(x)$ が表されることを意味しています。フーリエ展開のときは角周波数が π/L の整数倍の単振動だけが現われましたが、式(6)ではすべての角周波数 $\xi \in \mathbb{R}$ の単振動が現われるため、式(5)の和が積分に置き換わっています。式(6)の右辺を $F(\xi)$ の逆フーリエ変換といいます。

まずは簡単な例を考えてみましょう。

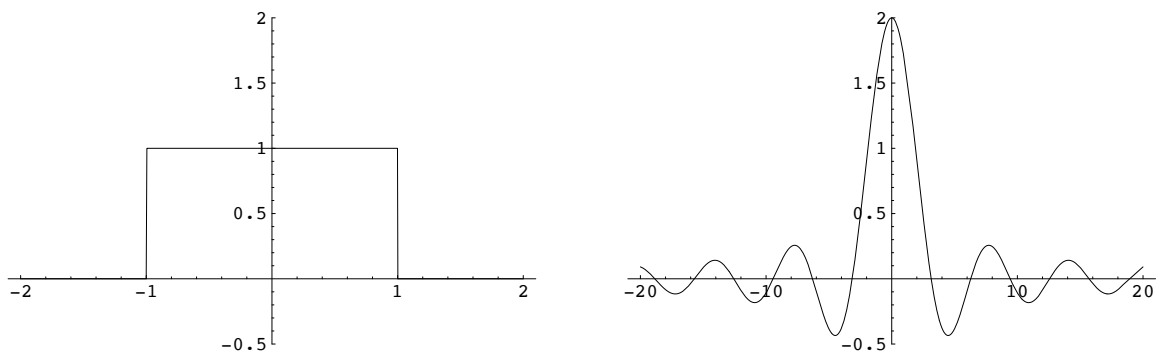
例 1.1 $A > 0$ として

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (|x| \leq A) \\ 0 & (|x| > A) \end{cases}$$

で定義される関数 $f(x)$ (パルス波) のフーリエ変換は、 $\xi \neq 0$ のとき

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = \int_{-A}^A e^{-i\xi x} dx = \left[\frac{e^{-i\xi x}}{-i\xi} \right]_{-A}^A = \frac{e^{-iA\xi} - e^{iA\xi}}{-i\xi} = \frac{2 \sin A\xi}{\xi}.$$

$\xi = 0$ のときは別に計算すると $\hat{f}(0) = 2A$ となりますが、これは上の式で $\xi \rightarrow 0$ とした極限と一致します。つまり $\hat{f}(\xi)$ は $\mathbb{R}$ 全体で連続な関数です。($f(x)$ は $x = \pm 1$ で不連続なことに注意。) 左は $A = 1$ のときの $f(x)$ のグラフ、右は $\hat{f}(\xi)$ のグラフです。



フーリエ展開との関連を見るために、 $L > A$ として $f(x)$ を区間 $[-L, L]$ で考え、その外に周期 $2L$ で拡張した関数を $f_L(x)$ とすると、 $f_L(x)$ の複素フーリエ係数は

$$c_n = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f_L(x) e^{-in\pi x/L} dx = \frac{1}{2L} \int_{-A}^A e^{-in\pi x/L} dx$$

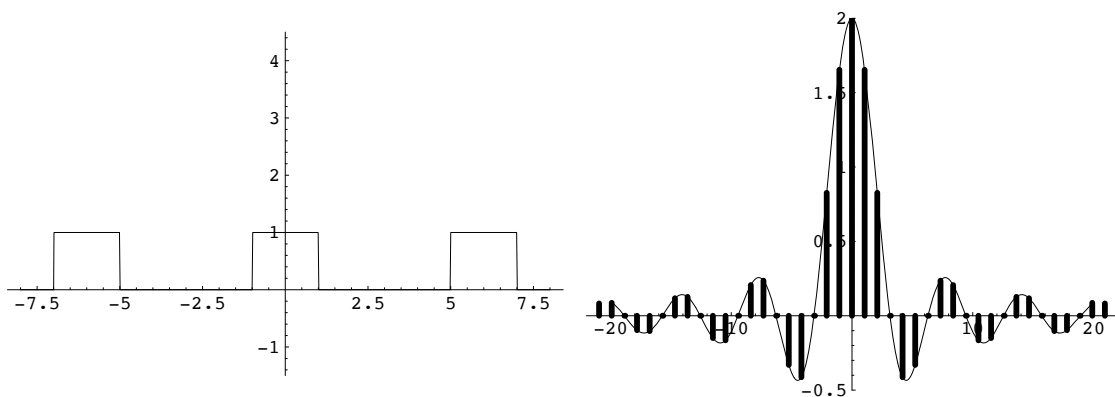
より、 $c_0 = A/L$ で、 $n \neq 0$ のときは

$$c_n = \frac{1}{2L} \frac{L}{-in\pi} (e^{-in\pi A/L} - e^{in\pi A/L}) = \frac{\sin \frac{n\pi A}{L}}{n\pi}$$

となります。従って $f_L(x)$ の複素フーリエ展開は

$$f_L(x) \sim \frac{A}{L} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{n\pi A}{L}}{n\pi} (e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L})$$

と表されます。このフーリエ展開を、横軸を角周波数 $\xi = \frac{n\pi}{L}$ ，縦軸を $2Lc_n$ としてグラフで表してみましょう。左は $A = 1, L = 3$ のときの $f_L(x)$ のグラフ、右は $2Lc_n$ の棒グラフです。曲線は $f(x)$ のフーリエ変換を表します。 L を大きくして行くと、左の $f_L(x)$ のグラフのパルスの間隔は開いて行き、右のフーリエ係数の棒グラフの間隔はだんだん狭まって $\hat{f}(\xi)$ のグラフに近づいて行きます。



1.3 フーリエ変換の存在と性質

フーリエ変換は広義積分で定義されるため、それが定義できるためには関数 $f(x)$ に対する何らかの条件が必要です。以下では $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で区分的に連続な（不連続点があっても良いが、とびとびにしかない）有界関数とします。

定義 1.1 関数 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で可積分とは、広義積分

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx = \lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{-R_1}^{R_2} |f(x)| dx$$

が存在する（右辺の極限が収束する）こと。

定理 1.1 $f(x)$ が $\mathbb{R}$ で可積分ならば、 $f(x)$ のフーリエ変換

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx$$

は存在して、 ξ の連続関数になる。

証明: まず, 任意の実数 ξ について広義積分

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^0 f(x)e^{-i\xi x} dx + \int_0^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx$$

が存在することを示そう. この右辺の 2 つの項が収束することを示せばよいが, 同様にできるので, 第 2 項

$$\int_0^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R f(x)e^{-i\xi x} dx$$

が収束することを示せばよい. コーシーの収束判定法により,

$$\lim_{R_1, R_2 \rightarrow \infty} \int_{R_1}^{R_2} f(x)e^{-i\xi x} dx = 0$$

となることを示せばよいが, $f(x)$ が可積分であることから

$$\left| \int_{R_1}^{R_2} f(x)e^{-i\xi x} dx \right| \leq \int_{R_1}^{R_2} |f(x)e^{-i\xi x}| dx = \int_{R_1}^{R_2} |f(x)| dx \rightarrow 0 \quad (R_1, R_2 \rightarrow \infty)$$

となり, 示された.

次に $\widehat{f}(\xi)$ が ξ について連続であることを示す. $\xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}$ とすると,

$$\left| \widehat{f}(\xi_1) - \widehat{f}(\xi_2) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}) dx \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| |e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| dx \quad (7)$$

が成立する. ここで三角不等式から, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について

$$|e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| \leq |e^{-i\xi_1 x}| + |e^{-i\xi_2 x}| = 1 + 1 = 2 \quad (8)$$

である. 一方, 平均値の定理から容易に

$$|\cos \xi_1 x - \cos \xi_2 x| \leq |\xi_1 - \xi_2| |x|, \quad |\sin \xi_1 x - \sin \xi_2 x| \leq |\xi_1 - \xi_2| |x|$$

がわかるので,

$$\begin{aligned} |e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| &= |(\cos \xi_1 x - \cos \xi_2 x) - i(\sin \xi_1 x - \sin \xi_2 x)| \\ &\leq |\cos \xi_1 x - \cos \xi_2 x| + |\sin \xi_1 x - \sin \xi_2 x| \\ &\leq 2|\xi_1 - \xi_2| |x| \end{aligned} \quad (9)$$

が成立する. $\varepsilon > 0$ を任意に取って固定すると, $f(x)$ が可積分であることから, ξ_1, ξ_2 に無関係なある $R > 0$ があって

$$\int_{-\infty}^{-R} |f(x)| dx + \int_R^{\infty} |f(x)| dx = \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx - \int_{-R}^R |f(x)| dx < \varepsilon$$

が成り立つので, 不等式 (8) を用いて

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{-R} |f(x)| |e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| dx + \int_R^{\infty} |f(x)| |e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| dx \\ \leq \int_{-\infty}^{-R} 2|f(x)| dx + \int_R^{\infty} 2|f(x)| dx < 2\varepsilon \end{aligned} \quad (10)$$

を得る．一方，不等式 (9) を用いると，上で決めた R について，

$$\begin{aligned} \int_{-R}^R |f(x)| |e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| dx &\leq 2|\xi_1 - \xi_2| \int_{-R}^R |x| |f(x)| dx \\ &\leq 2R|\xi_1 - \xi_2| \int_{-R}^R |f(x)| dx \end{aligned} \quad (11)$$

となる．そこで

$$\delta = \frac{\varepsilon}{2R \int_{-R}^R |f(x)| dx}$$

とおけば， $|\xi_1 - \xi_2| < \delta$ のとき，(7), (10), (11) から，

$$\begin{aligned} |\widehat{f}(\xi_1) - \widehat{f}(\xi_2)| &\leq \int_{-\infty}^{-R} |f(x)| |e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| dx + \int_R^{\infty} |f(x)| |e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| dx \\ &\quad + \int_{-R}^R |f(x)| |e^{-i\xi_1 x} - e^{-i\xi_2 x}| dx \\ &< 2\varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon \end{aligned}$$

