

微分積分学

大阿久 俊則

2020 年 11 月 28 日版

1 実数

1.1 実数と数直線

まず数について復習し、これから良く用いられる記号を導入しよう。

- **自然数** (natural number) 全体の集合を $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ と表す。自然数はものの個数を数えるために導入された。1 が最も小さな自然数である。一般に n が自然数ならば $n + 1$ も自然数である。2 つの自然数 n, m の和 $n + m$ と積 mn が定義され、また自然数となる。
- **整数** (integer) 全体の集合を $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, \dots\}$ と表す。2 つの整数 n, m に対して、和 $n + m$ 、差 $n - m$ 、積 nm が定義され、また整数となる。
- 分数で表されるような数のことを**有理数** (rational number) という。有理数全体の集合を $\mathbb{Q}$ で表す。2 つの有理数 a, b に対して、和 $a + b$ 、差 $a - b$ 、積 ab が定義され、また有理数となる。さらに $b \neq 0$ ならば商 a/b が定義され、また有理数となる。
- **実数** (real number) 全体の集合を $\mathbb{R}$ で表す。

以下では実数についてもう少し詳しく考察しよう。正の実数は $x = x_0.x_1x_2x_3\cdots$ という（一般には無限の）小数（正確には 10 進小数という）で表され、負の実数は $x = -x_0.x_1x_2x_3\cdots$ と表される。ここで x_0 は 0 以上の整数、 x_k ($k = 1, 2, 3, \dots$) は $0, 1, 2, \dots, 9$ のいずれかである。たとえば

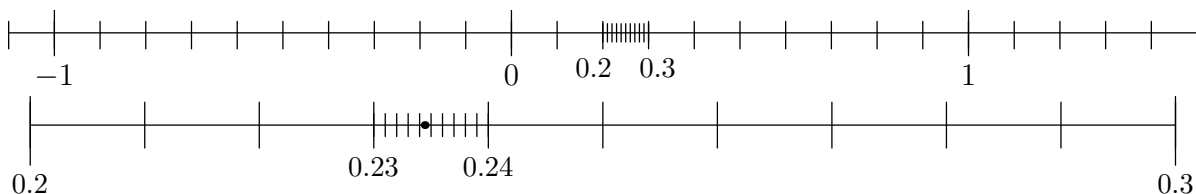
$$123.123123123123\cdots, \quad 3.14159265358979\cdots, \quad -0.101001000100001000001\cdots$$

など。正の実数と負の実数と 0 を合わせて実数という。9 があるところから無限に続く場合は、それらの 9 を 0 に変えて、その直前の数を 1 だけ増やす。たとえば

$$0.1234567899999\cdots = 0.1234567900000\cdots = 0.12345679$$

また、この右辺のように、あるところから先はすべて 0 になる場合は、それらの 0 は省略し、このような実数を**有限小数**と呼ぶ。有限小数ではない実数を**無限小数**という。

実数は目盛りのついた直線 (数直線) 上の点と 1 対 1 に対応する. 例えば, $x = 0.23444\cdots$ は整数 (間隔 1) の目盛りでは 0 と 1 の間にあり, 間隔 0.1 の目盛りでは 0.2 と 0.3 の間にあり, 間隔 0.01 の目盛りでは 0.23 と 0.24 の間にある. このように間隔を限りなく狭めて行けば, 実数 x に対応する直線上の 1 つの点が定まる.

