

複素関数論

大阿久 俊則

2021 年 10 月 22 日版

複素関数論では、複素数の世界で関数の微分と積分を考察する。複素数の世界で微分可能な関数は正則関数と呼ばれ、多くの美しい性質を持つ。今まで実数の世界で考察してきた指数関数、三角関数、対数関数などの基本的な関数（初等関数）を複素数の世界で考察することで、新たな世界が展開する。たとえば複素数の世界では指数関数と三角関数はほとんど同じものと思ってよい。複素数の世界に考察を広げることによって、今まで考えてきた実数の関数についての理解が深まり、実数の世界では思いもよらないような計算ができるようになる。複素関数論 I では主に複素関数とその微分について考察し、複素関数論 II では複素関数の積分を用いて正則関数の種々の性質を示すとともに、実数関数の広義積分の計算に応用する。

1 複素数と複素（数）平面

1.1 複素数とその演算

2 乗すると -1 になるような「数」 $i = \sqrt{-1}$ （虚数単位）を導入し、実数 a, b を用いて $a + bi = a + b\sqrt{-1}$ と表されるような数のことを複素数 (complex number) という。 $a + bi$ を $a + ib$ とも表す。 (b が定数のときは bi , b が変数のときは ib と書くことが多い.)

2 つの複素数 $a + bi$ と $c + di$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) が等しいのは $a = c$ かつ $b = d$ が成立するときと定義する。すべての複素数からなる集合を $\mathbb{C}$ で表す。特に $a + 0i$ という形の複素数を実数 a と同一視する。これによって、実数全体の集合 $\mathbb{R}$ を $\mathbb{C}$ の部分集合とみなす。差集合 $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ の元、すなわち実数でない複素数のことを虚数 (imaginary number) という。

定義 1.1 集合 K が体 (field) であるとは、2 つの 2 項演算（加法と乗法）

$$K \times K \ni (a, b) \mapsto a + b \in K, \quad K \times K \ni (a, b) \mapsto ab \in K$$

が定義され次の性質を満たすことである。

- (1) 任意の $a, b, c \in K$ に対して $(a + b) + c = a + (b + c)$ が成立する。(加法の結合法則)
- (2) 任意の $a, b \in K$ に対して $a + b = b + a$ が成立する。(加法の交換法則)

- (3) K の元 0_K が存在して, 任意の $a \in K$ に対して $a + 0_K = a$ が成立する. (0_K を加法についての単位元といい, 通常は単に 0 で表す.)
- (4) K の任意の元 a に対してある $b \in K$ が存在して $a + b = 0$ が成立する. このとき $b = -a$ と表し a の加法についての逆元という.
- (5) 任意の $a, b, c \in K$ に対して $(ab)c = a(bc)$ が成立する. (乗法の結合法則)
- (6) K のある元 1_K が存在して, 任意の $a \in K$ に対して $a1_K = 1_K a = a$ が成立する. (1_K を乗法についての単位元といい, 通常は 1 で表す.)
- (7) 任意の $a, b, c \in K$ に対して $a(b + c) = ab + ac$, $(a + b)c = ac + bc$ が成立する. (分配法則)
- (8) 任意の $a, b \in K$ に対して $ab = ba$ が成立する. (乗法の交換法則)
- (9) 0 と異なる K の任意の元 a に対して $ab = ba = 1$ を満たす $b \in K$ が存在する. このとき $b = a^{-1} = \frac{1}{a}$ と表し, a の乗法についての逆元という.

$a, b \in K$ に対して, $a - b = a + (-b)$ と定義する. $b \neq 0$ ならば $ab^{-1} = \frac{a}{b}$ と表す. 有理数全体の集合 $\mathbb{Q}$ や実数全体の集合 $\mathbb{R}$ は体である. K の部分集合 L が K の部分体であるとは, L が K の加法と乗法について体となることである. $\mathbb{Q}$ は $\mathbb{R}$ の部分体である. さて, 2つの複素数 $\alpha = a + bi$ と $\beta = c + di$ に対して, 和と積を

$$\alpha + \beta = (a + c) + (b + d)i, \quad \alpha\beta = ac + (ad + bc)i + bdi^2 = (ac - bd) + (ad + bc)i$$

で定義する. 複素数の積を計算するには, α と β を i の実数係数多項式とみなして積を求めて $i^2 = -1$ を代入すればよい. この定義によって $\mathbb{C}$ が可換環になること, すなわち定義 1.1 の (1)–(8) の性質を満たすことは容易に確かめることができる. 加法については, 単位元は $0 = 0 + i0$, $\alpha = a + bi$ の逆元は $-\alpha = (-a) + (-b)i = -a - bi$ であり, 乗法の単位元は $1 = 1 + 0i$ である. $\mathbb{C}$ が体であること, すなわち (9) を満たすことを示そう. $\alpha = a + bi \neq 0$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対して

$$\beta = \frac{a - bi}{a^2 + b^2} = \frac{a}{a^2 + b^2} + \frac{-b}{a^2 + b^2}i$$

とおけば $\alpha\beta = 1$ となることが容易にわかるから $\beta = \alpha^{-1}$ である. 実際の計算には分母の「有理化」

$$\frac{1}{a + bi} = \frac{a - bi}{(a + bi)(a - bi)} = \frac{a - bi}{a^2 + b^2}$$

を用いればよい. また α, β が実数のときは $\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ は α, β を実数とみなしても複素数とみなしても同じであることも定義から容易にわかる. また, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が $\alpha\beta = 0$ をみたして $\alpha \neq 0$ であるとする, $\beta = \alpha^{-1}0 = 0$ である. 以上をまとめると

命題 1.1 $\mathbb{C}$ は上で定義した加法と乗法により体となり, 実数体 $\mathbb{R}$ を部分体として含む. 特に, $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ が $\alpha\beta = 0$ を満たせば $\alpha = 0$ または $\beta = 0$ である.

定義 1.2 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対して,

- (1) a を α の実部 (real part) といい, $a = \operatorname{Re} \alpha$ と表す. b を α の虚部 (imaginary part) といい, $b = \operatorname{Im} \alpha$ と表す. 虚部が 0 の複素数が実数である. 実部が 0 で虚部が 0 でないような複素数を純虚数という.
- (2) $\bar{\alpha} := a - bi$ を α の共役複素数 (complex conjugate) という.
- (3) $|\alpha| := \sqrt{a^2 + b^2}$ を α の絶対値 (absolute value) という.

複素数 α が実数であるための必要十分条件は $\bar{\alpha} = \alpha$ が成立することである. また, 実数 a を複素数とみなしたときの絶対値 $|a| = \sqrt{a^2}$ は $a \geq 0$ のときは a に等しく $a < 0$ のときは $-a$ に等しいから, 通常の実数に対する絶対値と一致する.

注意 1.1 実数の場合と異なり, 複素数に対して順序 (大小) 関係は通常は考えない. 従って, 不等式は実数についてのみ用いる. たとえば $r > 0$ という式では r は実数であると暗黙のうちに仮定している. 複素数の絶対値は実数であるから, たとえば複素数 z に対して $|z| < 1$ という式は実数の不等式として意味を持つ.

命題 1.2 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して, $\alpha + \bar{\alpha} = 2\operatorname{Re} \alpha$, $\alpha - \bar{\alpha} = 2i \operatorname{Im} \alpha$, $\overline{\alpha \pm \beta} = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}$, $\overline{\alpha\beta} = \bar{\alpha}\bar{\beta}$, $|\alpha|^2 = \alpha\bar{\alpha}$, $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ が成立する. さらに, $\beta \neq 0$ ならば $\overline{\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)} = \frac{\bar{\alpha}}{\bar{\beta}}$, $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| = \frac{|\alpha|}{|\beta|}$ が成立する.

証明: $\alpha = a + ib$, $\beta = c + id$ ($a, b, c, d \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\begin{aligned} \alpha + \bar{\alpha} &= 2a = 2\operatorname{Re} \alpha, & \alpha - \bar{\alpha} &= 2bi = 2i \operatorname{Im} \alpha, \\ \overline{\alpha \pm \beta} &= \overline{(a \pm c) + (b \pm d)i} = (a \pm c) - (b \pm d)i = (a - bi) \pm (c - di) = \bar{\alpha} \pm \bar{\beta}, \\ \overline{\alpha\beta} &= \overline{(ac - bd) + (ad + bc)i} = (ac - bd) - (ad + bc)i = \bar{\alpha}\bar{\beta}, \\ \bar{\alpha}\alpha &= (a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 = |\alpha|^2, \\ |\alpha\beta|^2 &= \alpha\beta\bar{\alpha}\bar{\beta} = \alpha\bar{\alpha}\beta\bar{\beta} = |\alpha|^2|\beta|^2 = (|\alpha||\beta|)^2 \end{aligned}$$

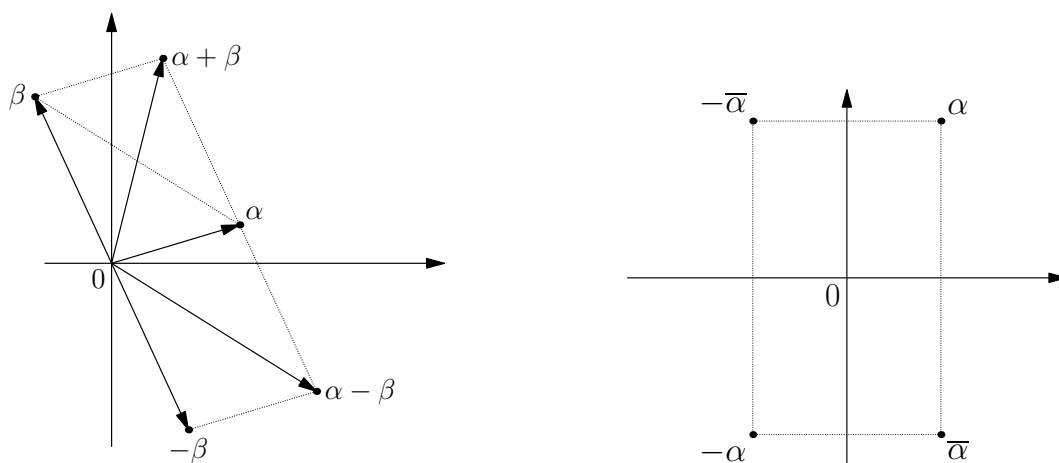
最後の等式と絶対値は非負であることから $|\alpha\beta| = |\alpha||\beta|$ が従う. また, $\beta \neq 0$ として $\gamma = \alpha/\beta$ とおくと, $\alpha = \beta\gamma$ より $\bar{\alpha} = \bar{\beta}\bar{\gamma}$, $|\alpha| = |\beta||\gamma|$ となるから, $\bar{\gamma} = \bar{\alpha}/\bar{\beta}$ と $|\gamma| = |\alpha|/|\beta|$ を得る. $\square$

問題 1.1 次の複素数を $a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) の形で表せ.

$$\begin{aligned} (1) \quad & (2 - 3i)(4 + 5i) & (2) \quad & \frac{3 - 4i}{2 + i} & (3) \quad & (1 - i)^3 \\ (4) \quad & \frac{1 - i}{1 + i} + \frac{1 + i}{1 - i} & (5) \quad & (2 + i)^{-2} & (6) \quad & (2 + 3i)^2 + \overline{(2 + 3i)^2} \end{aligned}$$

1.2 複素数平面

xy 平面の点 (a, b) と複素数 $\alpha = a + bi$ を対応させることにより，平面上の点 A と複素数を同一視することができる．このとき xy 平面のことを複素（数）平面または **Gauss 平面** と呼ぶ． $z = x + iy$ を複素数の変数と考えて z 平面と呼ぶこともある．点 A が複素数 α に対応することを $A(\alpha)$ と表すこともあるが，今後は簡単に「点」 α といふことが多い． x 軸のことを実軸， y 軸のことを虚軸という．実軸上の点の実数であり，虚軸上の（0 以外の）点純虚数である．2つの複素数 α と β の和と差は， α と β を平面ベクトルとみなしたときの和と差に等しい．

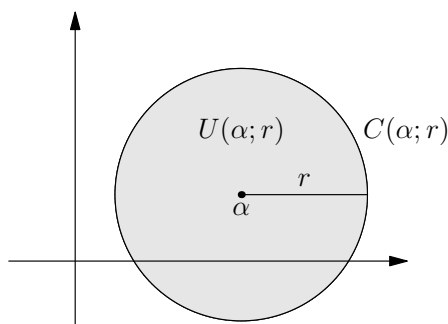


複素数 $\alpha = a + bi$ とその共役複素数 $\bar{\alpha} = a - bi$ は実軸に関して対称である．さらに $-\alpha = -a - bi$ と α は原点 0 に関して対称， $-\bar{\alpha} = -a + bi$ と α は虚軸に関して対称である．また実数 c と複素数 α に対して， $c\alpha$ は α をベクトルとみなしたときのスカラー倍に対応する．従って α と $c\alpha$ は原点を通る1つの直線上にある．逆に $0, \alpha, \beta$ が一直線上にあり $\alpha \neq 0$ ならば，ある実数 c によって $\beta = c\alpha$ と表される．

2つの複素数 α, β に対して $|\alpha - \beta|$ は複素数平面における α と β の（ユークリッド）距離を表す．たとえば，複素数 α と正の実数 r に対して，集合

$$U(\alpha; r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| < r\}, \quad C(\alpha; r) := \{z \in \mathbb{C} \mid |z - \alpha| = r\},$$

はそれぞれ α を中心とする半径 r の開円板（円の内部）と円周を表す．これらを簡単にそれぞれ，開円板 $|z - \alpha| < r$ ，円周 $|z - \alpha| = r$ などと言い表す．



命題 1.3 (三角不等式) 複素数 α, β に対して

$$(1) \quad |\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta| \quad (2) \quad ||\alpha| - |\beta|| \leq |\alpha - \beta|$$

が成立する. $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$ が成立するのは, 非負 (0 以上の) 実数 c が存在して $\beta = c\alpha$ または $\alpha = c\beta$ となるとき, すなわち α と β が原点を始点とする同一の半直線上にあるときである.

証明: (1) 一般に複素数 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) について $\operatorname{Re} \alpha = a \leq |a| \leq \sqrt{a^2 + b^2} = |\alpha|$ が成り立つ (等号は α が 0 以上の実数のときに限り成立) から,

$$\begin{aligned} |\alpha + \beta|^2 &= (\alpha + \beta)(\bar{\alpha} + \bar{\beta}) = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta = \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \alpha\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta \\ &= \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + 2\operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta}) \leq \alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + 2|\alpha||\beta| \\ &= |\alpha|^2 + |\beta|^2 + 2|\alpha||\beta| = (|\alpha| + |\beta|)^2 \end{aligned}$$

より $|\alpha + \beta| \leq |\alpha| + |\beta|$ が示された. ここで等号が成立するのは, $c := \alpha\bar{\beta}$ が 0 以上の実数のときである. このとき, もし $\beta \neq 0$ ならば $c\beta = \alpha\bar{\beta}\beta = \alpha|\beta|^2$ より, $\alpha = (c|\beta|^{-2})\beta$ となるから α は β の非負実数倍である. $\beta = 0$ のときは $\beta = 0\alpha$ が成立する.

逆に, たとえば非負実数 c があって $\beta = c\alpha$ であるとする,

$$|\alpha + \beta| = |(1 + c)\alpha| = (1 + c)|\alpha| = |\alpha| + c|\alpha| = |\alpha| + |c\alpha| = |\alpha| + |\beta|$$

となり等号が成立する. $\alpha = c\beta$ のときも同様である.

(2) (1) より

$$|\alpha| = |(\alpha - \beta) + \beta| \leq |\alpha - \beta| + |\beta|$$

よって $|\alpha| - |\beta| \leq |\alpha - \beta|$ が成立する. α と β を入れ替えれば $|\beta| - |\alpha| \leq |\beta - \alpha| = |\alpha - \beta|$ も成立するから

$$||\alpha| - |\beta|| = \max\{|\alpha| - |\beta|, |\beta| - |\alpha|\} \leq |\alpha - \beta|$$

□

例 1.1 $z^2 = -1$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

解答) $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと, $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ より $z^2 = -1$ が成立するための必要十分条件は $x^2 - y^2 = -1$ かつ $xy = 0$ である. $x = 0$ とすると $-y^2 = -1$ より $y = \pm 1$. よって $z = \pm i$. $y = 0$ とすると $x^2 = -1$. x は実数であるから, これを満たす x は存在しない. 以上により $z^2 = -1$ を満たす z は i と $-i$ である.

例 1.2 $z^2 = i$ を満たす複素数 z をすべて求めよ.

解答) $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とおくと, $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ より $z^2 = i$ が成立するための必要十分条件は $x^2 - y^2 = 0$ かつ $2xy = 1$ である. $x^2 - y^2 = (x + y)(x - y) = 0$ より $x = y$ または $x = -y$ である. $x = y$ を $2xy = 1$ に代入すると $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt{2}}$. $x = -y$ を $2xy = 1$ に代入すると $-2x^2 = 1$ となるが, これを満たす x は存在しない. 以上により $z^2 = i$ を満たす z は $z = \pm \frac{1+i}{\sqrt{2}}$ である. (後で極形式を用いた解法を述べる.)

問題 1.2 複素数平面において, $1 + 2i$, $3 + i$, $2 + 3i$ に対応する点を 3 頂点とする平行四辺形のもう一つの頂点に対応する複素数をすべて求めよ.

問題 1.3 複素数平面で $1 + i$, $-2i$, $2 - i$ に対応する点をそれぞれ A, B, C とするとき, 三角形 ABC の 3 辺の長さを求めよ.

問題 1.4 次の方程式を満たす複素数 z を $z = x + yi$ (x, y は実数) とおいて求めよ.

$$(1) \quad z^2 + 4 = 0 \quad (2) \quad z^2 = i \quad (3) \quad z + \frac{1}{z} = i \quad (4) \quad z^3 = -1$$

問題 1.5 複素数 z が $|z| < 1$ を満たすとき次の不等式が成立することを示せ. また, それらの複素数平面における図形的な意味を述べよ.

$$(1) \quad 0 < |z + i| < 2 \quad (2) \quad \operatorname{Im}(z + i) > 0$$

問題 1.6 α, β を複素数とする.

- (1) $|\alpha| - |\beta| = |\alpha - \beta|$ が成立するのはどのようなときか?
- (2) $|\beta| - |\alpha| = |\alpha - \beta|$ が成立するのはどのようなときか?
- (3) $||\alpha| - |\beta|| = |\alpha - \beta|$ が成立するのはどのようなときか?

1.3 複素数の極形式とド・モアブルの定理

定義 1.3 (極形式) $\alpha = a + bi$ を 0 でない複素数として, $r = |\alpha|$ とおく. 0 を始点として α を通る半直線が実軸の正の部分となす角度を θ とすると, $a = r \cos \theta$, $b = r \sin \theta$ が成立する. この θ を α の偏角 (argument) といい, $\theta = \arg \alpha$ と表す. このとき,

$$\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$$

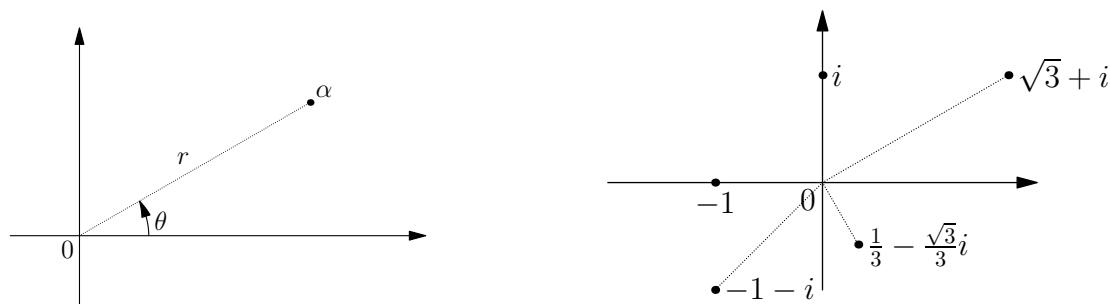
と表される. これを α の極形式という. ここで, 偏角 $\theta = \arg \alpha$ は一通りには定まらない. $\arg \alpha = \theta'$ すなわち

$$\alpha = r(\cos \theta' + i \sin \theta')$$

も成立するための必要十分条件は $\theta' - \theta$ が 2π の整数倍となることである. この条件を $\theta' \equiv \theta \pmod{2\pi}$ と表す.

偏角 θ の範囲をたとえば $0 \leq \theta < 2\pi$ の範囲に限定すれば, θ は α から一通りに定まる. さらに一般に, θ_0 を任意の実数として, θ を $\theta_0 \leq \theta < \theta_0 + 2\pi$ の範囲に限定してもよい. (たとえば $\theta_0 = -\pi$ の場合はよく用いられる)

$\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) のとき, $r = |\alpha| = \sqrt{a^2 + b^2}$ である. θ は $a \neq 0$ のときは $\tan \theta = \frac{b}{a}$, $b \neq 0$ のときは $\cot \theta = \frac{a}{b}$ を満たす.



たとえば, $-1 = \cos \pi + i \sin \pi = \cos(-\pi) + i \sin(-\pi)$, $i = \cos \frac{\pi}{2} + i \sin \frac{\pi}{2}$,

$$\begin{aligned}\sqrt{3} + i &= 2 \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right), \\ -1 - i &= \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{4} + i \sin \frac{5\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{3\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{3\pi}{4} \right) \right), \\ \frac{1}{3} - \frac{\sqrt{3}}{3}i &= \frac{2}{3} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = \frac{2}{3} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right)\end{aligned}$$

命題 1.4 r_1, r_2 を正の実数, θ_1, θ_2 を実数とするととき,

$$\alpha = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1), \quad \beta = r_2(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \} \\ \frac{\alpha}{\beta} &= \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}\end{aligned}$$

証明: 三角関数の加法定理によって

$$\begin{aligned}\alpha\beta &= r_1 r_2 (\cos \theta_1 + i \sin \theta_1)(\cos \theta_2 + i \sin \theta_2) \\ &= r_1 r_2 \{ (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2) + i(\cos \theta_1 \sin \theta_2 + \sin \theta_1 \cos \theta_2) \} \\ &= r_1 r_2 \{ \cos(\theta_1 + \theta_2) + i \sin(\theta_1 + \theta_2) \}\end{aligned}$$

が成立する. 特に $\theta_1 = \theta$, $\theta_2 = -\theta$ とすれば,

$$(\cos \theta + i \sin \theta) \{ \cos(-\theta) + i \sin(-\theta) \} = \cos(\theta - \theta) + i \sin(\theta - \theta) = 1$$

であるから,

$$(\cos \theta + i \sin \theta)^{-1} = \cos(-\theta) + i \sin(-\theta)$$

従って

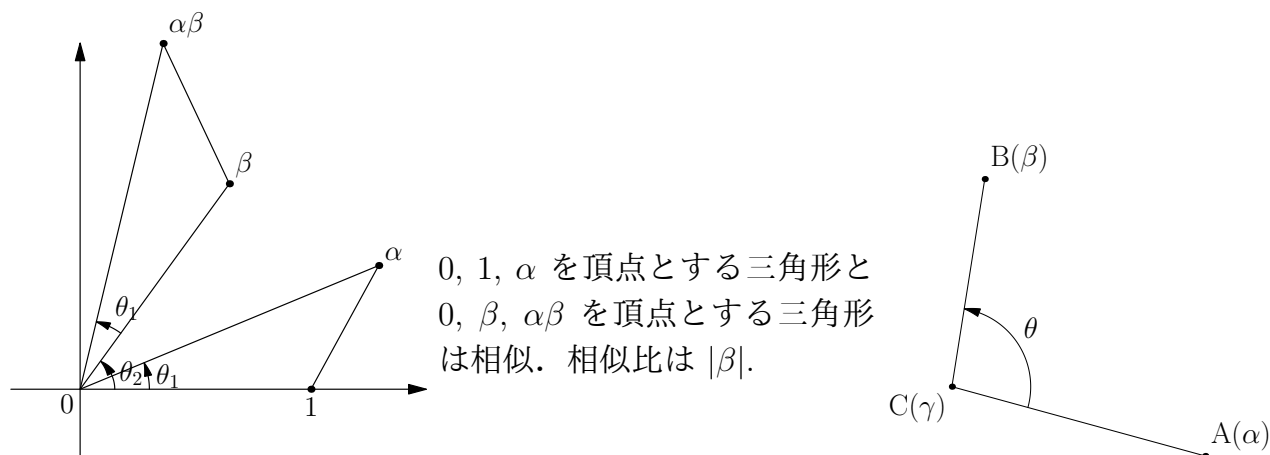
$$\frac{\alpha}{\beta} = r_1(\cos \theta_1 + i \sin \theta_1) \frac{1}{r_2} \{ \cos(-\theta_2) + i \sin(-\theta_2) \} = \frac{r_1}{r_2} \{ \cos(\theta_1 - \theta_2) + i \sin(\theta_1 - \theta_2) \}$$

□

系 1.1 α, β を 0 でない複素数とすると,

$$\arg(\alpha\beta) \equiv \arg \alpha + \arg \beta \pmod{2\pi}, \quad \arg \frac{\alpha}{\beta} \equiv \arg \alpha - \arg \beta \pmod{2\pi}$$

特に, 積 $\alpha\beta$ は左下の図のような幾何学的意味を持つことがわかる.



複素数 α, β, γ に対応する点を A, B, C とする. $\alpha \neq \gamma$ かつ $\beta \neq \gamma$ と仮定すると, 上の系によって $\theta = \arg \frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}$ は角 ACB と $\pmod{2\pi}$ で一致する (右上の図). 特に α, β, γ が一直線上にあるための必要十分条件は, θ が $\pmod{2\pi}$ で 0 か π に等しいこと, すなわち $\frac{\beta - \gamma}{\alpha - \gamma}$ が実数であることである.

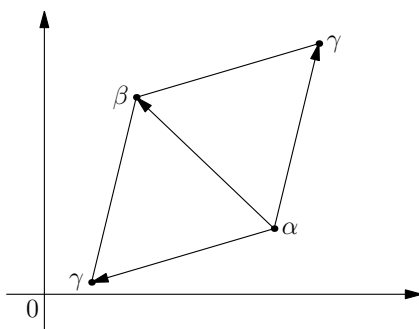
例 1.3 α と β を相異なる複素数とすると, 複素数平面において α, β, γ を頂点とする三角形が正三角形となるような複素数 γ を求めよ.

解答) α を始点, β を終点とするベクトルを $\pm \frac{\pi}{3}$ だけ回転したベクトルの終点を γ とすればよいから,

$$\gamma - \alpha = \left(\cos\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) + i \sin\left(\pm \frac{\pi}{3}\right) \right) (\beta - \alpha) = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} (\beta - \alpha).$$

よって

$$\gamma = \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} (\beta - \alpha) + \alpha = \frac{1 \mp i\sqrt{3}}{2} \alpha + \frac{1 \pm i\sqrt{3}}{2} \beta \quad (\text{複号同順})$$



命題 1.5 (de Moivre (ド・モアブル) の定理) 複素数 α の極形式を $\alpha = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とすると, 任意の整数 n に対して

$$\alpha^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

証明: $n = 1$ のときは明らか. $n \geq 2$ とする. $n - 1$ のときは成立すると仮定すると, 命題 1.4 より

$$\alpha^n = r(\cos \theta + i \sin \theta)r^{n-1}(\cos(n-1)\theta + i \sin(n-1)\theta) = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

よって, 任意の自然数 n について成立することが示された. $n < 0$ のときは, 命題 1.4 より

$$\alpha^n = (\alpha^{-n})^{-1} = \{r^{-n}(\cos(-n\theta) + i \sin(-n\theta))\}^{-1} = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$$

□

問題 1.7 次の複素数を極形式で表せ.

$$(1) \quad 1+i \quad (2) \quad 3-\sqrt{3}i \quad (3) \quad -\sqrt{2}-\sqrt{2}i \quad (4) \quad -\frac{1}{\sqrt{6}}+\frac{i}{\sqrt{2}}$$

問題 1.8 次の複素数を $a+bi$ (a, b は実数) の形で表せ.

$$(1) \quad \left(\frac{1+i}{2}\right)^5 \quad (2) \quad (1-i)^6 \quad (3) \quad (\sqrt{3}+i)^{-8} \quad (4) \quad \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{1000}$$

問題 1.9 複素平面上で $1-2\sqrt{3}+(2+\sqrt{3})i$ に対応する点を P とし, $1+2i$ に対応する点を Q とするとき, $\angle QOP$ を求めよ.

問題 1.10 複素数平面上で $1+i$ に対応する点を A とし, $2+3i$ に対応する点を B とする. $\triangle ABC$ が $\angle BAC$ が直角である直角 2 等辺三角形となるような点 C に対応する複素数を求めよ.

問題 1.11 複素数平面上で $1+i$ に対応する点を A とし, $2-i$ に対応する点を B とする. $\triangle ABC$ が正三角形となるような点 C に対応する複素数を求めよ.

1.4 1 の n 乗根と 2 項方程式

n を自然数として, $z^n = 1$ を満たす複素数 z をすべて求めよう. z を極形式で表して $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ とおく. ここで θ は $0 \leq \theta < 2\pi$ を満たすとしてよい. de Moivre の定理により

$$z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = 1 = \cos 0 + i \sin 0$$

絶対値を比較して $r^n = 1$, すなわち $r = 1$. (r は 0 以上の実数だから.) 偏角を比較して

$$n\theta = 2k\pi \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

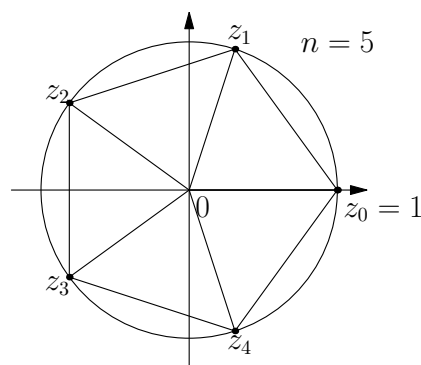
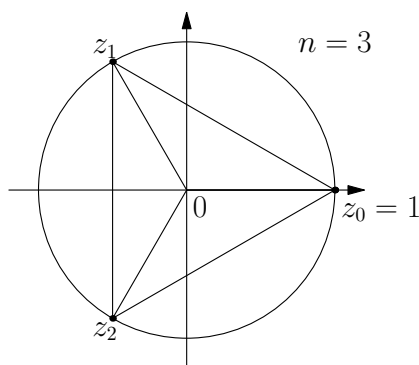
従って

$$z = \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

となることがわかる. ここで, $0 \leq \theta = \frac{2k\pi}{n} < 2\pi$ より $0 \leq k < n$ でなければならないから, $z^n = 1$ を満たす複素数 z は

$$z_k := \cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

の n 個である. この n 個の複素数のことを 1 の n 乗根という. これらは複素数平面の単位円上に等間隔で並んでいる. また de Moivre の定理より $z_k = z_1^k$ である.



例 1.4 1 の 3 乗根は

$$\cos 0 + i \sin 0 = 1, \quad \cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3} = \frac{-1 + \sqrt{3}i}{2}, \quad \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{2}$$

の 3 個, 同様にして 1 の 4 乗根は $1, i, -1, -i$ の 4 個であることがわかる.