を得る．これは $\widehat{f}(\xi)$ が ξ について (一様) 連続であることを意味する．□

命題 1.1 (フーリエ変換の性質，その 1 — 線形性) $f(x)$ と $g(x)$ を $\mathbb{R}$ で可積分な関数， c を定数 (複素数) とするとき

$$\mathcal{F}[f + g] = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \quad \mathcal{F}[cf] = c\mathcal{F}[f]$$

証明: 定義より

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f + g] &= \int_{-\infty}^{\infty} \{f(x) + g(x)\} e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx + \int_{-\infty}^{\infty} g(x) e^{-i\xi x} dx = \mathcal{F}[f] + \mathcal{F}[g], \\ \mathcal{F}[cf] &= \int_{-\infty}^{\infty} cf(x) e^{-i\xi x} dx = c \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-i\xi x} dx = c\mathcal{F}[f]. \end{aligned}$$

□

命題 1.1 はフーリエ変換が関数から関数への写像として線形写像であることを意味しています．

命題 1.2 (フーリエ変換の性質，その 2 — 周波数シフトと平行移動) 可積分関数 $f(x)$ のフーリエ変換を $\widehat{f}(\xi)$ とすると，任意の実数 a に対して

- (1) $\mathcal{F}[e^{iax} f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi - a)$
- (2) $\mathcal{F}[f(x - a)](\xi) = e^{-ia\xi} \widehat{f}(\xi)$

証明: (1) $|e^{iax}f(x)| = |f(x)|$ だから, $e^{iax}f(x)$ も可積分で

$$\mathcal{F}[e^{iax}f(x)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{iax}e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i(\xi-a)x} dx = \widehat{f}(\xi - a).$$

(2) 置換積分 $x - a = y$ を用いて

$$\mathcal{F}[f(x - a)](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - a)e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-i\xi(y+a)} dy = e^{-ia\xi}\widehat{f}(\xi).$$

□

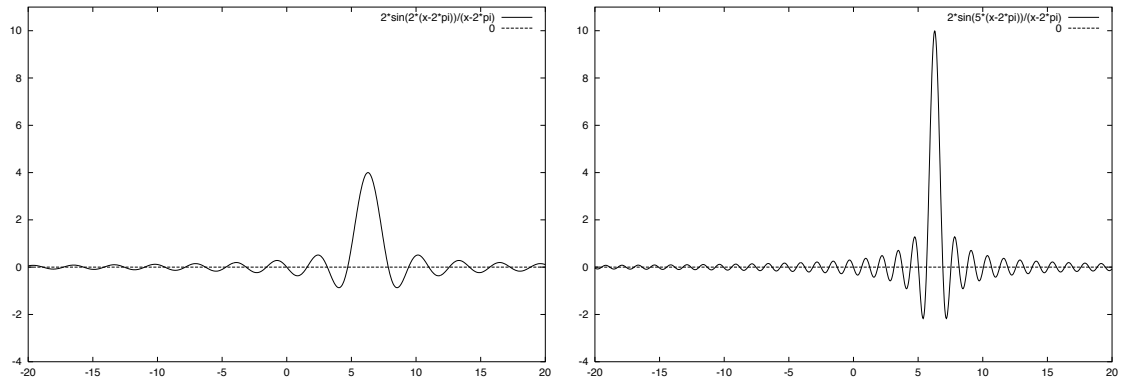
例 1.2 $L > 0$, a を任意の実数 として

$$g(x) := \begin{cases} e^{iax} & (|x| \leq L) \\ 0 & (|x| > L) \end{cases}$$

のフーリエ変換を求めてみましょう. 例 1.1 で $A = L$ としたときの $f(x)$ を用いると, $g(x) = e^{iax}f(x)$ と表されるので, 命題 1.2 の (1) より, $\xi \neq a$ のとき

$$\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi - a) = \frac{2 \sin L(\xi - a)}{\xi - a},$$

$\xi = a$ のときは $\widehat{g}(a) = 2L$ となります. $\widehat{g}(\xi)$ は $\mathbb{R}$ 全体で連続な関数です. $a = 2\pi$ とすると, $L = 2$ のときと $L = 5$ のときの $\widehat{g}(\xi)$ のグラフは下のようになります.



L が大きいとき $\widehat{f}(x)$ のグラフは振動数 $L/2\pi$ で小刻みに振動し, $\xi = a$ で最大値 $2L$ の鋭いピークを持ちます. また $\xi \rightarrow \pm\infty$ のとき $\widehat{g}(\xi)$ は 0 に近付きます.

例 1.3 A, a を任意の実数, $L > 0$ として

$$h(x) := \begin{cases} e^{iax} & (A - L \leq x \leq A + L) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

と定義します. 例 1.2 の $g(x)$ を用いると,

$$g(x - A) = \begin{cases} e^{ia(x-A)} = e^{-iaA}e^{iax} & (|x - A| \leq L) \\ 0 & (|x| > L) \end{cases}$$

より $g(x - A) = e^{-iaA}h(x)$ すなわち $h(x) = e^{iaA}g(x - A)$ が成立することがわかります。これと命題 1.2 の (2) より,

$$\widehat{h}(\xi) = \mathcal{F}[e^{iaA}g(x - A)](\xi) = e^{iaA}\mathcal{F}[g(x - A)](\xi) = e^{iaA}e^{-iA\xi}\widehat{g}(\xi) = e^{-iA(\xi-a)}\frac{2\sin L(\xi - a)}{\xi - a}$$

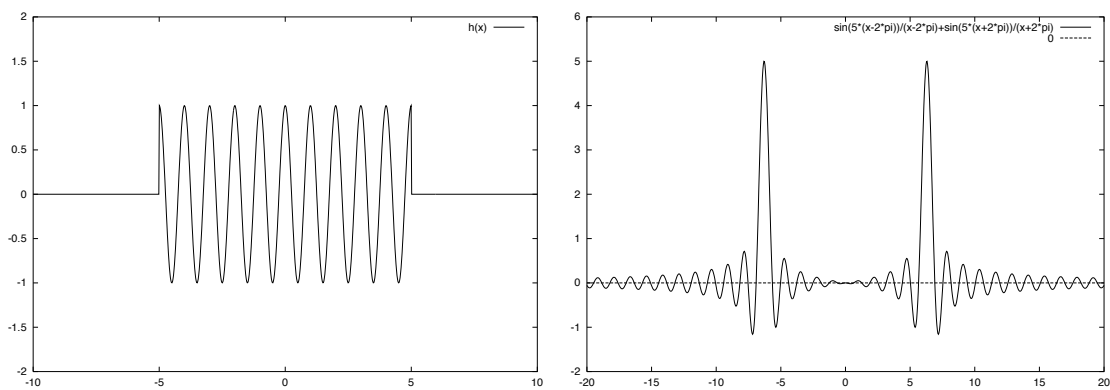
例 1.4 A, a を任意の実数, $L > 0$ として

$$f(x) := \begin{cases} \cos ax & (A - L \leq x \leq A + L) \\ 0 & (\text{otherwise}) \end{cases}$$

のフーリエ変換は, $\cos ax = (e^{iax} + e^{-iax})/2$ と命題 1.1 を用いると前の例から

$$\widehat{f}(\xi) = e^{-iA(\xi-a)}\frac{\sin L(\xi - a)}{\xi - a} + e^{-iA(\xi+a)}\frac{\sin L(\xi + a)}{\xi + a}$$

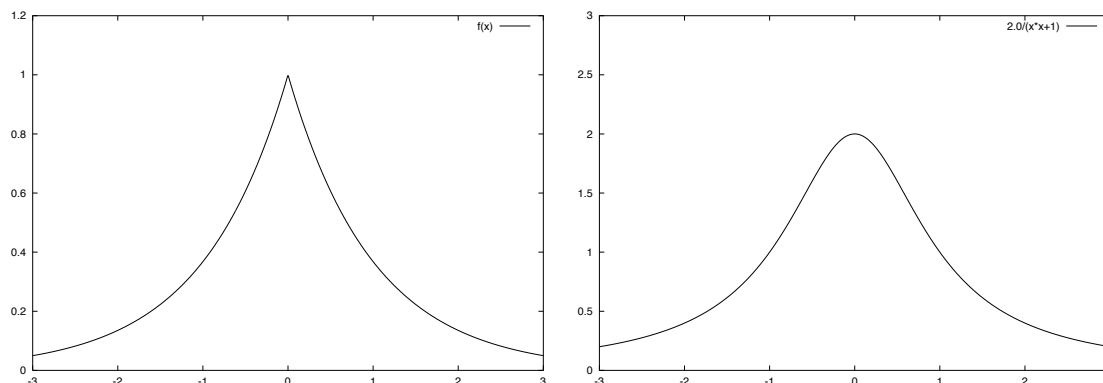
$A = 0, a = 2\pi, L = 5$ のときの $f(x)$ と $\widehat{f}(\xi)$ のグラフは下のようになります。



例 1.5 $a > 0$ とすると $f(x) := \exp(-a|x|) = e^{-a|x|}$ のフーリエ変換は

$$\begin{aligned} \widehat{f}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} e^{-a|x|} dx \\ &= \int_{-\infty}^0 \exp((a - i\xi)x) dx + \int_0^{\infty} \exp((-a - i\xi)x) dx \\ &= \left[\frac{\exp((a - i\xi)x)}{a - i\xi} \right]_{x=-\infty}^{x=0} + \left[\frac{\exp((-a - i\xi)x)}{-a - i\xi} \right]_{x=0}^{x=\infty} \\ &= \frac{1}{a - i\xi} + \frac{1}{a + i\xi} = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}. \end{aligned}$$

