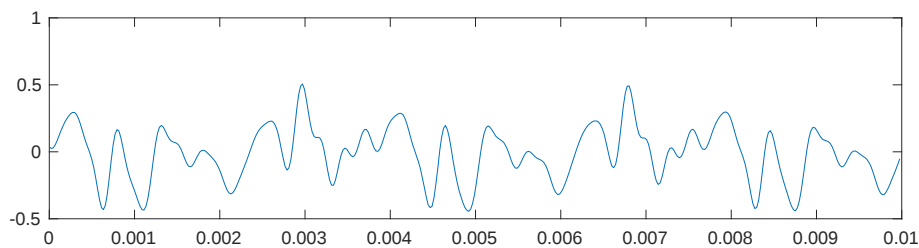


情報解析学I（フーリエ解析とその応用）

大阿久 俊則

1 振動現象とフーリエ級数

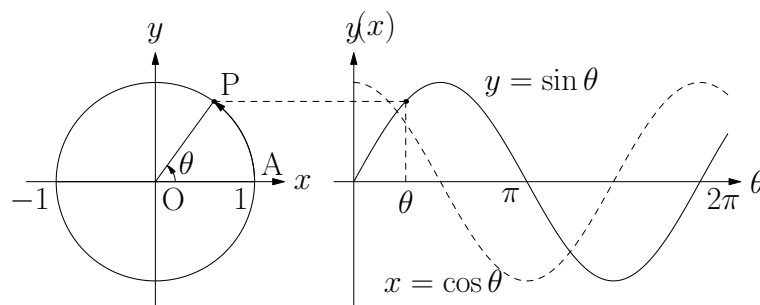
私達の身近には振動現象がたくさんあります．たとえば地震が地面の振動だということは誰でもわかりますが，私達の生活で身近な音，光，電波なども実は振動現象です．たとえば下の図はクラリネットの音の波形の例です．横軸が時間 t （秒単位），縦軸は空気密度の変位（電気信号に変換） $f(t)$ を表します．



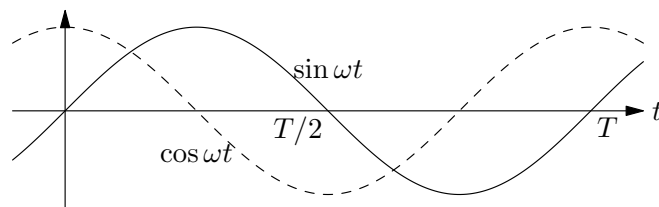
波形がほぼ $T = 0.0038$ 秒ごと（1秒間に約260回）の繰り返しになっている，すなわち $f(t + T) = f(t)$ が成立することがわかります．このように振動現象は一般には複雑ですが，それを単純な振動（単振動）の組み合わせ（重ね合わせ）で表すことができます．単振動はサインとコサインで表されるので，数学的には一般の振動をサインとコサインを使って表現できることになります．このような数学的な手法を創始者の名前をとってフーリエ（Fourier）解析といいます．

1.1 三角関数と単振動

座標平面で単位円周上の点 P を考えます． $A(1, 0)$ として $\theta = \angle AOP$ とおくと， P の y 座標が $\sin \theta$ ， P の x 座標が $\cos \theta$ です．角度 $\theta = \angle AOP$ は弧 AP の長さで計ります（弧度法）．



さて、P が A を出発して単位円周上を一定の速度 ω (オメガ) で動いているとします (下左図)。これを横または上から見ると、P は -1 と 1 を結ぶ線分上を周期的に運動します。横軸を時刻 t 、縦軸を P の y 座標とすると $y = \sin \omega t$ (下右の実線)、縦軸を P の x 座標とすると $x = \cos \omega t$ (破線) で表されます。



このサインとコサインの表す振動は、最も単純な振動であり、**単振動**と呼ばれます。たとえば、ばねにぶら下げた「おもり」を少し引っ張って離すと、おもりは単振動をします。音で言うと「音さ」の音が最も単振動に近いと言われています。

ω をこの単振動の角周波数または角速度と呼びます。 $\omega t = 2\pi$ すなわち $t = \frac{2\pi}{\omega}$ となるとき、P は円周を 1 周するので、この単振動の周期は $T = \frac{2\pi}{\omega}$ となります。周期の逆数 $\nu = \frac{\omega}{2\pi}$ のことを周波数または振動数と呼びます。時間の単位を秒 (s) にとれば、周波数は 1 秒間の振動数 (回転数) を表します。このときの周波数の単位 (1/s) は **Hz (ヘルツ)** と呼ばれます。角周波数 ω は周波数 ν の 2π 倍 ($\omega = 2\pi\nu$) です。

角周波数が ω であるような任意の単振動は、

$$f(t) = c \sin(\omega t + \theta)$$

という式で表すことができます。ここで c は正の定数でこの単振動の振幅を表します。 θ は実数の定数で初期位相と呼ばれ、波の平行移動を表します。加法定理を用いると単振動は

$$f(t) = c \sin \theta \cos \omega t + c \cos \theta \sin \omega t = a \cos \omega t + b \sin \omega t$$

という形で表すこともできます。ここで a, b は

$$a = c \sin \theta, \quad b = c \cos \theta$$

で決まる定数です。逆に a, b を最初に与えれば、

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}, \quad \sin \theta = \frac{a}{c}, \quad \cos \theta = \frac{b}{c}$$

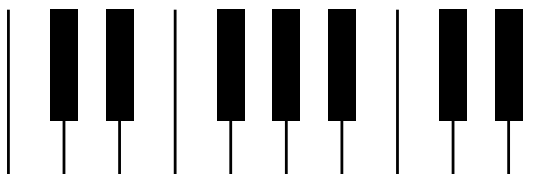
で c と θ を決めることができます。従って $a \cos \omega t + b \sin \omega t$ で表される単振動の振幅は $\sqrt{a^2 + b^2}$ となります。

1.2 音階と和音

音の高さはその周波数で表されます。たとえば中央のラの音は 440Hz で、1 オクターブ上のラの音は 880Hz、1 オクターブ下のラの音は 220Hz です。このように 1 オクターブ

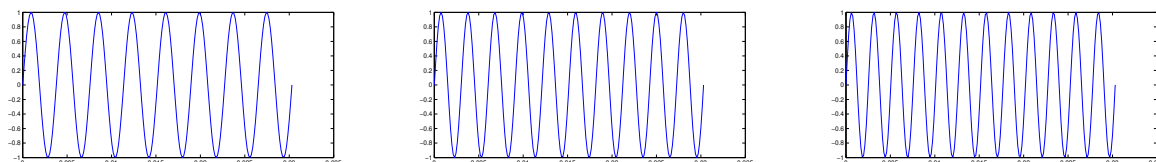
とは 1:2 の周波数の比を表しています。音階は 1 オクターブを更に細かく分割することで成り立っています。その決め方には分数を用いる純正律と、対数を用いる平均律という 2通りの決め方があります。純正律ではハ長調の音階の周波数は次のように決められます。

音階	ド	レ	ミ	ファ	ソ	ラ	シ	ド
振動数 (Hz)	264	297	330	352	396	440	495	528
比 (ド = 1)	1	$\frac{9}{8}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{15}{8}$	2



純正律では周波数の比が整数であるため、和音が正確に協和するという特徴があります。しかしこの方法では移調が困難なので現在では純正律ではなく平均律が採用されています。平均律では、1 オクターブの周波数の比 1 : 2 を 12 の半音に (対数で) 均等に割り振るので、半音違った音 (例えばミとファ) の振動数の比がすべて $2^{1/12} = 1.05946\dots$ となります。つまり音階の周波数の比 r の 2 を底とする対数 $\log_2 r$ は $\frac{1}{12}$ の倍数になっています。ピアノの鍵盤 (白鍵と黒鍵を合わせて) は周波数の対数目盛りということになります。例えばドとソの周波数の比 (完全 5 度) は純正律ではちょうど $2 : 3 = 1 : 1.5$ ですが、平均律では $1 : 2^{7/12} = 1 : 1.498307\dots$ となります。これはバイオリンの隣同士の弦 (GDAE) の周波数の比に相当します。

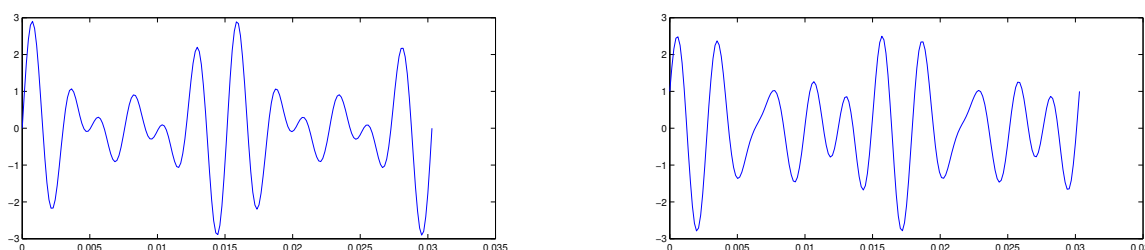
次に和音について考えましょう。純正律ではドミソの音の周波数の比は 4:5:6 となります。



ドミソの和音を表す関数は、 $\omega = 2\pi \cdot 66$ として

$$f(t) = a_4 \cos 4\omega t + b_4 \sin 4\omega t + a_5 \cos 5\omega t + b_5 \sin 5\omega t + a_6 \cos 6\omega t + b_6 \sin 6\omega t \quad (1)$$

という形で表すことができます。たとえば $a_4 = a_5 = a_6 = 0, b_4 = b_5 = b_6 = 1$ とすると $f(t)$ は左のグラフ、 $b_4 = a_5 = a_6 = 0, a_4 = b_5 = b_6 = 1$ とすると右のグラフのようになります。



$$\sin(2\pi \cdot 264t) + \sin(2\pi \cdot 330t) + \sin(2\pi \cdot 396t) \quad \cos(2\pi \cdot 264t) + \sin(2\pi \cdot 330t) + \sin(2\pi \cdot 396t)$$

ところで皆さんは和音を聴いて、それがどんな音でできているか言い当てることができるでしょうか？それができる人は上の関数 $f(t)$ を耳で聴いて、それを(脳の中で)(1)の右辺の式に分解していることになります。これを数学的に行う道具がフーリエ解析です。

1.3 周期関数と三角関数

実際の波動現象ではふつう時刻 t を変数と見なしますが、これからは通常の数と同じく変数を x で表すことにします。一般に、関数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ が T を周期とする周期関数とは $f(x+T) = f(x)$ がすべての実数 x について成立することです。このような周期 $T > 0$ のうち最小のものを f の基本周期といいます。このとき基本周期の任意整数倍も f の周期になります。 x が(たとえば秒単位で)時刻を表すとすれば、 $f(x)$ で表される波動現象の周波数は $1/T$ になります。