● 2 項方程式 n を自然数, α を 0 でない複素数として, $z^n = \alpha$ を満たす複素数 z をすべて求めよう. z と α を極形式で表して

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta), \quad \alpha = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

とおくと,

$$r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta) = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi)$$

絶対値を比較して $r^n = \rho$, すなわち $r = \rho^{\frac{1}{n}}$. 偏角を比較して

$$n\theta = \varphi + 2k\pi \quad \text{すなわち} \quad \theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

従って

$$z = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) \quad (k \in \mathbb{Z})$$

となることがわかる．ここで， $\theta = \frac{\varphi + 2k\pi}{n}$ の範囲は $\frac{\varphi}{n} \leq \theta < \frac{\varphi}{n} + 2\pi$ としてよい．このとき $0 \leq k < n$ であるから， $z^n = \alpha$ を満たす複素数 z は

$$z_k := \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi + 2k\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2k\pi}{n} \right) = \rho^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\varphi}{n} + i \sin \frac{\varphi}{n} \right) \left(\cos \frac{2k\pi}{n} + i \sin \frac{2k\pi}{n} \right)$$

($0 \leq k \leq n-1$) の n 個である．これらは 0 を中心とする半径 $\rho^{\frac{1}{n}}$ の円周上に等間隔で並んでいる．特に $n=2$ の場合は， $z^2 = \alpha$ を満たす複素数は

$$z_0 = \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\varphi}{2} + i \sin \frac{\varphi}{2} \right), \quad z_1 = \sqrt{\rho} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{2} \right) = -z_0$$

の2つである．これらを α の平方根といい， $\sqrt{\alpha}$ と表すこともある．ただし実数のとき（たとえば $\sqrt{2}$ と $-\sqrt{2}$ のように）とは異なり，このうちの1つを曖昧さなく指定することは一般にはできない．

例 1.5 $z^3 = i$ を満たす複素数 z は

$$z_k = \cos \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} + i \sin \frac{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}{3} = \cos \frac{(4k+1)\pi}{6} + i \sin \frac{(4k+1)\pi}{6} \quad (k=0, 1, 2)$$

すなわち

$$z_0 = \frac{\sqrt{3} + i}{2}, \quad z_1 = \frac{-\sqrt{3} + i}{2}, \quad z_2 = -i$$

の3個である．

● **2次方程式** α, β を複素数とするととき，2次方程式

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0$$

を満たす複素数 z を求めよう．平方完成すると

$$\left(z + \frac{\alpha}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}(\alpha^2 - 4\beta)$$

より，2項方程式 $z_0^2 = \alpha^2 - 4\beta$ を満たす複素数 z_0 を1つ決めれば，

$$z = \frac{-\alpha \pm z_0}{2} = \frac{-\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - 4\beta}}{2}$$

となる．ここで $\sqrt{\alpha^2 - 4\beta}$ は $z^2 = \alpha^2 - 4\beta$ を満たす複素数 z のうちの1つを表す．

問題 1.12 極形式を用いて，次の方程式を満たす複素数 z をすべて求め， $a+bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) の形で表せ．

$$(1) \quad z^3 = i \quad (2) \quad z^6 = 1 \quad (3) \quad z^4 = -16$$

問題 1.13 複素数平面において $4+3i$ を中心とする円に内接する正6角形で，一つの頂点が原点 0 であるようなものを考える．この正6角形の他の5つの頂点に対応する複素数を求めよ．

1.5 直線と円の方程式

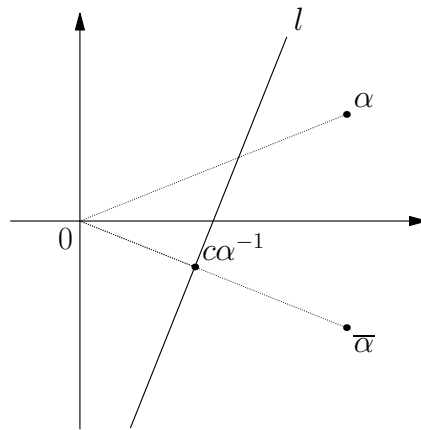
$z = x + iy$ とおき x, y を実数の変数とみなせば、複素数平面上の直線 l は、ある実数 a, b, c を用いて $ax + by = c$ と表される。(ただし $(a, b) \neq (0, 0)$.) 両辺を2倍して $2x = z + \bar{z}$, $2y = -i(z - \bar{z})$ を代入すると,

$$2c = a(z + \bar{z}) - bi(z - \bar{z}) = (a - bi)z + (a + bi)\bar{z} = 2\operatorname{Re}\{(a - bi)z\} \quad \therefore \operatorname{Re}\{(a - bi)z\} = c$$

と表される. 逆に α を0でない複素数, c を実数とすると, $\operatorname{Re}(\alpha z) = c$ を満たす複素数 z の全体は直線を表す. 実際 $\alpha = a - bi$ とおけば, 上の変形を逆にたどって $ax + by = c$ を得る. 以上により, 複素平面における直線 l の方程式は

$$l : \operatorname{Re}(\alpha z) = c \quad (\alpha \in \mathbb{C}, \alpha \neq 0, c \in \mathbb{R})$$

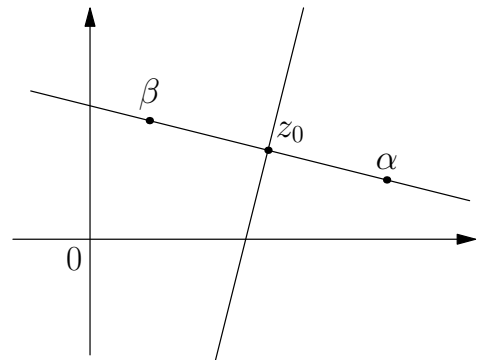
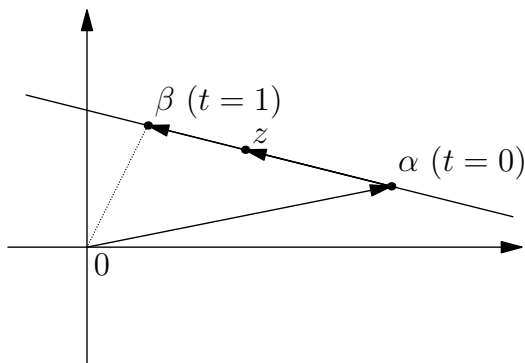
と表されることがわかった. $z = c\alpha^{-1}$ はこの方程式を満たすから, l は点 $c\alpha^{-1}$ を通る. また, l はベクトル (a, b) すなわち $\bar{\alpha} = a + bi$ と直交する.



α と β を相異なる複素数とする. 複素数 z が α と β を通る直線上にあるための必要十分条件は, ある実数 t があって,

$$z = \alpha + t(\beta - \alpha) = (1 - t)\alpha + t\beta$$

と表されることである. これは実数変数 t による直線のパラメータ表示である (下左図).



例 1.6 α と β を相異なる複素数とするととき, $|z - \alpha| = |z - \beta|$ を満たす複素数 z の全体は α と β を結ぶ線分の垂直 2 等分線である. (α と β から等距離にある点の集合であるから.) このことは, 次のように計算して導くこともできる.

$$\begin{aligned} 0 &= |z - \alpha|^2 - |z - \beta|^2 = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) - (z - \beta)(\bar{z} - \bar{\beta}) \\ &= (\bar{\beta} - \bar{\alpha})z + (\beta - \alpha)\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} = -2\operatorname{Re}\{(\bar{\alpha} - \bar{\beta})z\} + |\alpha|^2 - |\beta|^2. \end{aligned} \quad (1)$$

直線 (1) は $\alpha - \beta$ (に対応するベクトル) と直交する. さらに α と β の中点を $z_0 = (\alpha + \beta)/2$ とすると,

$$2\operatorname{Re}((\bar{\alpha} - \bar{\beta})z_0) = \operatorname{Re}(\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta}) = |\alpha|^2 - |\beta|^2$$

となる. ここで $\bar{\alpha}\beta - \alpha\bar{\beta} = \bar{\alpha}\beta - \overline{\alpha\bar{\beta}}$ は純虚数であり実部が 0 であることを用いた. よって直線 (1) は z_0 を通る. 以上により, $|z - \alpha| = |z - \beta|$ を満たす複素数 z の全体は, α と β を結ぶ線分の垂直 2 等分線であることが示された (上右図).

α を中心とする半径 r の円 C は

$$C: |z - \alpha| = r$$

と表される.

$$|z - \alpha|^2 = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha}$$

より, 円 C の方程式は

$$C: z\bar{z} - \bar{\alpha}z - \alpha\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - r^2 = 0$$

と表すこともできる. たとえば円 $C: |z - i| = 2$ は

$$C: z\bar{z} + iz - i\bar{z} - 3 = 0$$

と表すこともできる.

また, $z - \alpha$ の偏角を t とすれば $z - \alpha = r(\cos t + i \sin t)$ となるから, 円 $C: |z - \alpha| = r$ は, t をパラメータとして,

$$C: z = \alpha + r(\cos t + i \sin t) \quad (0 \leq t < 2\pi)$$

と表すこともできる.

例 1.7 α と β を相異なる複素数, r を $0 < r < 1$ を満たす実数とするととき, $|z - \alpha| = r|z - \beta|$ を満たす複素数 z の全体はどのような図形となるか? (解答)

$$\begin{aligned} 0 &= |z - \alpha|^2 - r^2|z - \beta|^2 = (z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) - r^2(z - \beta)(\bar{z} - \bar{\beta}) \\ &= (1 - r^2)z\bar{z} - (\bar{\alpha} - r^2\bar{\beta})z - (\alpha - r^2\beta)\bar{z} + \alpha\bar{\alpha} - r^2\beta\bar{\beta} \\ &= (1 - r^2)\left(z - \frac{\alpha - r^2\beta}{1 - r^2}\right)\left(\bar{z} - \frac{\bar{\alpha} - r^2\bar{\beta}}{1 - r^2}\right) - \frac{(\alpha - r^2\beta)(\bar{\alpha} - r^2\bar{\beta})}{1 - r^2} + \alpha\bar{\alpha} - r^2\beta\bar{\beta} \\ &= (1 - r^2)\left|z - \frac{\alpha - r^2\beta}{1 - r^2}\right|^2 - \frac{r^2}{1 - r^2}(\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \alpha\bar{\beta} - \bar{\alpha}\beta) \\ &= (1 - r^2)\left|z - \frac{\alpha - r^2\beta}{1 - r^2}\right|^2 - \frac{r^2}{1 - r^2}|\alpha - \beta|^2 \end{aligned}$$

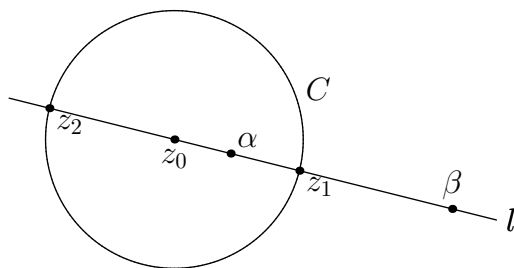
すなわち

$$\left| z - \frac{\alpha - r^2\beta}{1 - r^2} \right| = \frac{r}{1 - r^2} |\alpha - \beta|$$

を得る。(以上は同値変形である。) よって $|z - \alpha| = r|z - \beta|$ は, $z_0 := \frac{\alpha - r^2\beta}{1 - r^2}$ を中心とする半径 $R := \frac{r}{1 - r^2} |\alpha - \beta|$ の円を表す. この円を C として, α と β を結ぶ直線を l とする. C と l の交点は

$$\begin{aligned} z_1 &:= z_0 + \frac{r}{1 - r^2} (\beta - \alpha) = \frac{(1 - r)\alpha + (r - r^2)\beta}{1 - r^2} = \frac{\alpha + r\beta}{1 + r} \\ z_2 &:= z_0 - \frac{r}{1 - r^2} (\beta - \alpha) = \frac{(1 + r)\alpha - (r + r^2)\beta}{1 - r^2} = \frac{\alpha - r\beta}{1 - r} \end{aligned}$$

の2点である. z_1 は α と β を結ぶ線分を $r : 1$ に内分する点であり, z_2 は α と β を結ぶ線分を $r : 1$ に外分する点である. C は z_1 と z_2 を結ぶ線分を直径とする円である. これを Apollonius (アポロニウス) の円という.



問題 1.14 方程式 $z\bar{z} + 2(1+i)z + 2(1-i)\bar{z} = 0$ を満たす複素数 z を考える.

- (1) この方程式を, ある複素数 α と, ある実数 c を用いて $(z - \alpha)(\bar{z} - \bar{\alpha}) = c$ という形に書き直せ.
- (2) この方程式を満たす複素数の全体は複素数平面においてどのような集合になるか?

問題 1.15 複素数平面において $|z + i| < 2|z - i|$ を満たすような z の全体は複素数平面においてどのような集合になるか? (ヒント: 不等式の両辺を2乗して z と $\bar{z}$ を用いて表し, 前問と同様に変形する.)

問題 1.16 次の各々の条件を満たす複素数 z の全体は, 複素数平面上でどのような集合になるか? (図示せよ.)

- (1) $\operatorname{Re}(z^2) < 0$
- (2) $z = 1 + t + (2t - 1)i \quad (0 \leq t \leq 1)$
- (3) $\operatorname{Re}\{(1 - \sqrt{3}i)z\} > 1$
- (4) $z = 1 + i + \sqrt{2}(\cos t + i \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

$$(5) |z - 1 - i| < |z + i|$$

$$(6) \operatorname{Re} \left(\frac{z-1}{z+1} \right) > 0$$

問題 1.17 (発展) 1 の 5 乗根の一つ $\zeta := \cos \frac{2\pi}{5} + i \sin \frac{2\pi}{5}$ を $\cos$ と $\sin$ を用いずに表すことを考える.

(1) $z = \zeta$ は方程式 $z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$ を満たすことを示せ.

(2) $a := \zeta + \zeta^{-1}$ は正の実数であることを示せ.

(3) a が満たす 2 次方程式を導き a を平方根を用いて表せ. (ヒント: (1) の方程式を z^2 で割る.)

(4) ζ の実部と虚部を平方根を用いて表せ.

これから特に正 5 角形を定規とコンパスで作図できることがわかる.

2 複素関数と写像

2.1 複素関数とその簡単な例

複素数平面 $\mathbb{C}$ を 2 次元ユークリッド空間 $\mathbb{R}^2$ と同一視することにより位相空間とみなす. すなわち距離 $d(\alpha, \beta) := |\alpha - \beta|$ によって定まる距離空間としての位相を用いる.

D を $\mathbb{C}$ の開集合とする. D から $\mathbb{C}$ への写像 $f: D \rightarrow \mathbb{C}$ のことを D で定義された複素関数という. 独立変数を $z = x + iy$, 従属変数を $w = u + iv$ とすると, $w = f(z)$ と表すことができる. これを z 平面の開集合 D から w 平面への写像とみなすと

$$f: D \ni z \mapsto w = f(z) \in \mathbb{C}$$

と表される. D を f の定義域という. また, 関数 f を, 独立変数も明示して $f(z)$ と表すことも多い. (実数関数のときもそうであるが, $f(z)$ という記号はあいまいであり, 2 つの解釈ができる. 1 つはある複素数 z に対する関数 f の値を表しているという解釈. もう 1 つは, z は関数 f の独立変数の「名前」を表しているという解釈である. 後者の解釈は解析学では伝統的であるが, 集合や写像における記号の定義とは異なるので注意が必要である.)

$z = x + iy, w = u + iv$ ($x, y, u, v \in \mathbb{R}$) と表すと,

$$u = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

となる. u と v は x と y の 2 変数関数である. 以下では, この関数を従属変数と同じ記号で $u = u(x, y), v = v(x, y)$ と表すことにする. $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は D ($\mathbb{R}^2$ の開集合とみなす) で定義された実数変数 x, y についての実数値関数であり,

$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y) \quad (x + iy \in D)$$

が成立する. 逆に, $D \subset \mathbb{R}^2$ で定義された2つの2変数実数値関数 $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が与えられたとき,

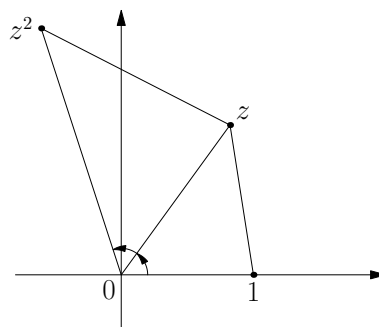
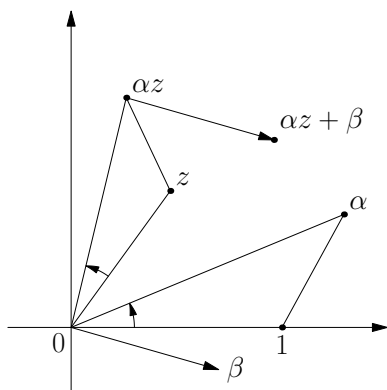
$$f(z) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$$

と定義すれば, $f(z)$ は $D \subset \mathbb{C}$ で定義された複素関数となる.

例 2.1 α, β を複素数の定数として $w = f(z) = \alpha z + \beta$ と表される $\mathbb{C}(z$ 平面) から $\mathbb{C}(w$ 平面) への写像を1次関数という. αz は原点 0 を中心とする相似比 $|\alpha|$ の拡大縮小と, 原点のまわりの角 $\arg \alpha$ の回転を合わせたものであり, $w = f(z)$ は, それをさらに β だけ平行移動したものである (下左図). $\alpha = a_1 + a_2i, \beta = b_1 + b_2i, z = x + iy, w = u + iv$ とおくと,

$$u = u(x, y) = a_1x - a_2y + b_1, \quad v = v(x, y) = a_2x + a_1y + b_2$$

となり, x と y についての1次式である. しかし, $u(x, y), v(x, y)$ が x と y の1次式であっても, $f(z)$ が z の1次式とは限らない. たとえば $u = x, v = -y$ とすると, $f(z) = x - iy = \bar{z}$ は z の1次式ではない. $\alpha \neq 0$ ならば $w = \alpha z + \beta$ と $z = (w - \beta)/\alpha$ は同値だから $f(z) = \alpha z + \beta$ は $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への全単射であり, $f(z)$ の逆写像 $f^{-1}(z) = (z - \beta)/\alpha$ も1次関数である.



例 2.2 $w = f(z) = \bar{z}$. これは $\mathbb{C}$ を定義域とし, z をその共役複素数 $\bar{z}$ にうつす写像である. 実軸についての対称変換であり, $\mathbb{C}$ から $\mathbb{C}$ への全単射である. f を実部と虚部で表すと

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = x, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = -y$$

である.

例 2.3 $w = f(z) = z^2$. $z = x + iy$ とおくと,

$$f(x + iy) = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$$

であるから,

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = 2xy$$

となる. 極形式を用いると de Moivre の定理により

$$f(r(\cos \theta + i \sin \theta)) = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta)$$

よって $|w| = |z|^2$, $\arg w \equiv 2 \arg z \pmod{2\pi}$ となる (上右図). 極座標表示から, $f: \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$ は全射であることがわかる. しかし, $f(-z) = f(z)$ であるから, f は単射ではない.

例 2.4 $w = f(z) = \frac{1}{z}$ は $D := \mathbb{C} \setminus \{0\}$ で定義された複素関数である.

$$f(x + iy) = \frac{1}{x + iy} = \frac{x - iy}{x^2 + y^2}$$

より

$$u(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}, \quad v(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}$$

となる. 極座標を用いると

$$f(r(\cos \theta + i \sin \theta)) = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

例 2.5 $f(z) = z^2$, $g(z) = z^{-1}$ とおくとき, 写像 f と g による集合

$$D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z > 0, \operatorname{Im} z > 0, |z| < 1\}$$

の像 $f(D)$ と $g(D)$ を求めよ. 解答) $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ($r \geq 0, 0 \leq \theta < 2\pi$) とすると,

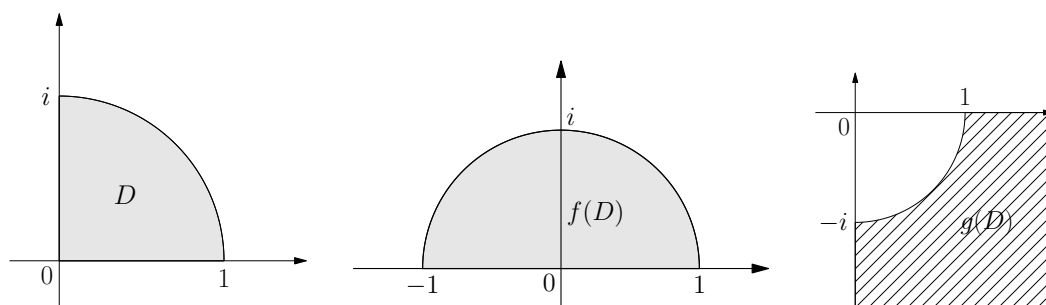
$$z \in D \Leftrightarrow \left(0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

である. これと

$$f(z) = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta), \quad g(z) = \frac{1}{r}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta))$$

より,

$$\begin{aligned} f(D) &= \left\{w = r^2(\cos 2\theta + i \sin 2\theta) \mid 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} \\ &= \{w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \mid 0 < \rho < 1, 0 < \varphi < \pi\} = \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Im} w > 0, |w| < 1\}, \\ g(D) &= \left\{w = r^{-1}(\cos(-\theta) + i \sin(-\theta)) \mid 0 < r < 1, 0 < \theta < \frac{\pi}{2}\right\} \\ &= \left\{w = \rho(\cos \varphi + i \sin \varphi) \mid \rho > 1, -\frac{\pi}{2} < \varphi < 0\right\} \\ &= \{w \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} w > 0, \operatorname{Im} w < 0, |w| > 1\} \end{aligned}$$



例 2.6 $w = f(z) = z^2$ による $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < \operatorname{Re} z < 1, 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ の像 $f(D)$ を求めよ. 解答) D の境界の 4 辺が $f(z)$ によってどのような曲線にうつるか調べればよい. 一般に a を定数とするととき, 直線 $x = a$ は,

$$u = x^2 - y^2 = a^2 - y^2, \quad v = 2xy = 2ay$$

より, $a \neq 0$ ならば

$$u = a^2 - \frac{v^2}{4a^2}$$

という放物線にうつる. 従って, $x = a$ かつ $0 \leq y \leq 1$ のとき, (u, v) はこの放物線のうち $0 \leq v \leq 2a$ の部分を動く. 特に, xy 平面において $(1, 0)$ と $(1, 1)$ を結ぶ線分は, $a = 1$ に対応するので, uv 平面において放物線 $u = 1 - \frac{1}{4}v^2$ のうち $0 \leq v \leq 2$ の部分にうつる.

また, $a = 0$ ならば $u = -y^2 \leq 0$ であるから, xy 平面において $(0, 0)$ と $(0, 1)$ を結ぶ線分は, uv 平面において $(0, 0)$ と $(-1, 0)$ を結ぶ線分にうつる.

一方, b を定数とするととき, 直線 $y = b$ は,

$$u = x^2 - y^2 = x^2 - b^2, \quad v = 2xy = 2bx$$

より, $b \neq 0$ ならば

$$u = \frac{v^2}{4b^2} - b^2$$

という放物線にうつる. 従って $0 \leq x \leq 1$ かつ $y = b$ のとき, (u, v) はこの放物線のうち $0 \leq v \leq 2b$ の部分を動く.

また, $b = 0$ ならば $u = x^2 \geq 0$ であるから, xy 平面において $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を結ぶ線分は, uv 平面において $(0, 0)$ と $(1, 0)$ を結ぶ線分にうつる.

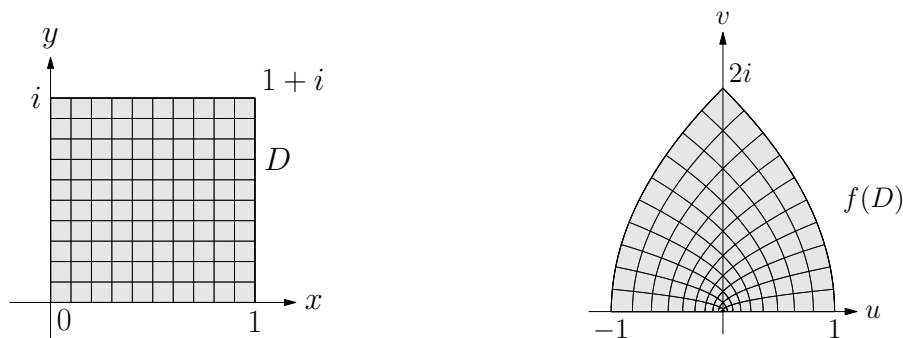
以上により, $f(D)$ は, 実軸と 2 つの放物線

$$u = 1 - \frac{1}{4}v^2, \quad u = \frac{1}{4}v^2 - 1$$

で囲まれた領域のうち $v > 0$ の部分

$$f(D) = \left\{ u + iv \mid \frac{1}{4}v^2 - 1 < u < 1 - \frac{1}{4}v^2, v > 0 \right\}$$

であることがわかる.



- 多項式関数 一般に $a_0, a_1, \dots, a_n$ を複素数の定数とするととき,

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0$$

という形の関数を z の多項式関数という. 定義域は $\mathbb{C}$ である. $a_n \neq 0$ ならば $f(z)$ を z の n 次関数ともいう.

たとえば $f(z) = z^3 - 3z + 1$ は 3 次の多項式関数である. しかし $f(z) = z^3 - 3\bar{z} + 1$ は多項式関数ではない.

- 有理関数 $g(z)$ と $h(z)$ を多項式関数とするととき, $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ を z の有理関数という. $f(z)$ の定義域は $D = \{z \in \mathbb{C} \mid h(z) \neq 0\}$ である.

たとえば $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ は $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ で定義された有理関数である.

問題 2.1 次の各々の複素関数 $f(z)$ の定義域 (できるだけ広くとる) を求めよ.

$$(1) f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad (2) f(z) = \frac{z + \bar{z}}{z\bar{z} + 1} \quad (3) f(z) = \frac{1}{z^3 - 1}$$

問題 2.2 次の各々の複素関数 $w = f(z)$ に対して, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ と $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ を x と y で表せ. ただし x と y は実数の変数とする.

$$(1) f(z) = z^3 \quad (2) f(z) = \frac{\bar{z}}{z} \quad (z \neq 0) \quad (3) f(z) = \frac{1}{z - 1} \quad (z \neq 1)$$

$$(4) f(z) = \frac{z}{z\bar{z} + 1}$$

問題 2.3 (1) $f(1) = 1 + i, f(i) = 2 - i$ を満たす z の 1 次関数 $f(z)$ を求めよ.

(2) (1) で求めた 1 次関数による写像 $w = f(z)$ によって $0, 1, i$ を頂点とする三角形はどのような図形にうつるか? (図示せよ.)

問題 2.4 (1) $u(x, y) = x + 2y, v(x, y) = 2x - y$ のとき, $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ (ただし $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$) を z と $\bar{z}$ の式で表せ.

(2) a, b, c, d を実数の定数として $u(x, y) = ax + by, v(x, y) = cx + dy$ とおく. $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ が $z = x + iy$ の 1 次関数である (複素数の定数 α, β によって $f(z) = \alpha z + \beta$ と表される) ための a, b, c, d に対する必要十分条件を求めよ.

問題 2.5 $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ を定義域とする複素関数 $w = f(z) = \frac{1}{z}$ を考える. 次の各々の集合 D に対して, f による D の像 $f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$ を求めよ.

$$(1) D = \{z = x + iy \mid x < 0, y > 0\}$$

$$(2) D = \{z = x + iy \mid |z| > 1, x < 0\}$$

問題 2.6 $\mathbb{C}$ を定義域とする複素関数 $w = f(z) = z^2$ を考える. 次の各々の集合 D に対して, f による D の像 $f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$ を求めよ.

- (1) $D = \{z = x + iy \mid x < 0\}$
- (2) $D = \{z = x + iy \mid y < 0\}$
- (3) $D = \{z = x + iy \mid x > 1\}$
- (4) $D = \{z = x + iy \mid x > |y|, |z| < 1\}$

2.2 指数関数

複素数 $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して,

$$e^z = \exp(z) := e^x(\cos y + i \sin y)$$

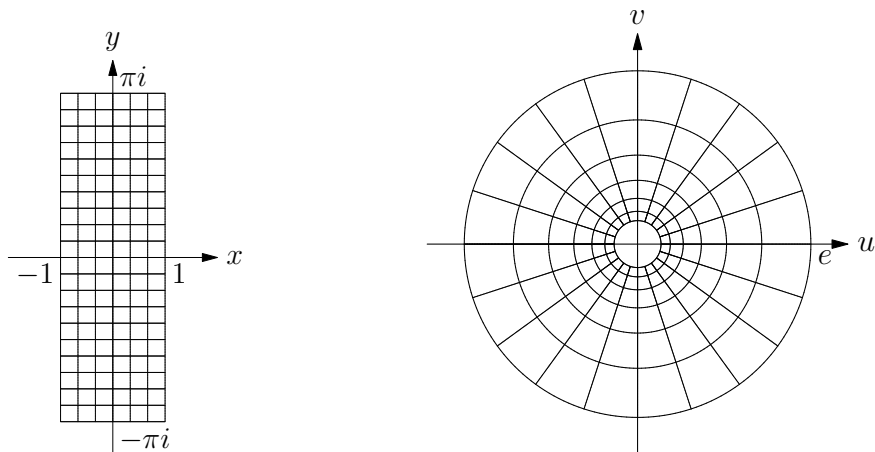
と定義して (複素数の) 指数関数という. たとえば $e^{1+\pi i} = e^1(\cos \pi + i \sin \pi) = -e$.

特に $x = 0$ のときの定義の式 $e^{iy} = \cos y + i \sin y$ は Euler (オイラー) の等式と呼ばれる.

e^z は $\mathbb{C}$ を定義域とする複素関数である.

$|e^z| = e^x > 0$ より $e^z = 0$ となることはない. $z = x \in \mathbb{R}$ のときは $\exp(z) = e^x$ となり, 実数の指数関数と一致する.

写像 $w = e^z$ は z 平面における実軸に平行な直線 $y = c$ を w 平面における偏角 c の半直線に, z 平面における虚軸に平行な直線 $x = c$ を w 平面における原点を中心とする半径 e^c の円周にうつす.



z の絶対値を r , 偏角を θ とすると, z の極形式は指数関数を用いて

$$z = r(\cos \theta + i \sin \theta) = re^{i\theta}$$

と表すことができる.

命題 2.1 (指数関数の性質) z, z_1, z_2 を複素数とすると,

$$(1) \quad e^{z_1+z_2} = e^{z_1}e^{z_2}, \quad e^{-z} = \frac{1}{e^z}$$

$$(2) e^z = 1 \Leftrightarrow z = 2n\pi i \quad (\exists n \in \mathbb{Z})$$

$$(3) \overline{e^z} = e^{\bar{z}}$$

$$(4) |e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$$

$$(5) e^{z+2n\pi i} = e^z \quad (\forall n \in \mathbb{Z})$$

$$(6) \{e^z \mid z \in \mathbb{C}\} = \mathbb{C} \setminus \{0\}$$

証明: (1) $z_k = x_k + iy_k$ ($k = 1, 2$) とおくと指数法則と加法定理により

$$\begin{aligned} e^{z_1+z_2} &= e^{x_1+x_2} \{\cos(y_1+y_2) + i \sin(y_1+y_2)\} \\ &= e^{x_1} e^{x_2} \{\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2 + i(\sin y_1 \cos y_2 + \cos y_1 \sin y_2)\} \\ &= e^{x_1} e^{x_2} (\cos y_1 + i \sin y_1)(\cos y_2 + i \sin y_2) = e^{z_1} e^{z_2} \end{aligned}$$

特に $e^z e^{-z} = e^{z-z} = e^0 = 1$ が成り立つから $e^{-z} = \frac{1}{e^z}$.

(2) $z = x + iy$ とおくと

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = 1 \Leftrightarrow e^x = 1, y = 2n\pi \quad (\exists n \in \mathbb{Z}) \Leftrightarrow z = 2n\pi i \quad (\exists n \in \mathbb{Z})$$

(3) $z = x + iy$ とおくと

$$\overline{e^z} = e^x(\cos y - i \sin y) = e^x\{\cos(-y) + i \sin(-y)\} = e^{x-iy} = e^{\bar{z}}$$

(4) $z = x + iy$ とおくと $|\cos y + i \sin y| = 1$ より

$$|e^z| = e^x |\cos y + i \sin y| = e^x = e^{\operatorname{Re} z}$$

(5) $z = x + iy$ とおくと

$$e^{z+2n\pi i} = e^x \{\cos(y+2n\pi) + i \sin(y+2n\pi)\} = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z$$

(6) $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) のとき $e^z = e^x(\cos y + i \sin y)$ であり, これは e^z の極形式とみなすことができる. x, y は任意の実数であり, $e^x > 0$ であるから, e^z は 0 以外のすべての複素数の値を取り得る. $\square$

問題 2.7 次の値を求めよ.

$$(1) e^{1-\pi i} \quad (2) \exp\left(2 - \frac{\pi i}{2}\right) \quad (3) \exp\left(-1 + \frac{5\pi i}{6}\right) \quad (4) \exp\left(-\frac{4\pi i}{3}\right)$$

問題 2.8 $w = f(z) = e^z$ とする. 次の各々の集合 D に対して, f による D の像 $f(D) = \{f(z) \mid z \in D\}$ を求めよ.

$$(1) D = \{z = x + iy \mid x > 0, y > 0\}$$

$$(2) D = \{z = x + iy \mid x < 1\}$$

$$(3) D = \{z = x + iy \mid 0 < x < 1, 0 < y < \pi\}$$

2.3 対数関数

複素数 z と w が $z = e^w$ を満たすとき (従って $z \neq 0$ でなければならない), $w = \log z$ と表し, w を z の (複素) 対数という. ただし対数は一通りには定まらない. $w = u + iv$ とおくと,

$$z = e^w = e^u(\cos v + i \sin v) \Leftrightarrow e^u = |z|, v = \arg z \pmod{2\pi}$$

より,

$$\log z = \log |z| + i(\arg z + 2n\pi) \quad (n \in \mathbb{Z})$$

となる. ここで $\log |z|$ は正の実数 $|z|$ の通常の実数の対数である. たとえば

$$\log(-1) = \log |-1| + i \arg(-1) = (2n+1)\pi i, \quad (n \in \mathbb{Z})$$

$$\log(ei) = \log |ei| + i \arg(ei) = 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2n\pi\right)i \quad (n \in \mathbb{Z})$$

このように, $\log z$ は与えられた $z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ に対して無数の値を持つ. 従って正確な意味では関数ではないが, 多価関数と呼ばれる. 定義により $\exp(\log z) = z$ が $\log z$ の任意の値について成立する.

$\log z$ の定義域を制限することにより, $\log z$ の値を一つに決めることができる. たとえば,

$$D_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$$

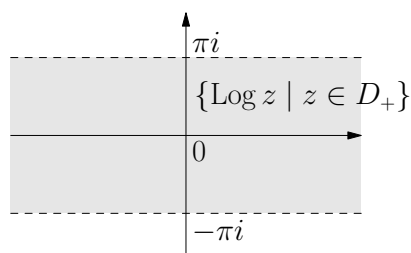
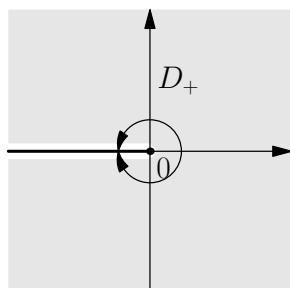
とにおいて $z \in D_+$ の偏角を $-\pi < \arg z < \pi$ と限定することができる. このとき,

$$\text{Log } z = \log |z| + i \arg z \quad (-\pi < \arg z < \pi)$$

と定めれば, $\text{Log } z$ は D_+ を定義域とする複素関数となる. たとえば

$$\text{Log}(ei) = \log |ei| + i \arg(ei) = 1 + \frac{\pi i}{2}, \quad \text{Log}(-i) = \log |i| + i \arg(-i) = -\frac{\pi i}{2}$$

これを D_+ における $\log z$ の主値または主枝という. このとき $\text{Log } z$ の値域 ($w = \text{Log } z$ による D_+ の像) は $\{w = u + iv \mid u \in \mathbb{R}, -\pi < v < \pi\}$ である.