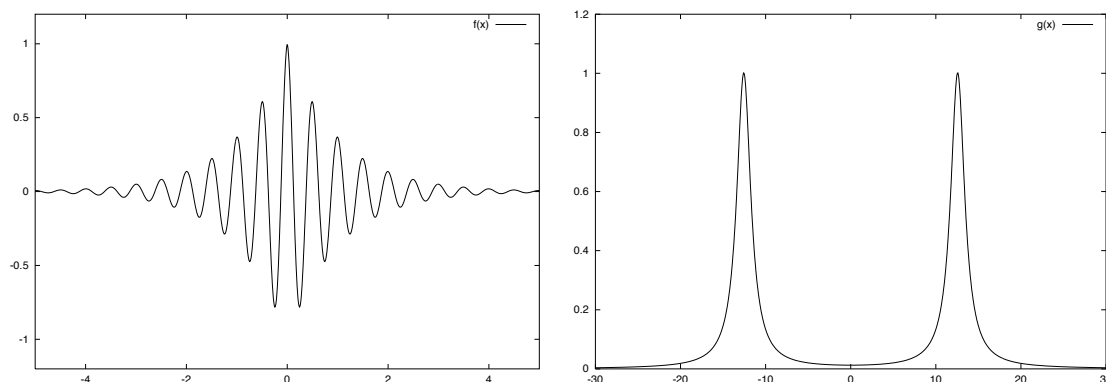
$a = 1$ のときの $f(x)$ と $\widehat{f}(\xi)$ のグラフは下のようになります。



例 1.6 $a > 0$, b を任意の実数として $f(x) = \exp(-a|x|) \cos bx$ のフーリエ変換を命題 1.2 の (1) を使って計算すると, 例 1.5 から

$$\begin{aligned}\widehat{f}(\xi) &= \frac{1}{2} \mathcal{F}[\exp(-a|x|) \exp(ibx)](\xi) + \frac{1}{2} \mathcal{F}[\exp(-a|x|) \exp(-ibx)](\xi) \\ &= \frac{a}{a^2 + (\xi - b)^2} + \frac{a}{a^2 + (\xi + b)^2}.\end{aligned}$$

$a = 1$, $b = 4\pi$ のときの $f(x)$ と $\widehat{f}(\xi)$ のグラフは下のようになります.



1.4 積分記号の下での微分法

フーリエ変換と微分との関係を知るための準備として, パラメータを含む関数の定積分をパラメータについて微分することを一般的に考察しておきましょう. これは 2 年次までの解析学では触れられないことが多いですが, 定積分の巧妙な計算法として良く用いられます. まずは有限区間の定積分の場合から始めましょう.

定理 1.2 (積分記号下での微分公式) $f(x, t)$ は長方形 $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ で連続な関数 ($a < b$, $\alpha < \beta$ とする) で, t に関して偏微分可能で, 偏導関数 $f_t(x, t) = \frac{\partial f}{\partial t}(x, t)$ も $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ で連続であるとする. このとき, 任意の $t \in [\alpha, \beta]$ について

$$\frac{d}{dt} \int_a^b f(x, t) dx = \int_a^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx$$

が成立する.

証明: 定積分は Riemann 和の極限として表されるから, 区間 $[a, b]$ を n 等分して $x_k = a + \frac{(b-a)k}{n}$ ($k = 1, \dots, n$) とおけば,

$$F(t) := \int_a^b f(x, t) dt = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k, t).$$

よって h を微少量として $t, t+h \in [\alpha, \beta]$ とすると,

$$\frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \frac{f(x_k, t+h) - f(x_k, t)}{h}.$$

ここで t について平均値の定理を適用すると,

$$\frac{f(x_k, t+h) - f(x_k, t)}{h} = f_t(x_k, t + \theta_k h) \quad (0 < \exists \theta_k < 1)$$

となるから,

$$\begin{aligned} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_a^b f_t(x, t) dt &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f_t(x_k, t + \theta_k h) - \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f_t(x_k, t) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f_t(x_k, t + \theta_k h) - f_t(x_k, t)) \end{aligned}$$

を得る. $f_t(x, t)$ は有界閉区間 $[a, b] \times [\alpha, \beta]$ で連続だから, そこで一様連続である. 従って, $\varepsilon > 0$ を任意に取って固定すると, ある $\delta > 0$ があって, $|h| < \delta$ のとき任意の k について $|f_t(x_k, t + \theta_k h) - f_t(x_k, t)| < \varepsilon$ が成立する. よって

$$\begin{aligned} \left| \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n (f_t(x_k, t + \theta_k h) - f_t(x_k, t)) \right| &\leq \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n |f_t(x_k, t + \theta_k h) - f_t(x_k, t)| \\ &< \frac{b-a}{n} n \varepsilon = (b-a) \varepsilon. \end{aligned}$$

以上により $|h| < \delta$ のとき

$$\left| \frac{F(t+h) - F(t)}{h} - \int_a^b f_t(x, t) dt \right| \leq (b-a) \varepsilon$$

が導かれるので $F'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(t+h) - F(t)}{h} = \int_a^b f_t(x, t) dt$ が示された. $\square$

例 1.7 $f(x, t) = x^t$ とおくと, $t > 0$ のとき,

$$\int_0^1 f(x, t) dx = \int_0^1 x^t dx = \frac{1}{t+1}.$$

ここで $f_t(x, t) = x^t \log x$ であり, $t > 0$ のとき $\lim_{x \rightarrow +0} f_t(x, t) = 0$ であるから, $f_t(x, t)$ は $[0, 1] \times (0, \infty)$ で連続である. 従って定理 1.2 を領域 $[0, 1] \times [a, b]$ ($0 < a < b$ は任意) で適用すれば

$$\int_0^1 x^t \log x dx = \int_0^1 f_t(x, t) dx = \frac{d}{dt} \int_0^1 f(x, t) dx = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{t+1} \right) = -\frac{1}{(t+1)^2}$$

が $t > 0$ で成立する. 同様にして次々に t で微分すれば, 任意の自然数 n について

$$\int_0^1 x^t (\log x)^n dx = \int_0^1 \frac{\partial^n f}{\partial t^n}(x, t) dx = \frac{d^n}{dt^n} \int_0^1 f(x, t) dx = \frac{d^n}{dt^n} \left(\frac{1}{t+1} \right) = -\frac{(-1)^n n!}{(t+1)^{n+1}}$$

が $t > 0$ で成立する.

定理 1.3 I を実数 $\mathbb{R}$ の区間, a, b を任意の実数とする. $f(x, t)$ は集合 $R := [a, \infty) \times I$ (または $R := (-\infty, b] \times I$) で連続な関数であり, 次の条件を満たすと仮定する.

- (1) 任意の $t \in I$ を固定したとき, $f(x, t)$ は x について無限区間 $[a, \infty)$ で (または $(-\infty, b]$ で) 広義積分可能.
- (2) $f(x, t)$ の t についての偏導関数 $\frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = f_t(x, t)$ が存在して R で連続である.
- (3) 無限区間 $[a, \infty)$ (または $(-\infty, b]$) で可積分な関数 $g(x)$ が存在して, 任意の $(x, t) \in R$ について $|f_t(x, t)| \leq g(x)$ が成立する.

以上の仮定の下で

$$\frac{d}{dt} \int_a^\infty f(x, t) dx = \int_a^\infty \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \quad \left(\text{または} \quad \frac{d}{dt} \int_{-\infty}^b f(x, t) dx = \int_{-\infty}^b \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) dx \right)$$

が任意の $t \in I$ について成立する.

証明: n を $n > a$ を満たす自然数として,

$$F_n(t) = \int_a^n f(x, t) dx$$

とおくと, 定理 1.2 より,

$$F'_n(t) = \int_a^n f_t(x, t) dx$$

が成立する. ここで仮定 (3) より, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $R > 0$ があって, 自然数 m, n が $m > n > R$ を満たせば

$$|F'_m(t) - F'_n(t)| = \left| \int_n^m f_t(x, t) dx \right| \leq \int_n^m |f_t(x, t)| dx \leq \int_n^m g(x) dx < \varepsilon \quad (12)$$

が任意の $t \in [\alpha, \beta]$ について成り立つ. ここで $m \rightarrow \infty$ とすると,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} F'_m(t) = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_a^m f_t(x, t) dx = \int_a^\infty f_t(x, t) dx \quad (= G(t) \text{ とおく})$$

であるから, (12) より

$$|G(t) - F'_n(t)| \leq \varepsilon \quad (\forall t \in I) \quad (13)$$

を得る. これは連続関数列 $\{F'_n(t)\}$ が $G(t)$ に一様収束することを意味するから, $G(t)$ も連続関数である. 従って $G(t)$ は積分可能である.

I の点 α を固定する. (13) より, $t \in I$ のとき,

$$\begin{aligned} \left| \int_\alpha^t G(s) ds - (F_n(t) - F_n(\alpha)) \right| &= \left| \int_\alpha^t G(s) ds - \int_\alpha^t F'_n(s) ds \right| \\ &\leq \int_\alpha^t |G(s) - F'_n(s)| ds \leq |t - \alpha| \varepsilon \end{aligned}$$

となる. ここで $F(t) = \lim_{n \rightarrow \infty} F_n(t) = \int_a^\infty f(x, t) dx$ とおいて, 上式で $n \rightarrow \infty$ とすれば,

$$\left| \int_\alpha^t G(s) ds - (F(t) - F(\alpha)) \right| \leq |t - \alpha| \varepsilon$$

を得る. この左辺は ε によらず, $\varepsilon > 0$ は任意なので,

$$\int_\alpha^t G(s) ds = F(t) - F(\alpha)$$

が成立する. この両辺を t で微分すれば

$$G(t) = \frac{d}{dt} \int_\alpha^t G(s) ds = F'(t)$$

を得る. これが示すべきことであった. $\square$

1.5 フーリエ変換と微分

定理 1.4 (フーリエ変換の性質, その 3 — 微分と掛け算の交換)

(1) 関数 $f(x)$ とその導関数 $f'(x)$ が $\mathbb{R}$ で可積分で $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0$ ならば

$$\mathcal{F}[f'(x)](\xi) = i\xi \widehat{f}(\xi).$$

(2) $f(x)$ と $xf(x)$ が $\mathbb{R}$ で可積分ならば

$$\mathcal{F}[xf(x)](\xi) = i \frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi)$$

証明: (1) 部分積分を用いて

$$\begin{aligned}\mathcal{F}[f'(x)](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \left[f(x)e^{-i\xi x} \right]_{-R}^R + \int_{-\infty}^{\infty} i\xi f(x)e^{-i\xi x} dx \\ &= i\xi \widehat{f}(\xi).\end{aligned}$$

ここで, $\lim_{R \rightarrow \infty} |f(\pm R)e^{\mp i\xi R}| = \lim_{R \rightarrow \infty} |f(\pm R)| = 0$ を用いた.