たとえば $\sin x$ と $\cos x$ は共に 2π を基本周期とする周期関数です。一般に正弦波は、 a, b, c を定数として $a \sin(bx + c)$ と表されます。この正弦波の基本周期は $2\pi/b$ です。同じ基本周期の2つの正弦波を重ね合わせたものも同じ基本周期を持つ正弦波となります。これは正弦波の合成の公式

$$a_1 \sin(bx+c_1)+a_2 \sin(bx+c_2) = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + 2a_1a_2 \cos(c_1 - c_2)} \sin(bx+c_3) \quad (c_3 \text{ は適当な実数})$$

からわかります。一方、基本周期の異なる正弦波の合成は一般には正弦波にはなりませんが、基本周期の比が整数であれば、周期関数になることがわかります。たとえば、 $\sin 8x$ と $\sin 9x$ の基本周期はそれぞれ $\frac{\pi}{4}$, $\frac{2\pi}{9}$ ですが、 $f(x) = \sin 8x + \sin 9x$ は基本周期 2π の周期関数です(正弦波ではない)。

ここで三角関数について復習しておきましょう。加法公式

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= \sin x \cos y + \cos x \sin y, & \sin(x-y) &= \sin x \cos y - \cos x \sin y, \\ \cos(x+y) &= \cos x \cos y - \sin x \sin y, & \cos(x-y) &= \cos x \cos y + \sin x \sin y \end{aligned}$$

が基本的です。これを使うと、一般の正弦波 $a \sin(bx + c)$ は

$$a \sin(bx + c) = a \cos c \sin bx + a \sin c \cos bx$$

と、 $\sin bx$ と $\cos bx$ の1次結合(定数倍の和)で表されることがわかります。

加法公式から積を和に直す公式

$$\begin{aligned} \sin x \cos y &= \frac{1}{2} \{ \sin(x+y) + \sin(x-y) \}, & \cos x \sin y &= \frac{1}{2} \{ \sin(x+y) - \sin(x-y) \}, \\ \cos x \cos y &= \frac{1}{2} \{ \cos(x+y) + \cos(x-y) \}, & \sin x \sin y &= -\frac{1}{2} \{ \cos(x+y) - \cos(x-y) \} \end{aligned}$$

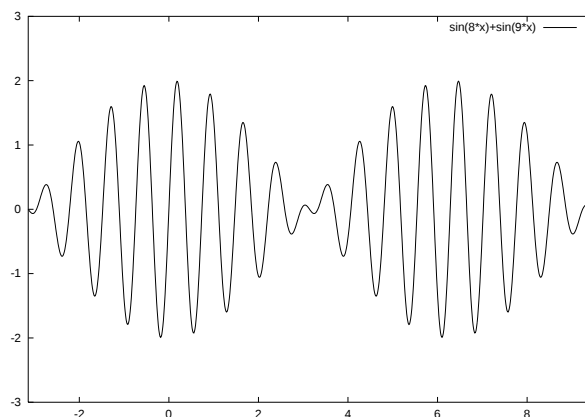
や和を積に直す公式

$$\begin{aligned} \sin x + \sin y &= 2 \sin \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, & \sin x - \sin y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}, \\ \cos x + \cos y &= 2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}, & \cos x - \cos y &= -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \end{aligned}$$

が導かれます。これを使うと、たとえば

$$f(x) = \sin 8x + \sin 9x = 2 \sin \frac{17}{2}x \cos \frac{1}{2}x$$

のように周波数の比が1に近いような2つの正弦波を重ね合わせると、振動数の大きな正弦波と振動数の小さな正弦波の積となります。これはドとレの音を同時に出したときの波に相当します。



1.4 関数空間と有限フーリエ級数

$f(x)$ を実数全体 $\mathbb{R}$ で定義された周期 T の周期関数とすると、長さ T の区間 $[c, c+T)$ で $f(x)$ の値を考えれば十分です。逆に $[c, c+T)$ で定義された関数 f に対して、 $\mathbb{R}$ 上の関数 $\tilde{f}$ を、任意の整数 n に対して

$$\tilde{f}(x + nT) = f(x) \quad (c \leq x < c + T)$$

となるように定義できます。このとき $\tilde{f}$ は周期 T の周期関数になります。これを f の周期 T での拡張と言います。

例 1.1 区間 $[-\pi, \pi)$ において $f(x) = x$ で定義された関数 $f(x)$ の周期 2π での拡張 $\tilde{f}$ は、 $\{(2n+1)\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で不連続な周期関数となる。 $\tilde{f}$ を区間 $[0, 2\pi]$ で考えれば

$$f(x) = \begin{cases} x & (-\pi \leq x < \pi) \\ -\pi & (x = \pi) \end{cases}$$

そこで、周期 T の周期関数のかわりに、有界区間 $[c, c+T)$ または $[c, c+T]$ で定義された関数を考えることができます。

命題 1.1 一般に、有界閉区間 $[a, b]$ で連続な (実数値) 関数の全体を $C([a, b])$ または $C([a, b], \mathbb{R})$ で表すと、 $C([a, b])$ は $\mathbb{R}$ 上のベクトル空間になる。

証明: $f, g \in C([a, b])$ と $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ に対して1次結合 $c_1f + c_2g$ を

$$(c_1f + c_2g)(x) = c_1f(x) + c_2g(x)$$

で定義すれば、これも $[a, b]$ 上の連続関数になる。□

命題 1.2 $f, g \in C([a, b])$ に対して, f と g の内積 (f, g) を

$$(f, g) = \int_a^b f(x)g(x) dx$$

で定義すると, 任意の $f, g, f_1, f_2 \in C([a, b])$ と $c \in \mathbb{R}$ に対して次が成立する:

$$\begin{aligned}(f, g) &= (g, f), & (cf, g) &= c(f, g) \\ (f_1 + f_2, g) &= (f_1, g) + (f_2, g)\end{aligned}$$

さらに, f の L^2 ノルム $\|f\| = \|f\|_2$ を

$$\|f\| = \sqrt{(f, f)}$$

で定義すると, $\|f\| \geq 0$ で, 等号は $f = 0$ (恒等的に 0 の関数) のときに限り成立する.

命題 1.3 $f_1, \dots, f_n$ を 0 ではない $C[a, b]$ の元とする. もし $1 \leq i < j \leq n$ を満たす任意の i, j について $(f_i, f_j) = 0$ が成立すれば $f_1, \dots, f_n$ は 1 次独立である.

証明: もし定数 $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$ があって $c_1 f_1 + \dots + c_n f_n = 0$ が成り立ったとすれば, $c_1 = \dots = c_n = 0$ であることを示せばよい. このとき, 任意の $i = 1, \dots, n$ に対して内積の性質から

$$0 = (f_i, c_1 f_1 + \dots + c_n f_n) = c_1 (f_i, f_1) + \dots + c_n (f_i, f_n) = c_i (f_i, f_i)$$

となり, $f_i \neq 0$ より $(f_i, f_i) = \|f_i\|^2 > 0$ であるから, $c_i = 0$ を得る. $\square$

簡単のため, しばらくの間 $T = 2\pi$ として, 周期 2π の周期関数, あるいは区間 $[0, 2\pi]$ 上の関数を考えます.

$1, \cos x, \cos 2x, \cos 3x, \dots, \sin x, \sin 2x, \sin 3x, \dots$ はすべて周期 2π の周期関数ですから, それらの 1 次結合

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (a_n, b_n \in \mathbb{R}) \quad (2)$$

はまた周期 2π の周期関数です. これを有限フーリエ級数と言います. 有限フーリエ級数の例を考えましょう. n を自然数とすると, $\sin^n x$ と $\cos^n x$ は有限フーリエ級数で表されます. たとえば

$$\begin{aligned}\cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, & \sin^2 x &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2x, \\ \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x, & \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x.\end{aligned}$$

さらに一般に次のことが証明できます.

命題 1.4 n を自然数とすると $\sin^n x, \cos^n x$ は, $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \sin 2x, \dots, \sin nx$ の 1 次結合で書ける.

では、このような 1 次結合による表示は一意的 (一通り) でしょうか? そのためには、 $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots$ が 1 次独立であることを示せばよいですが、そのために $C([0, 2\pi])$ における内積を考えます。

命題 1.5 (1) $n = 1, 2, 3, \dots$ のとき

$$\int_0^{2\pi} 1 \cdot \cos nx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} 1 \cdot \sin nx \, dx = 0.$$

(2) $n = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, \dots$ のとき

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \sin mx \, dx = 0.$$

(3) $n = 1, 2, 3, \dots, m = 1, 2, 3, \dots$ かつ $n \neq m$ ならば

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cdot \cos mx \, dx = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sin nx \cdot \sin mx \, dx = 0.$$

(4) $n = 1, 2, 3, \dots$ に対して

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx \, dx = \pi, \quad \int_0^{2\pi} \sin^2 nx \, dx = \pi.$$

この命題は $1, \cos x, \cos 2x, \dots, \sin x, \sin 2x, \dots$ を $C([0, 2\pi])$ の元とみなしたとき、どの 2 つの内積も 0 になることを言っているので、命題 1.3 よりこれらは 1 次独立となり、有限フーリエ級数の表示の一意性がわかります。

なお、次の補題により、命題 1.5 で積分区間を $[0, 2\pi]$ のかわりに、幅が 2π であるような任意の区間 (たとえば $[-\pi, \pi]$) で置き換えてもよいことに注意しておきましょう。

補題 1.1 $f(x)$ が周期 T の周期関数のとき、任意の定数 c に対して

$$\int_0^T f(x) \, dx = \int_c^{T+c} f(x) \, dx.$$

1.5 正規直交系とフーリエ級数

ノルムを 1 にする (正規化) ために、

$$\varphi_n(x) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} & (n=0) \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos nx & (n=1, 2, \dots) \end{cases} \quad \psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin nx \quad (n=1, 2, 3, \dots) \quad (3)$$

とおくと、命題 1.5 より $C([0, 2\pi])$ において

$$\begin{aligned} (\varphi_i, \varphi_j) &= 0 \quad (i \neq j), & (\psi_i, \psi_j) &= 0 \quad (i \neq j), \\ (\varphi_i, \psi_j) &= 0 \quad (i=0, 1, 2, \dots, j=1, 2, \dots) \\ \|\varphi_i\| &= 1 \quad (i=0, 1, 2, \dots), & \|\psi_j\| &= 1 \quad (j=1, 2, \dots) \end{aligned}$$

が成立します. このとき, $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots, \psi_1, \psi_2, \dots$ は互いに直交して (内積が 0) ノルムがすべて 1 なので, 正規直交系であるといいます. 一般に正規直交系について, 次のことが成り立ちます.