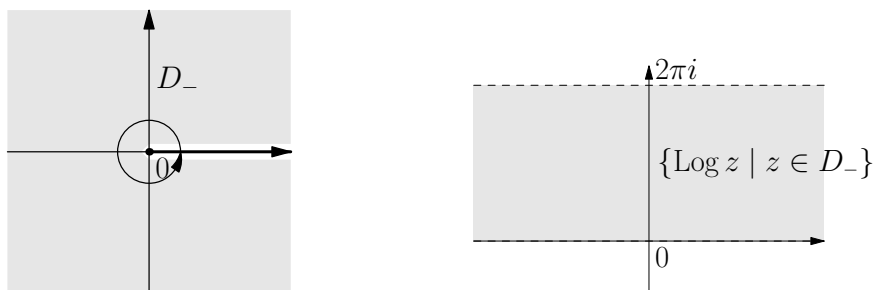


定義より $\exp(\operatorname{Log} z) = z$ が任意の $z \in D_+$ について成立する. しかし $\operatorname{Log}(\exp(z)) = z$ は必ずしも成立しない. たとえば $\operatorname{Log}\left(\exp\left(\frac{5\pi i}{2}\right)\right) = \operatorname{Log} i = \frac{\pi i}{2}$ となる.

また, $\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2$ も一般には成立しない. たとえば $z_1 = z_2 = -1 + i$ とすると, $z_1 z_2 = -2i$ であり,

$$\operatorname{Log}(z_1 z_2) = \log 2 - \frac{\pi i}{2}, \quad \operatorname{Log} z_1 + \operatorname{Log} z_2 = 2\operatorname{Log} z_1 = 2\left(\log \sqrt{2} + \frac{3\pi i}{4}\right) = \log 2 + \frac{3\pi i}{2}$$

一般に, $\operatorname{Log}(z_1 z_2) - \operatorname{Log} z_1 - \operatorname{Log} z_2$ は $2\pi i$ の整数倍となる. ($\arg(z_1 z_2) - \arg z_1 - \arg z_2$ は 2π の整数倍だから.)



主値を定めるための定義域は, それに属する z の偏角が一意的に定まればよいので, たとえば

$$D_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$$

として $z \in D_-$ に対して

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \arg z \quad (0 < \arg z < 2\pi)$$

と定めてもよい. このとき $\operatorname{Log} z$ の値域 ($w = \operatorname{Log} z$ による D_- の像) は $\{w = u + iv \mid u \in \mathbb{R}, 0 < v < 2\pi\}$ である.

問題 2.9 次の多価関数の値をすべて求めよ.

$$(1) \log e \quad (2) \log(-e) \quad (3) \log(-ei) \quad (4) \log(1-i) \quad (5) \log(-\sqrt{3}+i)$$

問題 2.10 $D_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ における対数の主値を $\operatorname{Log} z$ とするとき次の値を求めよ.

$$(1) \operatorname{Log} e \quad (2) \operatorname{Log}(-ei) \quad (3) \operatorname{Log}(1-i) \quad (4) \operatorname{Log}(-\sqrt{3}+i)$$

問題 2.11 $D_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ における対数の主値を $\operatorname{Log} z$ とするとき次の値を求めよ.

$$(1) \operatorname{Log}(-e) \quad (2) \operatorname{Log}(-ei) \quad (3) \operatorname{Log}(1-i) \quad (4) \operatorname{Log}(-\sqrt{3}+i)$$

問題 2.12 (発展) $f(z) = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} = \frac{e^{2z} - 1}{e^{2z} + 1}$ とおく.

- (1) $f(z)$ の定義域 D を求めよ.
- (2) $f(z)$ の値域 $f(D)$ を求めよ.
- (3) $z \in D$ と $w \in \mathbb{C}$ について $w = f(z)$ が成り立つとき, z を w と複素数の対数 $\log$ を用いて表せ.

2.4 三角関数

複素数 z に対して

$$\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz}), \quad \sin z = -\frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz}),$$

と定義する. $\cos z$ と $\sin z$ は $\mathbb{C}$ を定義域とする複素関数である. $z = x \in \mathbb{R}$ のときは Euler の等式 (微分積分学 II) より, $\cos x$ と $\sin x$ は通常のコサイン, サインと一致する. $z = x + iy$ とおくと

$$\begin{aligned} \cos z &= \frac{1}{2}(e^{-y+ix} + e^{y-ix}) = \frac{1}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{1}{2}e^y(\cos x - i \sin x) \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \cos x - \frac{i}{2}(e^y - e^{-y}) \sin x, \\ \sin z &= -\frac{i}{2}(e^{-y+ix} - e^{y-ix}) = -\frac{i}{2}e^{-y}(\cos x + i \sin x) + \frac{i}{2}e^y(\cos x - i \sin x) \\ &= \frac{1}{2}(e^y + e^{-y}) \sin x + \frac{i}{2}(e^y - e^{-y}) \cos x \end{aligned}$$

この公式を覚える必要はない. たとえば定義より

$$\cos i = \frac{1}{2}(e + e^{-1}), \quad \sin i = \frac{i}{2}(e - e^{-1})$$

命題 2.2 複素数 z_1, z_2 に対して次が成立する.

$$\cos(z_1 + z_2) = \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2, \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$$

証明: 指数法則 (命題 2.1 の (1)) より

$$\cos(z_1 + z_2) = \frac{1}{2}(e^{i(z_1+z_2)} + e^{-i(z_1+z_2)}) = \frac{1}{2}(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2})$$

一方

$$\begin{aligned} \cos z_1 \cos z_2 - \sin z_1 \sin z_2 &= \frac{1}{4}(e^{iz_1} + e^{-iz_1})(e^{iz_2} + e^{-iz_2}) + \frac{1}{4}(e^{iz_1} - e^{-iz_1})(e^{iz_2} - e^{-iz_2}) \\ &= \frac{1}{2}(e^{iz_1}e^{iz_2} + e^{-iz_1}e^{-iz_2}) \end{aligned}$$

であるから $\cos$ については示された. $\sin$ についても同様にできる. $\square$

命題 2.3 複素数 z に対して,

$$(1) \sin z = 0 \Leftrightarrow z = n\pi \quad (\exists n \in \mathbb{Z}),$$

$$(2) \cos z = 0 \Leftrightarrow z = \frac{\pi}{2} + n\pi \quad (\exists n \in \mathbb{Z})$$

証明: 命題 2.1 の (2) より

$$\sin z = 0 \Leftrightarrow e^{iz} = e^{-iz} \Leftrightarrow e^{2iz} = 1 \Leftrightarrow 2iz = 2n\pi i \quad (\exists n \in \mathbb{Z})$$

(2) についても同様. $\square$

この命題より $\tan z := \frac{\sin z}{\cos z}$ は $\mathbb{C} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + n\pi \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$ で定義され, $\cot z := \frac{\cos z}{\sin z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\}$ で定義される.

問題 2.13 次の値を求めよ.

$$(1) \cos\left(\frac{\pi}{2} + i\right) \quad (2) \sin(-2i) \quad (3) \cos(\pi - i) \quad (4) \sin\left(\frac{\pi}{6} + i\right)$$

問題 2.14 複素数 z_1, z_2 に対して $\sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2$ が成立することを示せ.

問題 2.15 任意の複素数 z に対して $\cos^2 z + \sin^2 z = 1$ が成立することを示せ.

問題 2.16 複素数 z に対して, $\cos z = 0$ が成立するための必要十分条件は, ある整数 n が存在して $z = \frac{\pi}{2} + n\pi$ と表されることであることを示せ.

問題 2.17 (発展) $f(z) = \tan z$ とおく. $\tan z$ の定義域を D とする.

(1) $f(z)$ の値域 $f(D)$ を求めよ.

(2) $z \in D$ と $w \in \mathbb{C}$ について $w = f(z)$ が成り立つとき, z を w と複素数の対数 $\log$ を用いて表せ.

問題 2.18 (発展) (1) $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) に対して $|\cos z|^2$ と $|\sin z|^2$ を x, y の式で表せ. また $|\cos z|^2 + |\sin z|^2$ は x によらないことを示せ.

(2) $x \in \mathbb{R}$ を固定するとき,

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} |\cos(x + iy)| = \lim_{y \rightarrow \pm\infty} |\sin(x + iy)| = \infty$$

を示せ.

3 正則関数

3.1 複素関数の極限と連続性

定義 3.1 D を $\mathbb{C}$ の開集合, z_0 を D の点とする. $D \setminus \{z_0\}$ で定義された複素関数 $f(z)$ が $z \rightarrow z_0$ のとき複素数 α に収束するとは, 複素数 z について, $|z - z_0|$ が限りなく小さくなれば, $|f(z) - \alpha|$ が限りなく小さくなることである. このとき, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$ と表す. ε - δ 論法を用いれば, 任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して

$$(z \in D \text{ かつ } 0 < |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - \alpha| < \varepsilon$$

が成立することである.

例 3.1 極限值 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ は存在しない. 実際, たとえば $z = h$ を実数として $h \rightarrow 0$ とすると $\frac{\bar{z}}{z} = 1 \rightarrow 1$ となる. 一方, h を実数として $z = ih$ において $h \rightarrow 0$ とすると $\frac{\bar{z}}{z} = -1 \rightarrow -1$ となるから, 極限值 $\lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}}{z}$ は存在しない.

定義 3.2 $\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された複素関数 $f(z)$ が $z_0 \in D$ で連続であるとは, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$ が成立することである. ε - δ 論法を用いれば, 任意の正の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して

$$(z \in D \text{ かつ } |z - z_0| < \delta) \Rightarrow |f(z) - f(z_0)| < \varepsilon$$

が成立することである. $f(z)$ が任意の $z_0 \in D$ で連続であるとき, $f(z)$ は D で連続であるという. $z_0 = x_0 + iy_0$ とすると, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ が z_0 で連続であるための必要十分条件は $u(x, y)$ と $v(x, y)$ が (2 変数関数として) (x_0, y_0) で連続であることである.

命題 3.1 $f(z)$ と $g(z)$ が $\mathbb{C}$ の開集合 D から 1 点 $z_0 \in D$ を除いた集合で定義され, $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \alpha$, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \beta$ ならば

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \{f(z) \pm g(z)\} = \alpha \pm \beta, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} f(z)g(z) = \alpha\beta, \quad \lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |\alpha|$$

が成立する. さらに, $\beta \neq 0$ ならば $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{\alpha}{\beta}$ が成立する.

証明: 実数関数の場合と同様である. 積について示そう. $0 < \varepsilon < 1$ を満たす任意の実数 ε に対して, ある正の実数 δ が存在して, $z \in D$ かつ $0 < |z - z_0| < \delta$ ならば,

$$|f(z) - \alpha| < \varepsilon, \quad |g(z) - \beta| < \varepsilon$$

が成立する. このとき特に

$$|f(z)| = |f(z) - \alpha + \alpha| \leq |f(z) - \alpha| + |\alpha| < |\alpha| + \varepsilon < |\alpha| + 1$$

であることに注意する．以上により， $z \in D$ かつ $0 < |z - z_0| < \delta$ ならば

$$\begin{aligned} |f(z)g(z) - \alpha\beta| &= |f(z)(g(z) - \beta) + (f(z) - \alpha)\beta| \\ &\leq |f(z)||g(z) - \beta| + |f(z) - \alpha||\beta| \\ &\leq (|\alpha| + 1)\varepsilon + |\beta|\varepsilon = (|\alpha| + |\beta| + 1)\varepsilon \end{aligned}$$

が成立する． $|\alpha| + |\beta| + 1$ は ε には無関係な定数であるから，上の式の最後の項はいくらでも小さくとれる．よって $\lim_{z \rightarrow a_0} f(z)g(z) = \alpha\beta$ が示された．

次に $\beta \neq 0$ と仮定すると，ある正の実数 δ があって， $z \in D$ かつ $0 < |z - \alpha| < \delta$ ならば

$$|g(z) - \beta| < \frac{|\beta|}{2}$$

が成り立つ．このとき，

$$|g(z)| = |\beta - (\beta - g(z))| \geq |\beta| - |\beta - g(z)| > |\beta| - \frac{|\beta|}{2} = \frac{|\beta|}{2}$$

である．一方，任意の正の実数 ε に対して，ある正の実数 δ' があって $z \in D$ かつ $0 < |z - z_0| < \delta'$ ならば

$$|g(z) - \beta| < \varepsilon$$

が成立する．以上により $0 < |z - z_0| < \min\{\delta, \delta'\}$ かつ $z \in D$ のとき，

$$\left| \frac{1}{g(z)} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|g(z) - \beta|}{|g(z)||\beta|} \leq \frac{|g(z) - \beta|}{\frac{1}{2}|\beta|^2} < \frac{2}{|\beta|^2}\varepsilon$$

が成立するから $\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{g(z)} = \frac{1}{\beta}$ が示された．最後に，三角不等式より

$$||f(z)| - |\alpha|| \leq |f(z) - \alpha| \rightarrow 0 \quad (z \rightarrow z_0)$$

が成立するから $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = |\alpha|$ が示された．□

次の命題は上の命題から直ちに従う．

命題 3.2 $f(z)$ と $g(z)$ が $\mathbb{C}$ の開集合 D で連続ならば， $f(z) \pm g(z)$ ， $f(z)g(z)$ ， $|f(z)|$ も D で連続である．さらに，任意の $z \in D$ について $g(z) \neq 0$ ならば $\frac{f(z)}{g(z)}$ も D で連続である．

問題 3.1 z を複素数とするととき，次の極限值はあるか？ あればその値を求めよ．なければ理由を述べよ．

$$\begin{array}{lll} (1) \quad \lim_{z \rightarrow i} \frac{z - i}{z^2 + 1} & (2) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z}{|z|} & (3) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{\bar{z}^2}{z} \\ (4) \quad \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2}{|z|} & (5) \quad \lim_{z \rightarrow i} \frac{\bar{z} + i}{z - i} & \end{array}$$

3.2 複素関数の微分可能性と正則関数

定義 3.3 $\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された複素関数 $f(z)$ が $z_0 \in D$ で（複素）微分可能であるとは、複素数 Δz を 0 に近づけたときの極限值

$$\alpha = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$$

が存在することである。あるいは z を z_0 に近づけたときの極限值

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

が存在すると言ってもよい。ε-δ 論法を用いれば、ある複素数 α が存在して、任意の正の実数 ε に対して

$$(z \in D \text{ かつ } 0 < |z - z_0| < \delta) \Rightarrow \left| \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \alpha \right| < \varepsilon$$

が成立するような正の実数 δ が存在することである。このとき、 $f'(z_0) := \alpha$ を $f(z)$ の z_0 における（複素）微分係数という。 $f(z)$ が D の各点で微分可能ならば、 $f'(z)$ は D を定義域とする複素関数となる。これを $f(z)$ の導関数という。 $f'(z) = \frac{df}{dz}(z)$ とも表す。

定義 3.4 (正則関数) $\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された複素関数 f が D で正則 (holomorphic) または（複素）解析的 (analytic) であるとは、 $f(z)$ が D の任意の点 z_0 で微分可能であり、導関数 $f'(z)$ が D で連続であることである。

正則関数の性質を調べるのが複素関数論の目的である。指数関数、三角関数、対数関数などの初等関数も、複素数の世界で正則関数として考察することによって、初めてその本質を理解することができる。

例 3.2 定数関数 $f(z) = \alpha$ (α は複素数の定数) と恒等写像 $g(z) = z$ は共に $\mathbb{C}$ で正則で、 $f'(z) = 0$, $g'(z) = 1$ である。証明) $z_0 \in \mathbb{C}$ とすると、

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\alpha - \alpha}{\Delta z} = 0, \quad \frac{g(z_0 + \Delta z) - g(z_0)}{\Delta z} = \frac{z_0 + \Delta z - z_0}{\Delta z} = 1$$

であるから、 $f(z)$ と $g(z)$ は z_0 で微分可能で $f'(z_0) = 0$, $g'(z_0) = 1$ である。導関数 $f'(z) = 0$ と $g'(z) = 1$ はともに定数関数であるから $\mathbb{C}$ で連続である。よって $f(z)$ と $g(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則である。

例 3.3 $f(z) = \bar{z}$ は任意の $z_0 \in \mathbb{C}$ において微分可能ではないから正則関数でない。実際、

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = \frac{\overline{z_0 + \Delta z} - \bar{z}_0}{\Delta z} = \frac{\bar{\Delta z}}{\Delta z}$$

は例 3.1 より $\Delta z \rightarrow 0$ のとき極限値を持たない。

命題 3.3 $\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された複素関数 $f(z)$ が $z_0 \in D$ で微分可能であれば, $f(z)$ は z_0 で連続である.

証明: $f(z)$ が z_0 で微分可能とすると,

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0) \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \rightarrow 0 \cdot f'(z_0) = 0 \quad (z \rightarrow z_0)$$

となるから $f(z)$ は z_0 で連続である. $\square$

定理 3.1 (正則関数の四則演算) $f(z)$ と $g(z)$ が $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則ならば, $f(z) \pm g(z)$, $f(z)g(z)$ も D で正則であり, 導関数について

$$\{f(z) \pm g(z)\}' = f'(z) \pm g'(z), \quad \{f(z)g(z)\}' = f'(z)g(z) + f(z)g'(z)$$

が成立する. さらに, 任意の $z \in D$ について $g(z) \neq 0$ ならば $\frac{f(z)}{g(z)}$ も D で正則であり,

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

が成立する.

証明: z_0 を D の任意の点とすると

$$\begin{aligned} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{(f(z) \pm g(z)) - (f(z_0) \pm g(z_0))}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} \pm \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \\ &= f'(z_0) \pm g'(z_0), \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)g(z) - f(z_0)g(z_0)}{z - z_0} &= \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)(g(z) - g(z_0)) + (f(z) - f(z_0))g(z_0)}{z - z_0} \\ &= \lim_{z \rightarrow z_0} f(z) \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} + \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} g(z_0) = f(z_0)g'(z_0) + f'(z_0)g(z_0) \end{aligned}$$

また $g(z_0) \neq 0$ ならば

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{z - z_0} \left(\frac{1}{g(z)} - \frac{1}{g(z_0)} \right) = - \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{g(z) - g(z_0)}{z - z_0} \frac{1}{g(z)g(z_0)} = - \frac{g'(z_0)}{g(z_0)^2}$$

より

$$\left(\frac{f(z)}{g(z)}\right)' = \left(f(z) \frac{1}{g(z)}\right)' = f'(z) \frac{1}{g(z)} + f(z) \left\{ -\frac{g'(z)}{g(z)^2} \right\} = \frac{f'(z)g(z) - f(z)g'(z)}{g(z)^2}$$

仮定により f, f', g, g' は D で連続だから上の式より $f \pm g, fg, f/g$ の導関数も連続である. 以上により $f \pm g, fg, f/g$ は D で正則である. $\square$

命題 3.4 多項式関数

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \cdots + a_1 z + a_0 \quad (a_0, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{C})$$

は複素数平面 $\mathbb{C}$ で正則であり, その導関数は

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1$$

である. さらに $f(z)$ が n 次式, すなわち $a_n \neq 0$ ならば, $f(z) = 0$ を満たす複素数 z は高々 n 個である.

証明: 例 3.2 より関数 z は $\mathbb{C}$ で正則だから, 定理 3.1 より, n を非負整数とするとき単項式関数 z^n も $\mathbb{C}$ で正則である. $(z^n)' = n z^{n-1}$ を n に関する帰納法で示そう. $n = 0$ のときは $z^n = 1$ であるから例 3.2 より $(z^n)' = (1)' = 0$ となり成立する. また $n = 1$ のときは例 3.2 より $(z^n)' = (z)' = 1$ となり成立する. $n \geq 2$ として $n-1$ のとき成立すると仮定すると, 定理 3.1 より

$$(z^n)' = (z z^{n-1})' = (z)' z^{n-1} + z(z^{n-1})' = z^{n-1} + z(n-1)z^{n-2} = n z^{n-1}$$

となり n のときも成立する. 従って定理 3.1 より, $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であり

$$f'(z) = n a_n z^{n-1} + (n-1) a_{n-1} z^{n-2} + \cdots + a_1$$

が成立する. 次に, $a_n \neq 0$ として, $f(z) = 0$ を満たす z が高々 n 個であることを n に関する帰納法で示そう. $f(\alpha_1) = 0$ を満たす複素数 $\alpha_1 \in \mathbb{C}$ が存在すると仮定する (これは代数学の基本定理として後で証明するが, ここでは仮にこのような α_1 がなければ上の主張は示されたことになるので問題ない.) このとき多項式 $f(z)$ を 1 次多項式 $z - \alpha_1$ で割り算すると,

$$f(z) = q(z)(z - \alpha_1) + \beta$$

を満たす $n-1$ 次多項式 $q(z)$ と $\beta \in \mathbb{C}$ が存在する. このとき $0 = f(\alpha_1) = \beta$ であるから, $f(z) = q(z)(z - \alpha_1)$ が成立する. $f(z) = 0$ ならば $z = \alpha_1$ または $q(z) = 0$ でなければならないが, 帰納法の仮定により $q(z) = 0$ を満たす z は高々 $n-1$ 個であるから, $f(z) = 0$ を満たす z は高々 n 個であることが示された. $\square$

定理 3.1 と命題 3.4 により, $f(z)$ と $g(z)$ を多項式関数 ($g \neq 0$) とするとき, 有理関数 $\frac{f(z)}{g(z)}$ は $\mathbb{C}$ から有限集合 $S := \{z \in \mathbb{C} \mid g(z) = 0\}$ を除いた集合 $D := \mathbb{C} \setminus S$ で正則である. 有限個の点からなる集合は閉集合であるから, D は開集合である.

例 3.4 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ は $\mathbb{C}$ の開集合 $D := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq \pm i\} = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ で正則である.

補題 3.1 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された複素関数とする. このとき, $f(z)$ が $z_0 \in D$ で複素微分可能であるための必要十分条件は, ある複素数 α と, D で定義されたある複素関数 $\varphi(z)$ があって,

$$f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + (z - z_0)\varphi(z), \quad \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) = 0$$

が成立することである. このとき $\alpha = f'(z_0)$ が成立する.

証明: $\varphi(z)$ を $z = z_0$ のときは $\varphi(z_0) = 0$, $z \neq z_0$ のときは

$$\varphi(z) := \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} - \alpha$$

によって定義する. このとき, $f(z) = f(z_0) + \alpha(z - z_0) + (z - z_0)\varphi(z)$ が任意の $z \in D$ について成立する. $f(z)$ が z_0 で複素微分可能であれば, $z \rightarrow z_0$ のとき $\varphi(z) \rightarrow f'(z_0) - \alpha$ である. よって $\alpha = f'(z_0)$ とすれば補題の条件が成立する.

逆に補題の条件を仮定すると,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) + \alpha = \alpha$$

であるから $f(z)$ は z_0 で複素微分可能で $f'(z_0) = \alpha$ である. $\square$

定理 3.2 (正則関数の合成) $f(z)$ は $\mathbb{C}$ (z 平面) の開集合 D で正則であり, $g(w)$ は $\mathbb{C}$ (w 平面) の開集合 D' で正則であり, $f(D) \subset D'$ とする. このとき合成関数 $g(f(z))$ は D で正則であり,

$$\{g(f(z))\}' = g'(f(z))f'(z)$$

が任意の $z \in D$ について成立する.

証明: $z_0 \in D$ として, $w_0 = f(z_0)$ とおく. 仮定より $w_0 \in D'$ である. $f(z)$ は z_0 で複素微分可能, $g(w)$ は w_0 で複素微分可能であるから補題 3.1 により

$$\begin{aligned} f(z) &= f(z_0) + f'(z_0)(z - z_0) + (z - z_0)\varphi(z) = w_0 + (z - z_0)\{f'(z_0) + \varphi(z)\}, \\ g(w) &= g(w_0) + g'(w_0)(w - w_0) + (w - w_0)\psi(w) = g(w_0) + (w - w_0)\{g'(w_0) + \psi(w)\}, \\ \lim_{z \rightarrow z_0} \varphi(z) &= 0, \quad \lim_{w \rightarrow w_0} \psi(w) = 0 \end{aligned}$$

を満たす関数 $\varphi(z)$ と $\psi(w)$ が存在する. このとき $w = f(z)$ とおけば,

$$\begin{aligned} g(f(z)) - g(f(z_0)) &= g(w) - g(w_0) = (w - w_0)\{g'(w_0) + \psi(w)\} \\ &= \{f(z) - f(z_0)\}\{g'(w_0) + \psi(f(z))\} \\ &= (z - z_0)\{f'(z_0) + \varphi(z)\}\{g'(w_0) + \psi(f(z))\} \\ &= (z - z_0)f'(z_0)g'(w_0) + (z - z_0)\{\varphi(z)g'(w_0) + (f'(z_0) + \varphi(z))\psi(f(z))\} \end{aligned}$$

が成立する. $f(z)$ は連続だから, $z \rightarrow z_0$ のとき $w = f(z) \rightarrow f(z_0) = w_0$ であり,

$$\varphi(z)g'(w_0) + (f'(z_0) + \varphi(z))\psi(f(z)) \rightarrow 0$$

となるから, 補題 3.1 により $g(f(z))$ は z_0 において複素微分可能であり $\{g(f(z))\}' = g'(f(z))f'(z)$ が成立する. $g'(f(z))f'(z)$ は連続であるから $g(f(z))$ は D で正則である. $\square$

問題 3.2 次の各々の複素関数 $f(x)$ が指定された点 z_0 で (複素) 微分可能かどうかを定義に従って判定せよ.

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{z}, \quad z_0 \neq 0 \qquad (2) \quad f(z) = \frac{1}{\bar{z}}, \quad z_0 \neq 0$$

$$(3) \quad f(z) = |z|^2, \quad z_0 = 0 \qquad (4) \quad f(z) = |z|^2, \quad z_0 \neq 0$$

問題 3.3 n を自然数とするととき $f(z) = z^{-n}$ は開集合 $D = \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0\}$ で正則で、 $f'(z) = -nz^{-n-1}$ が成り立つことを示せ。

問題 3.4 次の各々の複素関数 $f(z)$ はどのような集合で正則になるか？また、導関数 $f'(z)$ を求めよ。

$$(1) \quad f(z) = \frac{z}{z^2 + 4} \quad (2) \quad f(z) = \left(z + \frac{1}{z}\right)^6 \quad (3) \quad f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}$$

3.3 コーシー・リーマン方程式とその応用

定理 3.3 (Cauchy-Riemann 方程式) $f(z)$ を $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ の開集合 D で定義された複素関数として、

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy), \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$$

とおく。このとき次の (1) と (2) は同値である。

(1) $f(z)$ は D で正則である。

(2) $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は D で C^1 級であり、任意の $(x, y) \in D$ について

$$u_x(x, y) = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -v_x(x, y)$$

が成立する。(これを Cauchy-Riemann の (偏微分) 方程式、略して CR 方程式という。)

また、このとき

$$f'(x + iy) = u_x(x, y) + iv_x(x, y)$$

が成立する。

証明: (1) $\Rightarrow$ (2) の証明: $f(z)$ は D で正則であると仮定する。 $z_0 = x_0 + iy_0$ を D の任意の点とする。まず $\Delta z = h$ (h は実数) として $h \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x_0 + h, y_0) + iv(x_0 + h, y_0)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0) \end{aligned}$$

$\Delta z = ih$ として $h \rightarrow 0$ とすると

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = -i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{h} \\ &= -i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\{u(x_0, y_0 + h) + iv(x_0, y_0 + h)\} - \{u(x_0, y_0) + iv(x_0, y_0)\}}{h} \\ &= -i \lim_{h \rightarrow 0} \frac{u(x_0, y_0 + h) - u(x_0, y_0)}{h} + \lim_{h \rightarrow 0} \frac{v(x_0, y_0 + h) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0) \end{aligned}$$

以上の2つの式の実部と虚部を比較して

$$u_x(x_0, y_0) = v_y(x_0, y_0), \quad v_x(x_0, y_0) = -u_y(x_0, y_0)$$

を得る．従ってCR方程式が成立する．また最初の式から $f'(z) = u_x(x, y) + iu_y(x, y)$ であり，仮定より $f'(z)$ は連続だから，その実部 $u_x(x, y)$ と虚部 $u_y(x, y)$ も連続である．よって $u(x, y)$ は C^1 級である．CR方程式より $v_x(x, y) = -u_y(x, y)$ と $v_y(x, y) = u_x(x, y)$ も連続だから $v(x, y)$ も C^1 級である．

(2) $\Rightarrow$ (1) の証明： $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は D で C^1 級でCR方程式を満たすと仮定する． $z_0 = x_0 + iy_0$ を D の任意の点とする． h, k を絶対値が十分小さい実数として， t を変数とする関数

$$F(t) = u(x_0 + th, y_0 + tk)$$

に平均値の定理を適用すると， $0 < \theta_1 < 1$ を満たす実数 θ_1 が存在して

$$F(1) = F(0) + F'(\theta_1)$$

が成立する．合成関数の（偏）微分の公式から

$$F'(t) = hu_x(x_0 + th, y_0 + tk) + ku_y(x_0 + th, y_0 + tk)$$

であるから，上式は

$$u(x_0 + h, y_0 + k) = u(x_0, y_0) + hu_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) + ku_y(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k)$$

となる．同様にして， $0 < \theta_2 < 1$ を満たす実数 θ_2 が存在して

$$v(x_0 + h, y_0 + k) = v(x_0, y_0) + hv_x(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_2 k) + kv_y(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_2 k)$$

が成立することがわかる．従って $\Delta z = h + ik$ とすればCR方程式を用いて

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) &= f(z_0) + hu_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) + ku_y(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) \\ &\quad + ihv_x(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_2 k) + ikv_y(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_2 k) \\ &= f(z_0) + hu_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) + ku_y(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) \\ &\quad - ihu_y(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_2 k) + iku_x(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_2 k) \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \varphi(h, k) &= h\{u_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) - u_x(x_0, y_0)\} + k\{u_y(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) - u_y(x_0, y_0)\}, \\ \psi(h, k) &= -h\{u_y(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_2 k) - u_y(x_0, y_0)\} + k\{u_x(x_0 + \theta_2 h, y_0 + \theta_2 k) - u_x(x_0, y_0)\} \end{aligned}$$

とおくと

$$\begin{aligned} f(z_0 + \Delta z) &= f(z_0) + (h + ik)u_x(x_0, y_0) + (k - ih)u_y(x_0, y_0) + \varphi(h, k) + i\psi(h, k) \\ &= f(z_0) + (h + ik)\{u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)\} + \varphi(h, k) + i\psi(h, k) \end{aligned}$$

よって

$$\frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0) + \frac{\varphi(h, k)}{h + ik} + i\frac{\psi(h, k)}{h + ik}$$

ここで $|h| \leq \sqrt{h^2 + k^2} = |h + ik|$, $|k| \leq |h + ik|$ を用いると, $u_x(x, y)$, $u_y(x, y)$ が連続であることから

$$\begin{aligned} \left| \frac{\varphi(h, k)}{h + ik} \right| &\leq |u_x(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) - u_x(x_0, y_0)| + |u_y(x_0 + \theta_1 h, y_0 + \theta_1 k) - u_y(x_0, y_0)| \\ &\rightarrow 0 \quad ((h, k) \rightarrow (0, 0)) \end{aligned}$$

となる. $\varphi(h, k)$ を $\psi(h, k)$ としても同じ結論が成り立つから,

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z} = u_x(x_0, y_0) - iu_y(x_0, y_0)$$

が示された. よって $f(z)$ は D の各点微分可能であり, $f'(z)$ は D で連続だから $f(z)$ は D で正則である. $\square$

例 3.5 $f(z) = z^2$ は $\mathbb{C}$ で正則で $f'(z) = 2z$ となることは既を示した (命題 3.4) が, Cauchy-Riemann の方程式を用いて確認してみよう. $(x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$ より

$$u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = 2xy$$

は $\mathbb{R}^2$ で C^1 級であり,

$$u_x(x, y) = 2x, \quad u_y(x, y) = -2y, \quad v_x(x, y) = 2y, \quad v_y(x, y) = 2x$$

より Cauchy-Riemann の方程式が任意の $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ について成立する. よって $f(z) = z^2$ は $\mathbb{C}$ で正則であり. 導関数は

$$f'(z) = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = 2x + 2iy = 2z$$

となる.

例 3.6 $\mathbb{C}$ で定義された複素関数 $f(z) = \bar{z}^2$ を考える. $(x - iy)^2 = x^2 - y^2 - 2ixy$ より

$$\begin{aligned} u(x, y) &= \operatorname{Re} f(x + iy) = x^2 - y^2, \quad v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy) = -2xy, \\ u_x(x, y) &= 2x, \quad u_y(x, y) = -2y, \quad v_x(x, y) = -2y, \quad v_y(x, y) = -2x \end{aligned}$$

となる. Cauchy-Riemann の方程式は $2x = -2x$, $-2y = 2y$ となり, これは $(x, y) = (0, 0)$ のときのみ成立し, 空でない開集合の各点では成立しないから, $f(z)$ は (どんな開集合でも) 正則でない.

例 3.7 a, b, c, d を実数の定数として $u(x, y) = ax + by$, $v(x, y) = cx + dy$, $f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y)$ とおく. Cauchy-Riemann 方程式は $a = d$, $b = -c$ であるから, $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で正則であるための必要十分条件は $a = d$ かつ $b = -c$ である. このとき

$$\begin{aligned} f(x + iy) &= ax + by + i(-bx + ay) = (a - ib)x + (b + ia)y = (a - ib)x + i(a - ib)y \\ &= (a - ib)(x + iy) = (a - ib)z \end{aligned}$$

であり, $f(z)$ は 1 次関数である. 逆に $f(z)$ が 1 次関数ならば, $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であり Cauchy-Riemann の方程式が成立するから $a = d$ かつ $b = -c$ でなければならない.

命題 3.5 指数関数 e^z は複素数平面 $\mathbb{C}$ で正則であり, その導関数は e^z である.