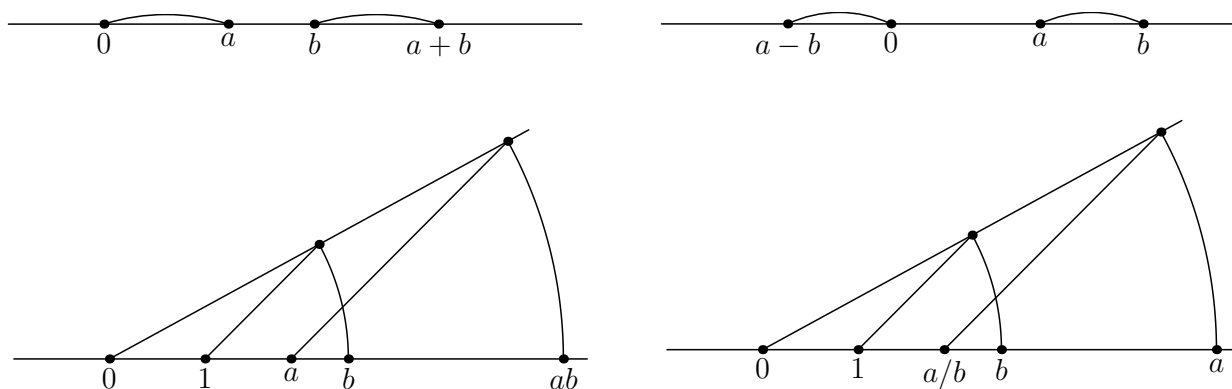


一般に $x = x_0.x_1x_2x_3\cdots$ という実数は, 数直線において間隔が 1 の目盛りでは x_0 と $x_0 + 1$ の間にあり, 間隔が 0.1 の目盛りでは $0.x_1$ と $0.x_1 + 0.1$ の間にあり, 間隔が 0.01 の目盛りでは $0.x_1x_2$ と $0.x_1x_2 + 0.01$ の間にある. この操作を限りなく続けることにより, 実数 x に対応する数直線上の 1 点が定まる.

この操作を逆に行えば, 数直線上の 1 点に対して一つの実数に対応することもわかる. このようにして実数と数直線上の点とは 1 対 1 に対応する.

相異なる 2 つの実数 a と b の間には大小関係が定まる. 数直線において a が b の左側にあるとき $a < b$ と表す. $a < b$ または $a = b$ であるとき, $a \leq b$ と表す. (記号 $a \leq b$ は $a \leq b$ と同じである.) たとえば $2.1 < 2.3$ と $2.1 \leq 2.3$ はどちらも正しい不等式である.

2 つの実数 a, b に対して, 和 $a + b$, 差 $a - b$, 積 ab が定まる. さらに $b \neq 0$ ならば商 a/b が定まる. 数直線において作図により和, 差, 積, 商を求めることができる.



a, b, c を実数とするとき次のような性質が成り立つ.

$$\begin{aligned} a + b &= b + a, & (a + b) + c &= a + (b + c), & a + 0 &= a, & a + (-a) &= 0, \\ ab &= ba, & (ab)c &= a(bc), & a1 &= a, & a(b + c) &= ab + ac, & a\frac{1}{a} &= 1 \quad (a \neq 0), \\ a > b &\Rightarrow a + c > b + c, & a > 0, b > 0 &\Rightarrow ab > 0 \end{aligned}$$

これから, たとえば $a > b$ かつ $c > 0$ ならば $ac > bc$ が成立することがわかる. 証明: $a > b$ より $a - b > b - b = 0$ であり, これと $c > 0$ から $(a - b)c > 0$ すなわち $ac - bc > 0$ が成立する. 従って $ac = (ac - bc) + bc > 0 + bc = bc$ である. $\square$

a, b のうち大きい方を $\max\{a, b\}$ で表す. $\max\{a, -a\}$ を a の**絶対値** (absolute value) といい $|a|$ で表す. $|a|$ は数直線において 0 と a の距離を表している. 絶対値については**三角不等式** $|a+b| \leq |a| + |b|$ が成立する. 実際 a, b が同符号か少なくとも一方が 0 ($a \geq 0$ かつ $b \geq 0$ であるか, または $a \leq 0$ かつ $b \leq 0$ である) ならば等号 $|a+b| = |a| + |b|$ が成立する. a と b が異符号 (すなわち $ab < 0$) のときは $|a+b| < |a| + |b|$ である.