命題 1.6 区間 $[a, b]$ 上の連続関数 $\psi_1, \dots, \psi_N$ が $C([a, b])$ の正規直交系, すなわち

$$(\psi_i, \psi_j) = 0 \quad (1 \leq i < j \leq N), \quad \|\psi_i\| = 1 \quad (i = 1, \dots, N)$$

を満たすとする. 任意の $f \in C([a, b])$ を固定して, 実数 $c_1, \dots, c_N$ に対して 1 次結合 $c_1\psi_1 + \dots + c_N\psi_N$ を考えるとノルム

$$\|f - (c_1\psi_1 + \dots + c_N\psi_N)\|$$

は $c_n = (f, \psi_n)$ ($n = 1, \dots, N$) のとき最小となる.

証明: ノルムの 2 乗を内積で表すと, 内積の性質から

$$\begin{aligned} \|f - (c_1\psi_1 + \dots + c_N\psi_N)\|^2 &= \left(f - \sum_{j=1}^N c_j\psi_j, f - \sum_{k=1}^N c_k\psi_k \right) \\ &= (f, f) - 2 \sum_{j=1}^N c_j(f, \psi_j) + \sum_{j,k=1}^N c_jc_k(\psi_j, \psi_k) \\ &= \|f\|^2 - 2 \sum_{j=1}^N c_j(f, \psi_j) + \sum_{j=1}^N c_j^2 \\ &= \sum_{j=1}^N \{c_j - (f, \psi_j)\}^2 + \|f\|^2 - \sum_{j=1}^N (f, \psi_j)^2. \end{aligned}$$

この式は $c_j = (f, \psi_j)$ ($i = 1, \dots, N$) のとき最小値 $\|f\|^2 - \sum_{j=1}^N (f, \psi_j)^2$ をとる. $\square$

命題 1.7 関数 $f \in C([0, 2\pi])$ に対して, 自然数 N を固定するとき, 有限フーリエ級数

$$g = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

を考えると, $\|f - g\|^2$ は

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx \, dx \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx \, dx \quad (n \geq 1) \quad (4)$$

のとき最小値 $\|f\|^2 - \frac{\pi}{2}a_0^2 - \pi \sum_{n=1}^N (a_n^2 + b_n^2)$ をとる.

証明: φ_n, ψ_n を (3) で定義すると, 命題 1.6 より

$$g = a'_0 \varphi_0 + \sum_{n=1}^N (a'_n \varphi_n + b'_n \psi_n)$$

とおくと, $\|f - g\|$ は

$$\begin{aligned} a'_0 &= (f, \varphi_0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) dx = \sqrt{\frac{\pi}{2}} a_0, \\ a'_n &= (f, \varphi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = \sqrt{\pi} a_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots), \\ b'_n &= (f, \psi_n) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = \sqrt{\pi} b_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots) \end{aligned}$$

のとき最小値をとる. これと (3) から結論を得る. $\square$

そこで周期 2π の関数 $f(x)$ と自然数 N に対して, a_n, b_n を式 (4) で定めて

$$f_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

と定義します. これは有限フーリエ級数なので, 一般には $f(x)$ とは異なりますが, 次の定理が成り立ちます.

定理 1.1 $f(x)$ が周期 2π の連続関数ならば, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0$ が成立する.

実は $f(x)$ がいくつかの点で不連続である場合にもこの定理は成立します.

定義 1.1 周期 2π の関数 $f(x)$ に対して a_n, b_n を (4) で定義するとき,

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \quad (5)$$

と書いて, この右辺を $f(x)$ のフーリエ展開またはフーリエ級数という.

定理 1.1 によって f のフーリエ展開の $n = N$ までの部分和を f_N とすれば, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0$ が成り立つので, f_N はノルムで測ったとき f に限りなく近付くことになります (ノルム収束). しかしすべての x に対して $\lim_{N \rightarrow \infty} f_N(x) = f(x)$ が成立する (各点収束) とは限りません (後の例を参照). しかし「ほとんどの」 x に対してこの等式が成立することが知られています. つまり式 (5) において記号 $\sim$ は「ほとんど =」 だと思ってよいことになります.

さて, f のフーリエ展開 (5) の第 n 項

$$a_n \cos nx + b_n \sin nx = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \sin(nx + \theta_n) \quad (\theta_n \text{ はある実数})$$

(ただし $n=0$ のときは $a_0/2$) は $f(x)$ の表す波に含まれる周期 $2\pi/n$ (周波数が基本周波数 $1/2\pi$ の n 倍) の正弦波の成分を表していると考えられます. そこでそれぞれの正弦波の振幅を数列で表すと

$$\frac{|a_0|}{2}, \quad \sqrt{a_1^2 + b_1^2}, \quad \sqrt{a_2^2 + b_2^2}, \quad \sqrt{a_3^2 + b_3^2}, \quad \dots$$

となり, これは $f(x)$ に, 基本振動数の n 倍の振動数の正弦波がどれだけ含まれているかを表しており, $f(x)$ のスペクトルと呼ばれます.

フーリエ級数の具体例を計算してみましょう. まずフーリエ係数の計算に便利な次の事実を示します.

命題 1.8 f を周期 2π の周期関数とするとき,

- (1) f が偶関数, すなわち $f(-x) = f(x)$ が成立すれば, すべての $n = 1, 2, 3, \dots$ について $b_n = 0$.
- (2) f が奇関数, すなわち $f(-x) = -f(x)$ が成立すれば, すべての $n = 0, 1, 2, 3, \dots$ について $a_n = 0$.

証明: 補題 1.1 によって, $\int_0^{2\pi} f(x) dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$. まず $f(x)$ が偶関数ならば $f(x) \sin nx$ は奇関数なので

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

となります. また $f(x)$ が奇関数ならば $f(x) \cos nx$ も奇関数なので

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx = 0 \quad (n = 0, 1, 2, \dots).$$

□

例 1.2 (パルス波)

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (0 \leq x < \pi) \\ 0 & (\pi \leq x < 2\pi) \end{cases}$$

で定義される関数 f を周期 2π の周期関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数を同じ記号 f で表しましょう. ガウスの記号 $[x]$ (x を越えない最大の整数、英語では floor) を使うと

$$f(x) = \begin{cases} 1 & (x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi}\right] < \pi) \\ 0 & (x - 2\pi \left[\frac{x}{2\pi}\right] \geq \pi) \end{cases}$$

で定義することもできます. f のフーリエ展開を計算してみましょう. (4) を直接用いてもよいですが, $g(x) := f(x) - \frac{1}{2}$ が奇関数であることに着目すると計算を簡易化できます. g のフーリエ係数を a'_n, b'_n で表すと命題 1.8 から $a'_n = 0$ となるので, b'_n だけ計算すればよく

$$b'_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(x) \sin nx dx = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{1}{2} \sin nx dx = \frac{1}{\pi} \left[-\frac{\cos nx}{n} \right]_0^{\pi} = \frac{1 - (-1)^n}{n\pi}.$$

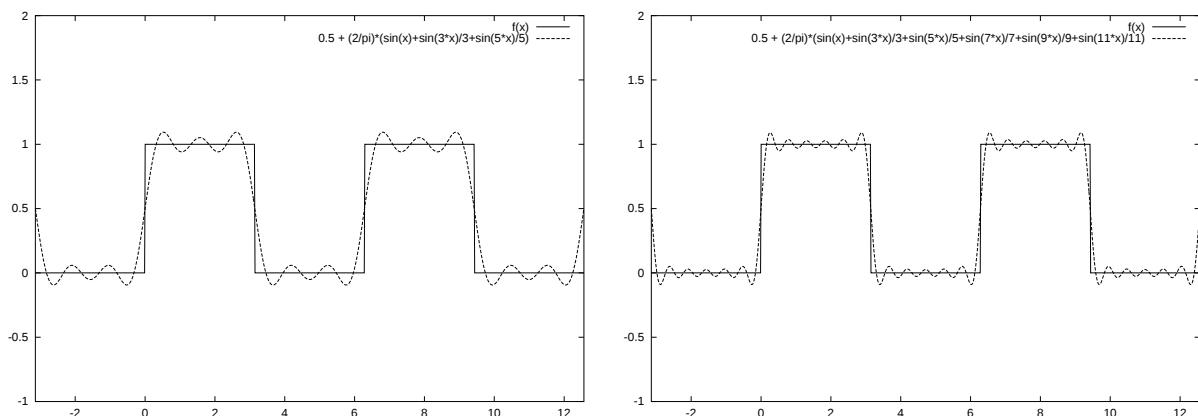
これは n が奇数のとき $2/n\pi$, 偶数のとき 0 ですから g のフーリエ展開は

$$g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x = \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \cdots$$

となり, 求める f のフーリエ展開は

$$f(x) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)x = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin x + \frac{2}{3\pi} \sin 3x + \frac{2}{5\pi} \sin 5x + \cdots$$

となります. この右辺の $2n-1=5$ までの部分 and (左) と, $2n-1=11$ までの部分 and (右) のグラフは



となり, 項を増やしていくとフーリエ級数の有限和が f に近付いて行く様子が良くわかります. (ただし f の不連続点 $k\pi$ (k は整数) ではフーリエ級数は $\frac{1}{2} \neq f(k\pi)$ に収束する.)