証明: $z = x + iy$ とすると

$$e^z = e^x(\cos y + i \sin y) = e^x \cos y + ie^x \sin y$$

であるから, $u(x, y) = e^x \cos y$, $v(x, y) = e^x \sin y$ は C^1 級であり,

$$u_x(x, y) = e^x \cos y = v_y(x, y), \quad u_y(x, y) = -e^x \sin y = -v_x(x, y)$$

より CR 方程式が成立するから e^z は $\mathbb{C}$ で正則である. 導関数は

$$(e^z)' = u_x(x, y) + iv_x(x, y) = e^x \cos y + ie^x \sin y = e^z$$

となる. $\square$

この命題と定理 3.2 により, $f(z)$ が $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則ならば $e^{f(z)} = \exp(f(z))$ も D で正則であり, $(e^{f(z)})' = f'(z)e^{f(z)}$ が成立することがわかる. 特に, $\cos z = \frac{1}{2}(e^{iz} + e^{-iz})$ と $\sin z = -\frac{i}{2}(e^{iz} - e^{-iz})$ は $\mathbb{C}$ で正則であり,

$$(\cos z)' = \frac{1}{2}(ie^{iz} - ie^{-iz}) = -\sin z, \quad (\sin z)' = -\frac{i}{2}(ie^{iz} + ie^{-iz}) = \cos z$$

が成立する.

命題 3.6 $D_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ における対数関数の主値 $\text{Log } z$ は D_+ で正則であり, その導関数は $\frac{1}{z}$ である. $D_- = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\}$ における主値についても同様である.

証明: $z_0 \in D_+$ を固定して $w_0 = \text{Log } z_0$ とおく. z_0 と D_+ の境界 $\{x \in \mathbb{R} \mid x \leq 0\}$ との距離を r とすると, $r > 0$ であり, $\Delta z \in \mathbb{C}$ が $|\Delta z| < r$ を満たせば $z_0 + \Delta z \in D_+$ である. このとき

$$\Delta w := \text{Log}(z_0 + \Delta z) - \text{Log } z_0 = \text{Log}(z_0 + \Delta z) - w_0$$

とおけば, $z_0 = e^{w_0}$ と, $\text{Log}(z_0 + \Delta z) = w_0 + \Delta w$ より $z_0 + \Delta z = e^{w_0 + \Delta w}$ であることから,

$$\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta w}{(z_0 + \Delta z) - z_0} = \frac{\Delta w}{e^{w_0 + \Delta w} - e^{w_0}}$$

ここで $\operatorname{Log} z$ が連続であることから $\Delta z \rightarrow 0$ のとき $\Delta w \rightarrow 0$ であり, e^w の $w = w_0$ における複素微分係数が e^{w_0} であることから,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta w \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{e^{w_0 + \Delta w} - e^{w_0}} = \frac{1}{e^{w_0}} = \frac{1}{z_0}$$

が成立する. 以上により $\operatorname{Log} z$ は z_0 で複素微分可能で複素微分係数が $1/z_0$ であることが示された. $1/z$ は D_+ で連続だから, $\operatorname{Log} z$ は D_+ で正則である. $\square$

問題 3.5 次の各々の複素関数 $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則かどうか判定せよ.

- (1) $f(z) = z^2 + i\bar{z}^2$ (2) $f(z) = (1+z)(1-\bar{z})$ (3) $f(z) = ze^{\bar{z}}$
 (4) $f(x+iy) = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})\cos y + \frac{i}{2}(e^x - e^{-x})\sin y$

問題 3.6 a, b, c を実数の定数, x, y を実数の変数として $f(x+iy) = ax^2 + by^2 + 2icxy$ とおく.

- (1) $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で正則となるための a, b, c に対する必要十分条件を求めよ.
 (2) $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で正則であるとき $f(z)$ と $f'(z)$ を z で表せ.

3.4 実変数複素数値関数とコーシー・リーマン方程式

定義 3.5 区間 $I := [a, b]$ に属する実数 t に対して複素数 $f(t) = u(t) + iv(t)$ ($u(t), v(t)$ は実数) が定まるとき, $f(t)$ を区間 I で定義された実変数の複素数値関数という. $f(t) = u(t) + iv(t)$ が I で連続 (または微分可能, または C^1 級) であるとは, $u(t)$ と $v(t)$ が I で連続 (または微分可能, または C^1 級) であることである. ($t = a, b$ では $f'(t)$ は片側微分係数とする.) 複素数値関数 $f(t)$ がそれぞれ微分可能, 連続であるとき, $f(t)$ の導関数と定積分を

$$f'(t) = u'(t) + iv'(t), \quad \int_a^b f(t) dt = \int_a^b u(t) dt + i \int_a^b v(t) dt$$

で定義する.

$f(t), g(t)$ を微分可能な複素数値関数とすると, 任意の $\alpha \in \mathbb{C}$ に対して

$$\{f(t) + g(t)\}' = f'(t) + g'(t), \quad \{\alpha f(t)\}' = \alpha f'(t)$$

が成立する. (実部と虚部に分けて確かめればよい. あるいは導関数の定義を用いてもよい.) また, $I = [a, b]$ で C^1 級の複素数値関数 $F(t)$ が $F'(t) = f(t)$ をみたせば

$$\int_a^b f(t) dt = F(b) - F(a)$$

が成立する. (実部と虚部に微分積分の基本公式を適用すればよい.)

以上より $f(t), g(t)$ が $[a, b]$ で連続ならば

$$\int_a^b \{f(t) + g(t)\} dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt, \quad \int_a^b \alpha f(t) dt = \alpha \int_a^b f(t) dt \quad (\alpha \in \mathbb{C})$$

が成立することがわかる. ($f(t)$ の原始関数を $F(t)$, $g(t)$ の原始関数を $G(t)$ として上記の公式を適用すればよい.)

例 3.8 $\alpha = a + ib$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると,

$$e^{\alpha t} = e^{at+ibt} = e^{at}(\cos bt + i \sin bt)$$

であるから,

$$\begin{aligned} (e^{\alpha t})' &= ae^{at}(\cos bt + i \sin bt) + e^{at}(-b \sin bt + ib \cos bt) \\ &= (a + ib)e^{at}(\cos bt + i \sin bt) = \alpha e^{\alpha t} \end{aligned}$$

を得る. これより $\alpha \neq 0$ ならば任意の $c, d \in \mathbb{R}$ に対して

$$\int_c^d e^{\alpha t} dt = \left[\frac{1}{\alpha} e^{\alpha t} \right]_c^d = \frac{1}{\alpha} (e^{\alpha d} - e^{\alpha c})$$

が成立する.

命題 3.7 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された複素関数として, $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ とおく. $u(x, y)$ と $v(x, y)$ は D で C^1 級であるとする. y を固定して $f(x + iy)$ を実変数 x の複素数値関数とみなすと,

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) = \frac{\partial}{\partial x} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial x} v(x, y) = u_x(x, y) + i v_x(x, y),$$

x を固定して $f(x + iy)$ を実変数 y の複素数値関数とみなすと,

$$\frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) = \frac{\partial}{\partial y} u(x, y) + i \frac{\partial}{\partial y} v(x, y) = u_y(x, y) + i v_y(x, y)$$

となる. このとき Cauchy-Riemann 方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x + iy) + i \frac{\partial}{\partial y} f(x + iy) = 0$$

と同値である. さらに, これが成り立つとき,

$$f'(x + iy) = u_x(x, y) + i v_x(x, y) = \frac{\partial}{\partial x} f(x + iy)$$

.

証明: f_x と f_y を u と v の偏導関数を用いて表すと

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x+iy) + i\frac{\partial}{\partial y}f(x+iy) &= u_x(x,y) + iv_x(x,y) + i\{u_y(x,y) + iv_y(x,y)\} \\ &= u_x(x,y) - v_y(x,y) + i\{u_y(x,y) + v_x(x,y)\}\end{aligned}$$

となり, この式の実部と虚部が共に 0 となることが Cauchy-Riemann の方程式である. $\square$

例 3.9 α と β を複素数の定数として $f(z) = \alpha z + \beta \bar{z}$ が $\mathbb{C}$ で正則になるための条件を考察しよう.

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x+iy) &= \alpha \frac{\partial}{\partial x}(x+iy) + \beta \frac{\partial}{\partial x}(x-iy) = \alpha + \beta, \\ \frac{\partial}{\partial y}f(x+iy) &= \alpha \frac{\partial}{\partial y}(x+iy) + \beta \frac{\partial}{\partial y}(x-iy) = i\alpha - i\beta\end{aligned}$$

より

$$\frac{\partial}{\partial x}f(x+iy) + i\frac{\partial}{\partial y}f(x+iy) = (\alpha + \beta) + (-\alpha + \beta) = 2\beta$$

よって $f(z)$ が正則となるための条件は $\beta = 0$ である.

命題 3.8 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された正則関数, $\varphi(t)$ を区間 $[a, b]$ で定義された実変数複素数値の微分可能関数 ($t = a, b$ では片側微分可能とする) で任意の $t \in [a, b]$ に対して $\varphi(t) \in D$ をみたすものとする. このとき $\frac{d}{dt}f(\varphi(t)) = f'(\varphi(t))\varphi'(t)$ が任意の $t \in [a, b]$ について成立する.

証明: $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$, $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$, $\varphi_1(t) = \operatorname{Re} \varphi(t)$, $\varphi_2(t) = \operatorname{Im} \varphi(t)$ とおくと合成関数の微分の公式と Cauchy-Riemann の方程式より

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}f(\varphi(t)) &= \frac{d}{dt}u(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + i\frac{d}{dt}v(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) \\ &= u_x(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_1'(t) + u_y(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_2'(t) \\ &\quad + iv_x(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_1'(t) + iv_y(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_2'(t) \\ &= u_x(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_1'(t) - v_x(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_2'(t) \\ &\quad + iv_x(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_1'(t) + iu_x(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\varphi_2'(t) \\ &= \{u_x(\varphi_1(t), \varphi_2(t)) + iv_x(\varphi_1(t), \varphi_2(t))\}\{\varphi_1'(t) + i\varphi_2'(t)\} \\ &= f'(\varphi(t))\varphi'(t)\end{aligned}$$

$\square$

例 3.10 n を自然数として $f(z) = \bar{z}^n$ は正則関数ではないことを示そう. $g(z) = z^n$ は $\mathbb{C}$ で正則で, $f(z) = g(\bar{z})$ となる. $\varphi(x, y) = x - iy$ を実変数 x (または y) の関数とみなし

て命題 3.8 を適用すると, $g'(z) = nz^{n-1}$, $\varphi_x(x, y) = 1$, $\varphi_y(x, y) = -i$ より,

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial x}f(x+iy) &= \frac{\partial}{\partial x}g(\varphi(x, y)) = g'(\varphi(x, y))\frac{\partial}{\partial x}\varphi(x, y) = g'(x-iy)\frac{\partial}{\partial x}(x-iy) \\ &= g'(x-iy) = n(x-iy)^{n-1},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y}f(x+iy) &= \frac{\partial}{\partial y}g(\varphi(x, y)) = g'(\varphi(x, y))\frac{\partial}{\partial y}\varphi(x, y) = g'(x-iy)\frac{\partial}{\partial y}(x-iy) \\ &= -ig'(x-iy) = -in(x-iy)^{n-1}\end{aligned}$$

となる. よって f に対する Cauchy-Riemann の方程式は

$$0 = \frac{\partial}{\partial x}f(x+iy) + i\frac{\partial}{\partial y}f(x+iy) = 2g'(x-iy) = 2n(x-iy)^{n-1}$$

であり, これは $x = y = 0$ 以外では成立しないから, $f(z) = \bar{z}^n$ は正則でない.

問題 3.7 α, β を複素数の定数, $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) とするとき,

$$f(z) = e^x(\alpha \cos y + \beta \sin y)$$

が $\mathbb{C}$ で正則となるための α, β に対する必要十分条件を求めよ. また, そのとき $f(z)$ と $f'(z)$ を z で表せ.

問題 3.8 α, β, γ を複素数の定数とすると, $f(z) = \alpha z^2 + \beta z\bar{z} + \gamma\bar{z}^2$ が $\mathbb{C}$ で正則となるための α, β, γ に対する必要十分条件を求めよ. また, そのとき $f(z)$ と $f'(z)$ を求めよ.

問題 3.9 $f(z) = \exp(\bar{z}^2)$ とおく. $\frac{\partial}{\partial x}f(x+iy)$ と $\frac{\partial}{\partial y}f(x+iy)$ を求めよ. それを用いて $f(z)$ は正則関数かどうか判定せよ.

3.5 曲線とパラメータ表示

定義 3.6 $\mathbb{C}$ における曲線 (curve) (または道) C とは, $\mathbb{R}$ の有界閉区間 $[a, b]$ から $\mathbb{C}$ への連続写像のことである. 言い換えれば, 連続な実変数複素数値関数 $z = \varphi(t)$ ($a \leq t \leq b$) のことである. このとき

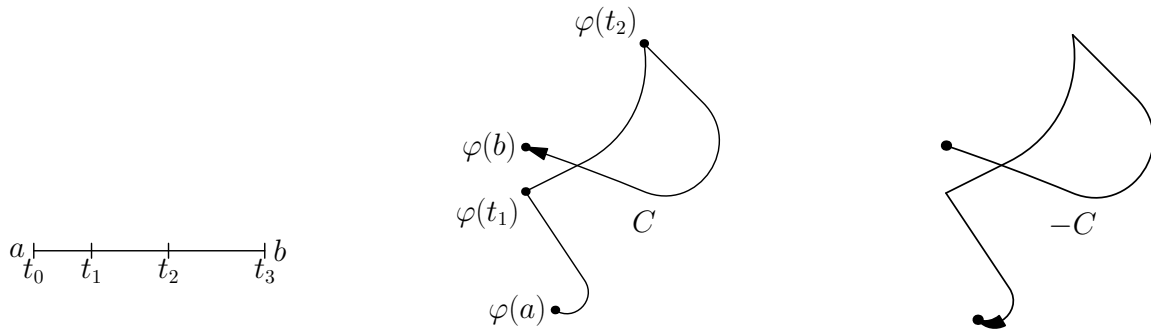
$$C : z = \varphi(t) \quad (a \leq t \leq b) \quad (2)$$

と表し, $\varphi(a)$ を C の始点, $\varphi(b)$ を C の終点という. $z = \varphi(t)$ を曲線 C のパラメータ表示という. パラメータ t が a から b まで増加するにつれて $\varphi(t)$ は始点から終点に移動する. これによって曲線 C の向きが定まる. パラメータ表示が異なっても集合として同じであり向きも同じならば同じ曲線と見なすことにする. もちろんパラメータは t でなくてもよい. 始点と終点が一致するとき, C は閉曲線 (closed curve) であるという.

(2) で定義された曲線 C に対して, C の向きを逆にした曲線 $-C$ を

$$-C : z = \varphi(a+b-t) \quad (a \leq t \leq b)$$

で定義する. $-C$ の始点は $\varphi(b)$, 終点は $\varphi(a)$ である.



C が区分的になめらかまたは区分的に C^1 級であるとは、区間 $[a, b]$ のある分割

$$a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

があって、 $\varphi(t)$ は $[a, b]$ で連続で、各小区間 (t_{k-1}, t_k) では $\varphi(t)$ は C^1 級であり、極限

$$\varphi'(t_{k-1}) := \lim_{t \rightarrow t_{k-1}+0} \varphi'(t), \quad \varphi'(t_k) := \lim_{t \rightarrow t_k-0} \varphi'(t)$$

が存在することと定義する.

例 3.11 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ として $\varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha) = (1-t)\alpha + t\beta$ とおけば曲線

$$C : z = \varphi(t) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

は α から β への (向きのついた) 線分である. C の別のパラメータ表示としてたとえば

$$C : z = \varphi(t^2) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

がとれる.



例 3.12 α を複素数, r を正の実数として $\varphi(t) = \alpha + re^{it} = \alpha + r(\cos t + i \sin t)$ とおけば曲線

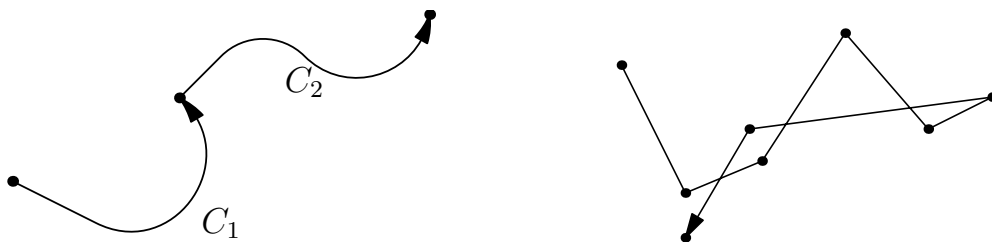
$$C : z = \varphi(t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

は円周 $|z - \alpha| = r$ に正 (反時計回り) の向きを付けたものである. C の別のパラメータ表示として、たとえば

$$C : z = \varphi(2\pi s) \quad (0 \leq s \leq 1)$$

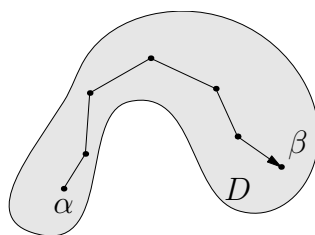
がとれる.

曲線 C_1 の終点と曲線 C_2 の始点が等しいとき, C_1 の終点と C_2 の始点を同一視してつなげた曲線を C_1 と C_2 の和といい, $C_1 + C_2$ と表す.



例 3.13 $z_0, z_1, \dots, z_n$ を複素数として, C_k を z_{k-1} から z_k への線分とすると, $C_1, \dots, C_n$ をつないでできる曲線 $C = C_1 + \dots + C_n$ のことを $z_0, z_1, \dots, z_n$ を結ぶ折れ線という.

定義 3.7 $\mathbb{C}$ または $\mathbb{R}^2$ の開集合 D が連結 (connected) であるとは, D の任意の 2 点 α と β に対して α と β を結ぶ D 内の折れ線 が存在することである.



例 3.14 $\mathbb{C}, \mathbb{C} \setminus \{0\}, U(z_0, R)$ は連結開集合である. $\{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \neq 0\}$ は開集合であるが連結ではない.

命題 3.9 複素関数 $f(z)$ が連結開集合 D において正則で $f'(z) = 0$ が任意の $z \in D$ について成立すれば $f(z)$ は定数関数である. すなわち, ある複素数 α が存在してすべての $z \in D$ について $f(z) = \alpha$ が成立する.

証明: $\alpha = a_1 + a_2i$ と $\beta = b_1 + b_2i$ を D の任意の 2 点とする. まず α と β を結ぶ線分 C が D に含まれると仮定する.

$$h(t) := f(\alpha + t(\beta - \alpha))$$

とおくと命題 3.8 と $f'(z) = 0$ より

$$h'(t) = (\beta - \alpha)f'(\alpha + t(\beta - \alpha)) = 0$$

となるから $h(t)$ は $[a, b]$ において定数である. 従って

$$f(\beta) = h(1) = h(0) = f(\alpha)$$

を得る. 一般の場合は, α と β を結ぶ D 内の折れ線が存在する. この折れ線は $\alpha = z_0, z_1, \dots, z_n = \beta$ をつないだものとする, 前半の議論より

$$f(\alpha) = f(z_0) = f(z_1) = \dots = f(z_n) = f(\beta)$$

を得る. 以上により $f(z)$ の任意の $\alpha, \beta \in D$ における値が等しいことが示されたから $f(z)$ は定数関数である. $\square$

D が連結でないと上の命題は一般には成立しない. たとえば $D = \{z \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re} z \neq 0\}$ として $f(z)$ を $\operatorname{Re} z > 0$ のときは $f(z) = 1$, $\operatorname{Re} z < 0$ のときは $f(z) = 0$ と定義すると, $f(z)$ は D で正則で $f'(z) = 0$ であるが, $f(z)$ は 0 と 1 の 2 つの値をとるから定数関数ではない.

命題 3.10 $f(z)$ は連結開集合 D において正則と仮定する. $u(x, y) = \operatorname{Re} f(x + iy)$ が任意の $(x, y) \in D$ について $u_x(x, y) = u_y(x, y) = 0$ を満たせば (特に $u(x, y)$ が定数関数ならば) $f(z)$ は定数関数である.

証明: $v(x, y) = \operatorname{Im} f(x + iy)$ とおけば定理 3.3 と仮定より

$$f'(x + iy) = u_x(x + iy) + iv_x(x, y) = u_x(x, y) - iu_y(x, y) = 0$$

となるから, 前の命題より $f(z)$ は定数関数である. $\square$

命題 3.11 $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で正則で $f'(z) = f(z)$ が成立すれば, ある複素数の定数 α が存在して $f(z) = \alpha e^z$ である.

証明: $g(z) = f(z)e^{-z}$ とおくと, $g(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であり, 仮定から

$$g'(z) = f'(z)e^{-z} - f(z)e^{-z} = 0$$

となる. 従って命題 3.9 より $g(z)$ は定数関数である. $\alpha = g(z)$ とすれば, $f(z) = \alpha e^z$ を得る. $\square$

問題 3.10 $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則で $f'(z) = -zf(z)$ をみたしている. このとき, ある複素数の定数 α があって, $f(z) = \alpha \exp\left(-\frac{1}{2}z^2\right)$ であることを示せ.

4 べき級数

4.1 複素数の数列と級数

$\alpha_n \in \mathbb{C}$ として (複素) 数列 $\{\alpha_n\}$ を考察する.

定義 4.1 $\alpha_n \in \mathbb{C}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とする.

- (1) 複素数列 $\{\alpha_n\}$ が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束するとは, 任意の正の実数 ε に対して, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ ならば $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立することである. このとき $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = \alpha$ と表す.
- (2) 複素数列 $\{\alpha_n\}$ が **Cauchy 列** (コーシー列, 基本列) であるとは, 任意の正の実数 ε に対してある自然数 N が存在して, $n, m \geq N$ ならば $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ が成り立つことである.

例 4.1 (等比数列) α を 0 でない複素数として, 複素数の等比数列 $\{\alpha^n\}$ を考える.

(i) $|\alpha| < 1$ ならば, $n \rightarrow \infty$ のとき $|\alpha^n| = |\alpha|^n$ は限りなく小さくなるから, $\{\alpha^n\}$ は 0 に収束する.

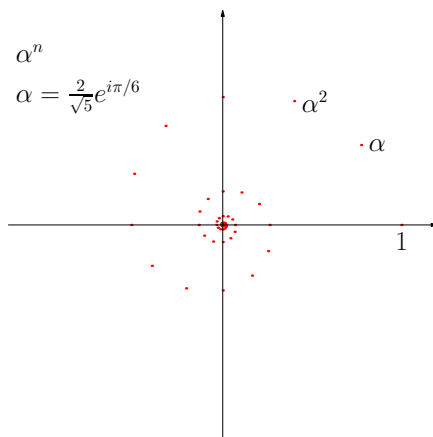
(ii) $|\alpha| > 1$ ならば, $n \rightarrow \infty$ のとき $|\alpha^n| = |\alpha|^n$ は限りなく大きくなるから, $\{\alpha^n\}$ は発散する.

(iii) $|\alpha| = 1$ のとき, 数列 $\{\alpha^n\}$ が収束するための必要十分条件は $\alpha = 1$ である. 実際, もし $\{\alpha^n\}$ がある極限值 β に収束したとすると, $\{\alpha^{n+1}\}$ も (添字をずらしたただけだから) β に収束するから

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\alpha^{n+1}}{\alpha^n} = \frac{\beta}{\beta} = 1$$

となる.

以上により, 複素数の等比数列 $\{\alpha^n\}$ が収束するための必要十分条件は $|\alpha| < 1$ または $\alpha = 1$ である.



補題 4.1 複素数列 $\{\alpha_n\}$ が収束すれば, $\{\alpha_n\}$ は有界である. すなわち, ある実数 $M \geq 0$ が存在して, 任意の n について $|\alpha_n| \leq M$ が成立する.

証明: $\{\alpha_n\}$ が複素数 α に収束するとすれば, ある自然数 N が存在して $n \geq N$ のとき $|\alpha_n - \alpha| < 1$, 従って

$$|\alpha_n| = |(\alpha_n - \alpha) + \alpha| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\alpha| < |\alpha| + 1 \quad (\forall n \geq N)$$

が成立する. よって

$$M = \max\{|\alpha_1|, |\alpha_2|, \dots, |\alpha_{N-1}|, |\alpha| + 1\}$$

とおけばよい. $\square$

命題 4.1 複素数列 $\{\alpha_n\}$ がある極限值に収束することと $\{\alpha_n\}$ が Cauchy 列であることは同値である.

証明: α_n が $\alpha \in \mathbb{C}$ に収束すると仮定すると, 任意の正の実数 ε に対してある自然数 N が存在して, $n \geq N$ ならば $|\alpha_n - \alpha| < \varepsilon$ が成立する. よって $m, n \geq N$ ならば

$$|\alpha_n - \alpha_m| = |(\alpha_n - \alpha) + (\alpha - \alpha_m)| \leq |\alpha_n - \alpha| + |\alpha - \alpha_m| < 2\varepsilon$$

が成立するから $\{\alpha_n\}$ は Cauchy 列である.

逆に $\{\alpha_n\}$ は Cauchy 列であると仮定する. 任意の正の実数 ε に対してある自然数 N が存在して $n, m \geq N$ ならば $|\alpha_n - \alpha_m| < \varepsilon$ が成立する. $\alpha_n = a_n + ib_n$ ($a_n, b_n \in \mathbb{R}$) とおくと, $|a_n - a_m| \leq |\alpha_n - \alpha_m|$ かつ $|b_n - b_m| \leq |\alpha_n - \alpha_m|$ であるから, $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は共に実数の Cauchy 列である. 実数列については収束することと Cauchy 列であることは同値である (「連続と極限」) から, 実数列 $\{a_n\}$ はある $a \in \mathbb{R}$ に, 実数列 $\{b_n\}$ はある $b \in \mathbb{R}$ に収束する. よって $\alpha_n = a_n + ib_n$ は $\alpha := a + bi$ に収束する. $\square$

定義 4.2 $\alpha_n \in \mathbb{C}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とする.

(1) 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ が (ある複素数 S に) 収束するとは, 部分和の数列 $S_n := \sum_{k=0}^n \alpha_k$ が S に収束することである.

(2) 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ が絶対収束するとは, 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} |\alpha_k|$ が収束することである.

例 4.2 (等比級数) α を複素数として無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k$ を考える. $\alpha \neq 1$ とすると,

$$S_n = \sum_{k=0}^n \alpha^k = \frac{1 - \alpha^{n+1}}{1 - \alpha}$$

であるから, $\{S_n\}$ が収束するための条件は $|\alpha| < 1$ であり, そのとき $\{S_n\}$ は $\frac{1}{1 - \alpha}$ に収束する. 従って

$$\sum_{k=0}^{\infty} \alpha^k = \frac{1}{1 - \alpha} \quad (|\alpha| < 1)$$

$\alpha = 1$ のときは $S_n = n + 1$ は収束しない.

補題 4.2 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ が収束すれば, 数列 $\{\alpha_n\}$ は 0 に収束する.

証明: 部分和を S_n とすると, 数列 $\{S_n\}$ は Cauchy 列であるから, 任意の正の実数 ε に対してある自然数 N が存在して, $n, m \geq N$ のとき $|S_n - S_m| < \varepsilon$ が成立する. 特に $n > N$ のとき

$$|\alpha_n| = |S_n - S_{n-1}| < \varepsilon$$

であるから $\{\alpha_n\}$ は 0 に収束する. $\square$

命題 4.2 絶対収束する無限級数は収束する.

証明: $\{\alpha_n\}$ を複素数列として

$$S_n = \sum_{k=0}^n \alpha_k, \quad T_n = \sum_{k=0}^n |\alpha_k|$$

とおく. $\sum_{k=0}^n \alpha_k$ が絶対収束すると仮定すると, 数列 $\{T_n\}$ は Cauchy 列であるから, 任意の正の実数 ε に対して, ある自然数 N が存在して $n > m \geq N$ のとき $T_n - T_m < \varepsilon$ が成立する. 従って $n > m \geq N$ ならば

$$|S_n - S_m| = \left| \sum_{k=m+1}^n \alpha_k \right| \leq \sum_{k=m+1}^n |\alpha_k| = T_n - T_m < \varepsilon$$

が成り立つ. 従って $\{S_n\}$ は Cauchy 列であるから収束する. すなわち, 無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ は収束する. $\square$

例 4.3 α を $|\alpha| < 1$ を満たす複素数とすると, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \alpha^k$ は収束する. 実際,

$$\left| \frac{1}{k} \alpha^k \right| = \frac{1}{k} |\alpha|^k \leq |\alpha|^k \quad \text{より} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{k} \alpha^k \right| \leq \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha|^k = \frac{|\alpha|}{1 - |\alpha|}$$

であるから, $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \alpha^k$ は絶対収束する.

命題 4.3 (d'Alembert (ダランベール) の判定法) $\alpha_n \in \mathbb{C}$ かつ $\alpha_n \neq 0$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) として, $r := \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|}$ が存在するかまたは $r = \infty$ であると仮定する.

(1) $r < 1$ ならば無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ は絶対収束する.

(2) $r > 1$ ($r = \infty$ の場合も含む) ならば無限級数 $\sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k$ は発散する.

証明: (1) $r < R < 1$ をみたす実数 R がとれる. $R - r > 0$ であるから, 収束の定義により, ある自然数 N があって, $n \geq N$ ならば

$$\left| \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} - r \right| < \frac{R - r}{2}$$

が成立する. 従って三角不等式により

$$\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} = \left| \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} - r + r \right| \leq \left| \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} - r \right| + r < \frac{R - r}{2} + r = \frac{R + r}{2}$$

が成立する．ここで $m = (R + r)/2$ とおけば $m < R < 1$ であり， $n \geq N$ のとき，

$$|\alpha_n| = |\alpha_N| \frac{|\alpha_{N+1}|}{|\alpha_N|} \frac{|\alpha_{N+2}|}{|\alpha_{N+1}|} \cdots \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n-1}|} \leq |\alpha_N| m^{n-N}$$

が成立する．そこで $c_n = |\alpha_N| m^{n-N}$ とおけば $\{c_n\}$ は公比 m の等比数列であるから $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$

は収束する．これと $|\alpha_k| \leq c_k$ ($k > N$) より， $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ は絶対収束する．

(2) $1 < r < \infty$ とすると， $r > R > 1$ をみたす実数 R がとれる． $r - R > 0$ であるから，ある自然数 N があって， $n \geq N$ ならば

$$r - \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} \leq \left| \frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} - r \right| < \frac{r - R}{2}$$

が成立する．従って

$$\frac{|\alpha_{n+1}|}{|\alpha_n|} > r - \frac{r - R}{2} = \frac{R + r}{2}$$

が成立する．ここで $m = (R + r)/2$ とおけば $m > R > 1$ であり， $n \geq N$ のとき，

$$|\alpha_n| = |\alpha_N| \frac{|\alpha_{N+1}|}{|\alpha_N|} \frac{|\alpha_{N+2}|}{|\alpha_{N+1}|} \cdots \frac{|\alpha_n|}{|\alpha_{n-1}|} \geq |\alpha_N| m^{n-N}$$

が成立する．従って $n \rightarrow \infty$ のとき $|\alpha_n| \rightarrow \infty$ となるから， $\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k$ は収束しない．□

注意 4.1 命題 4.3 の証明では $n \geq N$ に対する α_n しか用いていないので，十分大きな n について $\alpha_n \neq 0$ であれば十分である．

問題 4.1 次の無限級数は収束するか発散するか判定せよ．

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{\sqrt{3} + i}{3} \right)^k \quad (2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(1 + i)^k}{k(k+1)} \quad (3) \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \left(\frac{2 + i}{\sqrt{5}} \right)^k$$

4.2 ベキ級数

定義 4.3 複素数列 $a_0, a_1, \dots$ と複素数 z_0 に対して，無限級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \quad (3)$$

のことを z_0 を中心とするベキ級数 (power series) という．(「ベキ」の漢字は「幂」，略字として「巾」を用いることもある．) ベキ級数 (3) に対して

$$R := \sup \left\{ |z - z_0| \mid z \in \mathbb{C}, \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k \text{ は収束する} \right\}$$

をその収束半径 (radius of convergence) という．(右辺の集合が上に有界でないときは $R = \infty$ とする．) ここで $\sup$ は上限 (最大値の一般化) を表す．すなわち R は，

(1) $|z - z_0| > R$ ならば (3) は収束しない

(2) $0 < r < R$ ならば $|z - z_0| > r$ であって (3) が収束するような複素数 z が存在する

をみたす非負実数または ∞ である. ($R = \infty$ のときは条件 (1) の仮定をみたす z はないので無視してよい.) 特に, $R = 0$ のときは (3) は $z = z_0$ のときのみ収束する. $R > 0$ であることと (3) が収束するような $z \neq z_0$ が存在することとは同値である. $R > 0$ のとき (3) を収束べき級数 (convergent power series) という.

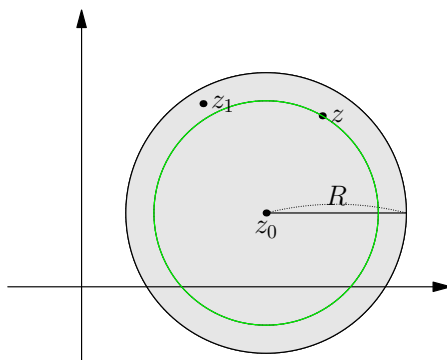
たとえば α を 0 でない複素数とするとき, 等比級数

$$\sum_{n=0}^{\infty} \alpha^n z^n = 1 + \alpha z + \alpha^2 z^2 + \cdots$$

はべき級数であり, 例 4.2 により, $|\alpha z| = |\alpha||z| < 1$ のとき収束し, $|\alpha z| = |\alpha||z| \geq 1$ のとき発散する. 従って収束半径は $1/|\alpha|$ である.

命題 4.4 べき級数 (3) の収束半径を R とする. 複素数 z が $|z - z_0| < R$ を満たすとき (3) は絶対収束し, $|z - z_0| > R$ ならば (3) は発散する. 特に $R = \infty$ ならば, (3) は任意の $z \in \mathbb{C}$ について絶対収束する. $R > 0$ のとき開円板 $U(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ のことをべき級数 (3) の収束円という.