(2) $\frac{\partial}{\partial \xi} (f(x)e^{-i\xi x}) = -ixf(x)e^{-i\xi x}$ かつ $|-ixf(x)e^{-i\xi x}| = |xf(x)|$ は可積分だから $f(x)e^{-i\xi x}$ に定理 1.3 (積分記号下での微分) が適用できて,

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi) &= \frac{d}{d\xi} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial \xi} (f(x)e^{-i\xi x}) dx \\ &= -i \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)e^{-i\xi x} dx = -i\mathcal{F}[xf(x)](\xi).\end{aligned}$$

□

フーリエ変換のこの性質を用いてフーリエ変換の計算を実行できる場合があります.

例 1.8 $a > 0$ として $f(x) = \exp(-ax^2)$ を考えましょう. まず $f(x)$ は微分方程式

$$f'(x) = -2axf(x) \tag{14}$$

を満たすことは容易にわかります. 逆に関数 $f(x)$ が微分方程式 (14) を満たせば, ある定数 C によって $f(x) = C \exp(-ax^2)$ と書けます. 実際 $g(x) := \exp(ax^2)f(x)$ とおくと (14) より

$$\begin{aligned}g'(x) &= \exp(ax^2)f'(x) + 2ax \exp(ax^2)f(x) \\ &= -2ax \exp(ax^2)f(x) + 2ax \exp(ax^2)f(x) \\ &= 0\end{aligned}$$

となるので $g(x) = C$ (定数), すなわち $f(x) = C \exp(-ax^2)$ が導かれます. $f(x), xf(x), f'(x)$ はすべて可積分であることが容易にわかるので, 定理 1.4 より

$$\mathcal{F}[f'(x)] = i\xi \widehat{f}(\xi), \quad \mathcal{F}[-2axf(x)] = -2ia \frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi)$$

となり, この 2 つの式は等しいので

$$\frac{d}{d\xi} \widehat{f}(\xi) = -\frac{1}{2a} \widehat{f}(\xi)$$

となります. これは (14) で a の代わりに $1/4a$ とした式なので, ある定数 C があって

$$\widehat{f}(\xi) = C \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)$$

となることがわかります. $\sqrt{a}x = y$ において置換積分を行うと

$$C = \hat{f}(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-ax^2) dx = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-y^2) dy = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

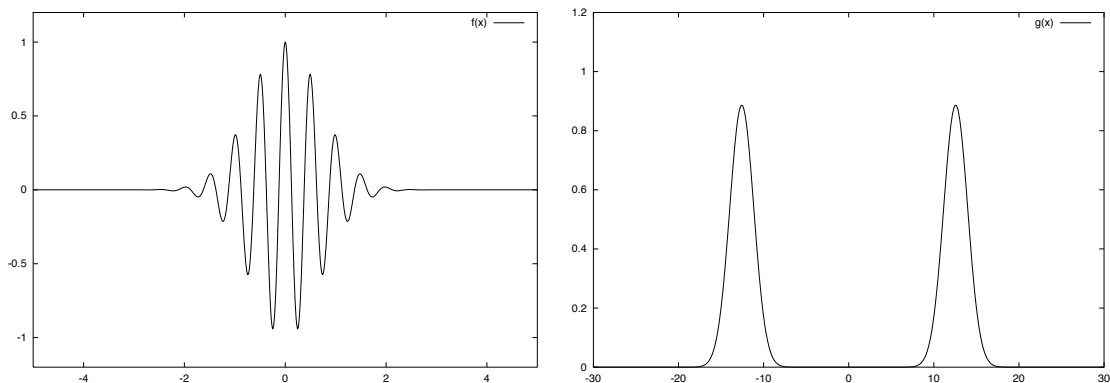
となるので結局 $f(x)$ のフーリエ変換は

$$\hat{f}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)$$

となります. この結果と周波数シフトの法則を使うと $\exp(-ax^2) \cos bx$ のフーリエ変換は

$$\mathcal{F}[\exp(-ax^2) \cos bx](\xi) = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{(\xi-b)^2}{4a}\right) + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{(\xi+b)^2}{4a}\right).$$

$\exp(-x^2) \cos 4\pi x$ とそのフーリエ変換のグラフは下のようになります.



1.6 フーリエ逆変換の公式

関数 $g(\xi)$ が $\mathbb{R}$ で可積分であるとき, $g(\xi)$ のフーリエ逆変換 $\overline{\mathcal{F}}[g](x)$ は

$$\overline{\mathcal{F}}[g](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

で定義されます. これはフーリエ変換の定義の式で x と ξ を入れ換えた式と似ています. 違いは $\frac{1}{2\pi}$ が掛かっていることと, $e^{-i\xi x}$ が $e^{i\xi x}$ に変わっていることだけです. このフーリエ逆変換が実際にフーリエ変換の逆変換 (逆写像) になっていることを示しましょう. 逆変換の式がもとの変換の式と似ていることがフーリエ変換の大きな特徴です.

補題 1.1 $h(x, y)$ は $\mathbb{R}^2$ で連続, $f(x)$ と $g(x)$ は $\mathbb{R}$ で可積分で $|h(x, y)| \leq |f(x)g(y)|$ が成り立つとすると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx \right\} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy \right\} dx.$$

証明: $|h(x, y)| \leq |f(x)||g(y)|$ より $h(x, y)$ は y を固定したとき x について $\mathbb{R}$ で可積分であり, x を固定したとき y について $\mathbb{R}$ で可積分であることがわかる. m, n を自然数として $R_{m,n} = [-m, m] \times [-n, n]$ とおくと, 重積分の累次積分による計算公式より

$$\int_{-n}^n \left\{ \int_{-m}^m h(x, y) dx \right\} dy = \iint_{R_{m,n}} h(x, y) dx dy = \int_{-m}^m \left\{ \int_{-n}^n h(x, y) dy \right\} dx \quad (15)$$

が成り立つ. $\varepsilon > 0$ を任意にとって固定すると, $g(y)$ が可積分であることから, ある自然数 N があって, $n \geq N$ のとき

$$\int_{-\infty}^{-n} |g(y)| dy + \int_n^{\infty} |g(y)| dy < \varepsilon$$

とできる. 従って $n \geq N$ ならば

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-m}^m \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy \right\} dx - \int_{-m}^m \left\{ \int_{-n}^n h(x, y) dy \right\} dx \right| \\ &= \left| \int_{-m}^m \left\{ \int_{-\infty}^{-n} h(x, y) dy + \int_n^{\infty} h(x, y) dy \right\} dx \right| \\ &\leq \int_{-m}^m \left\{ \int_{-\infty}^{-n} |h(x, y)| dy + \int_n^{\infty} |h(x, y)| dy \right\} dx \\ &\leq \int_{-m}^m |f(x)| \left\{ \int_{-\infty}^{-n} |g(y)| dy + \int_n^{\infty} |g(y)| dy \right\} dx \leq \varepsilon \int_{-m}^m |f(x)| dx \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |f(x)| dx \end{aligned}$$

これから, (15) で $n \rightarrow \infty$ として

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-m}^m h(x, y) dx \right\} dy = \int_{-m}^m \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy \right\} dx \quad (16)$$

を得る. 次に $f(x)$ が可積分であることから, ある M があって, $m \geq M$ のとき

$$\int_{-\infty}^{-m} |f(x)| dx + \int_m^{\infty} |f(x)| dx < \varepsilon$$

となるようにできるので,

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dx \right\} dy - \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-m}^m h(x, y) dx \right\} dy \right| \\ &= \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{-m} h(x, y) dx + \int_m^{\infty} h(x, y) dx \right\} dy \right| \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{-m} |h(x, y)| dx + \int_m^{\infty} |h(x, y)| dx \right\} dy \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| \left\{ \int_{-\infty}^{-m} |f(x)| dx + \int_m^{\infty} |f(x)| dx \right\} dy \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy \end{aligned}$$

が成り立つ. また

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} h(x, y) dy \right| \leq |f(x)| \int_{-\infty}^{\infty} |g(y)| dy$$

の両辺は x について $\mathbb{R}$ で広義積分可能である. 以上により, (16) で $m \rightarrow \infty$ とすれば補題の等式が得られる. $\square$

命題 1.3 $f(x)$ と $g(x)$ が $\mathbb{R}$ で可積分ならば

$$\int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(y) f(x+y) dy.$$

証明: $|g(\xi)f(y)e^{i\xi(x-y)}| = |g(\xi)||f(y)|$ に注意して, 上の補題を用いて広義積分の順序交換を行うと,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi &= \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-i\xi y} dy \right\} e^{i\xi x} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) f(y) e^{i\xi(x-y)} dy \right\} d\xi \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) e^{-i\xi(y-x)} d\xi \right\} f(y) dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(y-x) f(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}(z) f(x+z) dz \end{aligned}$$

を得る (最後の等式は $z = y - x$ において置換積分). $\square$

定理 1.5 (フーリエ逆変換の公式) $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で有界かつ連続な関数で, $f(x)$ と $\widehat{f}(\xi)$ は共に $\mathbb{R}$ で可積分であるとする,

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi$$

証明: n を自然数として, $f(x)$ と $g_n(x) = \exp(-\frac{x^2}{2n^2})$ に命題 1.3 を適用すると,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_n(\xi) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{g}_n(y) f(x+y) dy$$

を得る. ここで例 1.8 より $\widehat{g}_n(y) = \sqrt{2\pi} n \exp(-\frac{n^2}{2} y^2)$ だから, $z = ny$ において置換積分を行うと

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{\xi^2}{2n^2}) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} n \exp(-\frac{n^2}{2} y^2) f(x+y) dy \\ &= \sqrt{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{z^2}{2}) f\left(x + \frac{z}{n}\right) dz \end{aligned} \quad (17)$$