例 1.3 (整流正弦波) $f(x) = \max\{\sin x, 0\} = \frac{1}{2}(|\sin x| + \sin x)$ のフーリエ展開を計算しましょう. これは x が時刻を表すとすれば, たとえば正弦波の交流電圧を, 一方向にしか電流を通さないダイオード (半導体) に加えたときの電流を表しています. $n \neq 1$ のとき

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos nx \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \{\sin(n+1)x - \sin(n-1)x\} \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n+1)x}{n+1} \right]_0^{\pi} - \frac{1}{2\pi} \left[-\frac{\cos(n-1)x}{n-1} \right]_0^{\pi} \\ &= \frac{1}{2\pi} \frac{1 - (-1)^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{2\pi} \frac{1 - (-1)^{n-1}}{n-1} \end{aligned}$$

で, これは n が奇数のときは 0, n が偶数のときは

$$\frac{1}{2\pi} \left(\frac{2}{n+1} - \frac{2}{n-1} \right) = -\frac{2}{\pi(n^2-1)}$$

となります. $n=1$ のときは

$$a_1 = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \sin x \cos x \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{\pi} \sin 2x \, dx = 0$$

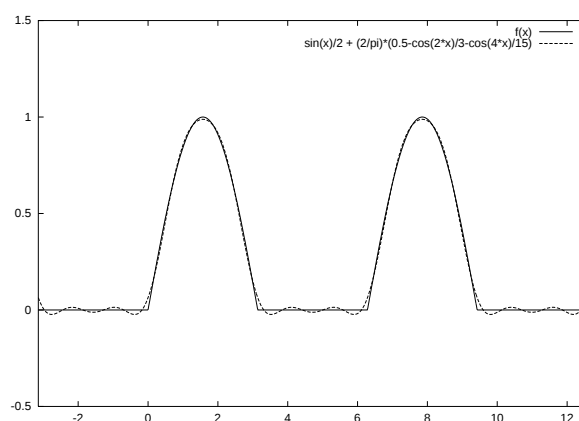
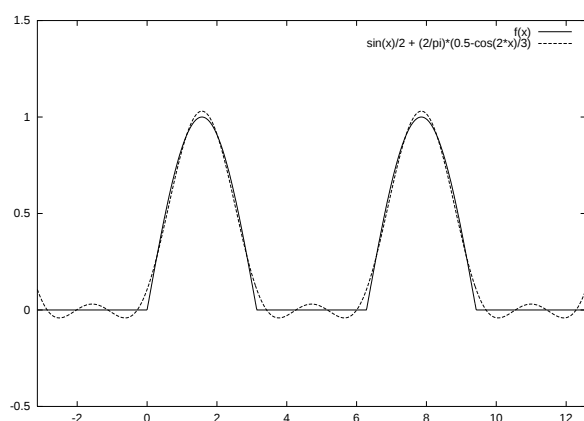
同様にして

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin x \sin nx \, dx \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \{-\cos(n+1)x + \cos(n-1)x\} \, dx \end{aligned}$$

は $n = 1$ のとき $1/2$, $n \neq 1$ のときは 0 となることがわかります. 従って f のフーリエ展開は

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2kx \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin x - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2x + \frac{1}{15} \cos 4x + \frac{1}{35} \cos 6x + \cdots \right) \end{aligned}$$

となります. $k = 1$ ($n = 2$) までの部分和と $k = 2$ ($n = 4$) のグラフは下のようになります.



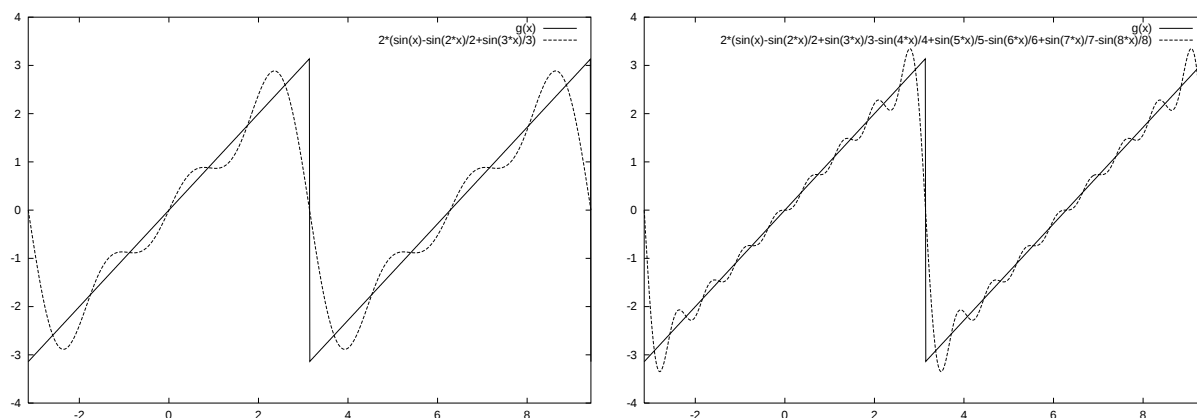
例 1.4 (のこぎり波) $f(x) = x$ ($-\pi < x \leq \pi$) を周期 2π の周期関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数を同じ記号 $f(x)$ で表し, そのフーリエ展開を計算しましょう. $f(x)$ は奇関数なので $a_n = 0$ で

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi x \sin nx \, dx \\ &= \frac{2}{\pi} \left(- \left[\frac{x \cos nx}{n} \right]_0^\pi + \int_0^\pi \frac{\cos nx}{n} \, dx \right) \\ &= \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \end{aligned}$$

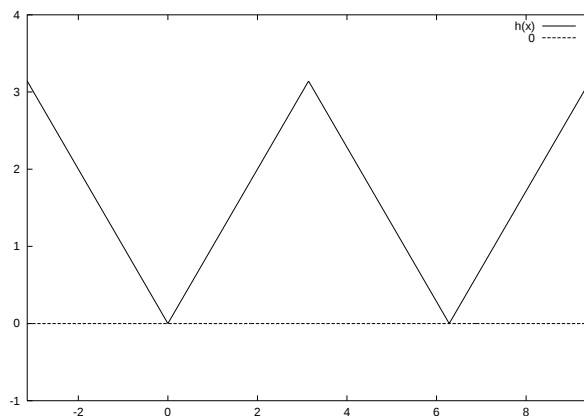
よって f のフーリエ展開は

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n} \sin nx = 2 \left(\sin x - \frac{\sin 2x}{2} + \frac{\sin 3x}{3} - \frac{\sin 4x}{4} + \cdots \right)$$

$n = 3$ までと $n = 8$ までの部分和のグラフは下のようになります.



問題 1.1 $f(x) = |x|$ ($-\pi \leq x < \pi$) を周期 2π の周期関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数 (下のグラフ) を同じ記号 $f(x)$ で表すとき $f(x)$ のフーリエ展開を求めよ。



問題 1.2 周期 2π の関数 $f(x) = \left| \sin \frac{x}{2} \right|$ のフーリエ展開を求めよ。

問題 1.3 問題 1.1 と問題 1.2 で求めたフーリエ級数の最初の何項かの部分和のグラフを MATLAB で描いて, $f(x)$ に収束する様子を調べよ。

1.6 一般の周期関数のフーリエ展開

前節では周期 2π の周期関数を考えましたが, ここでは一般に周期 T の周期関数 $f(t)$ のフーリエ展開を考えましょう. $f(t)$ の角周波数を ω とすると, $\omega = \frac{2\pi}{T}$, $T = \frac{2\pi}{\omega}$ という関係が成り立ちます. $x = \omega t$ すなわち $t = \frac{x}{\omega} = \frac{Tx}{2\pi}$ として, $g(x) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right)$ とおくと,

$$g(x + 2\pi) = f\left(\frac{T(x + 2\pi)}{2\pi}\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi} + T\right) = f\left(\frac{Tx}{2\pi}\right) = g(x)$$

より $g(x)$ は周期 2π の周期関数になります. 従って

$$g(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

とフーリエ展開されます．この両辺に $x = \omega t$ を代入すると

$$f(t) = g(\omega t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) \quad (6)$$

となります．この右辺を周期 T (角周波数 ω) の関数 $f(t)$ のフーリエ級数展開といいます．フーリエ係数 a_n, b_n は置換積分 ($x = \omega t$) を用いて

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \cos nx \, dx = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \cos n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t \, dt \quad (n \geq 0) \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} g(x) \sin nx \, dx = \frac{\omega}{\pi} \int_0^{\frac{2\pi}{\omega}} f(t) \sin n\omega t \, dt = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t \, dt \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

と計算できます．このとき $\sqrt{a_n^2 + b_n^2}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は，(6) のフーリエ展開に含まれる基本角周波数が $n\omega$ であるような正弦波 $a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t$ の振幅を表しており， $f(t)$ のスペクトルと呼ばれます．これが音の特徴 (楽器ならば音色，言葉なら母音の違い) を表しています．

例 1.5 (一般の周期のパルス波) 周期 T のパルス波 $f(t)$ は，区間 $[0, T)$ では

$$f(t) = \begin{cases} 1 & (0 \leq t < \frac{T}{2}) \\ 0 & (\frac{T}{2} \leq t < T) \end{cases}$$

で定義され，これを周期 T で $\mathbb{R}$ に拡張した関数です．このときの角周波数を $\omega = \frac{2\pi}{T}$ とおくと， $f(t)$ のフーリエ展開は例 1.2 より，

$$f(t) = \frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(2n-1)\pi} \sin(2n-1)\omega t = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sin \omega t + \frac{2}{3\pi} \sin 3\omega t + \frac{2}{5\pi} \sin 5\omega t + \dots$$

例 1.6 (一般の周期の整流正弦波) 角周波数 ω の整流正弦波 $f(t) = \max\{\sin \omega t, 0\}$ のフーリエ展開は，

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4k^2 - 1} \cos 2k\omega t \\ &= \frac{1}{\pi} + \frac{1}{2} \sin \omega t - \frac{2}{\pi} \left(\frac{1}{3} \cos 2\omega t + \frac{1}{15} \cos 4\omega t + \frac{1}{35} \cos 6\omega t + \dots \right) \end{aligned}$$

例 1.7 (一般の周期ののこぎり波) $f(t) = t$ ($-\frac{T}{2} < t \leq \frac{T}{2}$) を周期 T の周期関数として $\mathbb{R}$ に拡張した関数を同じ記号 $f(t)$ で表します． $\omega = \frac{2\pi}{T}$ とおくと， $f(t)$ のフーリエ展開は

$$f(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2(-1)^{n-1}}{n\omega} \sin n\omega t = \frac{2}{\omega} \left(\sin \omega t - \frac{\sin 2\omega t}{2} + \frac{\sin 3\omega t}{3} - \frac{\sin 4\omega t}{4} + \dots \right)$$

1.7 複素フーリエ級数

角周波数 ω の関数 $f(t)$ のフーリエ展開 (6) において, オイラーの公式 $e^{it} = \cos t + i \sin t$ を用いるとフーリエ級数を指数関数で表すことができます.

$$\cos n\omega t = \frac{1}{2}(e^{in\omega t} + e^{-in\omega t}), \quad \sin n\omega t = \frac{1}{2i}(e^{in\omega t} - e^{-in\omega t})$$

を式 (6) に代入して

$$f(t) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n - ib_n)e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2}(a_n + ib_n)e^{-in\omega t}.$$

そこで整数 n に対して複素数 c_n を

$$\begin{aligned} n > 0 \text{ のとき} & \quad c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) \\ n = 0 \text{ のとき} & \quad c_0 = \frac{a_0}{2} \\ n < 0 \text{ のとき} & \quad c_n = \frac{1}{2}(a_{-n} + ib_{-n}) \end{aligned}$$

で定義すれば

$$f(t) \sim c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n} e^{-in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \quad (7)$$

という展開が得られます. これを $f(t)$ の複素フーリエ (級数) 展開といいます. 複素フーリエ係数 c_n はすべての整数 n について

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \quad (8)$$

で計算できることがわかります. 実際 $n > 0$ のときは

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - ib_n) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (\cos n\omega t - i \sin n\omega t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt$$

$n = 0$ のときは

$$c_0 = \frac{a_0}{2} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt$$

$n < 0$ のときは $n = -m$ とすれば,

$$\begin{aligned} c_n = c_{-m} &= \frac{1}{2}(a_m + ib_m) = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) (\cos m\omega t + i \sin m\omega t) dt \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{im\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt \end{aligned}$$

となり, いずれの場合にも (8) が成立することがわかりました.