証明:



$z_0 = 0$ としてよい. $z \in \mathbb{C}$ が $|z| < R$ を満たすとする. 収束半径 R の定義により $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z_1^k$ が収束し $|z| < |z_1| \leq R$ を満たす複素数 z_1 が存在する. このとき数列 $\{a_k z_1^k\}$ は 0 に収束するので有界であるから, ある実数 $M > 0$ があって $|a_k||z_1|^k \leq M$ が任意の $k \geq 0$ について成立する. 従って

$$|a_k z^k| = |a_k||z_1|^k \left(\frac{|z|}{|z_1|} \right)^k \leq M \left(\frac{|z|}{|z_1|} \right)^k \quad (\forall k \geq 0)$$

が成立する. これと $|z| < |z_1|$ より $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は絶対収束することがわかる.

一方, $|z| > R$ とすると R の定義により $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ は収束しない. $\square$
 べき級数 (3) の収束半径 R は正であるとする. $|z - z_0| < R$ のとき

$$f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$$

と定義すれば, $f(z)$ は開円板 $U(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ で定義された複素関数である.

命題 4.5 複素数列 $\{a_k\}_{k \geq 0}$ について, ある k_0 があって $a_k \neq 0$ ($\forall k \geq k_0$) であり, $R := \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_k|}{|a_{k+1}|}$ が存在するかまたは $R = \infty$ であれば, べき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ の収束半径は R である.

証明: $z_0 = 0$ としてよい. 0 でない任意の複素数 z に対して

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1} z^{k+1}|}{|a_k z^k|} = |z| \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{|z|}{R} \quad (R = 0 \text{ のときは } \infty \text{ に発散})$$

が成立する. 従って d'Alembert の判定法により, $|z| < R$ ならば $\sum_{k=0}^{\infty} a_k |z|^k$ は収束し, $|z| > R$ ならば発散する. 以上によりべき級数 (3) の収束半径は R である. $\square$

例 4.4 $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{k}{k+1} = 1$ であるから, べき級数 $\sum_{k=1}^{\infty} k z^k$ の収束半径は 1 である.

例 4.5 べき級数

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} z^k = 1 + z + \frac{1}{2} z^2 + \frac{1}{6} z^3 + \cdots$$

を考える. $a_k = \frac{1}{k!}$ とおけば $\frac{a_k}{a_{k+1}} = \frac{(k+1)!}{k!} = k+1 \rightarrow \infty$ ($k \rightarrow \infty$) となるから, このべき級数の収束半径は ∞ である.

命題 4.6 (優級数) $f_k(z)$ ($k = 1, 2, \dots$) を $\mathbb{C}$ の部分集合 D で連続な複素関数とする. 0 以上の実数 M_k があって

$$|f_k(z)| \leq M_k \quad (\forall z \in D), \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$$

が成立していると仮定すると, $f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ は D において収束して連続である. (このとき級数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ を $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ の優級数という.)

証明: 仮定から $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ は任意の $z \in D$ に対して絶対収束する. ε を任意の正の実数とする. $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ が収束することから, 自然数 n を十分大きくとれば $\sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \varepsilon$ となる. $z_0 \in D$ を固定して $z \in D$ とすると,

$$\begin{aligned} |f(z) - f(z_0)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} \{f_k(z) - f_k(z_0)\} \right| \leq \sum_{k=1}^n |f_k(z) - f_k(z_0)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z) - f_k(z_0)| \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f_k(z) - f_k(z_0)| + \sum_{k=n+1}^{\infty} \{|f_k(z)| + |f_k(z_0)|\} \\ &\leq \sum_{k=1}^n |f_k(z) - f_k(z_0)| + 2 \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k < \sum_{k=1}^n |f_k(z) - f_k(z_0)| + 2\varepsilon \end{aligned}$$

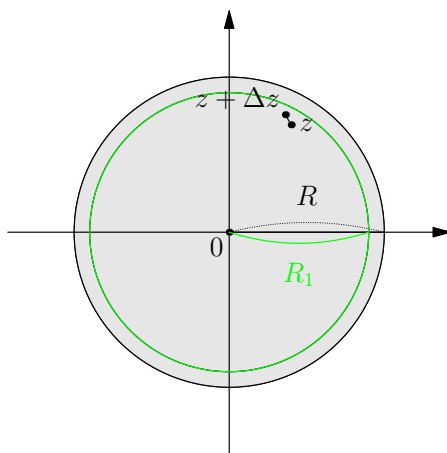
ここで $f_k(z)$ が連続なことから, $|z - z_0|$ を十分小さくすれば $\sum_{k=1}^n |f_k(z) - f_k(z_0)| < \varepsilon$ となるから, $|f(z) - f(z_0)| < 3\varepsilon$ が成立する. 従って $f(z)$ は z_0 で連続である. $\square$

定理 4.1 (べき級数の項別微分定理) べき級数 $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-z_0)^k$ の収束半径を $R > 0$ とする. $f(z)$ は収束円 $U(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ で正則であり,

$$f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$$

が任意の $z \in U(z_0; R)$ について成立する. この右辺のべき級数の収束半径も R である.

証明: $z_0 = 0$ としてよい. $z \in U(0; R)$ を固定して. $r = R - |z| > 0$, $R_1 = R - \frac{r}{2}$ とおく.



Δz を $|\Delta z| < \frac{r}{2}$ を満たす複素数とする. このとき $|z + \Delta z| \leq |z| + |\Delta z| < R - r + \frac{r}{2} = R_1$ かつ $|z| = R - r < R_1$ が成立する. $R_1 < R$ より $R_1 < R_2 < R$ を満たす実数 R_2 をとれば, $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| R_2^k$ は収束するから, ある正の実数 M が存在して任意の $k \geq 0$ について $|a_k| R_2^k \leq M$ が成立する. 恒等式 $A^n - B^n = (A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \cdots + B^{n-1})$ を用

いると

$$\begin{aligned} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \frac{(z + \Delta z)^k - z^k}{\Delta z} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} a_k \{(z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \cdots + z^{k-1}\} = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(\Delta z) \end{aligned} \quad (4)$$

と表せる. ここで $g_k(\Delta z) = (z + \Delta z)^{k-1} + z(z + \Delta z)^{k-2} + \cdots + z^{k-1}$ とおいた. この第 n 項の絶対値は,

$$\begin{aligned} |a_k g_k(\Delta z)| &\leq |a_k| \{|z + \Delta z|^{k-1} + |z||z + \Delta z|^{k-2} + \cdots + |z|^{k-1}\} \\ &\leq |a_k| k R_1^{k-1} = k |a_k| R_2^{k-1} \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{k-1} \leq \frac{M}{R_2} k \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{k-1} \end{aligned}$$

をみたす. べき級数 $\sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}$ の収束半径は 1 であるから, 無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} k \left(\frac{R_1}{R_2}\right)^{k-1}$ は収束する. 従って命題 4.6 により無限級数 (4) は $|\Delta z| < r/2$ において Δz について連続であるから,

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(\Delta z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k g_k(0) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$$

が成立する. よって $f(z)$ は $U(z_0; R)$ の各点で複素微分可能であり, 導関数 $f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k z^{k-1}$ もべき級数である. 従って, 上の証明から $f'(z)$ も $U(z_0; R)$ の各点で微分可能だから特に連続である. 以上により $f(z)$ は $U(z_0; R)$ で正則である.

最後に, $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ の収束半径を R' とすると, 以上のことから $R' \geq R$ である. もし $R' > R$ であれば, $R < |z - z_0| < R'$ を満たす z について $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^{k-1}$ は絶対収束する. よって $z - z_0$ を掛けた $\sum_{k=1}^{\infty} k a_k (z - z_0)^k$ も絶対収束する. $|a_k (z - z_0)^k| \leq |k a_k (z - z_0)^k|$ だから, $\sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ も収束することになるが, $|z - z_0| > R$ であるからこれは矛盾である. 以上により $R' = R$ が示された.

□

この定理の $f'(z)$ を表すべき級数のことをべき級数 $f(z)$ の項別微分 (termwise differentiation) という.

系 4.1 べき級数 $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k$ の収束半径を $R > 0$ とすると $f(z)$ は $U(z_0; R)$ において複素微分の意味で何回でも微分可能であり, 任意の自然数 n について, n 次導関数 $f^{(n)}(z)$ は $U(z_0; R)$ で正則である. そして $f^{(n)}(z_0) = n! a_n$ が任意の非負整数 n について成立する.

証明: 定理 4.1 を $f(z)$ の導関数に次々に適用して n 回項別微分すれば,

$$f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1) \cdots (k-n+1) a_k (z - z_0)^{n-k}$$

が任意の $z \in U(z_0; R)$ について成立することがわかる. $z = 0$ を代入して $f^{(n)}(z_0) = n!a_n$ を得る. $\square$

例 4.6 $f(z) := \sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$ の収束半径は 1 であるから, $U(0; 1)$ において

$$\frac{1}{(1-z)^2} = f'(z) = \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1}$$

が成立する. 同様に n を 1 以上の自然数とすると, $f(z)$ を n 回微分して

$$\frac{n!}{(1-z)^{n+1}} = f^{(n)}(z) = \sum_{k=n}^{\infty} k(k-1)\cdots(k-n+1)z^{k-n} \quad (|z| < 1)$$

を得る. この右辺のべき級数の収束半径も 1 である. これからたとえば

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^2 z^k = z^2 \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)z^{k-2} + z \sum_{k=1}^{\infty} k z^{k-1} = \frac{2z^2}{(1-z)^3} + \frac{z}{(1-z)^2} = \frac{z+z^2}{(1-z)^3}$$

項別微分定理を用いて指数関数と対数関数をべき級数で表すことができる.

命題 4.7 任意の複素数 z に対して

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 + \cdots$$

が成立する.

証明: $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n$ の収束半径は ∞ であるから, $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則であり, 項別微分定理より

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n!} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(n-1)!} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = f(z)$$

が成立する. 従って命題 3.11 により, ある複素数の定数 α があって $f(z) = \alpha e^z$ が成立する. $z = 0$ を代入して $\alpha = f(0) = 1$ となるから, $f(z) = e^z$ が示された. $\square$

命題 4.8 $|z| < 1$ を満たす複素数 z に対して

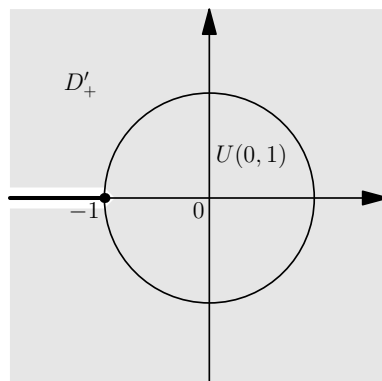
$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n = 1 - z + \frac{1}{2}z^2 - \frac{1}{3}z^3 + \cdots$$

が成立する.

証明: $f(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n$ とおく. このべき級数の収束半径は 1 であるから, $f(z)$ は $U(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ で正則である. 項別微分定理より

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} n}{n} z^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} z^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n = \frac{1}{1+z}$$

が成立する.



一方 $\text{Log } z$ は D_+ で正則だから, $\text{Log}(1+z)$ は $D'_+ = \{z-1 \mid z \in D_+\} = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ で正則である. $U(0; 1) \subset D'_+$ だから, $\text{Log}(1+z)$ は特に $U(0; 1)$ で正則であり

$$\frac{d}{dz} \text{Log}(1+z) = \frac{1}{1+z} = f'(z)$$

が成立する. 従って命題 3.9 により, ある定数 α があって $f(z) = \text{Log}(1+z) + \alpha$ となる. $f(0) = 0 = \text{Log } 1$ より $\alpha = 0$, すなわち $f(z) = \text{Log}(1+z)$ が成立する. $\square$

問題 4.2 次のべき級数の収束半径を求めよ.

$$(1) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{k^2} z^k \quad (2) \sum_{k=1}^{\infty} k(1+i)^k z^k \quad (3) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k!}{(2k)!} z^k \quad (4) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k!}{k^k} z^k$$

問題 4.3 $\frac{1}{(2+z)^3}$ を複素数 z のべき級数で表せ. また, その収束半径を求めよ.

問題 4.4 $\cos z$ と $\sin z$ を複素数 z のべき級数で表せ. また, それらの収束半径を求めよ.

問題 4.5 (1) $D'_+ = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq -1\}$ において $f(z) = (1+z)\text{Log}(1+z) - z$ の導関数 $f'(z)$ を求めよ.

(2) $f(z)$ を $U(0; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}$ においてべき級数で表せ.

5 線積分とコーシーの定理

複素関数の曲線に沿っての線積分を定義し、正則関数の線積分についてのコーシー (Cauchy) による 2 つの定理を証明する。これらの定理を基礎として正則関数の種々の性質や計算法を導くことができる。

5.1 微分形式の線積分とグリーンの公式

まず xy 平面 $\mathbb{R}^2$ において線積分を考察する。

定義 5.1 (微分形式) $u(x, y)$ と $v(x, y)$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 D で連続な 2 変数関数とすると、

$$\omega = u dx + v dy = u(x, y)dx + v(x, y)dy$$

という形の「式」を D で定義された微分形式という。これは D の各点 (x, y) にベクトル $(u(x, y), v(x, y))$ を対応させる写像と考えることもできる。その際 dx と dy はそれぞれ x 方向と y 方向の単位ベクトルに対応する記号であると考えればよい。 u と v が D で C^1 級であるとき、微分形式 ω は D で C^1 級であるという。

定義 5.2 (微分形式の線積分) $\omega = u(x, y)dx + v(x, y)dy$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 D で定義された微分形式とする。区分的に C^1 級の 1 変数関数 $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ によって

$$C : (x, y) = (\varphi(t), \psi(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

とパラメータ表示される曲線 C を考える。 C は開集合 D に含まれると仮定する。このとき、微分形式 ω の曲線 C に沿っての線積分を

$$\int_C \omega = \int_C (u dx + v dy) = \int_a^b \{u(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + v(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\} dt$$

により定義する。特に $v = 0$ 及び $u = 0$ のときはそれぞれ

$$\int_C u dx = \int_a^b u(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) dt, \quad \int_C v dy = \int_a^b v(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t) dt$$

となる。

この定義は微分形式を

$$u dx + v dy = \left(u \frac{dx}{dt} + v \frac{dy}{dt} \right) dt = \{u(\varphi(t), \psi(t))\varphi'(t) + v(\varphi(t), \psi(t))\psi'(t)\} dt$$

と書き直して t についての積分で表した式だと考えることができる。

例 5.1 C を 2 点 (a_1, b_1) と (a_2, b_2) を結ぶ線分とする. C のパラメータ表示として

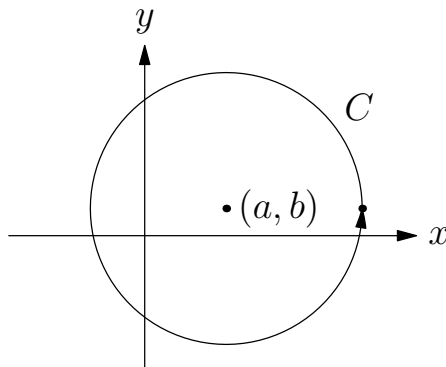
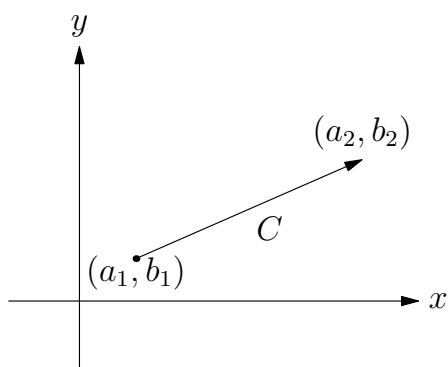
$$C : (x, y) = (1-t)(a_1, b_1) + t(a_2, b_2) = ((1-t)a_1 + ta_2, (1-t)b_1 + tb_2) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

をとると

$$\begin{aligned} \int_C (u dx + v dy) &= (a_2 - a_1) \int_0^1 u((1-t)a_1 + ta_2, (1-t)b_1 + tb_2) dt \\ &\quad + (b_2 - b_1) \int_0^1 v((1-t)a_1 + ta_2, (1-t)b_1 + tb_2) dt \end{aligned}$$

となる. たとえば

$$\begin{aligned} \int_C (x dx + y dy) &= (a_2 - a_1) \int_0^1 \{(1-t)a_1 + ta_2\} dt + (b_2 - b_1) \int_0^1 \{(1-t)b_1 + tb_2\} dt \\ &= (a_2 - a_1) \left[a_1 t + \frac{1}{2}(a_2 - a_1)t^2 \right]_0^1 + (b_2 - b_1) \left[b_1 t + \frac{1}{2}(b_2 - b_1)t^2 \right]_0^1 \\ &= \frac{1}{2}(a_2 - a_1)(a_1 + a_2) + \frac{1}{2}(b_2 - b_1)(b_1 + b_2) = \frac{1}{2}(a_2^2 + b_2^2 - a_1^2 - b_1^2) \end{aligned}$$



例 5.2 C を点 (a, b) を中心とする半径 r の円周とする. C のパラメータ表示として

$$C : (x, y) = (a + r \cos t, b + r \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

をとると,

$$\begin{aligned} \int_C (u dx + v dy) &= \int_0^{2\pi} \{-u(a + r \cos t, b + r \sin t)r \sin t + v(a + r \cos t, b + r \sin t)r \cos t\} dt \\ &= r \int_0^{2\pi} \{-u(a + r \cos t, b + r \sin t) \sin t + v(a + r \cos t, b + r \sin t) \cos t\} dt \end{aligned}$$

となる. たとえば

$$\begin{aligned} \int_C (y dx - x dy) &= r \int_0^{2\pi} \{(b + r \sin t)(-r \sin t) - (a + r \cos t)(r \cos t)\} dt \\ &= r \int_0^{2\pi} (-a \cos t - b \sin t - r \sin^2 t - r \cos^2 t) dt = -2\pi r^2 \end{aligned}$$

補題 5.1 $\omega = u dx + v dy$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 D で定義された微分形式とする. D 内の区分的に C^1 級の曲線 C の 2 つのパラメータ表示

$$C : (x, y) = (\varphi_1(t), \psi_1(t)) \quad (a \leq t \leq b), \quad C : (x, y) = (\varphi_2(s), \psi_2(s)) \quad (c \leq s \leq d)$$

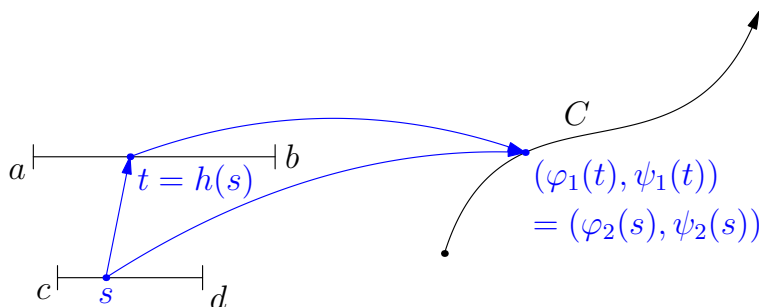
に対して,

$$\varphi_1(h(s)) = \varphi_2(s), \quad \psi_1(h(s)) = \psi_2(s) \quad (c \leq s \leq d), \quad h(c) = a, \quad h(d) = b$$

を満たすような区間 $[c, d]$ で区分的に C^1 級かつ単調増加であるような関数 $h(s)$ が存在すると仮定する. このとき,

$$\begin{aligned} \int_a^b \{u(\varphi_1(t), \psi_1(t))\varphi_1'(t) + v(\varphi_1(t), \psi_1(t))\psi_1'(t)\} dt \\ = \int_c^d \{u(\varphi_2(s), \psi_2(s))\varphi_2'(s) + v(\varphi_2(s), \psi_2(s))\psi_2'(s)\} ds \end{aligned}$$

が成立する. すなわち, 線積分 $\int_C \omega$ の値は C の向きを変えないようなパラメータ表示の取り方によらない.



証明: $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は C^1 級であるとしてよい (小区間に分けて考察すればよいから). $t = h(s)$ において $u(\varphi_1(t), \psi_1(t))\varphi_1'(t)$ に対して置換積分の公式を適用すると, $\varphi_2'(s) = (\varphi_1(h(s)))' = \varphi_1'(h(s))h'(s)$ より

$$\begin{aligned} \int_C u dx &= \int_a^b u(\varphi_1(t), \psi_1(t))\varphi_1'(t) dt \\ &= \int_c^d u(\varphi_1(h(s)), \psi_1(h(s)))\varphi_1'(h(s))h'(s) ds = \int_c^d u(\varphi_2(s), \psi_2(s))\varphi_2'(s) ds \end{aligned}$$

従って $\int_C u dx$ の値はどちらのパラメータ表示で計算しても同じ値となる. $\int_C v dy$ についても同様である. $\square$

次の公式は定義からただちに従う.

命題 5.1 $\omega_1 = u_1 dx + v_1 dy$ と $\omega_2 = u_2 dx + v_2 dy$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 D で定義された微分形式として, C を D 内の区分的になめらかな曲線, c_1, c_2 を実数の定数とすると,

$$\int_C (c_1\omega_1 + c_2\omega_2) = c_1 \int_C \omega_1 + c_2 \int_C \omega_2$$

が成立する. ただし $c_1\omega_1 + c_2\omega_2 = (c_1u_1 + c_2u_2)dx + (c_1v_1 + c_2v_2)dy$ である.

命題 5.2 $\omega = u dx + v dy$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 D で定義された微分形式, C, C_1, C_2 を D 内の区分的になめらかな曲線で C_1 の終点と C_2 の始点が一致すると仮定すると

$$\int_{-C} \omega = - \int_C \omega, \quad \int_{C_1+C_2} \omega = \int_{C_1} \omega + \int_{C_2} \omega$$

証明: C のパラメータ表示を

$$C : (x, y) = (\varphi(t), \psi(t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

とすると, $-C$ のパラメータ表示として

$$-C : (x, y) = (\varphi(a+b-t), \psi(a+b-t)) \quad (a \leq t \leq b)$$

がとれるから, $s = a+b-t$ (従って $dt = -ds$) とおいて置換積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-C} \omega &= \int_a^b u(\varphi(a+b-t), \psi(a+b-t))(-\varphi'(a+b-t)) dt \\ &\quad + \int_a^b v(\varphi(a+b-t), \psi(a+b-t))(-\psi'(a+b-t)) dt \\ &= \int_b^a u(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s) ds + \int_b^a v(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s) ds \\ &= - \int_a^b u(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s) ds - \int_a^b v(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s) ds \\ &= \int_d^c u(\varphi(s), \psi(s))\varphi'(s) ds + \int_d^c v(\varphi(s), \psi(s))\psi'(s) ds \\ &= - \int_C \omega \end{aligned}$$

を得る. 後の等式は線積分の定義より明らかである. $\square$

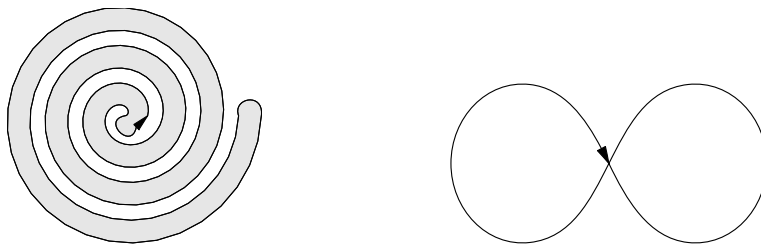
問題 5.1 次の線積分の値を定義に従って求めよ.

$$(1) \int_C (x dx + y dy), \quad C : (x, y) = (t, t^2) \quad (0 \leq t \leq 1)$$

$$(2) \int_C (y dx + x dy), \quad C : (x, y) = (\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

$$(3) \int_C (y dx + x dy), \quad C : (x, y) = (\cos t, \sin t) \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

定義 5.3 曲線 $C : (x, y) = (\varphi(t), \psi(t))$ ($a \leq t \leq b$) が単純閉曲線であるとは, C が閉曲線, すなわち $\varphi(a) = \varphi(b)$ かつ $\psi(a) = \psi(b)$ であって, $a \leq t_1 < t_2 < b$ のとき $(\varphi(t_1), \psi(t_1)) \neq (\varphi(t_2), \psi(t_2))$ が成立する, すなわち C が始点と終点以外では交わらないことである.



単純閉曲線によって平面は内側と外側の2つの連結開集合に分けられる．これはジョルダンの曲線定理と呼ばれ，直感的には明らかであるが厳密な証明は簡単でない．複素関数論で扱う単純閉曲線は円や長方形の周など比較的簡単なものに限定されるので，内部と外部に分けられことは明らかとしてよい．一方，たとえば8の字型の閉曲線は単純閉曲線ではなく平面を3つの連結開集合に分ける．

定義 5.4 単純閉曲線 C に対して， C の内部が進行方向左側になる向きを正の向きといい， C の内部が進行方向右側になるような向きを負の向きという．たとえば円周の正の向きは反時計回りである．

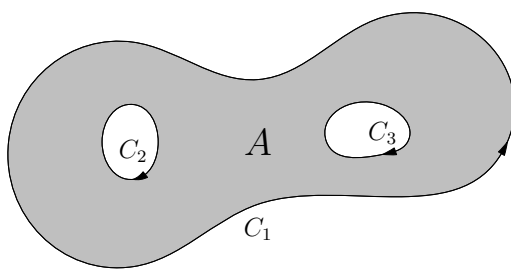
定義 5.5 A を $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合とする． A の境界 ∂A が有限個の区分的に C^1 級の単純閉曲線 $C_1, \dots, C_n$ の和集合になっているとき，

$$\partial A = C_1 + \dots + C_n$$

と表す．ただし各々の単純閉曲線 C_k の向きは進行方向左側が A の内部になるように決める（単純閉曲線 C_k の正の向きとは必ずしも一致しない）．このとき，微分形式 ω の ∂A に沿っての線積分を

$$\int_{\partial A} \omega = \sum_{k=1}^n \int_{C_k} \omega$$

によって定義する．



たとえば上の図では $\partial A = C_1 + C_2 + C_3$ である．ただし C_1 は正の向きであるが， C_2 と C_3 は負の向きである (A の内部は C_2 と C_3 の外部になるので)．

定理 5.1 (Green の公式) $\omega = u dx + v dy$ を $\mathbb{R}^2$ の開集合 D で定義された C^1 級の微分形式とする． A を D に含まれる $\mathbb{R}^2$ の有界閉集合であって境界が有限個の区分的に C^1 級の単純閉曲線の和集合になっているものとする．このとき

$$\int_{\partial A} (u dx + v dy) = \iint_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

が成立する．

証明: ステップ 1: A が縦線領域, すなわち, 有界閉区間 $[a, b]$ において区分的に C^1 級の 2 つの関数 $g_1(x)$ と $g_2(x)$ があって, $a \leq x \leq b$ のとき $g_1(x) \leq g_2(x)$ であって

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

と表されると仮定して

$$\int_{\partial A} u dx = - \iint_A \frac{\partial u}{\partial y} dx dy \quad (5)$$

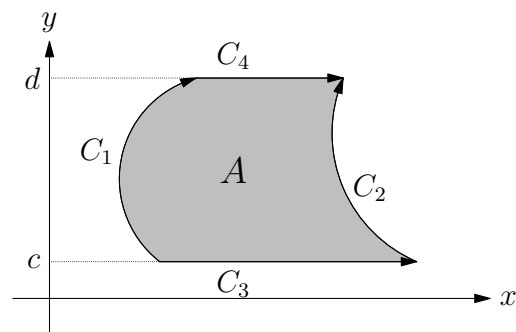
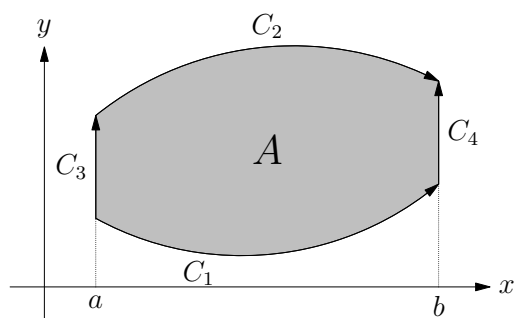
を示す. このとき曲線 C_1, C_2, C_3, C_4 を

$$\begin{aligned} C_1 : (x, y) &= (t, g_1(t)) \quad (a \leq t \leq b), & C_2 : (x, y) &= (t, g_2(t)) \quad (a \leq t \leq b) \\ C_3 : (x, y) &= (a, t) \quad (g_1(a) \leq t \leq g_2(a)), & C_4 : (x, y) &= (b, t) \quad (g_1(b) \leq t \leq g_2(b)) \end{aligned}$$

とおくと, 向きを考慮して $\partial A = C_1 + C_4 - C_2 - C_3$ となることがわかる. 従って

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} u dx &= \int_{C_1} u dx + \int_{C_4} u dx - \int_{C_2} u dx - \int_{C_3} u dx \\ &= \int_a^b u(t, g_1(t)) dt + \int_{g_1(b)}^{g_2(b)} u(b, t) \cdot 0 dt - \int_a^b u(t, g_2(t)) dt - \int_{g_1(a)}^{g_2(a)} u(a, t) \cdot 0 dt \\ &= \int_a^b \{u(x, g_1(x)) - u(x, g_2(x))\} dx = - \int_a^b \left\{ \int_{g_1(x)}^{g_2(x)} u_y(x, y) dy \right\} dx \\ &= - \iint_A u_y(x, y) dx dy \end{aligned}$$

となるので (5) が示された. ここで最後に 2 重積分に対する累次積分の公式を用いた.



ステップ 2: A が横線領域, すなわち, 有界閉区間 $[c, d]$ において区分的に C^1 級の 2 つの関数 $h_1(y)$ と $h_2(y)$ があって, $c \leq y \leq d$ のとき $h_1(y) \leq h_2(y)$ であって

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

と表されると仮定して

$$\int_{\partial A} v dy = \iint_A \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \quad (6)$$

を示す. このとき曲線 C_1, C_2, C_3, C_4 を

$$\begin{aligned} C_1 : (x, y) &= (h_1(t), t) \quad (c \leq t \leq d), & C_2 : (x, y) &= (h_2(t), t) \quad (c \leq t \leq d) \\ C_3 : (x, y) &= (t, c) \quad (h_1(c) \leq t \leq h_2(c)), & C_4 : (x, y) &= (t, d) \quad (h_1(d) \leq t \leq h_2(d)) \end{aligned}$$

とおくと、向きを考慮して $\partial A = C_3 + C_2 - C_4 - C_1$ であることがわかる。従って

$$\begin{aligned}
 \int_{\partial A} v dy &= \int_{C_3} v dy + \int_{C_2} v dy - \int_{C_4} v dy - \int_{C_1} v dy \\
 &= \int_{h_1(c)}^{h_2(c)} v(t, c) \cdot 0 dt + \int_c^d v(h_2(t), t) dt - \int_{h_1(d)}^{h_2(d)} v(t, d) \cdot 0 dt - \int_c^d v(h_1(t), t) dt \\
 &= \int_c^d \{v(h_2(y), y) - v(h_1(y), y)\} dy = \int_c^d \left\{ \int_{h_1(y)}^{h_2(y)} v_x(x, y) dx \right\} dy \\
 &= \iint_A v_x(x, y) dx dy
 \end{aligned}$$

となるので (6) が示された。

ステップ 3: A が縦線領域でないときは A をいくつかの閉集合 $A_1, \dots, A_n$ に分割して、

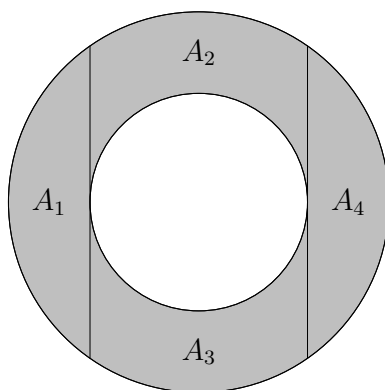
- (1) $A_1, \dots, A_n$ はすべて縦線領域である。
- (2) $A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ であり、 $1 \leq j < k \leq n$ のとき $A_j \cap A_k$ は空集合であるかまたは有限個の点または曲線の和集合である。

をみたすようにする。たとえば $0 < r < R$ として

$$A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid r^2 \leq x^2 + y^2 \leq R^2\}$$

のときは

$$\begin{aligned}
 A_1 &= \{(x, y) \in A \mid x \leq -r\}, & A_2 &= \{(x, y) \in A \mid -r \leq x \leq r, y \geq 0\}, \\
 A_3 &= \{(x, y) \in A \mid -r \leq x \leq r, y \leq 0\}, & A_4 &= \{(x, y) \in A \mid x \geq r\}
 \end{aligned}$$



とすればよい。このとき、境界 ∂A_k のうち互いに接している部分は、向きが反対のものどうしが打ち消しあうので、ステップ 1 で示した等式 (5) を各々の A_k に適用して

$$\int_{\partial A} u dx = \sum_{k=1}^n \int_{\partial A_k} u dx = - \sum_{k=1}^n \iint_{A_k} \frac{\partial u}{\partial y} dx dy = - \iint_A \frac{\partial u}{\partial y} dx dy \quad (7)$$

を得る. A が横線領域でないときは, A をいくつかの横線領域 $A_1, \dots, A_n$ に分割して, 各々の A_k に対してステップ 2 で示した (6) を用いると

$$\int_{\partial A} v dy = \sum_{k=1}^n \int_{\partial A_k} v dy = \sum_{k=1}^n \iint_{A_k} \frac{\partial v}{\partial x} dx dy = \iint_A \frac{\partial v}{\partial x} dx dy \quad (8)$$

を得る. (7) と (8) を合わせて

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} (u dx + v dy) &= \int_{\partial A} u dx + \int_{\partial A} v dy = - \iint_A u_y(x, y) dx dy + \iint_A v_x(x, y) dx dy \\ &= \iint_A \{v_x(x, y) - u_y(x, y)\} dx dy \end{aligned}$$

が示された. $\square$

注意 5.1 Green の定理の証明において, 一般の A を縦線領域および横線領域に分割することは明らかではないが, 今後の応用で必要になる集合 A は比較的単純でこのような分割が自明であるような集合に限られる. 従って論理的な厳密性のためには, Green の定理とそれを用いて以下で示す Cauchy の定理や留数定理において, A を有限個の縦線領域および有限個の横線領域へ分割することが可能であることを定理の仮定に付け加えておけばよい.