となる. 仮定により $\widehat{f}(\xi)$ は可積分だから, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $R > 0$ をとれば

$$\int_{-\infty}^{-R} |\widehat{f}(\xi)| d\xi + \int_R^{\infty} |\widehat{f}(\xi)| d\xi < \varepsilon$$

とできるから,

$$\begin{aligned} &\left| \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi - \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-\frac{\xi^2}{2n^2}) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \right| \\ &\leq \int_{-R}^R \left(1 - \exp(-\frac{\xi^2}{2n^2}) \right) |\widehat{f}(\xi)| d\xi + \int_{-\infty}^{-R} |\widehat{f}(\xi)| d\xi + \int_R^{\infty} |\widehat{f}(\xi)| d\xi \\ &< \left(1 - \exp(-\frac{R^2}{2n^2}) \right) \int_{-R}^R |\widehat{f}(\xi)| d\xi + \varepsilon \end{aligned}$$

ここで n を十分大きくとれば, この最後の式は 2ε よりも小さくできるから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{\xi^2}{2n^2}\right) \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{i\xi x} d\xi \quad (18)$$

が示された. 同様に $\varepsilon > 0$ に対して $R > 0$ を十分大きくとれば

$$\int_{-\infty}^{-R} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \int_R^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz < \varepsilon$$

が成り立つ. また $f(x)$ は連続だから, ある δ があって, $|y| < \delta$ ならば $|f(x) - f(x+y)| < \varepsilon$ が成り立つ. さらに $f(x)$ は有界であるから ある $M > 0$ があって, 任意の x について $|f(x)| \leq M$ が成立する. $n > \frac{R}{\delta}$ ならば $|z| \leq R$ のとき $\left|\frac{z}{n}\right| < \delta$ であるから, 以上により

$$\begin{aligned} & \left| \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \left\{ f(x) - f\left(x + \frac{z}{n}\right) \right\} dz \right| \leq \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \left| f(x) - f\left(x + \frac{z}{n}\right) \right| dz \\ & \leq \int_{-R}^R \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) \left| f(x) - f\left(x + \frac{z}{n}\right) \right| dz + \int_{-\infty}^{-R} 2M \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + \int_R^{\infty} 2M \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz \\ & < \varepsilon \int_{-R}^R \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + 2M\varepsilon \leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) dz + 2M\varepsilon = (\sqrt{2\pi} + 2M)\varepsilon \end{aligned}$$

を得るから,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) f\left(x + \frac{z}{n}\right) dz = \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{z^2}{2}\right) f(x) dz = \sqrt{2\pi} f(x) \quad (19)$$

が示された. (17),(18),(19) より定理の等式が導かれる. $\square$

例 1.9 $a > 0$ として $f(x) = \exp(-a|x|)$ とおくと例 1.5 より, $\widehat{f}(\xi) = \frac{2a}{a^2 + \xi^2}$ である. これは $\mathbb{R}$ で可積分であることが容易にわかるから, 定理 1.5 より,

$$\mathcal{F}[\widehat{f}(\xi)](x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2a}{a^2 + \xi^2} e^{i\xi x} d\xi = f(x) = e^{-a|x|}$$

x と ξ を入れ替えて, ξ を $-\xi$ とすれば

$$\mathcal{F}\left[\frac{1}{a^2 + x^2}\right](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{-i\xi x}}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{a} e^{-a|\xi|}$$

問題 1.1 次の関数のフーリエ変換を求めよ. (a と b は正の定数とする.)

$$(1) \quad f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{a} & (|x| \leq a \text{ のとき}) \\ 0 & (|x| > a \text{ のとき}) \end{cases} \quad (2) \quad g(x) = f(x) \cos bx \quad (f(x) \text{ は (1)})$$

問題 1.2 a を正の定数とすると $xe^{-ax^2} = x \exp(-ax^2)$ のフーリエ変換を求めよ.

2 偏微分方程式とその解法

2.1 簡単な偏微分方程式

多変数の未知関数とその偏導関数についての方程式を偏微分方程式と言います．たとえば $u = u(x, y, z, t)$ が独立変数 x, y, z, t の未知関数であるとき，

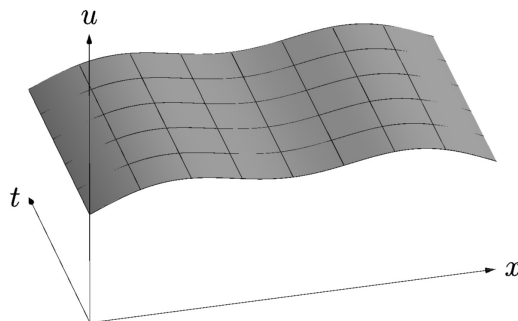
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$$

は偏微分方程式です．物理的な現象では多くの場合 x, y, z は位置， t は時刻を表します．

最も簡単な偏微分方程式は 2 変数 x, t についての未知関数 $u = u(x, t)$ に関する

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 0 \quad (20)$$

という方程式です．これは $u(x, t)$ の値が t によらないこと，すなわち x を固定すると， $u(x, t)$ は t の関数として定数であることを意味します．簡単のため $u(x, t)$ は $\mathbb{R}^2$ 全体で定義されているとして， $f(x) = u(x, 0)$ とおくと， $u(x, t) = f(x)$ が成立します．逆に $f(x)$ を任意の関数として $u(x, t) = f(x)$ とおけば $u(x, t)$ は (20) を満たします．従って偏微分方程式 (20) の一般解（任意の解）は $f(x)$ を任意の関数として $u(x, t) = f(x)$ と表されます． t が時刻を表すとき， $f(x) = u(x, 0)$ は $u(x, t)$ の時刻 $t = 0$ における値を表すので， $f(x)$ は $u(x, t)$ の初期値と呼ばれます． $u(x, t)$ のグラフはたとえば下のようになります．



次に k を正の定数として

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = 0 \quad (21)$$

という偏微分方程式を考えてみましょう．新しい変数 y と t' を $y = x - kt$, $t' = t$ で定義して $u(x, t)$ を y と t' で表した関数を $v(y, t')$ とします． $x = y + kt'$, $t = t'$ より $v(y, t') = u(x, t) = u(y + kt', t')$ となります．偏微分に関する合成関数の微分の公式と (21) より，

$$\frac{\partial v}{\partial t'}(y, t') = \frac{\partial u}{\partial x}(y + kt', t') \frac{\partial x}{\partial t'} + \frac{\partial u}{\partial t}(y + kt', t') \frac{\partial t}{\partial t'} = k \frac{\partial u}{\partial x}(y + kt', t') + \frac{\partial u}{\partial t}(y + kt', t') = 0$$

が成立します．従って $v(y, t')$ は t' によらないので， y のみの関数 $f(y)$ が存在して $v(y, t') = f(y)$ が成立します．これに $y = x - kt$, $t' = t$ を代入すると

$$u(x, t) = v(y, t') = f(y) = f(x - kt)$$

が成立します．逆に $f(x)$ を任意の微分可能関数として $u(x, t) = f(x - kt)$ とおくと

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x, t) + k \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) = -kf'(x) + kf'(x) = 0$$

が成立します．以上により (21) の一般解は，微分可能な任意関数 $f(x)$ によって

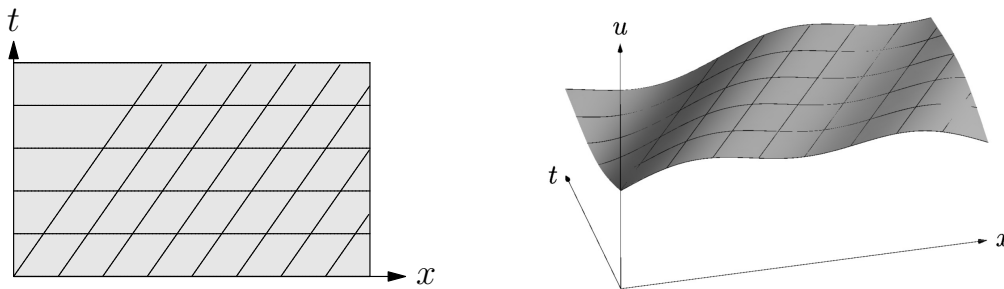
$$u(x, t) = f(x - kt)$$

と表され，これは初期値問題

$$\frac{\partial u}{\partial t} + k \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad u(x, 0) = f(x)$$

の解になっています．

さて， $u(x, t) = f(x - kt)$ の値は $x - kt$ のみで決まります．よって，任意の定数 c に対して， $u(x, t)$ は xt 平面の直線 $x - kt = c$ 上で一定の値をとります． t が時刻を表しているとすれば， $u(x, t) = f(x - kt)$ は，速度 k で正の方向（右側）に伝わる現象（波）を表していることがわかります．右図は $u(x, t)$ のグラフの例，左図は xt 平面において直線 $x - kt = c$ を c のいくつかの値について描いた図です．



2.2 波動方程式

弦の振動を考えましょう． xy 平面において弦を x 軸とします．簡単のため弦の各部分は y 方向にのみ振動するとして，時刻 t における座標 x の弦の一点の変位 (y 座標) を $u(x, t)$ とします．弦の張力を T ，弦の線密度 (単位長さあたりの質量) を μ とすると (T と μ は位置 x によらない定数と仮定する)，

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{T}{\mu} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (22)$$

という方程式が成り立つことが Newton の運動方程式を使って導かれます．これを (1 次元の) 波動方程式といいます． $k = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ とおくと (22) は

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (23)$$

と表されます．

新しい変数 y, z (y は最初の設定で出てきた xy 平面の y 座標とは無関係です) を

$$y = x - kt, \quad z = x + kt$$

により定めて u を y, z で表した関数を $v(y, z)$ とします. $x = \frac{1}{2}(y + z)$, $t = \frac{1}{2k}(z - y)$ より

$$u(x, t) = v(x - kt, x + kt), \quad v(y, z) = u\left(\frac{1}{2}(y + z), \frac{1}{2k}(z - y)\right)$$

となります. 合成関数の偏微分の公式を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial t} = -k \frac{\partial v}{\partial y} + k \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -k \left(-k \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) + k \left(-k \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + k \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2}, \\ \frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} &= \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \end{aligned}$$

となるので, (23) は

$$k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - 2k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = k^2 \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right) \quad \text{すなわち} \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z \partial y} = 0$$

と書き直せます. これから, $v_y(y, z)$ は z によらないことがわかるので, y のみの関数 $h(y)$ があって $v_y(y, z) = h(y)$ と表せます. $h(y)$ の原始関数の一つを $f(y)$ とすると, z のみの関数 $g(z)$ があって

$$v(y, z) = f(y) + g(z)$$

と表せることがわかります. 実際, $v_y(y, z) - f'(y) = h(y) - h(y) = 0$ なので, $g(z) = v(y, z) - f(y)$ は y によらず z のみの関数となります. 最後に $y = x - kt$, $z = x + kt$ を代入して

$$u(x, t) = f(x - kt) + g(x + kt) \quad (24)$$

を得ます. $u(x, t)$ は x と t について 2 回微分可能なので, f と g も 2 回微分可能でなければなりません.