複素フーリエ級数展開は, $f(t)$ が複素数値をとる場合も上と同じ式で定義できます. $f(t)$ が実数値の関数のときは a_n, b_n は実数で $c_{-n} = \overline{c_n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) となり

$$|c_n| + |c_{-n}| = 2|c_n| = \sqrt{a_n^2 + b_n^2} \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

が成立します. 従って, 定数 2 を無視すれば, 数列 $|c_n|$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) が $f(t)$ のスペクトルを表します. また, このとき複素フーリエ級数は, $c_n e^{in\omega t}$ の共役複素数が $c_{-n} e^{-in\omega t}$ であることに注意すると,

$$f(t) \sim c_0 + 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} c_n e^{in\omega t} \right\}$$

と表すこともできます.

有限フーリエ級数 $f_N(t)$ は

$$f_N(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \sum_{n=-N}^N c_n e^{in\omega t} = c_0 + 2\operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N c_n e^{in\omega t} \right\}$$

と表されます.

例 1.8 ($\cos^3 x$ と $\sin^3 x$ の複素フーリエ展開)

$$\begin{aligned} \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x = \frac{3}{8} (e^{ix} + e^{-ix}) + \frac{1}{8} (e^{3ix} + e^{-3ix}) \\ &= \frac{3}{8} e^{ix} + \frac{1}{8} e^{3ix} + \frac{3}{8} e^{-ix} + \frac{1}{8} e^{-3ix} = 2\operatorname{Re} \left(\frac{3}{8} e^{ix} + \frac{1}{8} e^{3ix} \right), \\ \sin^3 x &= \frac{3}{4} \sin x - \frac{1}{4} \sin 3x = \frac{3}{8i} (e^{ix} - e^{-ix}) - \frac{1}{8i} (e^{3ix} - e^{-3ix}) \\ &= \frac{-3i}{8} e^{ix} + \frac{i}{8} e^{3ix} + \frac{3i}{8} e^{-ix} - \frac{i}{8} e^{-3ix} = 2\operatorname{Re} \left(\frac{-3i}{8} e^{ix} + \frac{i}{8} e^{3ix} \right). \end{aligned}$$

あるいは, $\cos^3 x = (e^{ix} + e^{-ix})^3/8$, $\sin^3 x = (e^{ix} - e^{-ix})^3/(-8i)$ を展開して求めることもできます.

例 1.9 (パルス波の複素フーリエ展開) $f(t)$ を基本角周波数 ω のパルス波, a_n, b_n をそのフーリエ係数とすると,

$$a_0 = 1, \quad a_n = 0 \quad (n > 0), \quad b_n = \frac{2}{n\pi} \quad (n : \text{奇数}), \quad b_n = 0 \quad (n : \text{偶数})$$

でしたから,

$$c_0 = \frac{1}{2}, \quad c_n = 0 \quad (n : \text{偶数}), \quad c_n = -\frac{i}{n\pi} \quad (n : \text{奇数}).$$

従って $f(t)$ の複素フーリエ展開は

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-i}{(2k-1)\pi} e^{i(2k-1)\omega t} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{i}{(2k-1)\pi} e^{-i(2k-1)\omega t} \\ &= \frac{1}{2} + \frac{-i}{\pi} e^{i\omega t} + \frac{-i}{3\pi} e^{3i\omega t} + \frac{-i}{5\pi} e^{5i\omega t} + \dots + \frac{i}{\pi} e^{-i\omega t} + \frac{i}{3\pi} e^{-3i\omega t} + \frac{i}{5\pi} e^{-5i\omega t} + \dots \\ &= \frac{1}{2} + 2\operatorname{Re} \left(\frac{-i}{\pi} e^{i\omega t} + \frac{-i}{3\pi} e^{3i\omega t} + \frac{-i}{5\pi} e^{5i\omega t} + \dots \right) \end{aligned}$$

となります。

問題 1.4 $\cos^4 x$ と $\sin^4 x$ の複素フーリエ級数展開を求めよ。

問題 1.5 問題 1.1 の関数 $f(x)$ ($-\pi < x \leq \pi$ のとき $f(x) = |x|$ であるような周期 2π の関数) の複素フーリエ級数展開を求めよ。

1.8 フーリエ級数の収束の証明

フーリエ級数の理論で最も重要な定理 1.1 を証明しましょう。そのためにまず次の命題を示します。

命題 1.9 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ で定義された周期 2π の連続関数とする。自然数 N に対して有限フーリエ級数 $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ を命題 1.7 のように定義し、さらに別の有限フーリエ級数 F_N を $f_0, f_1, \dots, f_{N-1}$ の平均、すなわち

$$F_N(x) = \frac{1}{N}(f_0(x) + f_1(x) + \dots + f_{N-1}(x))$$

で定義すると、 $\lim_{N \rightarrow \infty} F_N(x) = f(x)$ が成立する。さらに、これは一様収束である。すなわち

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \max_{0 \leq x \leq 2\pi} |F_N(x) - f(x)| = 0.$$

証明: $f_n(x)$ の定義と補題 1.1 より

$$\begin{aligned} f_n(x) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos k(t-x) \right) dt \\ &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt \right) dt. \end{aligned} \tag{9}$$

ここで Euler の等式 $e^{ix} = \cos x + i \sin x$ を用いると、

$$\sum_{k=1}^n \cos kt = \operatorname{Re} \left(\sum_{k=1}^n e^{ikt} \right)$$

と表されるので、等比数列の和の公式 (初項と公比が複素数の場合でも成立) を用いると

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n e^{ikt} &= e^{it} \frac{e^{int} - 1}{e^{it} - 1} = e^{it} \frac{e^{in/2}(e^{int/2} - e^{-int/2})}{e^{it/2}(e^{it/2} - e^{-it/2})} = e^{i(n+1)t/2} \frac{e^{int/2} - e^{-int/2}}{e^{it/2} - e^{-it/2}} \\ &= \left(\cos \frac{n+1}{2}t + i \sin \frac{n+1}{2}t \right) \frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} \end{aligned}$$

この実部をとって積和の公式を用いると

$$\sum_{k=1}^n \cos kt = \cos \frac{n+1}{2}t \cdot \frac{\sin \frac{n}{2}t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2 \sin \frac{t}{2}} \left(\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t - \sin \frac{t}{2} \right) = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{t}{2}} - \frac{1}{2}$$

よって

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^n \cos kt = \frac{1}{2} \frac{\sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\sin \frac{t}{2} \sin \left(n + \frac{1}{2} \right) t}{\sin^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1 - \cos t}.$$

これを式 (9) に代入すれば

$$f_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{\cos nt - \cos(n+1)t}{1 - \cos t} dt.$$

従って

$$\begin{aligned} F_N(x) &= \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x) = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \frac{1 - \cos Nt}{1 - \cos t} dt \\ &= \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \end{aligned} \quad (10)$$

特に $f(x) = 1$ のとき, $a_0 = 2$ かつ $a_k = b_k = 0$ ($k \geq 1$) より $f_n(x) = 1$, 従って $F_N(x) = 1$ であるから,

$$1 = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt.$$

この両辺に最初の $f(x)$ を掛けて

$$f(x) = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \quad (11)$$

式 (10) と (11) より,

$$F_N(x) - f(x) = \frac{1}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (f(x+t) - f(x)) \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt. \quad (12)$$

ここで $f(x)$ は (一様) 連続なので, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して, ある $\delta > 0$ があって,

$$|t| < \delta \implies |f(x+t) - f(x)| < \varepsilon \quad (13)$$

が成り立つようにできる. この δ を用いて, (12) の被積分関数を $G(x, t)$ とおいて,

$$\int_{-\pi}^{\pi} G(x, t) dt = \int_{-\pi}^{-\delta} G(x, t) dt + \int_{-\delta}^{\delta} G(x, t) dt + \int_{\delta}^{\pi} G(x, t) dt$$

と 3 つに分ける. すると (13) と (11) より

$$\frac{1}{2N\pi} \left| \int_{-\delta}^{\delta} G(x, t) dt \right| \leq \frac{\varepsilon}{2N\pi} \int_{-\delta}^{\delta} \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \leq \frac{\varepsilon}{2N\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt = \varepsilon.$$

また, $|f(x)|$ の最大値を M とすれば, $|f(x+t) - f(x)| \leq 2M$ より

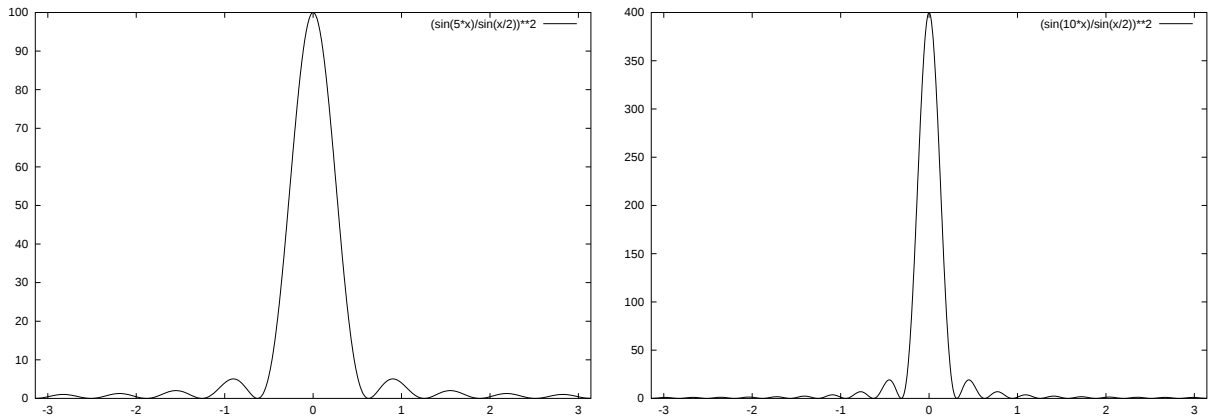
$$\begin{aligned} \frac{1}{2N\pi} \left| \int_{-\pi}^{-\delta} G(x, t) dt + \int_{\delta}^{\pi} G(x, t) dt \right| &\leq \frac{2M}{2N\pi} \left(\int_{-\pi}^{-\delta} + \int_{\delta}^{\pi} \right) \left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2 dt \\ &< \frac{2M}{2N\pi} \cdot 2\pi \cdot \frac{1}{\sin^2 \frac{\delta}{2}} = \frac{2M}{N \sin^2 \frac{\delta}{2}}. \end{aligned}$$

以上により,

$$|F_N(x) - f(x)| \leq \varepsilon + \frac{2M}{N \sin^2 \frac{\delta}{2}}$$

となり, この右辺は ε を小さく, N を大きくとれば, (x に無関係に) いくらでも小さくできる. 従って, $F_N(x)$ は $N \rightarrow \infty$ とするとき $f(x)$ に一様収束する. $\square$

上記の証明中に現われた式 $\left(\frac{\sin \frac{Nt}{2}}{\sin \frac{t}{2}} \right)^2$ のグラフを $N = 10$ と $N = 20$ のときに描いてみると下のようになります. これは積分核と呼ばれるものの一種です.