Green の定理を用いて, 単純閉曲線 C に沿っての線積分を C を境界とする有界閉集合 A 上の 2 重積分で表すことができる.

例 5.3 $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ と $r > 0$ に対して

$$A = \{(x, y) \mid (x - a)^2 + (y - b)^2 \leq r^2\}$$

とおくと $C = \partial A$ は (a, b) を中心とする半径 r の円周 (正の向き) だから,

$$\int_C (u dx + v dy) = \iint_A \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) dx dy$$

例えば A の面積 $|A|$ は πr^2 だから,

$$\int_C (y dx - x dy) = \iint_A (-1 - 1) dx dy = -2 \iint_A 1 dx dy = -2|A| = -2\pi r^2$$

となる. これは例 5.2 で直接計算した結果と一致する.

問題 5.2 (1) Green の定理 (定理 5.1) の仮定のもとで, さらに D で定義された C^2 級関数 $f(x, y)$ であって $u(x, y) = f_x(x, y)$ かつ $v(x, y) = f_y(x, y)$ となるようなものが存在するとき, $\int_{\partial A} (u dx + v dy) = 0$ が成立することを示せ.

(2) 次の各々の微分形式 $u dx + v dy$ に対して, (1) の条件を満たすような $f(x, y)$ を一つ求めよ.

$$(1) dx + dy \quad (2) x dx + y dy \quad (3) y dx + x dy$$

5.2 複素線積分

$f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で定義された連続な複素関数とする. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) として微分形式

$$f dz = f(x + iy)(dx + i dy) = f(x + iy)dx + i f(x + iy)dy$$

を考える. $f(x + iy)$ の実部を $u(x, y)$, 虚部を $v(x, y)$ とすれば

$$f dz = (u + iv)dx + i(u + iv)dy = (u dx - v dy) + i(v dx + u dy)$$

という複素数値の微分形式とみなすことができる.

定義 5.6 (複素線積分) D に含まれる曲線

$$C: z = \varphi(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

($\varphi(t)$ は複素数値の区分的に C^1 級関数) に対して, f の C に沿っての (複素) 線積分を

$$\int_C f dz = \int_C f(x + iy) dx + i \int_C f(x + iy) dy$$

で定義する. $\varphi(t)$ の実部を $\varphi_1(t)$, 虚部を $\varphi_2(t)$ とすると,

$$\int_C f dz = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi_1'(t) dt + i \int_a^b f(\varphi(t))\varphi_2'(t) dt = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt$$

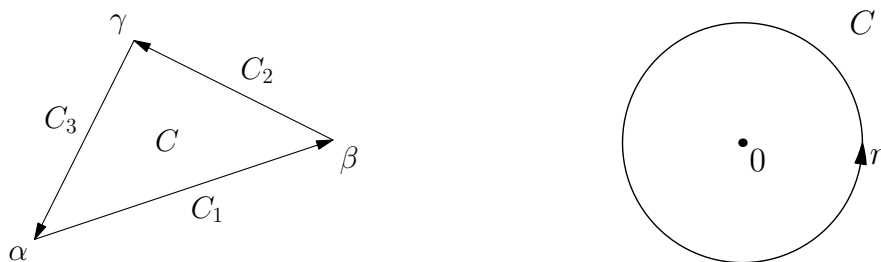
と表すことができる.

例 5.4 C を $\alpha \in \mathbb{C}$ を始点, $\beta \in \mathbb{C}$ を終点とする線分, $f(z) = az + b$ ($a, b \in \mathbb{C}$) とする. C のパラメータ表示として $z = \varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ ($0 \leq t \leq 1$) がとれる.

$$\begin{aligned} \int_C (az + b) dz &= \int_0^1 \{a\varphi(t) + b\}\varphi'(t) dt = \int_0^1 \{a(\alpha + t(\beta - \alpha)) + b\}(\beta - \alpha) dt \\ &= (\beta - \alpha) \int_0^1 \{a(\beta - \alpha)t + a\alpha + b\} dt = (\beta - \alpha) \left\{ \frac{1}{2}a(\beta - \alpha) + a\alpha + b \right\} \\ &= (\beta - \alpha) \left\{ \frac{1}{2}a(\alpha + \beta) + b \right\} = \frac{1}{2}a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha) \end{aligned}$$

例 5.5 $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ を頂点とする3角形の周 ($\alpha \rightarrow \beta \rightarrow \gamma \rightarrow \alpha$ と辿る向き) を C とする. α と β を結ぶ線分を C_1 , β と γ を結ぶ線分を C_2 , γ と α を結ぶ線分を C_3 とすると, $C = C_1 + C_2 + C_3$ であるから, 上の例の結果を用いると

$$\begin{aligned} \int_C (az + b) dz &= \int_{C_1} (az + b) dz + \int_{C_2} (az + b) dz + \int_{C_3} (az + b) dz \\ &= \frac{1}{2}a(\beta^2 - \alpha^2) + b(\beta - \alpha) + \frac{1}{2}a(\gamma^2 - \beta^2) + b(\gamma - \beta) + \frac{1}{2}a(\alpha^2 - \gamma^2) + b(\alpha - \gamma) = 0 \end{aligned}$$



例 5.6 C を 0 を中心とする半径 $r > 0$ の円周 ($|z| = r$) とする. n を整数として $f(z) = z^n$ とおくと, $z = \varphi(t) = re^{it}$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) は C のパラメータ表示だから, $\varphi'(t) = ire^{it}$ と de Moivre の定理を用いて

$$\int_C z^n dz = \int_0^{2\pi} (\varphi(t))^n \varphi'(t) dt = \int_0^{2\pi} r^n e^{int} ire^{it} dt = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt$$

ここで $n \neq -1$ のときは $(e^{i(n+1)t})' = i(n+1)e^{i(n+1)t}$ より

$$\int_C z^n dz = ir^{n+1} \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = \left[\frac{r^{n+1}}{n+1} e^{i(n+1)t} \right]_0^{2\pi} = \frac{r^{n+1}}{n+1} (e^{2(n+1)\pi i} - e^0) = 0$$

であり, $n = -1$ のときは

$$\int_C z^n dz = i \int_0^{2\pi} e^{i(n+1)t} dt = i \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi i$$

となる. (この例は後で重要な意味を持つ.)

定義 5.7 $C : z = \varphi(t)$ ($a \leq t \leq b$) を区分的になめらかな曲線とするととき,

$$l(C) := \int_a^b |\varphi'(t)| dt$$

を曲線 C の長さ (length) という. これが C のパラメータ表示の選び方によらないことは補題 5.1 の証明と同様に示すことができる.

この定義の意味は次の通りである.

$$\Delta : a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$$

を区間 $[a, b]$ の分割として, $z_k = \varphi(t_k)$ ($0 \leq k \leq n$) とおく. また $u(t) = \operatorname{Re} \varphi(t)$, $v(t) = \operatorname{Im} \varphi(t)$ とおく. $u(t)$ と $v(t)$ について区間 $[t_{k-1}, t_k]$ で平均値の定理を用いると

$$u(t_k) - u(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})u'(\sigma_k), \quad v(t_k) - v(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})v'(\tau_k)$$

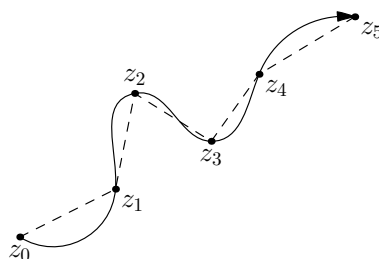
を満たす $\sigma_k, \tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$ が存在する. このとき $z_0, z_1, \dots, z_n$ を結ぶ折れ線の長さは,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |z_k - z_{k-1}| &= \sum_{k=1}^n \sqrt{(u(t_k) - u(t_{k-1}))^2 + (v(t_k) - v(t_{k-1}))^2} \\ &= \sum_{k=1}^n \sqrt{u'(\sigma_k)^2 + v'(\tau_k)^2} (t_k - t_{k-1}) \end{aligned}$$

分割を細かくしていくと τ_k と σ_k は限りなく近づくので τ_k を σ_k で置き換えれば、この最後の式は

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{u'(\sigma_k)^2 + v'(\sigma_k)^2} (t_k - t_{k-1}) = \sum_{k=1}^n |\varphi'(\sigma_k)| (t_k - t_{k-1})$$

となり、これは関数 $|\varphi'(t)|$ の分割 Δ に関する Riemann 和であるから、分割 Δ を限りなく細かくすれば $\int_a^b |\varphi'(t)| dt$ に収束する。よって、分割 Δ から上のようにして C 上の点 $z_0, z_1, \dots, z_n$ を定めたとき、これらを結ぶ折れ線の長さの分割を細かくしたときの極限が C の長さである。



例 5.7 C を $\alpha \in \mathbb{C}$ を始点、 $\beta \in \mathbb{C}$ を終点とする線分とする。 C のパラメータ表示 $z = \varphi(t) = \alpha + t(\beta - \alpha)$ ($0 \leq t \leq 1$) を用いると、 C の長さは

$$l(C) = \int_0^1 |\varphi'(t)| dt = \int_0^1 |\beta - \alpha| dt = |\beta - \alpha|$$

すなわち α と β の距離に等しい。

例 5.8 C を $\alpha \in \mathbb{C}$ を中心とする半径 $r > 0$ の円周 $|z - \alpha| = r$ とすると、 $z = \varphi(t) = re^{it} + \alpha$ ($0 \leq t \leq 2\pi$) は C のパラメータ表示だから、 C の長さは

$$l(C) = \int_0^{2\pi} |\varphi'(t)| dt = \int_0^{2\pi} |ire^{it}| dt = \int_0^{2\pi} r dt = 2\pi r$$

補題 5.2 $h(t)$ を区間 $[a, b]$ で定義された実変数複素数値関数とすると

$$\left| \int_a^b h(t) dt \right| \leq \int_a^b |h(t)| dt$$

が成立する。

証明: $\alpha = \int_a^b h(t) dt$ とおく。 $\alpha = 0$ ならば補題の不等式は成立するから $\alpha \neq 0$ としてよい。このとき $\theta = \arg \alpha$ とおくと、 $\alpha = |\alpha|e^{i\theta}$ より $e^{-i\theta}\alpha = |\alpha|$ は実数であるから、

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b h(t) dt \right| &= |\alpha| = e^{-i\theta}\alpha = \int_a^b e^{-i\theta}h(t) dt = \operatorname{Re} \left(\int_a^b e^{-i\theta}h(t) dt \right) \\ &= \int_a^b \operatorname{Re} (e^{-i\theta}h(t)) dt \leq \int_a^b |e^{-i\theta}h(t)| dt = \int_a^b |h(t)| dt \end{aligned}$$

□

命題 5.3 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で連続な複素関数, $C: z = \varphi(t)$, $(a \leq t \leq b)$ を D 内の区分的になめらかな曲線とする. ある実数 $M \geq 0$ があって, $z \in C$ すなわち $z = \varphi(t)$ ($a \leq t \leq b$) のとき, $|f(z)| \leq M$ が成立するとすると

$$\left| \int_C f(z) dz \right| \leq l(C)M$$

証明: 補題 5.2 より

$$\left| \int_C f(z) dz \right| = \left| \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(\varphi(t))\varphi'(t)| dt \leq M \int_a^b |\varphi'(t)| dt = l(C)M$$

□

問題 5.3 複素数平面において 0 を中心とする半径 $r > 0$ の円 (正の向き) を C とするとき, 次の複素線積分の値を定義に従って計算せよ.

$$(1) \int_C |z| dz \quad (2) \int_C \bar{z} dz \quad (3) \int_C \bar{z}^2 dz \quad (4) \int_C \frac{1}{\bar{z}} dz$$

問題 5.4 複素数平面において 0, 1, i を頂点とする三角形の周 (正の向き) を C とするとき, 次の複素線積分の値を定義に従って計算せよ.

$$(1) \int_C 1 dz \quad (2) \int_C z dz \quad (3) \int_C \bar{z} dz \quad (4) \int_C |z|^2 dz$$

5.3 コーシーの定理

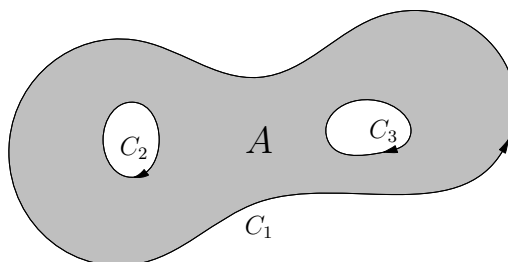
Green の公式から, 複素関数論の基礎となる Cauchy の積分定理と積分公式が導かれる.

定理 5.2 (Cauchy の積分定理) f を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数とする. A を D に含まれる有界閉集合で境界 ∂A が有限個の区分的に C^1 級の単純閉曲線の和集合であるものとする, と,

$$\int_{\partial A} f dz = 0$$

が成立する. 特に C が C^1 級の単純閉曲線で C とその内部が D に含まれるとき

$$\int_C f dz = 0$$



たとえば上の図の場合には

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} f(z) dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} f(z) dz = 0$$

である．ここで C_1 は正の向きであるが， C_2 と C_3 は負の向きであることに注意する．

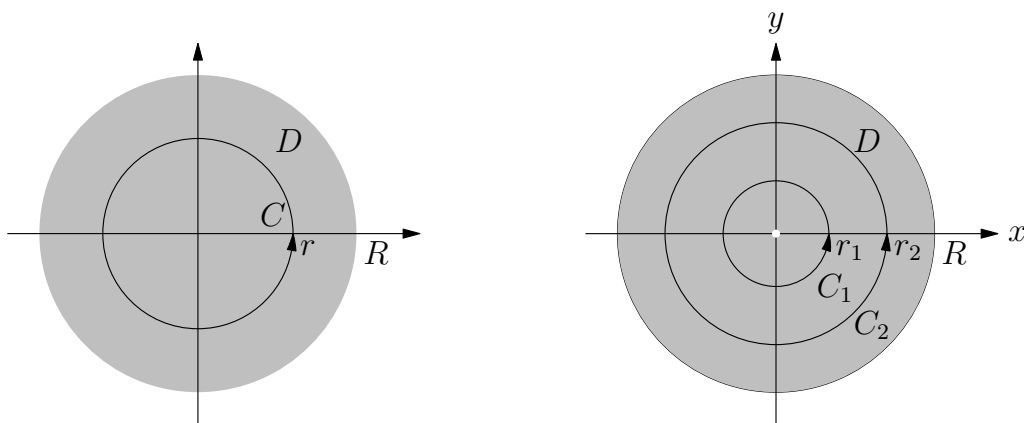
証明: Green の定理 (定理 5.1) を C^1 級の複素数値微分形式 $f dz$ に適用すると

$$\begin{aligned} \int_{\partial A} f dz &= \int_{\partial A} \{f(x+iy) dx + if(x+iy) dy\} \\ &= \iint_A \left(i \frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) - \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) \right) dx dy \\ &= i \iint_A \left(\frac{\partial}{\partial x} f(x+iy) + i \frac{\partial}{\partial y} f(x+iy) \right) dx dy \end{aligned}$$

を得る．Cauchy-Riemann の関係式 (命題 3.7) によりこの最後の積分の中の式 (被積分関数) は 0 となるから定理が示された．最後の等式は， C の内部と C を合わせた閉集合を A とすれば $C = \partial A$ となることから成立する．□

例 5.9 e^z は $\mathbb{C}$ で正則だから，任意の区分的に C^1 級の単純閉曲線 C に対して $\int_C e^z dz = 0$ が成立する．

例 5.10 $R > 0$ として， f を開円板 $U(0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < R\}$ で正則な関数とする．このとき $0 < r < R$ を満たす任意の r をとって C を円周 $|z| = r$ (正の向き) とすると $\int_C f(z) dz = 0$ である．



例 5.11 $R > 0$ として， f を穴あき円板 $U(0; R) \setminus \{0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z| < R\}$ で正則な関数とする．このとき $0 < r_1 < r_2 < R$ を満たす任意の r_1 と r_2 をとって C_k ($k = 1, 2$) を円周 $|z| = r_k$ (正の向き) とすると

$$\int_{C_1} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz$$

が成立する．すなわち，この線積分の値は半径の取り方によらず一定である．実際， $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z| \leq r_2\}$ とおけば $A \subset D$ かつ $\partial A = C_2 - C_1$ であるから Cauchy の積分定理により

$$0 = \int_{\partial A} f(z) dz = \int_{C_2} f(z) dz - \int_{C_1} f(z) dz$$

となることから上の等式を得る．

しかし右辺のそれぞれの積分は 0 になるとは限らない．たとえば $f(z) = \frac{1}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則だから特に D で正則であるが，例 5.6 より

$$\int_{C_1} \frac{1}{z} dz = \int_{C_2} \frac{1}{z} dz = 2\pi i$$

である．実際 $A_1 = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r_1\}$ とおくと $\partial A_1 = C_1$ ではあるが， $A_1 \subset D$ ではない（ A は 0 を含むが D は含まない）から A_1 は Cauchy の積分定理の仮定を満たしていない．

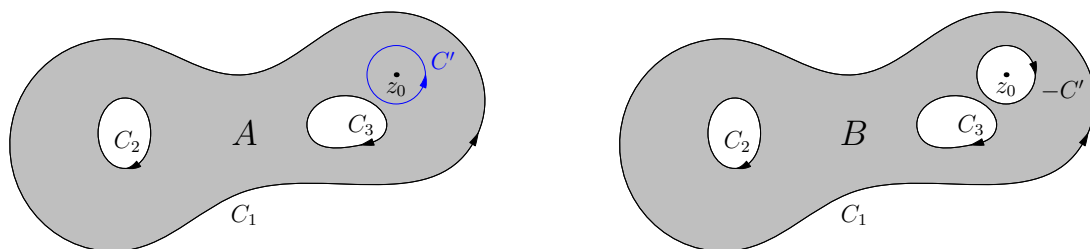
定理 5.3 (Cauchy の積分公式) f を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数とする． A を D に含まれる有界閉集合で境界 ∂A が有限個の区分的に C^1 級の単純閉曲線の和集合であるものとする．このとき A の内部に含まれる任意の z_0 に対して

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

が成立する．特に C が C^1 級の単純閉曲線（正の向き）で C とその内部が D に含まれるとき， z_0 を C の内部の点とすると

$$\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = f(z_0)$$

が成立する．



たとえば左上の図の場合には

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(z)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \int_{C_3} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

である．ただし C_1 は正の向きであるが， C_2 と C_3 は負の向きとしている．

証明: ε を開円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < 2\varepsilon\}$ が A に含まれるような十分小さい正の実数として，

$$B = A \setminus \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < \varepsilon\}$$

とおく. このとき

$$C' : z = z_0 + \varepsilon e^{it} \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

とすれば, 向きも込めて $\partial B = \partial A \cup (-C')$ が成立する. $F(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ は $D' = D \setminus \{z_0\}$ で正則であり, $B \subset D'$ であるから, 正則関数 $F(z)$ と有界閉集合 B に対して Cauchy の積分定理を適用すると

$$0 = \int_{\partial B} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz - \int_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

従って

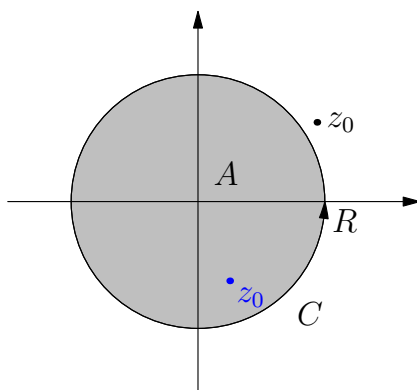
$$\begin{aligned} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{z - z_0} dz &= \int_{C'} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + \varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} i \varepsilon e^{it} dt \\ &= i \int_0^{2\pi} f(z_0 + \varepsilon e^{it}) dt \longrightarrow i \int_0^{2\pi} f(z_0) dt = 2\pi i f(z_0) \quad (\varepsilon \rightarrow +0) \end{aligned}$$

を得る. 左辺の ∂A に沿っての積分は ε によらないから, $2\pi i f(z_0)$ に等しい. $\square$

例 5.12 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ で正則な関数, $R > 0$ として, C を円周 $|z| = R$ (正の向き) とする. このとき

$$\int_C \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0) & (|z_0| < R \text{ のとき}) \\ 0 & (|z_0| > R \text{ のとき}) \end{cases}$$

が成立する. ($|z_0| = R$ のときは上の積分は分母が C 上の点で 0 になるので定義できない.) 実際, $|z_0| < R$ のときは z_0 は C の内部にあるから Cauchy の積分公式そのものである. $|z_0| > R$ のときは $F(z) = \frac{f(z)}{z - z_0}$ は $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ で正則であり, $|z_0| > r > R$ をみたす r をとって $A = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq r\}$ とおくと $A \subset D$ かつ $\partial A = C$ であるから, Cauchy の積分定理にによって $\int_C F(z) dz = 0$ となる.



問題 5.5 C を単位円周 $|z| = 1$ (正の向き) とするとき, Cauchy の積分定理または積分公式を用いて次の線積分の値を求めよ.

$$(1) \int_C \frac{e^{2\pi iz}}{z - 2} dz \quad (2) \int_C \frac{e^{2\pi iz}}{z - \frac{1}{2}} dz \quad (3) \int_C \frac{e^z}{z(z - 2)} dz \quad (4) \int_C \frac{e^z}{z(z^2 + 4)} dz$$

6 正則関数のテイラー展開とその応用

6.1 正則関数のテイラー展開

4章で指数関数や対数関数などの基本的な正則関数のべき級数による表示を導いたが、ここでは、任意の正則関数を任意の点を中心としてべき級数で表示できることを証明しよう。これから特に正則関数は何回でも微分できることが導かれる。

命題 6.1 (項別積分) f と f_k ($k = 1, 2, \dots$) を $\mathbb{C}$ の部分集合 D で連続な複素関数とする。 C を D に含まれる区分的に C^1 級の曲線とする。 0 以上の実数 M_k があって

$$f(z) = \sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \quad (\forall z \in D), \quad |f_k(z)| \leq M_k \quad (\forall z \in C), \quad \sum_{k=1}^{\infty} M_k < \infty$$

が成立していると仮定する。このとき

$$\int_C f(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz$$

が成立する（特に右辺の無限級数は収束する）。

証明: 仮定より

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) \right| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(z)| \leq \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k$$

が成立するから、命題 5.3 により不等式

$$\begin{aligned} \left| \int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_C f_k(z) dz \right| &= \left| \int_C \left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k(z) \right) dz - \int_C \left(\sum_{k=1}^n f_k(z) \right) dz \right| \\ &= \left| \int_C \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(z) dz \right| \leq \ell(C) \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \end{aligned}$$

を得る。無限級数 $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ が収束することから

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^n M_k \right) = \sum_{k=1}^{\infty} M_k - \sum_{k=1}^{\infty} M_k = 0$$

となることに注意すると

$$\left| \int_C f(z) dz - \sum_{k=1}^n \int_C f_k(z) dz \right| \leq \ell(C) \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

従って

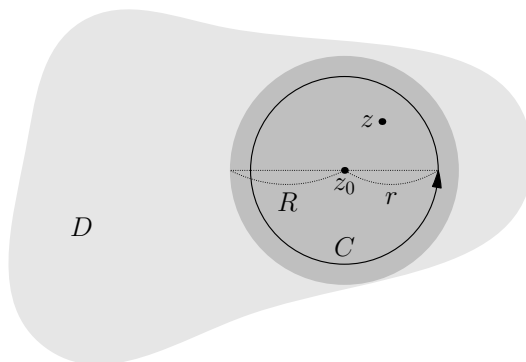
$$\int_C f(z) dz = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n \int_C f_k(z) dz = \sum_{k=1}^{\infty} \int_C f_k(z) dz$$

が示された。□

定理 6.1 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数として $z_0 \in D$ とする. 実数 $R > 0$ を $U(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\} \subset D$ となるようにとる. このとき, $a_n = \frac{f^{(n)}(z_0)}{n!}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) とおくと, 任意の $z \in U(z_0; R)$ について

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \quad (9)$$

が成立する. (9) を $f(z)$ の z_0 における (または z_0 を中心とする) **Taylor 展開** または **べき級数展開** という. 特に f は D において無限回微分可能である.



証明: まず $z_0 = 0$ の場合を示す. $|z| < R$ を満たす複素数 z を固定して, $|z| < r < R$ を満たす実数 r をとる. 閉円板 $A = \{\zeta \in \mathbb{C} \mid |\zeta| \leq r\}$ の境界 $C = \partial A$ は z_0 を中心とする半径 r の円周 (正の向き) である. このとき Cauchy の積分公式 (定理 5.3) によって

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (10)$$

が成立する. $|\zeta| = r > |z|$ に注意して等比級数の公式を用いると

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta} \frac{1}{1 - \frac{z}{\zeta}} = \frac{1}{\zeta} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{z}{\zeta}\right)^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\zeta^{k+1}}$$

を得る. これを (10) に代入して

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

を得る. 積分変数 ζ は円周 C 上を動くから, $|z| < r = |\zeta|$ である. 従って C 上での $|f(\zeta)|$ の最大値を M とおくと,

$$\left| f(\zeta) \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} \right| \leq M \frac{|z|^k}{r^{k+1}} = \frac{M}{r} \left(\frac{|z|}{r}\right)^k, \quad \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{|z|}{r}\right)^k = \frac{1}{1 - \frac{|z|}{r}} < \infty$$

であるから, 項別積分 (命題 6.1) により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \sum_{k=0}^{\infty} f(\zeta) \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} \int_C f(\zeta) \frac{z^k}{\zeta^{k+1}} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=0}^{\infty} z^k \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

を得る．以上により

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k \quad (|z| < R), \quad a_k = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta$$

が示された．特にべき級数 $\sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ の収束半径は R 以上であるから，項別微分定理（定理 4.1）により $f(z)$ は $U(0; R)$ において何回でも微分可能であり，系 4.1 により $f^{(n)}(0) = n!a_n$ すなわち

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(0)$$

である．

一般の場合は $w = z - z_0$ すなわち $z = z_0 + w$ とおいて $g(w) = f(z_0 + w)$ として $g(w)$ に以上の結果を適用すると

$$g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k, \quad a_k = \frac{1}{k!} g^{(k)}(0)$$

となる． $g^{(k)}(0) = f^{(k)}(z_0)$ に注意すれば $|z - z_0| = |w| < R$ のとき

$$f(z) = f(z_0 + w) = g(w) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k w^k = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z - z_0)^k, \quad a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

を得る． $z_0 \in D$ は任意であったから， f は D において無限回微分可能であることもわかる．□

この定理を用いると 4 章で項別微分定理を用いて示した指数関数と対数関数に対するべき級数展開を機械的に導くことができる．

例 6.1 $f(z) = e^z$ は $\mathbb{C}$ で正則であり， $f^{(n)}(z) = e^z$ であるから，任意の $z \in \mathbb{C}$ について

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \cdots$$

が成立する．

例 6.2 $\text{Log } z$ を $\mathbb{C} \setminus \{x \mid x \in \mathbb{R}, x \leq 0\}$ における $\log z$ の主値とする． $|z| < 1$ のとき $\text{Re}(1+z) = 1 + \text{Re } z > 1 - |z| > 0$ であるから， $f(z) := \text{Log}(1+z)$ が定義できる．よって $\text{Log}(1+z)$ は単位円板 $U(0; 1)$ で正則である．

$$\frac{d}{dz} \text{Log}(1+z) = \frac{1}{1+z}, \quad \frac{d^n}{dz^n} \text{Log}(1+z) = \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{(1+z)^n} \quad (n \geq 2)$$

より $f(0) = 0$, $f^{(n)}(0) = (-1)^{n-1}(n-1)! \ (n \geq 1)$ であるから，

$$\text{Log}(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}(n-1)!}{n!} z^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n \quad (|z| < 1)$$

が成立する．

Taylor 展開の係数についての公式から, Taylor 展開は一意的 (一通り) である. このことから, 上の証明の方法とは異なる方法で求めたべき級数展開が Taylor 展開と一致することが保証される.

例 6.3 $f(z) = \frac{1}{z^2 + 1}$ の $z = 0$ における Taylor 展開を求めよう. $f(z)$ は $D = \mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ で正則であり, 0 を中心とする円で D に含まれる最大のものは単位円 $U(0; 1)$ であるから, $f(z)$ は $U(0; 1)$ において Taylor 展開できることがわかるが, $f^{(n)}(z)$ は複雑なので, Taylor 展開の公式を用いるのは困難である. そこで, 等比級数の公式より

$$\frac{1}{1+z} = \frac{1}{1-(-z)} = 1 - z + z^2 - \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^n \quad (|z| < 1)$$

が成立することに注意して, z に z^2 を代入すると,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n z^{2n} \quad (|z| < 1)$$

を得る. Taylor 展開の一意性により, この右辺は $f(z)$ の $z = 0$ における Taylor 展開である. Taylor 展開の公式を逆に用いれば, n が偶数 $2k$ のとき $f^{(2k)}(0) = (2k)!(-1)^k$ であり, n が奇数のときは $f^{(n)}(0) = 0$ であることがわかる.

問題 6.1 次の正則関数 $f(z)$ の与えられた点 z_0 における Taylor 展開を求めよ. またそれはどのような範囲で成立するか?

$$\begin{array}{ll} (1) \quad f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}, & z_0 = 0 \\ (2) \quad f(z) = \frac{1}{(z+2)^2}, & z_0 = 1 \\ (3) \quad f(z) = \frac{1}{z(z+3)}, & z_0 = 1 \\ (4) \quad f(z) = \operatorname{Log} \frac{1+z}{1-z}, & z_0 = 0 \end{array}$$

6.2 正則関数の零点とその位数

定義 6.1 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数とする. m を自然数として, $z_0 \in D$ が $f(z)$ の m 位の零点 (zero of order m) であるとは,

$$f(z_0) = f'(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0 \quad \text{かつ} \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

となることである.

命題 6.2 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数とする. m を自然数とするとき, $z_0 \in D$ が $f(z)$ の m 位の零点であるための必要十分条件は, ある正の実数 R と $U(z_0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_0| < R\}$ で正則な関数 $g(z)$ があって

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

が成立することである.

証明: R を $U(z_0; R) \subset D$ を満たす正の実数とすれば, 定理 6.1 により, f は $U(z_0; R)$ において

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

と Taylor 展開できる. $n!a_n = f^{(n)}(z_0)$ であるから, z_0 が $f(z)$ の m 位の零点と仮定すると, $a_0 = \cdots = a_{m-1} = 0$ かつ $a_m \neq 0$ であり,

$$f(z) = a_m (z - z_0)^m + a_{m+1} (z - z_0)^{m+1} + \cdots = (z - z_0)^m \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n$$

と表される. ここで, べき級数

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{m+n} (z - z_0)^n = \frac{f(z)}{(z - z_0)^m}$$

は $0 < |z - z_0| < R$ のとき収束するから, $g(z)$ の収束半径は R 以上である. 従って定理 4.1 によって, g は z_0 も含めて $U(z_0; R)$ で正則である. また $g(z_0) = a_m \neq 0$ である.

逆に命題の条件を満たす $g(z)$ が存在すれば $g(z)$ は $U(z_0; R)$ において

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n (z - z_0)^n \quad (b_0 \neq 0)$$

と Taylor 展開できるから,

$$f(z) = (z - z_0)^m g(z) = b_0 (z - z_0)^m + b_1 (z - z_0)^{m+1} + \cdots$$

が $f(z)$ の Taylor 展開となる. これと定理 6.1 より

$$f^{(n)}(z_0) = 0 \quad (0 \leq n \leq m-1), \quad f^{(m)}(z_0) = m!b_0 \neq 0$$

がわかる. よって z_0 は $f(z)$ の m 位の零点である. $\square$

例 6.4 $f(z) = e^z - 1$ とおくと, $f(z)$ の零点は $2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) である. $f'(z) = e^z \neq 0$ だから任意の整数 n について $f(z)$ の零点 $2n\pi i$ の位数は 1 である.

問題 6.2 次の関数の零点とその位数を求めよ.

$$(1) \quad z^4 - 1 \quad (2) \quad (z^2 + 1)^2 \quad (3) \quad e^z + e^{-z} \quad (4) \quad (e^z - 1)^2$$

6.3 一致の定理

命題 6.3 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数として $z_0 \in D$ とする. 任意の非負整数 $k = 0, 1, 2, 3, \dots$ について $f^{(k)}(z_0) = 0$ であれば, ある正の実数 R が存在して, 任意の $z \in U(z_0; R)$ について $f(z) = 0$ が成立する.

証明: $U(z_0; R) \subset D$ となるような正の実数 R をとる (D は開集合だからこのような R は存在する). 定理 6.1 と仮定によって, 任意の $z \in U(z_0; R)$ に対して

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)(z - z_0)^k = 0$$

となる. $\square$

定理 6.2 (一致の定理) $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の連結開集合 D で正則な関数とする. S を D の部分集合とする. ある $z_0 \in D$ が S の集積点である, すなわち, 任意の正の実数 ε に対して $0 < |\zeta - z_0| < \varepsilon$ を満たす $\zeta \in S$ が存在すると仮定する. このとき, $f(\zeta) = 0$ が任意の $\zeta \in S$ について成立すれば, $f(z) = 0$ がすべての $z \in D$ について成立する.

たとえば S を D 内の 1 点とは異なる曲線とすると, S の各点が S の集積点となるのでこの定理の仮定を満たす.