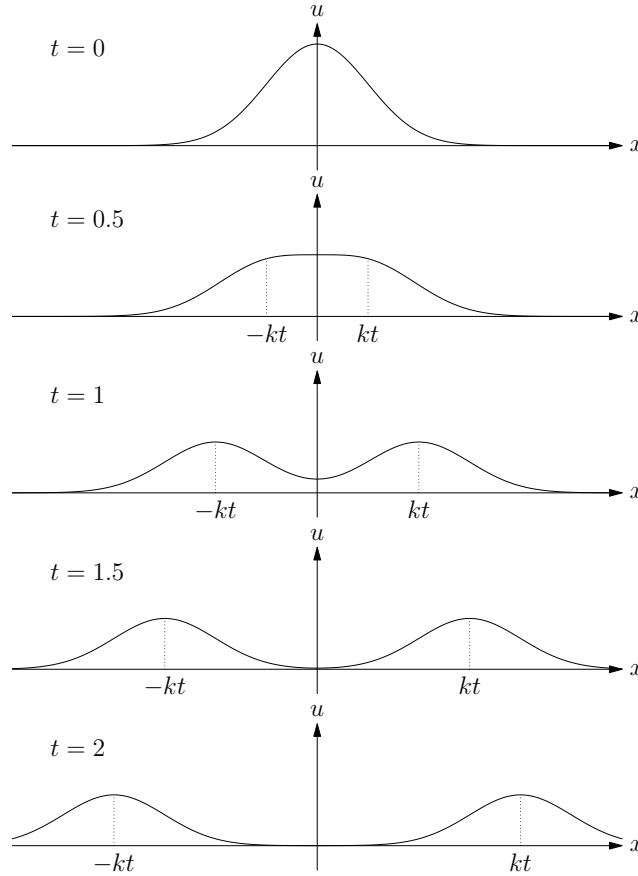
逆に $f(y)$ と $g(z)$ を任意の 2 回微分可能関数として $u(x, t)$ を (24) で定めれば

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) &= -kf'(x - kt) + kg'(x + kt), & \frac{\partial u}{\partial x}(x, t) &= f'(x - kt) + g'(x + kt), \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) &= k^2 f''(x - kt) + k^2 g''(x + kt), & \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) &= f''(x - kt) + g''(x + kt) \end{aligned}$$

より $u(x, t)$ は (23) を満たすことがわかります.

$f(x - kt)$ は速度 k で x 軸の正の方向に進む波, $g(x + kt)$ は速度 $-k$, すなわち速さ k で x 軸の負の方向に進む波を表しているので, $u(x, t)$ はこの 2 つの波の和 (重ね合わせ) であると考えることができます.

次の図は $f(x) = g(x) = e^{-2x^2}$ の場合の $u(x, t)$ を, $t = 0, 0.5, 1, 1.5, 2$ のとき x の関数とみなしたグラフです.



次に，波動方程式の初期値問題を考察します．波動方程式が弦の微小部分に対する Newton の運動方程式から導かれたことから，弦の振動は初期値 $u(x, 0)$ と初期速度 $u_t(x, 0)$ で決まると予想されます．そこで $u_0(x)$ と $u_1(x)$ を任意の 2 回微分可能関数として

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (\forall x \in \mathbb{R}) \quad (25)$$

を満たす関数 $u(x, t)$ を求めることを波動関数に対する初期値問題といいます． $u(x, t)$ が (24) で与えられているとき，これは

$$u_0(x) = f(x) + g(x), \quad u_1(x) = -kf'(x) + kg'(x)$$

と同値です．最初の式から $u'_0(x) = f'(x) + g'(x)$ となるので，これと後の式から

$$f'(x) = \frac{1}{2k}(ku'_0(x) - u_1(x)), \quad g'(x) = \frac{1}{2k}(ku'_0(x) + u_1(x)),$$

が導かれます．ここで

$$v_1(x) = \int_0^x u_1(s) ds$$

とおくと $v'_1(x) = u_1(x)$ より，ある定数 C_1, C_2 によって

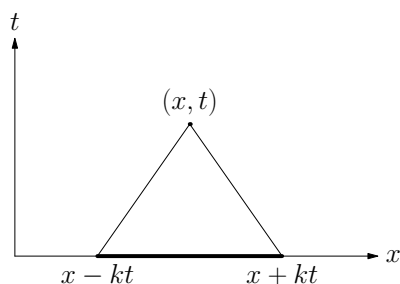
$$f(x) = \frac{1}{2k}(ku_0(x) - v_1(x)) + C_1, \quad g(x) = \frac{1}{2k}(ku_0(x) + v_1(x)) + C_2$$

と表せることがわかります. ここで $f(x) + g(x) = u_0(x) + C_1 + C_2$ より $C_2 = -C_1$ であることに注意して, $f(x) + C_1$ を改めて $f(x)$ とし, $g(x) - C_1$ を改めて $g(x)$ とすれば, 最初から $C_1 = C_2 = 0$ としても一般性を失いません. 以上により初期値問題 (25) の解は

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}u_0(x - kt) + \frac{1}{2}u_0(x + kt) - \frac{1}{2k}v_1(x - kt) + \frac{1}{2k}v_1(x + kt) \\ &= \frac{1}{2}u_0(x - kt) + \frac{1}{2}u_0(x + kt) - \frac{1}{2k} \int_0^{x-kt} u_1(s) ds + \frac{1}{2k} \int_0^{x+kt} u_1(s) ds \\ &= \frac{1}{2}u_0(x - kt) + \frac{1}{2}u_0(x + kt) + \frac{1}{2k} \int_{x-kt}^{x+kt} u_1(s) ds \end{aligned} \quad (26)$$

で与えられることがわかりました.

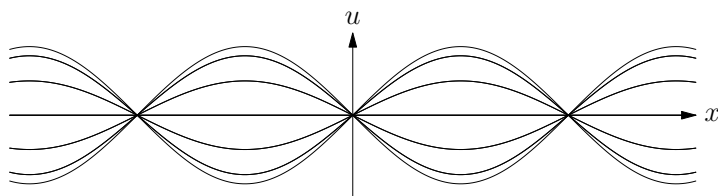
これは $t > 0$ のとき, $u(x, t)$ の値が $u_0(x - kt)$, $u_0(x + kt)$ と $x - kt \leq s \leq x + kt$ の範囲の $u_1(s)$ の値から決まることを意味しています. 従って $u(x, t)$ の値は x 軸上の区間 $[x - kt, x + kt]$ 上の初期値 $u_0(x)$ と $u_1(x)$ の値から一意的に定まり, この区間の外側の値には無関係です. そこで, 初期時刻 $t = 0$ における x 軸の区間 $[x - kt, x + kt]$ を (x, t) の依存領域といいます.



例 2.1 初期条件 $u(x, 0) = \sin \omega x$ (ω は正の定数), $u_t(x, 0) = 0$ を満たす波動方程式の解は

$$u(x, t) = \frac{1}{2} \sin \omega(x - kt) + \frac{1}{2} \sin \omega(x + kt) = \sin(\omega x) \cos k\omega t$$

となります. これは位置 x を固定すると, 時間について角周波数 $k\omega$ の単振動であり, 時刻 t を固定すると, 弦は角周波数 ω のサインカーブになっていることを示しています. 特に, 無限に長い弦は任意の周波数で振動できることがわかります.



問題 2.1 初期条件 $u(x, 0) = 0$, $u_t(x, 0) = \sin \omega x$ (ω は正の定数) を満たす波動方程式の解を求め, それが弦のどんな運動を表しているか述べよ.

問題 2.2 $\mathbb{R}$ 上の関数 $f(x)$ を $f(x) = \max\{1 - |x|, 0\}$ で定めて $k = 1$ に対する波動方程式の初期値問題

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(x, 0) = f(x), \quad u_t(x, 0) = 0$$

を考える. $f(x)$ は $x = 0, \pm 1$ で微分可能ではないが, このときも初期値問題の解の公式 (26) が成立すると仮定する. これを用いて, 時刻 $t \geq 0$ を固定したときの $u(x, t)$ の x の関数としてのグラフを (t の値に応じて場合分けして) 描け.

2.3 熱方程式

ある物質 (鉄など) でできた棒を考えましょう. 棒を x 軸とします. 時刻 t , 位置 x での温度を $u(x, t)$ とすると, ある定数 $k > 0$ があって

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

という偏微分方程式が成り立ちます. これを熱 (伝導) 方程式といいます. これをフーリエ変換を用いて解くことがこの節の目的です. そのための準備をします.

定理 2.1 $\mathbb{R}$ で有界かつ可積分な関数 $f(x)$ と $g(x)$ のたたみ込み (合成積) (convolution) $f * g$ を

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy$$

で定義すると, $\mathcal{F}[f * g] = \mathcal{F}[f]\mathcal{F}[g]$ すなわち

$$\mathcal{F}[f * g](\xi) = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)$$

が成立する.