定理 1.1 の証明: $f(x)$ を周期 2π の連続関数, a_n, b_n をそのフーリエ係数として,

$$f_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^n (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \quad F_N(x) = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n(x)$$

とおく. 命題 1.9 より任意の $\varepsilon > 0$ に対して, N を十分大きくとれば $|f(x) - F_N(x)| < \varepsilon$ がすべての x について成立するから,

$$\|f - F_N\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(x) - F_N(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq \sqrt{2\pi} \varepsilon.$$

従って, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - F_N\| = 0$ が成立する.

一方 $F_N(x)$ は $1, \cos x, \sin x, \dots, \cos(N-1)x, \sin(N-1)x$ の 1 次結合で書ける. 実際定義より,

$$F_N(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{N-1} \frac{N-n}{N} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

となることがわかる. 従って命題 1.7 により,

$$\|f - f_{N-1}\| \leq \|f - F_N\|$$

が成立する. 上で示したように $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - F_N\| = 0$ であるから, はさみうちの論法により,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_{N-1}\| = 0$$

が証明された. $\square$

次に関数が不連続な点を持つ場合を考察しましょう.

定義 1.2 周期 T の関数 $f(x)$ が区分的に連続とは, $0 \leq a_1 < \dots < a_k < T$ をみたす有限個の点 $a_1, \dots, a_k$ が存在して, $f(x)$ は, 点 $a_j + nT$ ($1 \leq j \leq k, n \in \mathbb{Z}$) を除いて連続であり, 各 a_k において右極限 $\lim_{x \rightarrow a_k+0} f(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow a_k-0} f(x)$ が存在すること. ただし, $a_j + nT$ においては $f(x)$ の値は定義されていなくてもよい.

たとえば, パルス波やのこぎり波は区分的に連続ですが, $f(x) = \frac{1}{x}$ ($-\pi < x < \pi$) を周期 2π で拡張した関数は, $x = 0$ での右極限と左極限が存在しないので, 区分的に連続にはなりません.

補題 1.2 $f(x)$ を周期 T の区分的に連続な関数とすると, 任意の $\varepsilon > 0$ に対して,

$$\|f - g\| = \left(\int_0^T (f(x) - g(x))^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} < \varepsilon$$

を満たすような周期 T の連続関数 $g(x)$ が存在する. (g は ε による.)

証明: $f(x)$ の不連続点の近傍で 1 次式に置き換えた関数を $g(x)$ とすればよい. 簡単のため $[0, T]$ 内の不連続点が a のみで $0 < a < T$ をみたす場合に具体的に示そう. $|f(x)|$ の最大値を M とする.

$$0 < \delta < \frac{\varepsilon^2}{8M^2}, \quad 0 < \delta < a, \quad 0 < \delta < T - a$$

をすべて満たすような実数 δ をとって

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & (a \leq x \leq a - \delta) \\ f(a - \delta) + \frac{f(a + \delta) - f(a - \delta)}{2\delta}(x - a + \delta) & (a - \delta < x < a + \delta) \\ f(x) & (a + \delta \leq x < T) \end{cases}$$

とおいて, $g(x)$ を周期 T で拡張する. このとき $g(x)$ は連続で $|g(x)| \leq M$ をみたす. また三角不等式より $|f(x) - g(x)| \leq |f(x)| + |g(x)| \leq 2M$ であるから,

$$\|f - g\|^2 = \int_0^T (f(x) - g(x))^2 dx = \int_{a-\delta}^{a+\delta} (f(x) - g(x))^2 dx \leq 2\delta(2M)^2 = 8M^2\delta < \varepsilon^2$$

すなわち $\|f - g\| < \varepsilon$ となる. $\square$

補題 1.3 区分的に連続な周期 T の関数 f, g に対して

$$(1) |(f, g)| \leq \|f\| \|g\|.$$

$$(2) \|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

証明: t を任意の実数とすると,

$$0 \leq \|tf + g\|^2 = (tf + g, tf + g) = t^2(f, f) + 2t(f, g) + (g, g).$$

従ってこの 2 次式の判別式が 0 以下であるから,

$$(f, g)^2 - (f, f)(g, g) = (f, g)^2 - \|f\|^2 \|g\|^2 \leq 0.$$

これから (1) を得る. この計算と (1) を用いて

$$\begin{aligned} \|f + g\|^2 &= (f + g, f + g) = \|f\|^2 + 2(f, g) + \|g\|^2 \\ &\leq \|f\|^2 + 2\|f\| \|g\| + \|g\|^2 = (\|f\| + \|g\|)^2. \end{aligned}$$

両辺の平方根をとって (2) を得る. $\square$

定理 1.2 $f(t)$ を周期 T の区分的に連続な関数として, $\omega = \frac{2\pi}{T}$,

$$\begin{aligned} f_N(t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \\ a_n &= \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos n\omega t dt \quad (n \geq 0), \quad b_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin n\omega t dt \quad (n \geq 1) \end{aligned}$$

とおくと,

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \left(\int_0^T (f(t) - f_N(x))^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} = 0$$

が成立する.

証明: $\omega t = x$ とおくことにより, $f(t)$ は周期 2π の区分的に連続な関数としてよい.

任意の $\varepsilon > 0$ に対して, 補題 1.2 より $\|f - g\| \leq \varepsilon$ を満たしかつ連続な周期 2π の関数 $g(t)$ が存在する. $g(t)$ のフーリエ係数を a'_n, b'_n として,

$$g_N(t) = \frac{a'_0}{2} + \sum_{n=1}^N (a'_n \cos nt + b'_n \sin nt)$$

とおくと, 定理 1.1 より, $\lim_{N \rightarrow \infty} \|g - g_N\| = 0$ となる. 命題 1.7 と補題 1.3 より, N が十分大きいとき,

$$\|f - f_N\| \leq \|f - g_N\| = \|(f - g) + (g - g_N)\| \leq \|f - g\| + \|g - g_N\| < \varepsilon + \|g - g_N\| < 2\varepsilon$$

が成立する. 従って $\lim_{N \rightarrow \infty} \|f - f_N\| = 0$ が証明された. $\square$

2 デジタル信号と離散フーリエ変換

たとえば音楽や音声などを録音する場合, 音を表す関数 $f(t)$ を記録することになります. 以前に用いられていたレコードでは $f(t)$ を溝の深さとしてレコード盤に刻み, テープレコーダーでは磁気の強さとして磁気テープ (カセットテープ等) に記録していました. これは関数 $f(t)$ をそのまま, つまりアナログ信号として録音する方式です.

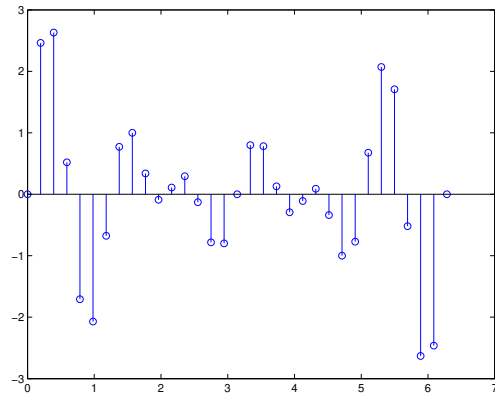
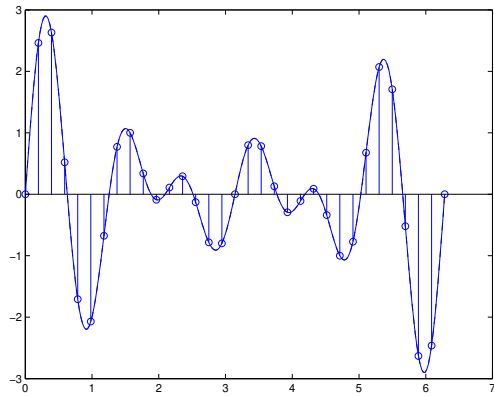
しかし現在主に用いられている CD やデジタル録音機 (コンピュータでの録音を含む) などでは, 音を表す関数 $f(t)$ をそのまま記録するのではなく, 標本化 (と量子化) という手続きによって数列 $\{f_0, f_1, f_2, \dots\}$ に直して記録しています. (ここでは話を簡単にするため, 量子化については触れないことにします.)

2.1 サンプリングと離散フーリエ変換

標本化 (サンプリング) とは, 微小な時間間隔 Δt を固定し (CD の場合は $1/44100$ 秒), $t = n\Delta t$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) のときの $f(t)$ の値, すなわち数列

$$f_0 = f(0), f_1 = f(\Delta t), f_2 = f(2\Delta t), f_3 = f(3\Delta t), \dots$$

を記録することです. (Δt の倍数以外の t に対する $f(t)$ の値は捨てられます.) たとえば, $f(t) = \sin 4t + \sin 5t + \sin 6t$ (左図) を $\Delta t = \frac{2\pi}{32} = \frac{\pi}{16}$ として $0 \leq t \leq 2\pi$ の範囲で標本化して, 数列 $\{f_0, f_1, f_2, \dots, f_{32}\}$ を棒グラフで表すと右図のようになります.