証明:

ステップ 1: R を $U(z_0; R) \subset D$ を満たすような最大の正の実数とする. このとき, すべての $z \in U(z_0; R)$ に対して $f(z) = 0$ であることを示す. そのためにまず $f^{(k)}(z_0) = 0$ が任意の非負整数 k について成立することを示そう. もしそうでなかったとすると,

$$f(z_0) = \cdots = f^{(m-1)}(z_0) = 0, \quad f^{(m)}(z_0) \neq 0$$

となるような非負整数 m が存在する. $m \geq 1$ ならば z_0 は $f(z)$ の m 位の零点であるから, 命題 6.2 により,

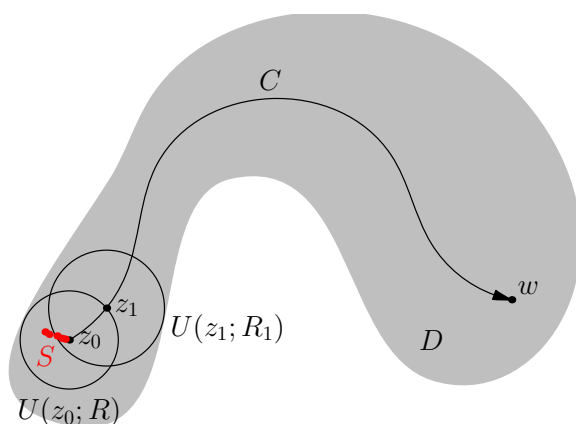
$$f(z) = (z - z_0)^m g(z), \quad g(z_0) \neq 0$$

を満たす $U(z_0; r)$ ($0 < \exists r \leq R$) で正則な関数 $g(z)$ が存在する. $m = 0$ のときは $g(z) = f(z)$ とすれば, やはり $g(z_0) = f(z_0) \neq 0$ である.

一方 z_0 は S の集積点であるから, S の点列 z_n ($n = 1, 2, 3, \dots$) であって z_0 に収束するものが存在する. 仮定により $(z_n - z_0)^m g(z_n) = f(z_n) = 0$ であり, $z_n \neq z_0$ としてよいから $g(z_n) = 0$ であり

$$g(z_0) = \lim_{n \rightarrow \infty} g(z_n) = 0$$

となる. これは矛盾である. 従って $f^{(k)}(z_0) = 0$ が任意の非負整数 k について成立することが示された. これと命題 6.3 により, 任意の $z \in U(z_0; R)$ について $f(z) = 0$ が成立する.



ステップ 2: w を D の任意の点とする. D は連結であるから, D 内の曲線

$$C: z = \varphi(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

であって $\varphi(a) = z_0$ かつ $\varphi(b) = w$ であるようなものが存在する.

上の議論により, f は $U(z_0; R)$ の各点で値が 0 である. C と円 $|z - z_0| = R$ との交点 (の一つ) を z_1 とする. z_1 を中心とする開円板 $U(z_1; R_1)$ であって $U(z_1; R_1) \subset D$ となるような最大のものをとる. z_1 は $U(z_0; R)$ の境界点だから, 特に $U(z_0; R)$ の集積点である. 従って $U(z_0; R)$ を S としてステップ 1 の議論を適用すれば, $f(z)$ は任意の $z \in U(z_1, R_1)$ において 0 となることがわかる.

この操作を続けて, C のすべての点, 特に w において f の値が 0 であることがわかる. w は D の任意の点であったから, f は D の各点で値が 0 であることが示された. $\square$

この証明のように, 曲線上の点をたどって Taylor 展開を順次行うことにより正則関数の値 (この場合は 0) をつなげて行くことを「解析接続」という. 一致の定理は「解析接続の一意性」とも呼ばれる.

例 6.5 $\mathbb{C}$ で正則な関数 $f(z)$ が $x \in \mathbb{R}$ のとき $f(x) = e^x$ をみたせば, $f(z) = e^z$ である. 実際 $g(z) = f(z) - e^z$ とおくと, 複素数の指数関数 e^z は z が実数 x のときは e^x と一致する. $g(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則で $\mathbb{R}$ では値が 0 であるから, 一致の定理により, 任意の複素数 z について $g(z) = 0$ すなわち $f(z) = e^z$ が成立する.

系 6.1 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の連結開集合 D で正則な関数であって定数関数ではないものとする. $z_0 \in D$ が $f(z)$ の零点, すなわち $f(z_0) = 0$ であるとする. ある正の実数 ε が存在して, $0 < |z - z_0| < \varepsilon$ ならば $f(z) \neq 0$ である. この事実を, 「定数でない正則関数の零点は孤立している」という.

証明: 結論を否定すると, 任意の自然数 n に対して $0 < |z_n - z_0| < 1/n$ かつ $f(z_n) = 0$ を満たす $z_n \in D$ が存在することになる. z_0 は集合 $\{z_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ の集積点だから, 一致の定理によって f の値は D の各点で 0 である. これは f が定数関数ではないという仮定に反する. $\square$

系 6.2 D を $\mathbb{C}$ の連結開集合とする. $f(z)$ と $g(z)$ が D で正則であり $f(z)g(z)$ が D で恒等的に 0 ならば, $f(z)$ または $g(z)$ の少なくとも一方は D で恒等的に 0 である.

証明: $f(z)$ は D で恒等的に 0 ではないとすると, $f(z_0) \neq 0$ を満たす $z_0 \in D$ が存在する. $f(z)$ は連続であるから, ある正の実数 r が存在して $f(z) \neq 0$ が任意の $z \in U(z_0; r)$ について成立する. 仮定より $f(z)g(z) = 0$ が任意の $z \in D$ について成立するから, $z \in U(z_0; r)$ ならば $f(z) \neq 0$ より $g(z) = 0$ でなければならない. $U(z_0; r)$ は D 内に集積点を持つ ($U(z_0; r)$ の各点はその集積点である) から, 一致の定理によって, $g(z) = 0$ がすべての $z \in D$ について成立する. $\square$

7 孤立特異点とローラン展開

7.1 孤立特異点

定義 7.1 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ のある開集合で定義された正則関数とする. $z_0 \in \mathbb{C}$ が $f(z)$ の孤立特異点 (isolated singularity) であるとは, ある正の実数 ε が存在して $f(z)$ が穴あき円板 $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < \varepsilon\}$ で正則であることである.

例 7.1 $g(z)$ と $h(z)$ を 1 次以上の多項式とする. $g(z)$ の相異なる零点を $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ とすると, $f(z) := \frac{h(z)}{g(z)}$ は $\mathbb{C} \setminus \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ で正則であるから, $f(z)$ の孤立特異点は $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ である.

例 7.2 $e^z + 1 = 0$ すなわち $e^z = -1 = e^{\pi i}$ を満たす z は $(2n+1)\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) であるから, $f(z) = \frac{1}{e^z + 1}$ は無限個の孤立特異点 $(2n+1)\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) を持つ.

問題 7.1 次の正則関数の孤立特異点をすべて求めよ.

$$(1) f(z) = \frac{z}{z^2 + 1} \quad (2) f(z) = \frac{z^2}{z^3 + 1} \quad (3) f(z) = \frac{z^2 + 1}{z^4 + 1} \quad (4) f(z) = \frac{1}{e^z + e^{-z}}$$

7.2 ローラン展開

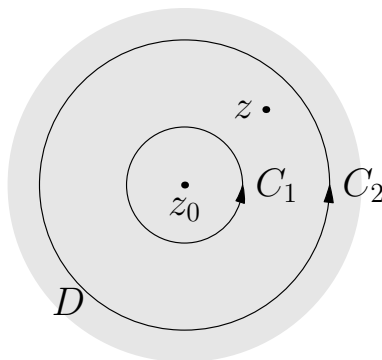
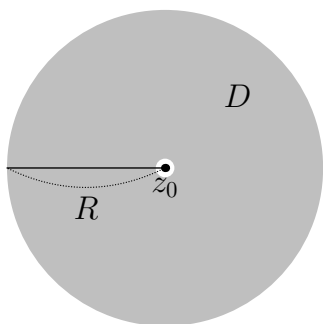
孤立特異点のまわりでの正則関数の級数展開を考察しよう.

定理 7.1 $f(z)$ が $D := U(z_0; R) \setminus \{z_0\} = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ ($z_0 \in \mathbb{C}, 0 < R \leq \infty$) で正則ならば, 複素数 a_n ($n \in \mathbb{Z}$) が存在して, 任意の $z \in D$ について

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n} \quad (11)$$

が成立する (特に右辺の無限級数は収束する). これを $f(z)$ の z_0 における (または z_0 を中心とする, z_0 のまわりの) **Laurent** (ローラン) 展開という. ただし $R = \infty$ のときは $D = \mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ とする.

証明:



$z_0 = 0$ として一般性を失わない. $0 < |z - z_0| < R$ を満たす $z \in D$ を固定する. $0 < r_1 < |z| < r_2 < R$ を満たす正の実数 r_1, r_2 をとって C_k ($k = 1, 2$) を円周 $|\zeta| = r_k$ とおく. $A = \{z \in \mathbb{C} \mid r_1 \leq |z - z_0| \leq r_2\}$ とすると $\partial A = C_2 - C_1$ かつ $A \subset D$ であるから, Cauchy の積分公式により

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta - \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta \quad (12)$$

を得る. この右辺の最初の積分は定理 6.1 の証明の (10) と同じ ($r = r_2 > |z|$ とする) であるから,

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{k+1}} d\zeta \quad (13)$$

が成立する. 一方, $\zeta \in C_1$ のとき $|\zeta| = r_1 < |z|$ であるから,

$$\frac{1}{\zeta - z} = -\frac{1}{z} \frac{1}{1 - \frac{\zeta}{z}} = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^{k+1}}$$

これから定理 6.1 の証明と同様に項別積分を行えば

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^k}{z^{k+1}} d\zeta = -\sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^{-k-1}}{2\pi i} \int_{C_1} f(\zeta) \zeta^k d\zeta \quad (14)$$

が成立することがわかる. (12), (13), (14) より,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad (n \geq 0), \quad a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} \frac{f(\zeta)}{\zeta^{n+1}} d\zeta \quad (n < 0)$$

とおけば (11) が成立する. $\square$

定理 7.2 Laurent 展開 (11) において

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} (z - z_0)^{-n}$$

とおくと, $f_1(z)$ は $U(z_0; R)$ で収束してそこで (z_0 も込めて) 正則である. また, $f_2(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ で収束して正則である.

証明: 定理 7.1 の証明から, $f_1(z)$ と $f_2(z)$ は $0 < |z - z_0| < R$ のとき収束する. $f_1(z)$ は z_0 を中心とするべき級数であるから, 収束半径は R 以上である. 従って $f_1(z)$ は z_0 も込めて $U(z_0; R)$ で正則である. 一方,

$$g_2(w) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} w^n$$

とおくと $g_2(z)$ は w のべき級数であり, $0 < r < R$ を満たす任意の r に対して $z = z_0 + r$ のとき, すなわち $w = ((z_0 + r) - z_0)^{-1} = r^{-1}$ のとき収束するから, $g_2(z)$ の収束半径は $1/r$ 以上である. $r > 0$ はいくらでも小さくとれるから, $g_2(z)$ の収束半径は ∞ である. 特に $g_2(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則である. 従って $f_2(z) = g_2(1/(z - z_0))$ は $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ で正則である.

$\square$

定理 7.3 (Laurent 展開の一意性) $z_0 \in \mathbb{C}$, $R > 0$ とする. $f(z)$ が $D = U(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ で正則でそこで

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n + \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

が成立すれば, $0 < r < R$ を満たす任意の r に対して C を円周 $|z - z_0| = r$ (正の向き) とするとき

$$c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(z-z_0)^{-n-1} dz$$

が成立する. とくに Laurent 展開 (の形の級数) は f と z_0 から一意的に定まる.

証明: 任意の整数 m に対して c_m が f から一意的に定まることを示せばよい.

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(z-z_0)^n, \quad f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}(z-z_0)^{-n}$$

とおく. $0 < r < R$ を満たす任意の正の実数 r をとる. $f_1(z)$ はべき級数であり, 仮定より収束半径が R 以上であるから $z = z_0 + r$ のとき絶対収束する.

$$g_2(w) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{-n}w^n$$

とおけば $g_2(w)$ もべき級数であり, 定理 7.2 の証明と同様にして収束半径が ∞ であることがわかるから, 特に $f_2(z) = g_2(1/(z-z_0))$ は $z = z_0 + r$ のとき絶対収束する. すなわち

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|r^n < \infty$$

である. これと, $z \in C$ のとき $|a_n(z-z_0)^n| = |a_n|r^n$ であることから項別積分 (命題 6.1) が適用できて

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} dz = \int_C \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(z-z_0)^{n-m} dz = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \int_C (z-z_0)^{n-m} dz$$

を得る. 例 5.6 により右辺の第 n 項の線積分の値は $n-m \neq -1$ のとき 0 であり, $n-m = -1$ のとき $2\pi i$ であるから,

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^m} dz = 2\pi i c_{m-1} \quad \text{すなわち} \quad c_n = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz$$

が示された. $\square$

例 7.3 $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ の孤立特異点 0 における Laurent 展開を求めよう. e^z の 0 における Taylor 展開

$$e^z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n \quad (z \in \mathbb{C})$$

より

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-2} = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{z} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!}z + \frac{1}{4!}z^2 + \cdots \quad (z \in \mathbb{C} \setminus \{0\})$$

を得る. 定理 7.3 により, これは f の 0 における Laurent 展開である.

定義 7.2 $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ を正則関数 f の孤立特異点 z_0 における Laurent 展開とするとき, $f_2(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}(z-z_0)^{-n}$ を f の z_0 における **Laurent 展開の主要部**という. 主要部の形に応じて孤立特異点 z_0 を次の 3 種類に分類する.

- (1) $f_2(z) = 0$, すなわち, すべての自然数 n について $a_{-n} = 0$ であるとき, z_0 は $f(z)$ の除去可能特異点 (removable singularity) であるという. $f_1(z)$ は z_0 も込めて $U(z_0; R)$ で正則であるから, $f(z_0) := f_1(z_0) = a_0$ と定義すれば $f(z) = f_1(z)$ も $U(z_0; R)$ で正則となる.
- (2) $f_2(z)$ が 1 つ以上の有限個の項からなる, すなわち, $a_{-n} \neq 0$ であるような自然数が有限個かつ 1 個以上であるとき, z_0 は $f(z)$ の極 (pole) であるという. このとき, $a_{-n} \neq 0$ であるような自然数 n のうち最大のものを m とすると, $f(z)$ の z_0 における Laurent 展開の主要部は

$$f_2(z) = \sum_{n=1}^m a_{-n}(z-z_0)^{-n} = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \frac{a_{-m+1}}{(z-z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} \quad (a_{-m} \neq 0) \quad (15)$$

と表される. このとき極 z_0 の位数 (order) は m である, または z_0 は位数 m の極であるという. z_0 が除去可能特異点であるか, または位数が m 以下の極であるかのいずれかであるとき, z_0 は $f(z)$ の高々 m 位の極であるという. z_0 が高々 m 位の極であるための必要十分条件は, 主要部 $f_2(z)$ が $a_{-m} \neq 0$ という条件なしで (15) の形に表されることである.

- (3) $a_{-n} \neq 0$ を満たす自然数 n が無限にあるとき, z_0 は $f(z)$ の真性特異点 (essential singularity) であるという.

例 7.4 $f(z) = \frac{e^z - 1}{z}$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則であるから, 0 は $f(z)$ の孤立特異点である. e^z の Taylor 展開を用いると

$$f(z) = \frac{1}{z} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^n - 1 \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{n-1} = 1 + \frac{z}{2!} + \frac{z^2}{3!} + \cdots$$

となり Laurent 展開の主要部はないから, 0 は除去可能特異点であり, $f(z) = 1$ と定義すれば $f(z)$ は $\mathbb{C}$ 全体で正則となる.

例 7.5 $f(z) = \frac{e^z}{z^2}$ の 0 における Laurent 展開の主要部は $\frac{1}{z^2} + \frac{1}{z}$ だから, 0 は $f(z)$ の 2 位の極である.

例 7.6 $e^{1/z} = \exp\left(\frac{1}{z}\right)$ は $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ で正則であるから 0 は孤立特異点である. e^z の Taylor 展開より

$$\exp\left(\frac{1}{z}\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} z^{-n} = 1 + z^{-1} + \frac{1}{2!} z^{-2} + \cdots$$

が 0 における Laurent 展開であり, 定数項 1 以外の項の和が主要部であるから, 0 は $e^{1/z}$ の真性特異点である.

例 7.7 $f(z) = \frac{1}{z^2(z-1)}$ は $D = \mathbb{C} \setminus \{0, 1\}$ において正則であるから 0 と 1 は孤立特異点である.

$$\frac{1}{z-1} = -\frac{1}{1-z} = -\sum_{n=0}^{\infty} z^n \quad (|z| < 1)$$

より

$$f(z) = -\sum_{n=0}^{\infty} z^{n-2} = -\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z} - 1 - z - z^2 - \cdots \quad (0 < |z| < 1)$$

が 0 における $f(z)$ の Laurent 展開であり, 主要部は $-\frac{1}{z^2} - \frac{1}{z}$ である. よって 0 は $f(z)$ の 2 位の極である.

次に 1 における Laurent 展開を求めよう. $U(1; 1) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| < 1\}$ において

$$\frac{1}{z^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n+1)!}{n!} (z-1)^n = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z-1)^n = 1 - 2(z-1) + 3(z-1)^2 + \cdots$$

と Taylor 展開されるから,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+1) (z-1)^{n-1} = \frac{1}{z-1} - 2 + 3(z-1) - 4(z-1)^2 + \cdots$$

が $z=1$ における $f(z)$ の Laurent 展開であり $0 < |z-1| < 1$ で成立する. 主要部は $\frac{1}{z-1}$ である. よって 1 は $f(z)$ の 1 位の極である.

問題 7.2 次の関数 $f(z)$ の与えられた点 z_0 における Laurent 展開を求めよ.

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{z^2-1}, \quad z_0 = 1 \qquad (2) \quad f(z) = \frac{1}{z^2+1}, \quad z_0 = i$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{e^z + e^{-z}}{z^2}, \quad z_0 = 0 \qquad (4) \quad f(z) = \frac{1}{z^2} \operatorname{Log}(1+z), \quad z_0 = 0$$

以下では除去可能特異点と極の場合を詳しく調べる.

定理 7.4 (Riemann の除去可能特異点定理) R を正の実数, z_0 を複素数とする. $f(z)$ が $D = \{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ で正則かつ有界, すなわち, ある実数 $M > 0$ があって, 任意の $z \in D$ について $|f(z)| \leq M$ が成立すると仮定する. このとき z_0 は $f(z)$ の除去可能特異点である.

証明: f の z_0 を中心とする Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n \quad (0 < |z - z_0| < R)$$

とする. $0 < r < R$ として C を円周 $|z - z_0| = r$ とすると定理 7.2 より

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{2\pi i} \int_C f(z)(z - z_0)^{-n-1} dz = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})(re^{it})^{-n-1} ire^{it} dt \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it})(re^{it})^{-n} dt \end{aligned}$$

ここで仮定より $n < 0$ のときは

$$|f(z_0 + re^{it})(re^{it})^{-n}| \leq Mr^{-n} \longrightarrow 0 \quad (r \rightarrow 0)$$

となるから $a_n = 0$ でなければならない. 従って z_0 は f の除去可能特異点である. $\square$

命題 7.1 z_0 を正則関数 $f(z)$ の孤立特異点, m を自然数とするとき, z_0 が $f(z)$ の高々 m 位の極であるための必要十分条件は, ある $R > 0$ と $U(z_0; R)$ で正則な関数 $g(z)$ が存在して, $U(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ において $f(z) = (z - z_0)^{-m}g(z)$ が成立することである. さらに, z_0 が $f(z)$ のちょうど m 位の極であるための必要十分条件は $g(z_0) \neq 0$ となることである.

証明: z_0 が $f(z)$ の高々 m 位の極であるとする. ある $R > 0$ があって f は $\{z \in \mathbb{C} \mid 0 < |z - z_0| < R\}$ で正則である. (11) を $f(z)$ の z_0 における Laurent 展開とする. その主要部は (15) のように表される. このとき

$$\begin{aligned} g(z) &:= (z - z_0)^m f(z) \\ &= a_{-m} + a_{-m+1}(z - z_0) + \cdots + a_{-1}(z - z_0)^{m-1} + (z - z_0)^m + \cdots \end{aligned}$$

は収束半径が R 以上のべき級数であるから $U(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ で正則であり, 定義から $f(z) = (z - z_0)^{-m}g(z)$ が成立する.

逆に $U(z_0; R)$ で正則な関数 $g(z)$ が存在して $U(z_0; R) \setminus \{z_0\}$ で $f(z) = (z - z_0)^{-m}g(z)$ が成立すると仮定する. $g(z)$ は $U(z_0; R)$ において

$$g(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^n$$

という形に Taylor 展開できるから,

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z - z_0)^{n-m} = \frac{b_0}{(z - z_0)^m} + \frac{b_1}{(z - z_0)^{m-1}} + \cdots + \frac{b_{m-1}}{z - z_0} + b_m + b_{m+1}(z - z_0) + \cdots$$

が $f(z)$ の z_0 における Laurent 展開となり, z_0 は $f(z)$ の高々 m 位の極であることがわかる. このとき $a_{-m} = b_0 = g(z_0)$ であるから, z_0 がちょうど m 位の極であるための必要十分条件は $g(z_0) \neq 0$ となることである. $\square$

命題 7.2 z_0 を正則関数 $f(z)$ の孤立特異点, m を自然数とする. もし極限

$$\alpha = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0)^m f(z)$$

が存在すれば, z_0 は $f(z)$ の高々 m 位の極である. このとき z_0 が $f(z)$ のちょうど m 位の極となるための必要十分条件は $\alpha \neq 0$ が成立することである.

証明: $g(z) = (z - z_0)^m f(z)$ とおくと $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = \alpha$ であるから, 定理 7.4 より, ある正の実数 r が存在して $g(z)$ は $U(z_0; r)$ で正則となり, $f(z) = (z - z_0)^{-m} g(z)$ であるから, 命題 7.1 によって z_0 は $f(z)$ の高々 m 位の極である. 後半の主張は $g(z_0) = \alpha$ と命題 7.1 から従う. $\square$

定義 7.3 D を $\mathbb{C}$ の開集合とする. D の各点 α について「 $f(z)$ が α のある近傍で (α も含めて) 正則であるか, または α が $f(z)$ の極である」という命題が成立しているとき, $f(z)$ は D で有理形 (有理型) (meromorphic) であるという. このとき $f(z)$ の極全体の集合を S とすれば, $f(z)$ は $D \setminus S$ で正則である.

命題 7.3 $f(z)$ と $g(z)$ を $\mathbb{C}$ の連結開集合 D で正則な関数とする. $g(z)$ が D において恒等的に 0 でなければ $F(z) = \frac{f(z)}{g(z)}$ は D において有理形である. さらに $z_0 \in D$ を $g(z)$ の m 位の零点とすると, z_0 は $F(z)$ の高々 m 位の極であり, ちょうど m 位の極となるための必要十分条件は $f(z_0) \neq 0$ となることである.

証明: $z_0 \in D$ が $g(z)$ の零点でなければ $g(z)$ は z_0 の近傍で 0 にならないから $F(z)$ は z_0 の近傍で正則である. z_0 が $g(z)$ の m 位の零点ならば, z_0 の近傍で正則な関数 $h(z)$ が存在して $g(z) = (z - z_0)^m h(z)$ と書いて $h(z_0) \neq 0$ である. $h(z)$ は z_0 の近傍で 0 にならないから, $G(z) := \frac{f(z)}{h(z)}$ は z_0 の近傍で正則である. よって z_0 は $F(z) = (z - z_0)^{-m} G(z)$ の高々 m 位の極である. z_0 が $F(z)$ のちょうど m 位の極となるための必要十分条件は, $G(z_0) \neq 0$ すなわち $f(z_0) \neq 0$ となることである. 以上により $F(z)$ が D で有理形であることも示された. $\square$

この命題から特に有理関数は $\mathbb{C}$ で有理形であることがわかる. 有理形という名前はこのことに由来する.

例 7.8 $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ とおく. $g(z) = e^z - 1$ とおくと $g(z) = 0$ すなわち $e^z = 1$ を満たす $z \in \mathbb{C}$ は $z_n := 2\pi i n$ ($n \in \mathbb{Z}$) であるから, z_n は $f(z)$ の孤立特異点である. 上の命題により $f(z)$ は $\mathbb{C}$ で有理形である. 任意の整数 n について $g(z_n) = 0$, $g'(z_n) = e^{2\pi i n} = 1 \neq 0$ であるから, z_n は $g(z)$ の 1 位の零点である. よって上の命題により z_n は $f(z)$ の 1 位の極である.

命題 7.4 z_0 を正則関数 $f(z)$ の孤立特異点とする. z_0 が $f(z)$ の極であるための必要十分条件は,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty,$$

すなわち z が z_0 に限りなく近づくとき, $|f(z)|$ が限りなく大きくなることである.

証明: z_0 が $f(z)$ の極であれば, 命題 7.1 により, ある自然数 m , ある実数 $R > 0$, $U(z_0; R)$ で正則な関数 $g(z)$ が存在して $f(z) = (z - z_0)^{-m}g(z)$ かつ $g(z_0) \neq 0$ が成立する. 従って

$$\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{|g(z)|}{|z - z_0|^m} = \infty$$

である. 逆に $\lim_{z \rightarrow z_0} |f(z)| = \infty$ と仮定する. 特に $f(z)$ は z_0 の近傍で 0 にならないから, $g(z) := f(z)^{-1}$ は $U(z_0; r) \setminus \{z_0\}$ ($\exists r > 0$) で正則であり, $\lim_{z \rightarrow z_0} g(z) = 0$ が成立する. 従って定理 7.4 により $g(0) = 0$ と定義すれば $g(z)$ は $U(z_0; r)$ で正則となる. z_0 が $g(z)$ の m 位の零点 ($g(0) \neq 0$ ならば $m = 0$) とすれば, 命題 7.3 により z_0 は $f(z) = g(z)^{-1}$ の m 位の極である. $\square$

問題 7.3 次の関数 $f(z)$ の与えられた点 z_0 における Laurent 展開の主要部を求めよ.

$$(1) \quad f(z) = \frac{1}{z^2(1-z)^2}, \quad z_0 = 0 \qquad (2) \quad f(z) = \frac{e^z}{z^2(1-z)}, \quad z_0 = 0$$

$$(3) \quad f(z) = \frac{\operatorname{Log} z}{z^2 - 1}, \quad z_0 = 1 \qquad (4) \quad f(z) = \frac{1}{e^z - 1}, \quad z_0 = 0$$

$$(5) \quad f(z) = \frac{e^{iz}}{z^2 + 1}, \quad z_0 = i \qquad (6) \quad f(z) = \frac{1}{(z^2 + 1)^2}, \quad z_0 = i$$

問題 7.4 次の正則関数の孤立特異点をすべて求め, 除去可能特異点, 極, 真性特異点のいずれかを判定し, 極の場合にはその位数を求めよ.

$$(1) \quad f(z) = \frac{e^z}{z^4 + 1} \qquad (2) \quad f(z) = \frac{z}{e^z - 1} \qquad (3) \quad f(z) = \left(\frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}} \right)^2$$

8 留数定理とその応用

8.1 留数

定義 8.1 $z_0 \in \mathbb{C}$ を正則関数 $f(z)$ の孤立特異点として,

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z - z_0)^n$$

を $f(z)$ の z_0 を中心とする Laurent 展開とする. このとき複素数 a_{-1} のことを $f(z)$ の z_0 における留数 (residue) と呼び, $a_{-1} = \operatorname{Res}_{z=z_0} f(z)$ と表す.

まず 1 位の極における留数の計算法を述べる.

命題 8.1 z_0 が $f(z)$ の高々 1 位の極であれば,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z)$$

が成立する.

証明: 仮定により $f(z)$ の z_0 における Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{a_{-1}}{z - z_0} + a_0 + a_1(z - z_0) + \cdots$$

と書けるから,

$$\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \{a_{-1} + a_0(z - z_0) + a_1(z - z_0)^2 + \cdots\} = a_{-1}$$

が成立する. $\square$

命題 8.2 $f(z), g(z)$ が $z_0 \in \mathbb{C}$ の近傍で正則であり, z_0 が $g(z)$ の 1 位の零点であれば,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

が成立する.

証明: 仮定より, z_0 の近傍で正則な関数 $g_1(z)$ が存在して $g(z) = (z - z_0)g_1(z)$ かつ $g_1(z_0) \neq 0$ が成立する. $g'(z) = g_1(z) + (z - z_0)g_1'(z)$ より $g'(z_0) = g_1(z_0) \neq 0$ である. よって上の命題により

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{g(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \frac{f(z)}{(z - z_0)g_1(z)} = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{f(z)}{g_1(z)} = \frac{f(z_0)}{g'(z_0)}$$

を得る. $\square$

例 8.1 $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ の孤立特異点は $2n\pi i$ ($n \in \mathbb{Z}$) であり, これらは 1 位の極だから, $(e^z - 1)' = e^z$ と命題 8.2 により

$$\operatorname{Res}_{z=2n\pi i} f(z) = \frac{1}{e^{2n\pi i}} = 1$$

8.2 留数定理

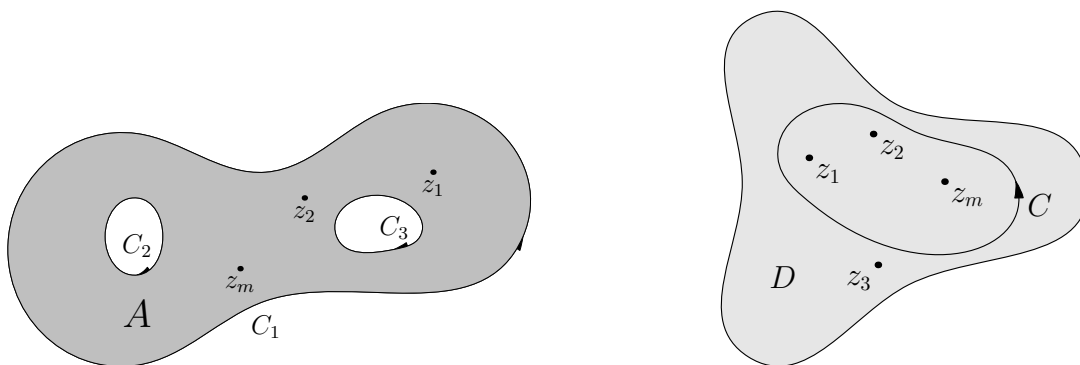
定理 8.1 (留数定理) $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D から有限個または可算個の点 $z_1, z_2, z_3, \dots$ を除いた集合で正則な関数とする. (このとき, $z_1, z_2, \dots$ は f の孤立特異点である.) A を D に含まれる有界閉集合で, 境界 ∂A が有限個の区分的に C^1 級の単純閉曲線の和集合であるものとする. A の内部に含まれる f の孤立特異点は有限個の $z_1, \dots, z_m$ のみであり, ∂A に属する f の孤立特異点はないと仮定する (左下図). このとき

$$\int_{\partial A} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

が成立する. 特に C が区分的に C^1 級の単純閉曲線で C の内部と C は共に D に含まれ, C の内部に含まれる f の孤立特異点は $z_1, \dots, z_m$ のみであり, C に属する f の孤立特異点はないとすると (右下図),

$$\int_C f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

が成立する. ただし C は正の向きとする.



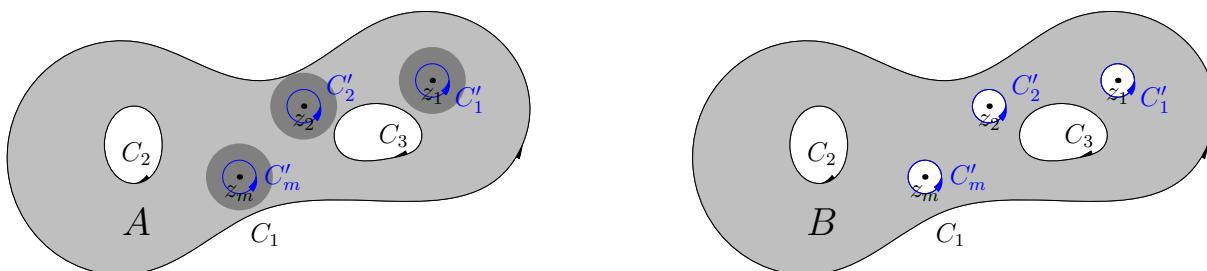
証明: 仮定により f は $D' = D \setminus \{z_1, \dots, z_n, \dots\}$ で正則である. $r > 0$ を十分小さくにとって, 各々の z_k を中心とする半径 $2r$ の円板 $D_{k,2r} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_k| \leq 2r\}$ が A に含まれ, かつ $j \neq k$ のとき $D_{j,2r}$ と $D_{k,2r}$ は共通部分を持たないようにする. このとき

$$B = A \setminus \bigcup_{k=1}^m \{z \in \mathbb{C} \mid |z - z_k| < r\}, \quad C'_k = \partial D_{k,r} \quad (z_k \text{ を中心とする半径 } r \text{ の円周})$$

とおくと $B \subset D'$ であり

$$\partial B = \partial A - C'_1 - \dots - C'_m$$

となる.