証明: ある定数 $M > 0$ があって, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $|f(x)| \leq M$ かつ $|g(x)| \leq M$ が成立する. よって $|f(x - y)g(y)| \leq M|g(y)|$ であるから, $f(x - y)g(y)$ は y について $\mathbb{R}$ で可積分であり, $f * g$ を定義する広義積分は収束する. 積分の順序交換によって

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[f * g](\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} (f * g)(x) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)g(y) dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)e^{-i\xi(x-y)} g(y)e^{-i\xi y} dy \right) dx \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x - y)e^{-i\xi(x-y)} dx \right) g(y)e^{-i\xi y} dy \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-i\xi x} dx \right) g(y)e^{-i\xi y} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\xi)g(y)e^{-i\xi y} dy = \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) \end{aligned}$$

を得る. (ここで被積分関数に絶対値を付けると, $f * g$ が $\mathbb{R}$ で可積分であることがわかり, 以上の計算が正当化される.) $\square$

時刻 $t > 0$ における温度分布 $u(x, t)$ は最初 ($t = 0$ のとき) の温度分布 $u(x, 0)$ から決まると考えられます. そこで $u_0(x)$ を与えられた関数 (初期値と呼びます) とするとき,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0), \quad u(x, 0) = u_0(x) \quad (27)$$

をみたす関数 $u(x, t)$ を求めることを熱方程式に対する初期値問題といいます。

これを解くために変数 x に関するフーリエ変換を用います。 $u(x, t)$ と $u_0(x)$ は x について $\mathbb{R}$ で可積分と仮定して、

$$\widehat{u}(\xi, t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} u(x, t) dx$$

とおきます。 $u(x, t)$ を (27) の解とすると、積分記号の下での微分法 (定理 1.3) とフーリエ変換と微分の関係 (定理 1.4) を用いて

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \widehat{u}(\xi, t) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} \frac{\partial}{\partial t} u(x, t) dx = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-i\xi x} k \frac{\partial^2}{\partial x^2} u(x, t) dx \\ &= k(i\xi)^2 \widehat{u}(\xi, t) = -k\xi^2 \widehat{u}(\xi, t) \end{aligned}$$

が成立することがわかります。これと $\widehat{u}(\xi, 0) = \widehat{u}_0(\xi)$ より

$$\widehat{u}(\xi, t) = \widehat{u}_0(\xi) e^{-k\xi^2 t} \quad (28)$$

を得ます。ここで $\mathcal{F}$ が変数 x についてのフーリエ変換を表すとする、例 1.8 より正の実数 a に対して $\mathcal{F}[e^{-ax^2}] = \sqrt{\frac{\pi}{a}} \exp\left(-\frac{\xi^2}{4a}\right)$ が成立するので、 $t > 0$ として $a = 1/4kt$ とおけば

$$e^{-k\xi^2 t} = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)\right]$$

となることがわかります。これと (28) と定理 2.1 より

$$\widehat{u}(\xi, t) = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right)\right] \mathcal{F}[u_0] = \mathcal{F}\left[\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) * u_0\right]$$

ここで $*$ は変数 x についての合成積を表します。 $\widehat{u}(\xi, t)$ が ξ について $\mathbb{R}$ で可積分であると仮定して、この両辺にフーリエ逆変換を施すと、

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) * u_0 = \frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-y)^2}{4kt}\right) u_0(y) dy$$

が導かれます。これが初期値問題 (27) の解です。これは波動方程式の初期値問題の解とは異なり無限区間の積分なので、 $t > 0$ のときの $u(x, t)$ の値は、初期温度分布 $u_0(x)$ のすべての $x \in \mathbb{R}$ における値に依存します。

なお、右辺の積分の中の指数関数の値は常に 1 以下なので、 $u_0(y)$ が可積分ならば $\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0$ が成立することがわかります。これは物理的には、時間が経過するにつれて、棒の温度がどこでも一定の状態（定常状態）に近づくことを意味しています。ここで温度 0 というのは実際には何度でも良く、遠くの方では最初から一定の温度（定常温度）になっていると仮定したときの、その定常温度を表しています。

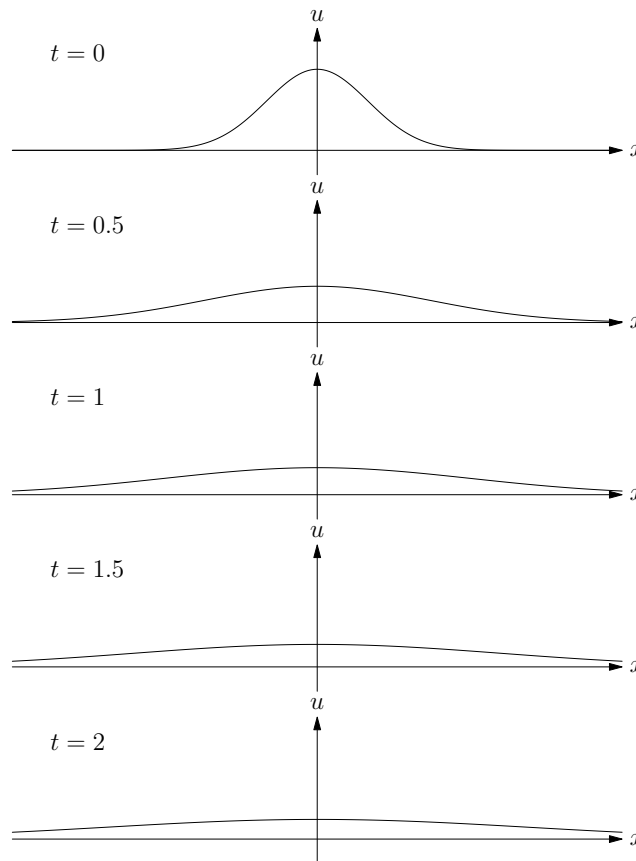
例 2.2 $a > 0$ として初期温度分布が $u_0(x) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a}} \exp\left(-\frac{x^2}{4a}\right)$ (平均 0, 分散 $2a$ の正規分布) のときの熱方程式の解 $u(x, t)$ を求めてみましょう. 定理 2.1 と例 1.8 より

$$\begin{aligned}\hat{u}(\xi, t) &= \mathcal{F} \left[\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) * u_0(x) \right] = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2\sqrt{k\pi t}} \exp\left(-\frac{x^2}{4kt}\right) \right] \mathcal{F}[u_0] \\ &= e^{-kt\xi^2} e^{-a\xi^2} = e^{-(a+kt)\xi^2} = \mathcal{F} \left[\frac{1}{2\sqrt{\pi(a+kt)}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(a+kt)}\right) \right]\end{aligned}$$

よってフーリエ逆変換により

$$u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi(a+kt)}} \exp\left(-\frac{x^2}{4(a+kt)}\right)$$

$k = 1, a = \frac{1}{8}$ のときの $u(x, t)$ のグラフは下のようになります. 最初は原点付近に集中していた熱が周囲に拡散して行く様子がわかります.



問題 2.3 例 2.1 の $u(x, t)$ が熱方程式を満たすことを偏導関数を計算して確かめよ.

2.4 波動方程式の境界値問題に対する変数分離法

長さが有限の弦の振動を考えましょう. 弦の長さが L で両端が固定されているとすると, 変位 $u(x, t)$ は

$$u(0, t) = 0, \quad u(L, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

という条件を満たす必要があります。このような条件式のことを境界条件といいます。この境界条件を満たすような波動方程式の特別な解を求めてみましょう。そのために、解 $u(x, t)$ が $u(x, t) = v(x)w(t)$ と x のみの関数 $v(x)$ と t のみの関数 $w(t)$ の積で表せると仮定してみましょう。波動方程式から

$$v(x)w''(t) = k^2 v''(x)w(t) \quad \text{すなわち} \quad \frac{w''(t)}{w(t)} = k^2 \frac{v''(x)}{v(x)}$$

が成立します。 $(w(t)$ と $v(x)$ が 0 にならないところで考えます。) 2 番目の式の左辺は x のみの関数、右辺は t のみの関数なので、 x にも t にもよらない定数でなければなりません。その定数を λk^2 とすると、 $w(t)$ と $v(x)$ は定数係数の 2 階線形微分方程式

$$w''(t) = \lambda k^2 w(t), \quad v''(x) = \lambda v(x)$$

をみたさなければなりません。ここで λ の符号によって場合分けして考えましょう。

(1) $\lambda > 0$ のとき： $v''(x) - \lambda v(x) = 0$ を満たす $v(x)$ は、ある定数 C_1, C_2 によって

$$v(x) = C_1 \exp(\sqrt{\lambda}x) + C_2 \exp(-\sqrt{\lambda}x)$$

と表されます。境界条件 $u(0, t) = u(L, t) = 0$ より、 $w(0) = w(L) = 0$ 、すなわち

$$C_1 + C_2 = 0, \quad C_1 \exp(\sqrt{\lambda}L) + C_2 \exp(-\sqrt{\lambda}L) = 0$$

となりますが、これを満たす C_1, C_2 は $C_1 = 0, C_2 = 0$ しかないので、 $w(x) = 0$ すなわち $u(x, t) = 0$ という自明な解しか得られません。

(2) $\lambda = 0$ のとき： $v''(x) = 0$ より $v(x) = C_1 x + C_2$ と表されます。 $v(0) = v(L) = 0$ より $C_1 = C_2 = 0$ となり、やはり自明な解のみとなります。

(3) $\lambda < 0$ のとき： $\sqrt{-\lambda} = a$ とおくと、 $v(x) = C_1 \cos ax + C_2 \sin ax$ と表されます。 $v(0) = v(L) = 0$ より $C_1 = 0, aL = n\pi$ ($n = 1, 2, 3, \dots$)。従って $C_2 = 1$ として

$$v(x) = \sin \frac{n\pi x}{L}$$

とできます。このとき $\lambda = -a^2 = -\frac{n^2\pi^2}{L^2}$ なので

$$w''(t) = -\frac{n^2 k^2 \pi^2}{L^2} w(t)$$

これから、ある定数 a_n, b_n によって

$$w(t) = a_n \cos \frac{nk\pi t}{L} + b_n \sin \frac{nk\pi t}{L}$$

と表されるので

$$u_n(x, t) := a_n \cos \frac{nk\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{nk\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

は境界条件を満たす波動方程式の解です。これは時間については周波数 $\frac{nk}{2L}$ の単振動であり、 $n=1$ のときが基本振動に対応します。従って $\frac{k}{2L} = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ がこの弦の基本周波数であり、自然数 n に応じて、その n 倍の周波数で振動することができます。