さて、 $f(t)$ を周期 T 、基本角周波数 ω の実数値周期関数とすると、そのフーリエ級数とフーリエ係数は

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{in\omega t} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \exp(in\omega t),$$

$$c_n = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) e^{-in\omega t} dt = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) \exp(-in\omega t) dt$$

で与えられます。(指数関数 e^x を $\exp(x)$ と表します。) おおのこの整数 n に対して c_n の値をリーマン和で近似してみましょう。 N を自然数として、区間 $[0, T]$ を N 等分して $\Delta t = \frac{T}{N}$ とおき、

$$t_k = k\Delta t = \frac{T}{N}k \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

とおくと、 c_n を定義する積分に対応するリーマン和 $\tilde{c}_n$ は

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{T} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \exp(-in\omega t_k) \frac{T}{N} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} f(t_k) \exp(-in\omega t_k)$$

となります。リーマン和の $N \rightarrow \infty$ とした極限が定積分なので、 N を十分大きくとれば、 $\tilde{c}_n$ は c_n に近いと考えられます。時刻 t の刻み幅 $\Delta t = \frac{T}{N}$ の逆数 $F_s = \frac{1}{\Delta t} = \frac{N}{T}$ のことをサンプリング周波数と呼びます。CD のサンプリング周波数は 44100 Hz です。

さて、上のリーマン和の式において $in\omega t_k = in \frac{2\pi}{T} \frac{T}{N} k = \frac{2\pi i}{N} nk$ であることに注意して、

$$f_k = f(t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1), \quad W = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}\right) = e^{\frac{2\pi i}{N}}$$

とおくと、

$$\tilde{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-nk} f_k = \frac{1}{N} (f_0 + W^{-n} f_1 + W^{-2n} f_2 + \dots + W^{-(N-1)n} f_{N-1}) \quad (14)$$

という式が得られます. ここで j, ℓ を整数として $n = jN + \ell$ ($0 \leq \ell \leq N - 1$) とすると, $W^{-N} = 1$ より

$$\tilde{c}_n = \tilde{c}_{jN+\ell} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(jN+\ell)k} f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-\ell k} f_k = \tilde{c}_\ell$$

が成立します. つまりフーリエ係数の近似値 $\tilde{c}_n$ は, $\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1}$ だけ求めておけば, あとはこれらの繰り返しとなるわけです. (本当のフーリエ係数 c_n にはこのような性質はありません.) そこで式 (14) において $n = 0, 1, \dots, N - 1$ とすれば, (14) は複素数を成分とする N 次元ベクトル $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ から N 次元ベクトル $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ への線形変換 (線形写像)

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{N-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{N} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W^{-1} & W^{-2} & \cdots & W^{-(N-1)} \\ 1 & W^{-2} & W^{-4} & \cdots & W^{-2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{-(N-1)} & W^{-2(N-1)} & \cdots & W^{-(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} \quad (15)$$

を表していると考えることができます. この線形変換を離散フーリエ変換 (DFT, discrete Fourier transform) と呼びます. これは周期 T にらず N だけで定まります.

例 2.1 $N = 4$ のとき, $W = \exp(\frac{\pi i}{2}) = i$ より離散フーリエ変換は

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}$$

で与えられます. たとえば $T = 2\pi$, $N = 4$, $f(t) = \cos t$ とすると, $\Delta t = \frac{\pi}{2}$ で

$$f_0 = \cos 0 = 1, \quad f_1 = \cos \frac{\pi}{2} = 0, \quad f_2 = \cos \pi = -1, \quad f_3 = \cos \frac{3\pi}{2} = 0$$

より

$$\tilde{c}_0 = 0, \quad \tilde{c}_1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{c}_2 = 0, \quad \tilde{c}_3 = \frac{1}{2}$$

例 2.2 $T = 2\pi$, $N = 8$, $(\Delta t = \frac{\pi}{4})$, $f(t) = \cos t$ のとき, $W = \exp\left(\frac{\pi i}{4}\right)$ とおくと

$$\begin{aligned} f_k &= f(k\Delta t) = \cos\left(\frac{\pi}{4}k\right) = \frac{1}{2} \left\{ \exp\left(\frac{\pi i}{4}k\right) + \exp\left(-\frac{\pi i}{4}k\right) \right\} \\ &= \frac{1}{2}(W^k + W^{-k}) \quad (k = 0, 1, \dots, 7) \end{aligned}$$

の離散フーリエ変換 $\tilde{c}_n$ ($n = 0, 1, \dots, 7$) は

$$\begin{aligned}\tilde{c}_n &= \frac{1}{8} \sum_{k=0}^7 W^{-nk} f_k = \frac{1}{16} \sum_{k=0}^7 W^{-nk} (W^k + W^{-k}) \\ &= \frac{1}{16} \sum_{k=0}^7 W^{-(n-1)k} + \frac{1}{16} \sum_{k=0}^7 W^{-(n+1)k}\end{aligned}$$

と変形できます．ここで等比級数の和の公式から， $n \neq 1$ ならば

$$\sum_{k=0}^7 W^{-(n-1)k} = \frac{1 - W^{-8(n-1)}}{1 - W^{-(n-1)}} = 0,$$

$n = 1$ のときは $\sum_{k=0}^7 W^{-(n-1)k} = 8$ となることがわかります．同様に， $n + 1 \neq 8$ すなわち $n \neq 7$ ならば

$$\sum_{k=0}^7 W^{-(n+1)k} = \frac{1 - W^{-8(n+1)}}{1 - W^{-(n+1)}} = 0,$$

$n = 7$ のときは $\sum_{k=0}^7 W^{-(n+1)k} = 8$ となります．以上により

$$\tilde{c}_0 = 0, \quad \tilde{c}_1 = \frac{1}{2}, \quad \tilde{c}_2 = 0, \quad \tilde{c}_3 = 0, \quad \tilde{c}_4 = 0, \quad \tilde{c}_5 = 0, \quad \tilde{c}_6 = 0, \quad \tilde{c}_7 = \frac{1}{2}.$$

補題 2.1 実数のベクトル $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換 $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ は

$$\tilde{c}_{N-n} = \overline{\tilde{c}_n} \quad (n = 0, 1, \dots, N-1)$$

を満たす．すなわち， $\tilde{c}_{N-n}$ は $\tilde{c}_n$ の共役複素数である．

証明: $W^N = 1$ と $\overline{W} = W^{-1}$ より $W^{-(N-n)k} = W^{nk} = \overline{W^{-nk}}$ であるから，

$$\tilde{c}_{N-n} = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} W^{-(N-n)k} f_k = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \overline{W^{-nk}} f_k = \overline{\tilde{c}_n}$$

ここで f_k は実数であるから， $\overline{f_k} = f_k$ であることを用いた．□

問題 2.1 $N = 3$ のとき，離散フーリエ変換を行列で表せ．

問題 2.2 $T = 2\pi$, $N = 4$, $f(t) = \sin t$, $\Delta t = \frac{\pi}{2}$ のとき， $f_k = f(k\Delta t)$, ($k = 0, 1, 2, 3$) の離散フーリエ変換を求めよ．

問題 2.3 $T = 2\pi$, $N = 8$, $f(t) = \sin t$, $\Delta t = \frac{\pi}{4}$ のとき， $f_k = f(k\Delta t)$, ($k = 0, 1, \dots, 7$) の離散フーリエ変換を求めよ．

2.2 逆離散フーリエ変換と標本化定理

定理 2.1 $\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{N-1}$ が (14) または (15) で与えられるとき,

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} \tilde{c}_n \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (16)$$

が成立する.

(16) を行列で表せば,

$$\begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & W & W^2 & \cdots & W^{N-1} \\ 1 & W^2 & W^4 & \cdots & W^{2(N-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & W^{N-1} & W^{2(N-1)} & \cdots & W^{(N-1)^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \vdots \\ \tilde{c}_{N-1} \end{pmatrix} \quad (17)$$

となります. これを逆離散フーリエ変換といいます. まず次の補題を示します.

補題 2.2 α が 1 と異なる複素数, N が自然数であって, $\alpha^N = 1$ であるとする, と,

$$\sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k = 1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^{N-1} = 0$$

が成立する.

証明: $S = \sum_{k=0}^{N-1} \alpha^k$ とおくと,

$$(1 - \alpha)S = S - \alpha S = (1 + \alpha + \cdots + \alpha^{N-1}) - (\alpha + \alpha^2 + \cdots + \alpha^N) = 1 - \alpha^N = 0$$

である. これと $1 - \alpha \neq 0$ より $S = 0$ となる. $\square$

定理 2.1 の証明: (15) の行列を A , (17) の行列を B とすると, A の (n, k) 成分は W^{-nk} , B の (n, k) 成分は W^{nk} であるから, AB の (n, k) 成分は

$$\sum_{j=0}^{N-1} W^{-nj} W^{jk} = \sum_{j=0}^{N-1} W^{(k-n)j} = \sum_{j=0}^{N-1} (W^{k-n})^j$$

$k \neq n$ のときは, $-N < k - n < N$ より $W^{k-n} \neq 1$ であるから, 補題 2.2 よりこの和は 0 である. $n = k$ のときは $W^{k-n} = 1$ よりこの和は N となる. 従って $AB = NI_N$ (I_N は N 次単位行列) が示された. これより $B = \left(\frac{1}{N}A\right)^{-1}$ であるから, (17) が (15) の逆変換であることがわかった. $\square$

例 2.3 $N = 4$ のとき, $W = \exp(\frac{\pi i}{2}) = i$ より離散フーリエ変換と逆離散フーリエ変換は次のようになります.

$$\begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix} = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -i & -1 & i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & i & -1 & -i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} f_0 \\ f_1 \\ f_2 \\ f_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & i & -1 & -i \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -i & -1 & i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{c}_0 \\ \tilde{c}_1 \\ \tilde{c}_2 \\ \tilde{c}_3 \end{pmatrix}$$

逆離散フーリエ変換の式 (16) の意味を考えてみましょう. (16) を角周波数 ω と t_k を用いて書き直すと

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} W^{nk} \tilde{c}_n = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N} nk\right) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n \exp(in\omega t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1)$$

となります. ここで角周波数 $n\omega$ の (複素) 単振動を表す関数

$$e_n(t) = \exp(in\omega t)$$

を導入すれば,

$$f_k = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n e_n(t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N-1) \quad (18)$$

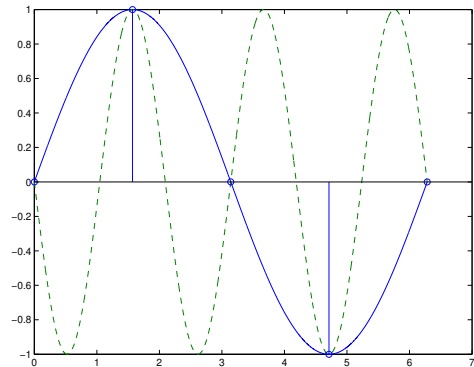
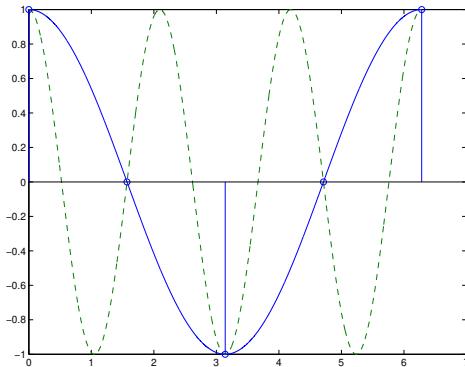
となります. ここで右辺の t_k を t にした関数

$$\sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n e_n(t) = \sum_{n=0}^{N-1} \tilde{c}_n \exp(in\omega t)$$

は有限複素フーリエ級数の形をしています, 負の n に対応する項がなく, 実数値関数の複素フーリエ展開の形はしていません. そこで

$$\exp(i(n-N)\omega t_k) = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(n-N)k\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) = \exp(in\omega t_k)$$

より $e_{n-N}(t_k) = e_n(t_k)$ ($k = 0, 1, \dots, N-1$) が成立することに注意します. 2つの関数 $e_{n-N}(t)$ と $e_n(t)$ は異なりますが, 標本点 t_k における値は一致するため, 標本化すると区別できなくなるというわけです. たとえば $N = 4$ のとき, $e_1(t)$ (実線) と $e_{-3}(t)$ (点線) は標本点 $t_k = \frac{T}{4}k$ ($k = 0, 1, 2, 3$) において同じ値を取るため, 標本化すると区別できません. 下の図は $e_1(t)$ と $e_{-3}(t)$ とその標本化を表したものです (左が実部, 右が虚部). 実線 $e_1(t)$ と破線 $e_{-3}(t)$ は標本点で交わっています. このような現象をエイリアシング (aliasing) と呼びます.