従って正則関数 f と集合 B に対して Cauchy の積分定理を適用すると

$$0 = \int_{\partial B} f dz = \int_{\partial A} f dz - \sum_{k=1}^m \int_{C'_k} f dz \quad \text{すなわち} \quad \int_{\partial A} f dz = \sum_{k=1}^m \int_{C'_k} f dz$$

が成立する. z_k を中心とする $f(z)$ の Laurent 展開を

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_{k,n}(z - z_k)^n \quad (c_{k,n} \in \mathbb{C}) \quad (0 < |z - z_k| < 2r)$$

とすると Laurent 展開の一意性についての定理 7.2 より

$$\int_{C'_k} f(z) dz = \int_{C'_k} f(z)(z - z_k)^{-(-1)-1} dz = 2\pi i c_{k,-1} = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

が成立する. 以上をまとめて

$$\int_{\partial A} f(z) dz = \sum_{k=1}^m \int_{C'_k} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^m \operatorname{Res}_{z=z_k} f(z)$$

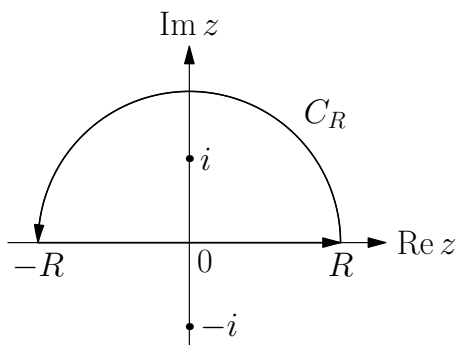
を得る. $\square$

例 8.2 $R > 1$ として, 実軸上の線分 $[-R, R]$ と 0 を中心とする半径 R の円の上半分をつないだ閉曲線を C_R とする. $\alpha \in \mathbb{C}$ を定数として $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{z^2 + 1}$ とおく. $f(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ で正則であり, i は C_R の内部, $-i$ は C_R の外部にあるから, $D = \mathbb{C}$ として単純閉曲線 C_R に留数定理を適用して

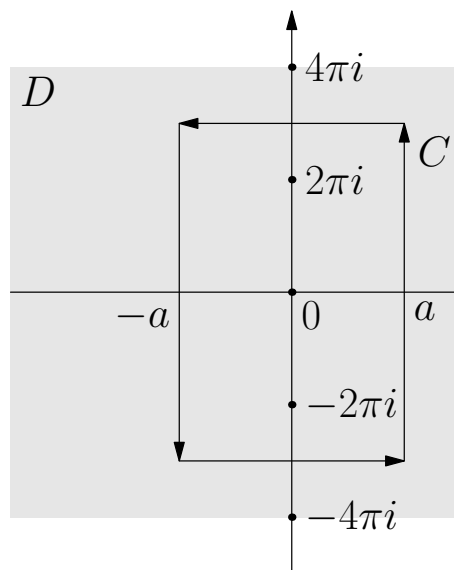
$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z)$$

を得る. また $z = i$ は $z^2 + 1 = (z - i)(z + i)$ の 1 位の零点であるから $f(z)$ の 1 位の極であり, 命題 8.2 より

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{e^{i\alpha}}{2i} = \pi e^{i\alpha}$$



例 8.2



例 8.3

例 8.3 $f(z) = \frac{1}{e^z - 1}$ とおく. n を非負整数, a を任意の正の実数として, 4 点

$$a - (2n+1)\pi i, \quad a + (2n+1)\pi i, \quad -a + (2n+1)\pi i, \quad -a - (2n+1)\pi i$$

を頂点とする長方形の周 (正の向き) を C とする. $f(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{2k\pi i \mid k \in \mathbb{Z}\}$ で正則であり, $2k\pi i$ は孤立特異点である. C の内部にある孤立特異点は $2k\pi i$ ($-n \leq k \leq n$) の $2n+1$ 個である. 留数定理を $D = \mathbb{C}$ として単純閉曲線 C について適用して

$$\begin{aligned} \int_C f(z) dz &= 2\pi i \sum_{k=-n}^n \operatorname{Res}_{z=2k\pi i} f(z) \\ &= 2\pi i \sum_{k=-n}^n 1 = 2(2n+1)\pi i \end{aligned}$$

を得る.

次に 2 位以上の極の場合の留数の計算法を考察する.

命題 8.3 z_0 を $f(z)$ の高々 m 位の極とすると,

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-z_0)^m f(z)\}$$

が成立する.

証明: 仮定により $f(z)$ の z_0 における Laurent 展開は

$$f(z) = \frac{a_{-m}}{(z-z_0)^m} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + \cdots$$

と書ける. $g(z) = (z-z_0)^m f(z)$ とおくと, $g(z)$ は 0 の近傍で正則であり, z_0 における Taylor 展開は

$$g(z) = a_{-m} + a_{-m+1}(z-z_0) + \cdots + a_{-1}(z-z_0)^{m-1} + \cdots$$

であるから, Taylor 展開の公式より

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} f(z) = a_{-1} = \frac{1}{(m-1)!} g^{(m-1)}(z_0) = \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \{(z-z_0)^m f(z)\}$$

が成立する. $\square$

例 8.4 $R > 1$ として, 実軸上の線分 $[-R, R]$ と 0 を中心とする半径 R の円の上半分をつないだ閉曲線を C_R とする. $\alpha \in \mathbb{C}$ を定数として $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{(z^2+1)^2}$ とおく. $z=i$ は $(z^2+1)^2 = (z-i)^2(z+i)^2$ の 2 位の零点であるから $f(z)$ の 2 位の極である. 命題 8.3 より

$$\begin{aligned} \operatorname{Res}_{z=i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \{(z-i)^2 f(z)\} = \lim_{z \rightarrow i} \frac{d}{dz} \left\{ \frac{e^{\alpha z}}{(z+i)^2} \right\} = \lim_{z \rightarrow i} \left\{ \frac{\alpha e^{\alpha z}}{(z+i)^2} - \frac{2e^{\alpha z}}{(z+i)^3} \right\} \\ &= \frac{\alpha e^{i\alpha}}{(2i)^2} - \frac{2e^{i\alpha}}{(2i)^3} = -\frac{1}{4}(\alpha+i)e^{i\alpha} \end{aligned}$$

従って留数定理より

$$\int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=i} f(z) = -\frac{1}{2}\pi i(\alpha + i)e^{i\alpha}$$

問題 8.1 次の正則関数のすべての孤立特異点とそこでの留数を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \quad f(z) &= \frac{1}{z^3 - 1} & (2) \quad f(z) &= \frac{z}{z^4 + 1} & (3) \quad f(z) &= \frac{1}{z^2(z-2)^2} \\ (4) \quad f(z) &= \frac{\sin z}{z} & (5) \quad f(z) &= \frac{z}{\sin z} & (6) \quad f(z) &= \frac{1}{e^z + e^{-z}} \end{aligned}$$

問題 8.2 次の線積分の値を求めよ. (n は自然数, a と R は正の実数で $R > 1$ とする.)

$$\begin{aligned} (1) \quad & \int_{|z|=R} \frac{z}{z^2 - 1} dz & (2) \quad & \int_{|z|=R} \frac{1}{z^3 - 1} dz & (3) \quad & \int_{|z|=1} \frac{1}{z^2(z-2)^2} dz \\ (4) \quad & \int_C \frac{z}{z^4 + 1} dz & & & & (C \text{ は線分 } [-R, R] \text{ と円周 } |z| = R \text{ の上半分をつないだ閉曲線}) \\ (5) \quad & \int_C \tan z dz & & & & (C \text{ は 4 点 } n\pi \pm ai, -n\pi \pm ai \text{ を頂点とする長方形の周}) \\ (6) \quad & \int_{|z|=1} \frac{e^z}{z^n} dz & (7) \quad & \int_{|z|=1} \exp\left(\frac{1}{z}\right) dz & (8) \quad & \int_{|z|=1} \left(z + \frac{1}{z}\right)^n dz \end{aligned}$$

問題 8.3 α を複素数の定数として, $f(z) = \frac{e^{\alpha z}}{z^2(z^2 + 1)}$ とおく.

$$g(z) = f(z) - \frac{c_1}{z} - \frac{c_2}{z^2} - \frac{c_3}{z-i} - \frac{c_4}{z+i}$$

が $\mathbb{C}$ 全体で正則となるような複素数 c_1, c_2, c_3, c_4 を α で表せ. ただし, 除去可能特異点においては適切に値を定めて, その近傍で $g(z)$ は正則とみなすこととする. また, このとき $g(0)$ の値を求めよ.

問題 8.4 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数とする. $z_1, \dots, z_m$ を D の相異なる点, C を $z_1, \dots, z_m$ が内部にあるような単純閉曲線で C とその内部が D に含まれるものとする. このとき

$$\int_C \frac{f(z)}{(z-z_1) \cdots (z-z_m)} dz$$

の値を $f(z_1), \dots, f(z_m)$ を用いて表せ.

問題 8.5 $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数とする. $z_0 \in D$ が $f(z)$ の m 位の零点 (m

は自然数) であるとき, $F(z) = \frac{f'(z)}{f(z)}$ の z_0 における Laurent 展開の主要部を求めよ.

8.3 留数定理による広義積分の計算

留数定理を実数関数の定積分（広義積分）の計算に応用する．

補題 8.1 $P(z)$ と $Q(z)$ は複素数を係数とする 0 でない多項式で $\deg Q(z) - \deg P(z) \geq 2$ を満たすものとする（ $\deg$ は多項式の次数を表す）．また a を 0 以上の実数とする．このとき， R を正の実数として， C_R^+ を半円周 $C_R^+ : z = Re^{it}$ ($0 \leq t \leq \pi$) とすると，

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz = 0$$

が成立する．

証明: $a_0, a_1, \dots, a_m$ と $b_0, b_1, \dots, b_n$ を複素数の定数として

$$P(z) = a_m z^m + a_{m-1} z^{m-1} + \dots + a_0, \quad Q(z) = b_n z^n + b_{n-1} z^{n-1} + \dots + b_0$$

とおく．仮定より $a_m \neq 0$ かつ $b_n \neq 0$ である．三角不等式（命題 1.3）により

$$\begin{aligned} |P(z)| &\leq |z|^m (|a_m| + |a_{m-1}||z|^{-1} + \dots + |a_1||z|^{-m+1} + |a_0||z|^{-m}) \\ |Q(z)| &\geq |z|^n (|b_n| - |b_{n-1}||z|^{-1} - \dots - |b_1||z|^{-n+1} - |b_0||z|^{-n}) \end{aligned}$$

従って

$$\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq |z|^{m-n} \frac{|a_m| + |a_{m-1}||z|^{-1} + \dots + |a_1||z|^{-m+1} + |a_0||z|^{-m}}{|b_n| - |b_{n-1}||z|^{-1} - \dots - |b_1||z|^{-n+1} - |b_0||z|^{-n}}$$

が成立する．ここで $|z| \rightarrow \infty$ のとき，この不等式の右辺の分数は $|a_m|/|b_n|$ に収束するから，ある正の定数 M と R_0 があって，

$$|z| \geq R_0 \quad \Rightarrow \quad \left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq M|z|^{m-n}$$

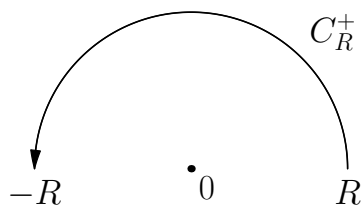
が成立する．一方 $z = x + iy \in C_R^+$ のとき $y \geq 0$ であるから

$$|e^{iaz}| = |e^{-ay+iax}| = |e^{-ay}e^{iax}| = e^{-ay} \leq 1$$

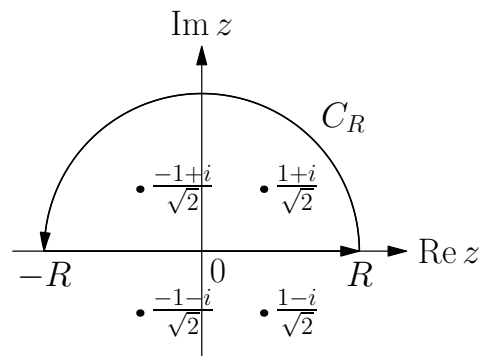
となる．以上の不等式と線積分についての不等式（命題 5.3）から $R \geq R_0$ のとき

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \right| \leq \pi R \cdot MR^{m-n} = \pi MR^{-(n-m-1)}$$

が成立する．仮定より $n - m - 1 \geq 2 - 1 = 1$ であるから $R \rightarrow \infty$ として結論を得る．□



補題 8.1



例 8.5

例 8.5 広義積分 $\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx$ の値を求めよう. $f(z) = \frac{1}{z^4+1}$ とおく. $z^4+1=0$ を満たす複素数は $z = \frac{1}{\sqrt{2}}(\pm 1 \pm i)$ (複号任意) の 4 つである. これらは z^4+1 の 1 位の零点であるから, $f(z)$ の 1 位の極である. C_R を円周 $|z|=R$ の上半分 C_R^+ と実軸上の線分 $[-R, R]$ をつないだ閉曲線とする. $R > 1$ のとき留数定理 ($D = \mathbb{C}$ とする) と命題 8.2 により ($\text{Res}_{z=z_0} f(z) = \text{Res}(f(z), z_0)$ と表す)

$$\begin{aligned} \int_{C_R} f(z) dz &= 2\pi i \text{Res}\left(f(z), \frac{1+i}{\sqrt{2}}\right) + 2\pi i \text{Res}\left(f(z), \frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2\pi i}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^3} + \frac{2\pi i}{4\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^3} \\ &= 2\pi i \frac{\frac{1+i}{\sqrt{2}}}{4\left(\frac{1+i}{\sqrt{2}}\right)^4} + 2\pi i \frac{\frac{-1+i}{\sqrt{2}}}{4\left(\frac{-1+i}{\sqrt{2}}\right)^4} = 2\pi i \frac{1+i}{-4\sqrt{2}} + 2\pi i \frac{-1+i}{-4\sqrt{2}} = \frac{\pi}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

を得る. 一方, 線分 $[-R, R]$ のパラメータ表示は x をパラメータとして $z = x$ ($-R \leq x \leq R$) で与えられるから

$$\frac{\pi}{\sqrt{2}} = \int_{C_R} f(z) dz = \int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R^+} f(z) dz$$

ここで $f(z)$ の分子の次数は 0, 分母の次数は 4 だから, 補題 8.1 によって $R \rightarrow \infty$ のとき C_R^+ に沿っての積分は 0 に収束する. 従って上の等式から

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R f(x) dx = \frac{\pi}{\sqrt{2}}$$

が従う. $f(x)$ は偶関数だから

$$\int_0^\infty \frac{1}{x^4+1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{1}{x^4+1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{1}{x^4+1} dx = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

を得る. この広義積分は部分分数分解を用いた不定積分の計算によって求めることも可能であるが計算が煩雑になる.

例 8.6 a を $a \geq 0$ を満たす実数として広義積分 $\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2+1} dx$ の値を求めよう. $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2+1}$ とおく. C_R を円周 $|z|=R$ の上半分 C_R^+ と実軸上の線分 $[-R, R]$ をつないだ閉曲線とする. $f(z)$ は $\mathbb{C} \setminus \{i, -i\}$ で正則だから, $R > 1$ のとき留数定理と命題 8.2 により

$$\int_{-R}^R f(x) dx + \int_{C_R^+} f(z) dz = \int_{C_R} f(z) dz = 2\pi i \text{Res}_{z=i} f(z) = 2\pi i \frac{e^{-a}}{2i} = \pi e^{-a}$$

を得る．ここで $f(z)$ の分母の次数は 2 だから，補題 8.1 によって $R \rightarrow \infty$ のとき C_R^+ に沿っての積分は 0 に収束する．従って上の等式から

$$\begin{aligned}\pi e^{-a} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{e^{iax}}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\cos ax + i \sin ax}{x^2 + 1} dx \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx + i \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{-R}^R \frac{\sin ax}{x^2 + 1} dx\end{aligned}$$

が従う．両辺の実部を比較して $\frac{\cos ax}{x^2 + 1}$ が偶関数であることに注意すると，

$$\int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_0^R \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \int_{-R}^R \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}$$

を得る．既知の関数で $f(x)$ の原始関数を表すことはできないので，不定積分による計算でこの広義積分の値を求めることは不可能である．なお，この例では $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z^2 + 1}$ とおくのがポイントである． $f(z) = \frac{\cos az}{z^2 + 1}$ とおくと $\cos az = \frac{1}{2}(e^{iaz} + e^{-iaz})$ なので $\frac{e^{-iaz}}{z^2 + 1}$ に対して補題 8.1 が適用できない．

次に補題 8.1 の条件を緩めた場合を扱う．

補題 8.2 $P(z)$ と $Q(z)$ は複素数を係数とする 0 でない多項式で $\deg Q(z) - \deg P(z) \geq 1$ を満たすものとする．また a を正の実数とする．このとき， R を正の実数として， C_R^+ を半円周 $C_R^+ : z = Re^{it} \quad (0 \leq t \leq \pi)$ とすると，

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz = 0$$

が成立する．

証明: $\deg P(z) = m$, $\deg Q(z) = n$ とおくと，補題 8.1 の証明で示したように，ある正の定数 M が存在して， R が十分大きいとき $\left| \frac{P(z)}{Q(z)} \right| \leq MR^{m-n}$ が成り立つ．線積分をパラメータ表示 $z = Re^{it} \quad (0 \leq t \leq \pi)$ を用いて表すと R が十分大きいとき

$$\begin{aligned}\left| \int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \right| &= \left| \int_0^\pi \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \exp(iaRe^{it}) iRe^{it} dt \right| \\ &\leq R \int_0^\pi \left| \frac{P(Re^{it})}{Q(Re^{it})} \right| \exp(-aR \sin t) dt \leq MR^{m-n+1} \int_0^\pi \exp(-aR \sin t) dt\end{aligned}$$

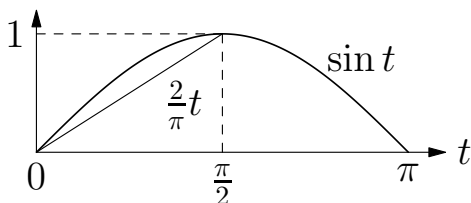
が成立する．ここで $\sin t$ は $t = \frac{\pi}{2}$ について対称であることと， $0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$ のとき $\sin t \geq \frac{2}{\pi}t$ が成り立つことを用いると，

$$\begin{aligned}\int_0^\pi \exp(-aR \sin t) dt &= 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp(-aR \sin t) dt \leq 2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \exp\left(-\frac{2}{\pi}aRt\right) dt \\ &= \frac{\pi}{aR}(1 - e^{-aR}) < \frac{\pi}{aR}\end{aligned}$$

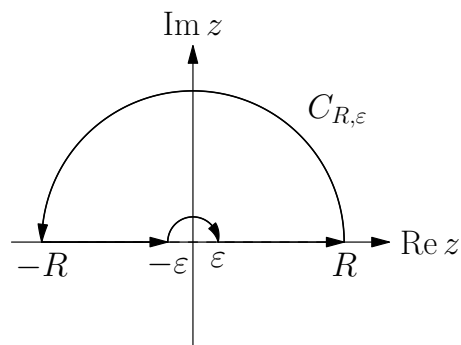
を得る．これと上の不等式を合わせて R が十分大きいとき

$$\left| \int_{C_R^+} \frac{P(z)}{Q(z)} e^{iaz} dz \right| \leq MR^{m-n+1} \cdot \frac{\pi}{aR} = \frac{\pi M}{a} R^{m-n}$$

が成立する． $n - m \geq 1$ より $R \rightarrow \infty$ のときこの右辺は 0 に収束するから主張が示された．□



補題 8.2



例 8.7

例 8.7 a を正の実数として広義積分 $\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx$ の値を求めよう． $f(z) = \frac{e^{iaz}}{z}$ とおく． $z = 0$ は $f(z)$ の極だから線分 $[-R, R]$ に沿って $f(z)$ を積分できないので， $z = 0$ のまわりの半円周に沿って 0 を迂回する．すなわち， $0 < \varepsilon < 1$, $R > 1$ として，線分 $[-R, -\varepsilon]$ ，円周 $|z| = \varepsilon$ の上半分 $-C_\varepsilon^+$ (負の向き)，線分 $[\varepsilon, R]$ ，円周 $|z| = R$ の上半分 C_R^+ (正の向き) をつないでできる閉曲線を $C_{R,\varepsilon}$ とする．0 は $C_{R,\varepsilon}$ の外側だから，Cauchy の積分定理 (または留数定理) より

$$\int_{C_{R,\varepsilon}} f(z) dz = 0$$

である．一方

$$\int_{C_{R,\varepsilon}} f(z) dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx + \int_{C_R^+} f(z) dz - \int_{C_\varepsilon^+} f(z) dz$$

であるが，この最初の積分において $x = -t$ として置換積分すると

$$\begin{aligned} \int_{-R}^{-\varepsilon} f(x) dx + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx &= \int_{\varepsilon}^R f(-t) dt + \int_{\varepsilon}^R f(x) dx \\ &= \int_{\varepsilon}^R \{f(x) + f(-x)\} dx = \int_{\varepsilon}^R \left(\frac{e^{iax}}{x} + \frac{e^{-iax}}{-x} \right) dx \\ &= \int_{\varepsilon}^R \frac{e^{iax} - e^{-iax}}{x} dx = 2i \int_{\varepsilon}^R \frac{\sin ax}{x} dx \end{aligned}$$

となるから，

$$\int_{\varepsilon}^R \frac{\sin ax}{x} dx = -\frac{1}{2i} \int_{C_R^+} f(z) dz + \frac{1}{2i} \int_{C_\varepsilon^+} f(z) dz$$

を得る. この右辺の C_R^+ に沿っての積分は補題 8.2 により $R \rightarrow \infty$ のとき 0 に収束する. 一方

$$\begin{aligned} \int_{C_\varepsilon^+} f(z) dz &= \int_0^\pi f(\varepsilon e^{it}) i \varepsilon e^{it} dt = \int_0^\pi \frac{\exp(ia\varepsilon e^{it})}{\varepsilon e^{it}} \varepsilon i e^{it} dt = \int_0^\pi i \exp(ia\varepsilon e^{it}) dt \\ &\longrightarrow \int_0^\pi i dt = \pi i \quad (\varepsilon \rightarrow +0) \end{aligned}$$

が成立する. 以上により

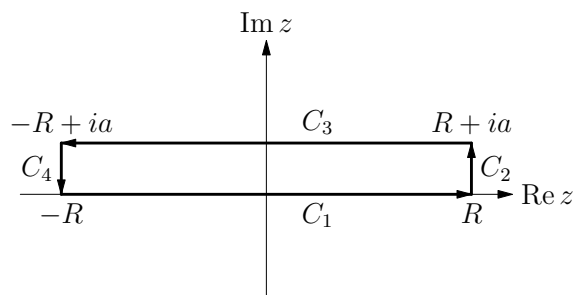
$$\int_0^\infty \frac{\sin ax}{x} dx = \lim_{R \rightarrow \infty, \varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^R \frac{\sin ax}{x} dx = \frac{\pi i}{2i} = \frac{\pi}{2}$$

問題 8.6 留数定理を用いて次の広義積分の値を求めよ. (a は 0 以上の実数とする.)

$$\begin{array}{lll} (1) \int_0^\infty \frac{x^2}{x^4+1} dx & (2) \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+1)^2} dx & (3) \int_0^\infty \frac{\cos ax}{x^4+1} dx \\ (4) \int_0^\infty \frac{\cos ax}{(x^2+1)(x^2+4)} dx & (5) \int_0^\infty \frac{1}{x^6+1} dx & (6) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)} dx \end{array}$$

問題 8.7 a を正の実数とするととき, 広義積分 $I = \int_0^\infty e^{-x^2} \cos 2ax dx$ の値を留数定理を用いて求めよう. $z = x + iy$ ($x, y \in \mathbb{R}$) として $f(z) = e^{-z^2}$ とおく. R を正の実数として,

C_1 を $-R$ を始点, R を終点とする線分, C_2 を R を始点, $R + ia$ を終点とする線分, C_3 を $R + ia$ を始点, $-R + ia$ を終点とする線分, C_4 を $-R + ia$ を始点, $-R$ を終点とする線分として, C_1, C_2, C_3, C_4 をつなげてできる閉曲線 (長方形の周) を C とする.



(1) $\int_C f(z) dz$ の値を求めよ.

(2) $\int_{C_1} f(z) dz$ を x についての積分で表せ.

(3) $\int_{C_3} f(z) dz$ を x についての積分で表せ.

(4) $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_2} f(z) dz = 0$ と $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_4} f(z) dz = 0$ を示せ.

(5) I の値を求めよ. $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$ であること (「解析学概論 II」のプリント (p. 41) を参照) は用いてよい.

9 コーシーの積分公式の一般化とその応用

9.1 コーシーの積分公式の一般化

定理 9.1 (Cauchy の積分公式の一般化) $f(z)$ を $\mathbb{C}$ の開集合 D で正則な関数とする. A を D に含まれる有界閉集合で境界 ∂A が有限個の区分的に C^1 級の単純閉曲線の和集合であるようなものとする. z_0 を A の内部の点とすると, 任意の非負整数 $k \geq 0$ について

$$\frac{k!}{2\pi i} \int_{\partial A} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = f^{(k)}(z_0)$$

が成立する.

証明: $F(z) = \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$ に対して留数定理を適用すると,

$$\int_{\partial A} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} dz = 2\pi i \operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}}$$

を得る. f の z_0 における Taylor 展開

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0)(z - z_0)^n$$

より

$$\operatorname{Res}_{z=z_0} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{k+1}} = \frac{1}{k!} f^{(k)}(z_0)$$

である. 以上により示された. $\square$

例 9.1 α を複素数の定数として $f(z) = e^{\alpha z}$ とおく. C を 0 を中心とする半径 $r > 0$ の円周とすると, $|z_0| < r$ を満たす任意の複素数 z_0 と自然数 k について

$$\int_C \frac{e^{\alpha z}}{(z - z_0)^{k+1}} dz = \frac{2\pi i}{k!} f^{(k)}(z_0) = \frac{2\pi i}{k!} \alpha^k e^{\alpha z_0}.$$

問題 9.1 C を円周 $|z| = 1$ (正の向き) とするとき, 次の線積分の値を求めよ.

$$(1) \int_C \frac{e^{2z}}{z^4} dz \quad (2) \int_C \frac{e^{\pi i z}}{\left(z - \frac{1}{2}\right)^2} dz \quad (3) \int_C \frac{dz}{z^2(z^2 + 4)} \quad (4) \int_C \frac{e^z}{z^3(z - 2)^2} dz$$

9.2 リュービルの定理と代数学の基本定理

定理 9.2 (Liouville (リュービル) の定理) 複素数平面 $\mathbb{C}$ で正則な関数 $f(z)$ が $\mathbb{C}$ で有界, すなわち, ある定数 $M \geq 0$ があって $|f(z)| \leq M$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ について成立すれば, $f(z)$ は定数関数である.

証明: z_0 を任意の複素数, $R > 0$ として C_R を z_0 を中心とする半径 R の円周 $|z - z_0| = R$ とすると, 定理 9.1 より

$$f'(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_R} \frac{f(z)}{(z - z_0)^2} dz$$

が成立する. よって命題 5.3 により

$$|f'(z_0)| \leq \frac{l(C_R)}{2\pi} \frac{M}{R^2} = \frac{2\pi R}{2\pi} \frac{M}{R^2} = \frac{M}{R}$$

という不等式が任意の正の実数 R について成立する. $|f'(z_0)|$ は R に無関係だから, $R \rightarrow \infty$ として $|f'(z_0)| = 0$, すなわち $f'(z_0) = 0$ でなければならない. 以上により, $f'(z) = 0$ が任意の $z \in \mathbb{C}$ について成立することが示された. $\mathbb{C}$ は連結開集合だから, 命題 3.9 より $f(z)$ は定数関数である. $\square$

定理 9.3 (代数学の基本定理) n を自然数, $a_0, a_1, \dots, a_n$ を $a_n \neq 0$ であるような任意の複素数として

$$f(z) = a_n z^n + a_{n-1} z^{n-1} + \dots + a_1 z + a_0$$

とおくと, 複素数 $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ が存在して

$$f(z) = a_n (z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$$

が成立する. このとき $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ のことを多項式 $f(z)$ の (または方程式 $f(z) = 0$ の) 根 (roots) という.

証明: まず, $f(\alpha) = 0$ を満たす複素数 α が少なくとも 1 つ存在することを背理法で証明しよう. $f(\alpha) = 0$ を満たす $\alpha \in \mathbb{C}$ が存在しないと仮定する. すると, $f(z)$ は 0 にならないから, $g(z) := 1/f(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則である. 三角不等式より $z \neq 0$ のとき

$$\begin{aligned} |f(z)| &= |a_n| |z|^n \left| 1 + \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| \geq |a_n| |z|^n \left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \frac{1}{z} + \dots + \frac{a_0}{a_n} \frac{1}{z^n} \right| \right) \\ &\geq |a_n| |z|^n \left(1 - \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \frac{1}{|z|} - \dots - \left| \frac{a_0}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^n} \right) \end{aligned}$$

ここで

$$R = 2n \max \left\{ 1, \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right|, \dots, \left| \frac{a_{n-1}}{a_n} \right| \right\}$$

とおくと, $|z| \geq R$ のとき

$$\left| \frac{a_k}{a_n} \right| \frac{1}{|z|^{n-k}} \leq \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \frac{1}{R^{n-k}} \leq \left| \frac{a_k}{a_n} \right| \frac{1}{R} \leq \frac{1}{2n} \quad (k = 0, 1, \dots, n-1)$$

であるから,

$$|f(z)| \geq |a_n| |z|^n \left(1 - \underbrace{\frac{1}{2n} - \dots - \frac{1}{2n}}_n \right) \geq \frac{1}{2} |a_n| |z|^n \geq \frac{1}{2} |a_n| R^n \quad (|z| \geq R \text{ のとき})$$

を得る. 一方 $|f(z)|$ は有界閉集合 $\overline{U}(0; R) = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R\}$ において実数値連続関数であるから Weierstrass の定理によって, $\overline{U}(0; R)$ における $|f(z)|$ の最小値 m が存在する. 仮定により $|f(z)|$ は 0 にはならないから $m > 0$ である. 以上により, 任意の $z \in \mathbb{C}$ について

$$|f(z)| \geq m_0 := \min\left\{m, \frac{1}{2}|a_n|R^n\right\} > 0, \quad |g(z)| \leq \frac{1}{m_0}$$

が成立する. 従って $g(z)$ は $\mathbb{C}$ で正則かつ有界であるから, Liouville の定理によって $g(z)$, 従って $f(z)$ は定数でなければならない. これは $f(z)$ が 1 次以上の多項式であることに矛盾する.

以上により $f(\alpha_1) = 0$ を満たす複素数 α_1 が存在することが示された. 多項式 $f(z)$ を $z - \alpha_1$ で割り算すると,

$$f(z) = f_1(z)(z - \alpha_1) + \beta$$

を満たす多項式 $f_1(z)$ と複素数 β が存在する. $0 = f(\alpha_1) = \beta$ より $f(z) = f_1(z)(z - \alpha_1)$ が成立し, $f_1(z)$ の次数は $n-1$ である. もし $n=1$ であれば z の係数を比較して $f_1(z) = a_1$ であることがわかるから定理の主張が示された. もし $n \geq 2$ であれば, $f_1(z)$ に前半の議論を適用して $f_1(\alpha_2) = 0$ を満たす複素数 α_2 が存在することがわかる. 以下この議論を繰り返せば定理の主張が示される. $\square$

上の定理において, $f(z) = a_n(z - \alpha_1) \cdots (z - \alpha_n)$ の右辺を展開して係数を比較すれば,

$$\begin{aligned} -a_n(\alpha_1 + \cdots + \alpha_n) &= a_{n-1}, \\ a_n(\alpha_1\alpha_2 + \alpha_1\alpha_3 + \cdots + \alpha_{n-1}\alpha_n) &= a_{n-2}, \\ \cdots \\ (-1)^n a_n \alpha_1 \cdots \alpha_n &= a_0 \end{aligned}$$

を得る. これを根と係数の関係という.

問題 9.2 γ を虚数 (実数でない複素数) として $f(z) = z^2 + \gamma z + 1$ とおき, α, β を $f(z)$ の根とする.

- (1) α と β のうち一方の絶対値は 1 より大きく, もう一方の絶対値は 1 より小さいことを示せ.
- (2) $|\alpha| < 1, |\beta| > 1$ として, C を単位円周 $|z| = 1$ とするとき, $\int_C \frac{dz}{f(z)}$ を α で表せ.

問題 9.3 $f(z) = z^3 + 3z + 1$ とおく.

- (1) $f(a) = 0$ を満たす実数 a がただ 1 つ存在し, $-\frac{1}{3} < a < -\frac{1}{4}$ を満たすことを示せ.
- (2) 代数学の基本定理により複素数 β, γ が存在して $f(z) = (z - a)(z - \beta)(z - \gamma)$ と分解できる. このとき $\gamma = \bar{\beta}$ であり $\sqrt{3} < |\beta| < 2$ が成立することを示せ.
- (3) $\int_{|z|=1} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ と $\int_{|z|=2} \frac{f'(z)}{f(z)} dz$ の値を求めよ. (ヒント: 問題 8.5 を用いるとよい.)

目 次

1	複素数と複素（数）平面	1
1.1	複素数とその演算	1
1.2	複素数平面	4
1.3	複素数の極形式とド・モアブルの定理	6
1.4	1 の n 乗根と 2 項方程式	9
1.5	直線と円の方程式	12
2	複素関数と写像	15
2.1	複素関数とその簡単な例	15
2.2	指数関数	20
2.3	対数関数	22
2.4	三角関数	24
3	正則関数	26
3.1	複素関数の極限と連続性	26
3.2	複素関数の微分可能性と正則関数	28
3.3	コーシー・リーマン方程式とその応用	32
3.4	実変数複素数値関数とコーシー・リーマン方程式	36
3.5	曲線とパラメータ表示	39
4	べき級数	42
4.1	複素数の数列と級数	42
4.2	べき級数	46
5	線積分とコーシーの定理	53
5.1	微分形式の線積分とグリーンの公式	53
5.2	複素線積分	61
5.3	コーシーの定理	64
6	正則関数のテイラー展開とその応用	68
6.1	正則関数のテイラー展開	68
6.2	正則関数の零点とその位数	71
6.3	一致の定理	72
7	孤立特異点とローラン展開	75
7.1	孤立特異点	75
7.2	ローラン展開	75

8	留数定理とその応用	82
8.1	留数	82
8.2	留数定理	84
8.3	留数定理による広義積分の計算	88
9	コーシーの積分公式の一般化とその応用	93
9.1	コーシーの積分公式の一般化	93
9.2	リュービルの定理と代数学の基本定理	93