境界条件を満たす波動方程式の一般解 $u(x, t)$ は、適当な a_n, b_n により

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos \frac{nk\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} + b_n \sin \frac{nk\pi t}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \right)$$

と表すことができます。

次に、境界条件に加えて初期条件

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad u_t(x, 0) = u_1(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

を満たす解 $u(x, t)$ を求めてみましょう（初期値境界値問題）。ここで $u_0(x)$ と $u_1(x)$ は

$$u_0(0) = u_1(0) = u_0(L) = u_1(L) = 0$$

を満たす関数です。項別微分（微分と無限和の順序交換）が許されると仮定すれば、

$$u_0(x) = u(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin \frac{n\pi x}{L}, \quad u_1(x) = u_t(x, 0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nk\pi b_n}{L} \sin \frac{n\pi x}{L} \quad (29)$$

となります。ここで $u_0(x)$ と $u_1(x)$ を奇関数として区間 $[-L, L]$ に拡張します。すなわち

$$u_0(x) = u_0(-x), \quad u_1(x) = u_1(-x) \quad (-L \leq x \leq 0)$$

と定義します。すると (29) は奇関数 $u_0(x)$ と $u_1(x)$ のフーリエ展開の式になっているので、フーリエ係数の公式から、

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx = \frac{2}{L} \int_0^L u_0(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx, \quad b_n = \frac{2}{nk\pi} \int_0^L u_1(x) \sin \frac{n\pi x}{L} dx$$

($n = 1, 2, 3, \dots$) とすればよいことがわかります。これが初期値境界値問題のフーリエ級数を用いた解の公式です。

問題 2.4 以下の波動方程式の初期値境界値問題の解 $u(x, t)$ を求めよ。

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (t \geq 0), \quad u(x, 0) = \sin^3 \frac{\pi x}{L}, \quad u_t(x, 0) = 0 \quad (0 < x < L)$$

2.5 初期値境界値問題の差分解法

波動方程式

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < L) \quad (30)$$

の解 $u(x, t)$ であって境界条件と初期条件

$$u(0, t) = u(L, t) = 0, \quad u(x, 0) = f(x), \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) = g(x) \quad (0 < x < L) \quad (31)$$

を満たすものを近似的に求めてみましょう．ここで $f(x)$ と $g(x)$ は x における弦の変位と速度を表す関数（初期値）であり既知とします．

一般に $v(x)$ を C^2 級関数とすると，Taylor の定理により

$$v(x + h) = v(x) + hv'(x) + \frac{1}{2}h^2v''(x) + o(h^2)$$

と表されます．ここで $o(h^2)$ は剰余項であり， $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{o(h^2)}{h^2} = 0$ が成立します．すなわち剰余項は h^2 より早く 0 に収束します．また

$$v(x - h) = v(x) - hv'(x) + \frac{1}{2}h^2v''(x) + o(h^2)$$

より辺々加えて

$$v(x + h) + v(x - h) - 2v(x) = h^2v''(x) + o(h^2)$$

この両辺を h^2 で割ると

$$\frac{v(x + h) + v(x - h) - 2v(x)}{h^2} = v''(x) + o(1)$$

ここで $o(1)$ は $h \rightarrow 0$ のとき 0 に近づく項を表します．従って h が十分小さければ近似的に

$$v''(x) \doteq \frac{v(x + h) + v(x - h) - 2v(x)}{h^2}$$

が成立します．これを 2 次微分 $v''(x)$ の中心差分近似といいます．これを 2 変数関数 $u(x, t)$ において変数 x と t について適用すれば， h と Δt が十分小さいとき

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} u(x, t) &\doteq \frac{u(x + h, t) + u(x - h, t) - 2u(x, t)}{h^2}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} u(x, t) &\doteq \frac{u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) - 2u(x, t)}{(\Delta t)^2} \end{aligned}$$

が成立することがわかります．さて， x 軸の区間 $[0, L]$ を N 等分して， $h = \frac{L}{N}$ として $x_i = hi$ とおきましょう．また時間の刻み幅を $\Delta t > 0$ として $t_j = j\Delta t$ とおき， $u(x_i, t_j)$ の近似値を $u_{i,j}$ とします．中心差分近似の式を (30) に代入すると

$$\frac{u(x, t + \Delta t) + u(x, t - \Delta t) - 2u(x, t)}{(\Delta t)^2} = k^2 \frac{u(x + h, t) + u(x - h, t) - 2u(x, t)}{h^2}$$

$x = x_i, t = t_j$ を代入して

$$\frac{u_{i,j+1} + u_{i,j-1} - 2u_{i,j}}{(\Delta t)^2} = k^2 \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h^2} \quad (1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0)$$

ここで $r = \frac{k\Delta t}{h}$ とおいて上式を変形すると

$$u_{i,j+1} = r^2 u_{i+1,j} + 2(1 - r^2) u_{i,j} + r^2 u_{i-1,j} - u_{i,j-1} \quad (1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0) \quad (32)$$

境界条件より $u_{0,j} = u_{N,j} = 0$ であることに注意すると、上式より時刻 t_{j+1} での近似値 $u_{i,j+1}$ が時刻 t_j での近似値 $u_{i-1,j}, u_{i,j}, u_{i+1,j}$ と時刻 t_{j-1} での近似値 $u_{i,j-1}$ を用いて表されることがわかります。

時刻 $t = t_0 = 0$ での近似値 $u_{i,0}$ は初期条件から

$$u_{i,0} = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq N) \quad (33)$$

で決まります。また、

$$u_{i,1} \doteq u(x_i, \Delta t) \doteq u(x_i, 0) + \frac{\partial u}{\partial t}(x, 0) \Delta t = f(x_i) + g(x_i) \Delta t$$

より、 $u_{i,1}$ を

$$u_{i,1} = f(x_i) + g(x_i) \Delta t \quad (0 \leq i \leq N) \quad (34)$$

で定めればよいことがわかります。以上で $j = 0, 1$ に対する $u_{i,j}$ が定まりました。 $j \geq 2$ に対する $u_{i,j}$ は (32) を用いて順に決めることができます。これを波動方程式に対する差分近似解法といいます。

次は $L = k = 1$ として、 $u_{i,j}$ を求め、時刻 $t = t_j = kj$ における弦の形 $u(x, t_j)$ をアニメーションとして表示するプログラムです。初期条件は $f(x) = \max\{0.25 - |x - 0.5|, 0\}$, $g(x) = 0$ としています。

```
function u = wave_eq(a,N,r)
h = 1/N;
dt = r*h;
J = floor(a/dt);
u = zeros(N+1,J+1);
x = linspace(0,1,N+1);
f = max(0.25 - abs(x-0.5),0);
g = 0*x;
u(:,1) = f;
u(:,2) = f + dt*g;
close;
p=plot(x,u(:,1),'-','MarkerSize',5,'EraseMode','xor');
xlim([0 1]), ylim([-0.5 0.5]);
for j=2:1:J
    for i=2:1:N
        u(i,j+1) = r^2*u(i+1,j)+2*(1-r^2)*u(i,j)+r^2*u(i-1,j)-u(i,j-1);
    end
    set(p,'Xdata',x,'Ydata',u(:,j));
```

```

    pause(0.05);
    drawnow;
end
end

```

x 方向の刻み幅 h が一定であるとき, $r = \frac{k\Delta t}{h}$ を大きく取る方が時間の刻み幅 $\Delta t = \frac{rh}{k}$ が大きくなるので, 同じ計算回数で計算できる時間間隔が大きくなります. ところが, $r > 1$ としてこのプログラムを実行すると解が不安定になることがわかります. そこで $r \leq 1$ とする必要があります. この条件は発見者の名をとって Courant-Friedrichs-Lewy の条件と呼ばれています. この条件は, 差分スキーム (漸化式)(32) において, 3 点 $(x_{i-1}, t_j), (x_i, t_j), (x_{i+1}, t_j)$ が (初期時刻を t_j としたときの) 点 (x_i, t_{j+1}) の依存領域に含まれているという条件に対応しています.

2.6 熱伝導方程式に対する初期値境界値問題の差分解法

熱伝導方程式

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (0 < x < L) \quad (35)$$

の近似解を境界条件

$$u(0, t) = u(L, t) = 0 \quad (t \geq 0)$$

と初期条件

$$u(x, 0) = f(x) \quad (0 \leq x \leq L)$$

のもとで求めましょう. 波動方程式のときと同じく x 軸の区間 $[0, L]$ を N 等分して, $h = \frac{L}{N}$ として $x_i = hi$ とおきます. また時間の刻み幅を $\Delta t > 0$ として $t_j = j\Delta t$ とおき, $u(x_i, t_j)$ の近似値を $u_{i,j}$ とします. まず, 初期条件より

$$u_{i,0} = f(x_i) \quad (0 \leq i \leq N)$$

中心差分近似と

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x_i, t_j) \doteq \frac{u(x_i, t_{j+1}) - u(x_i, t_j)}{\Delta t}$$

を用いて熱伝導方程式を近似すると

$$\frac{u_{i,j+1} - u_{i,j}}{\Delta t} = k \frac{u_{i+1,j} + u_{i-1,j} - 2u_{i,j}}{h^2} \quad (1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0)$$

ここで $r = \frac{k\Delta t}{h^2}$ とおいて上式を変形すると

$$u_{i,j+1} = ru_{i+1,j} + (1 - 2r)u_{i,j} + ru_{i-1,j} \quad (1 \leq i \leq N-1, \quad j \geq 0) \quad (36)$$

境界条件より $u_{0,j} = u_{N,j} = 0$ であることに注意すると, 上式より時刻 t_{j+1} での近似値 $u_{i,j+1}$ が時刻 t_j での近似値 $u_{i-1,j}, u_{i,j}, u_{i+1,j}$ を用いて表されることがわかります.

問題 2.5 $L = k = 1$ として, 波動方程式のプログラムと同じ初期条件 $f(x)$ に対して熱伝導方程式の近似値を計算してアニメーションで表示するプログラムを作成せよ. r はどのような条件を満たす必要があるか?