さて, (18) において n は $0 \leq n \leq N-1$ の範囲としましたが, $n > \frac{N}{2}$ のときは, $|n-N| < n$ なので $e_{n-N}(t)$ の角周波数 $|n-N|\omega$ の方が, $e_n(t)$ の角周波数 $n\omega$ よりも小さくなります. また, $1 \leq n \leq N-1$ のとき $\tilde{c}_n = \overline{\tilde{c}_{N-n}}$ が成り立つので,

$$\tilde{c}_n e_n(t_k) = \overline{\tilde{c}_{N-n}} e_{n-N}(t_k)$$

となることに注意します. これを用いて, $\frac{N}{2} < n < N$ を満たす n については (18) において $\tilde{c}_n e_n(t)$ を $\overline{\tilde{c}_{N-n}} e_{n-N}(t)$ で置き換えると, N が奇数のときは,

$$f_k = \sum_{n=0}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{c}_n e_n(t_k) + \sum_{n=\frac{N+1}{2}}^{N-1} \tilde{c}_n e_n(t_k) = \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{c}_n e_n(t_k) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \overline{\tilde{c}_n} e_{-n}(t_k)$$

N が偶数のときは, $e_{-\frac{N}{2}}(t_k) = e_{\frac{N}{2}}(t_k)$ と $\overline{\tilde{c}_{\frac{N}{2}}} = \tilde{c}_{\frac{N}{2}}$ に注意すると

$$\begin{aligned} f_k &= \sum_{n=0}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{c}_n e_n(t_k) + \tilde{c}_{\frac{N}{2}} e_{\frac{N}{2}}(t_k) + \sum_{n=\frac{N}{2}+1}^{N-1} \tilde{c}_n e_n(t_k) \\ &= \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{c}_n e_n(t_k) + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overline{\tilde{c}_n} e_{-n}(t_k) + \frac{1}{2} \tilde{c}_{\frac{N}{2}} e_{\frac{N}{2}}(t_k) + \frac{1}{2} \overline{\tilde{c}_{\frac{N}{2}}} e_{-\frac{N}{2}}(t_k) \end{aligned}$$

と表されます. そこで

$$g_N(t) = \begin{cases} \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \tilde{c}_n e_n(t) + \sum_{n=1}^{\frac{N-1}{2}} \overline{\tilde{c}_n} e_{-n}(t) & (N \text{ が奇数のとき}) \\ \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \tilde{c}_n e_n(t) + \frac{1}{2} \tilde{c}_{\frac{N}{2}} e_{\frac{N}{2}}(t) + \sum_{n=1}^{\frac{N}{2}-1} \overline{\tilde{c}_n} e_{-n}(t) + \frac{1}{2} \overline{\tilde{c}_{\frac{N}{2}}} e_{-\frac{N}{2}}(t) & (N \text{ が偶数のとき}) \end{cases}$$

とおけば, $g_N(t)$ は基本角周波数が $\frac{N}{2}\omega$ 以下の単振動からなる有限フーリエ級数であり,

$$f_k = f(t_k) = g_N(t_k) \quad (k = 0, 1, \dots, N)$$

すなわち $g_N(t)$ は標本化するともとの信号 $f(t)$ と一致します. サンプルング周波数は $F_s = \frac{N}{T}$ で与えられるので, $g_N(t)$ に含まれる単振動の基本周波数は

$$\frac{N}{2} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{N}{2} \frac{1}{T} = \frac{1}{2} F_s$$

以下であることがわかります. すなわち, $f(t)$ をサンプルングすると, サンプルング周波数の半分以下の周波数の単振動のみを含む信号 $g_N(t)$ と区別できなくなります.

一方, もし $f(t)$ が最初からサンプルング周波数の半分より小さな周波数の単振動しか含んでいないならば, $f(t)$ をサンプルングしてできるベクトルの離散フーリエ変換からもとの $f(t)$ を完全に復元することができます.

定理 2.2 (標本化定理) 周期 T の関数 $f(t)$ が有限フーリエ級数

$$f(t) = \sum_{n=-M}^M c_n e^{in\omega t} \quad \left(\omega = \frac{2\pi}{T}, \quad M = \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor \quad (M \leq \frac{N}{2} \text{ をみたす最大の整数}) \right)$$

で表されると仮定する。(これは $f(t)$ が、周波数が $\frac{N}{2} \frac{\omega}{2\pi} = \frac{N}{2T} = \frac{1}{2}F_s$ 以下であるような単振動の 1 次結合で表されることを意味する。) このとき、 $t_k = \frac{k}{N}T$ として、 $(\tilde{c}_0, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ を $(f(t_0), \dots, f(t_{N-1}))$ の離散フーリエ変換とすると、

$$0 \leq k < \frac{N}{2} \Rightarrow \tilde{c}_k = c_k$$

が成立する。特に、 N が奇数であるか、または N が偶数でかつ $c_{N/2} = 0$ であれば (すなわち、 $f(t)$ が $F_s/2$ 以上の周波数の単振動を含まなければ)、 $f(t)$ は $(f(t_0), \dots, f(t_{N-1}))$ (の離散フーリエ変換) から完全に復元できる。

証明: $\exp(in\omega t_k) = \exp\left(in \frac{2\pi}{T} \frac{kT}{N}\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right)$ であるが、 $n < 0$ のときはさらに $\exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) = \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(n+N)k\right)$ に注意すると、

$$\begin{aligned} f(t_k) &= \sum_{n=-M}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) \\ &= \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) + \sum_{n=1}^M c_{-n} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(-n)k\right) \\ &= \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) + \sum_{n=1}^M c_{-n} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}(N-n)k\right) \\ &= \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) + \sum_{n=N-M}^{N-1} c_{n-N} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) \end{aligned}$$

を得る。ここで最後の行ではその上の行の $N-n$ をあらためて n とした。

N が奇数のときは、 $M = \frac{N-1}{2}$, $N-M = \frac{N+1}{2} = M+1$ であり、

$$f_k = f(t_k) = \sum_{n=0}^M c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) + \sum_{n=M+1}^{N-1} c_{n-N} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right)$$

となる。この式は $(c_0, c_1, \dots, c_M, c_{-M}, c_{-(M-1)}, \dots, c_{-1})$ の逆離散フーリエ変換が $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ であることを意味している。従って、 $(c_0, c_1, \dots, c_M, c_{-M}, c_{-(M-1)}, \dots, c_{-1})$ は $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換である。一方、 $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ は $(f_0, f_1, \dots, f_{N-1})$ の離散フーリエ変換であったから、

$$(c_0, c_1, \dots, c_M, c_{-M}, c_{-(M-1)}, \dots, c_{-1}) = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$$

が成立する．これから結論を得る．

一方， N が偶数のときは $M = \frac{N}{2} = N - M$ であり，

$$f_k = f(t_k) = \sum_{n=0}^{M-1} c_n \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right) + (c_M + c_{-M}) \exp\left(\frac{2\pi i}{N}Mk\right) + \sum_{n=M+1}^{N-1} c_{n-N} \exp\left(\frac{2\pi i}{N}nk\right)$$

となるから，上と同様の議論により，

$$(c_0, c_1, \dots, c_{M-1}, c_M + c_{-M}, c_{-(M-1)}, \dots, c_{-1}) = (\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$$

が成立することがわかる，□

以上により，アナログ信号 $f(t)$ を標本化する前に， $f(t)$ に含まれる周波数が $\frac{F_s}{2}$ より大きな成分はあらかじめ除去しておけば，サンプリングによって元のアナログ信号のスペクトルが正確に決定でき，従って元の信号を完全に復元できることがわかりました．

実際の音声解析では，まず音声信号 $f(t)$ を $\frac{F_s}{2}$ 以上の周波数成分をカットするような回路 (Low Path Filter) を通してから標本化 (および値を有限個の数で近似する量子化と呼ばれる操作) を行い，次にそのデータ (ベクトル) を離散フーリエ変換して， $(\tilde{c}_0, \tilde{c}_1, \dots, \tilde{c}_{N-1})$ を求めます．このうち $0 \leq n < \frac{N}{2}$ の範囲の n に対する $\tilde{c}_n$ が，もとの音声信号 $f(t)$ の複素フーリエ係数 c_n と一致します．よって，

$$|\tilde{c}_0|, |\tilde{c}_1|, \dots, |\tilde{c}_{\frac{N}{2}-1}| \quad (\text{または } |\tilde{c}_{\frac{N-1}{2}}|)$$

が $f(t)$ のスペクトルを表します． $(|\tilde{c}_n|$ は $f(t)$ に含まれる角周波数 $n\omega$ の単振動の振幅を表します．)

たとえば， $f(t)$ が周波数 441Hz の音声信号を表しているとしましょう．サンプリング周波数を $F_s = 44100\text{Hz}$ とすると，1 周期 $T = \frac{1}{441}$ を 100 等分した t_k に対して $f(t_k)$ の値を記録することになるので， $N = 100$ となります．従って，もし $f(t)$ が 22050Hz 以上の周波数成分を含んでいなければ， $\omega = 2\pi \cdot 441$ として

$$f(t) = \tilde{c}_0 + 2\text{Re} \left\{ \sum_{n=1}^{49} \tilde{c}_n e^{in\omega t} \right\} = \tilde{c}_0 + \sum_{n=1}^{49} \tilde{c}_n e^{in\omega t} + \sum_{n=1}^{49} \overline{\tilde{c}_n} e^{-in\omega t}$$

が $f(t)$ の有限フーリエ級数による表示になります．

なお，離散フーリエ変換の計算は，徹底的に無駄を省いた高速フーリエ変換 (FFT) とよばれるアルゴリズムにより高速に実行することができます．特に N が 2 のべき乗 (たとえば $2^8 = 256$, $2^{10} = 1024$ など) の場合には著しく高速化されます．