1.2 実数の部分集合と区間

集合とは, 要素 (または元) とよばれる「もの」のいくつか (無限でもよい) の集まりのことである. 微分積分学では「もの」としては主に数を考える. a が集合 A に属する (a は A の要素 (または元) であるともいう) とき, $a \in A$ と表す. a が A に属さないとき $a \notin A$ と表す. 特に要素を一つも持たない集合のことを空集合といい, 記号 $\emptyset$ で表す.

A と B を2つの集合とすると, $A \subset B$ (A は B の部分集合である) とは, $a \in A \Rightarrow a \in B$ が成り立つことである. ($\Rightarrow$ は「ならば」を表す記号である.) これを集合の包含関係という.

$A = B$ のときも $A \subset B$ は正しい. $A = B$ であるための必要十分条件は $A \subset B$ かつ $B \subset A$ が成立することである.

数の集合について包含関係

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}$$

が成立する. 集合を表すには, 要素を列挙するか, あるいは要素であるための条件を指定して

$$\{ \text{要素} \mid \text{要素に対する条件} \}$$

という記号を用いる. たとえば

$$\begin{aligned} \{n \in \mathbb{N} \mid n \leq 9\} &= \{n \mid n \in \mathbb{N}, n \leq 9\} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}, \\ \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は偶数}\} &= \{2k \mid k \in \mathbb{Z}\} = \{0, 2, -2, 4, -4, 6, -6, \dots\} \end{aligned}$$

など. 集合 A と B に対して,

$$\begin{aligned} A \cap B &= \{a \mid a \in A \text{ かつ } a \in B\} \quad (\text{共通部分}) \\ A \cup B &= \{a \mid a \in A \text{ または } a \in B\} \quad (\text{和集合}) \\ A \setminus B &= A - B = \{a \mid a \in A \text{ かつ } a \notin B\} \quad (\text{差集合}) \end{aligned}$$

と定義する. 実数全体の集合 $\mathbb{R}$ の部分集合のうち, 特に次のような集合を**区間** (interval) という.

- (1) 有界閉区間 $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$ (a, b は $a < b$ を満たす実数)
- (2) 有界开区間 $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$ (a, b は $a < b$ を満たす実数)
- (3) 有界半开区間 $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$ (a, b は $a < b$ を満たす実数)

(4) 有界半開区間 $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$ (a, b は $a < b$ を満たす実数)

(5) 無限閉区間 $[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x\}$ (a は実数)

(6) 無限閉区間 $(-\infty, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq b\}$ (b は実数)

(7) 無限開区間 $(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x\}$ (a は実数)

(8) 無限開区間 $(-\infty, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < b\}$ (b は実数)

(9) 実数全体 $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$

ここで ∞ とは無限大を表す記号である. ∞ は数ではないことに注意する.

$\mathbb{R}$ の部分集合 A が区間であるための必要十分条件は, A が2つ以上の数を含み, $a, b \in A$ かつ $a < b$ ならば, $a < c < b$ を満たすすべての実数 c が A に属する (すなわち「すき間」がない) ことである.

微分積分学では, 実数の部分集合としては, 区間, または互いに重ならない (共通部分を持たない) 有限個の区間の和集合となるような集合を主に扱う. たとえば

$$\{x \in \mathbb{R} \mid x \neq 0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty), \quad \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 1\} = (-\infty, -1) \cup (1, \infty)$$

など.

2 数列と無限級数

2.1 数列の極限

自然数 (0 を含めることもある) n に対して実数 a_n が定まるとき, これを**数列**といい, $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ または単に $\{a_n\}$, あるいは $a_1, a_2, a_3, \dots$, あるいは a_n ($n \in \mathbb{N}$) などと表す.

ある実数 α があって, n が限りなく大きくなるとき a_n が α に限りなく近づく (すなわち, $|a_n - \alpha|$ が限りなく小さくなる) ならば, 数列 $\{a_n\}$ は α に**収束する**という. このとき, α を数列 $\{a_n\}$ の**極限** (limit) または**極限值**と呼び,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \alpha \quad \text{あるいは} \quad a_n \longrightarrow \alpha \quad (n \rightarrow \infty)$$

と表す. 数列 $\{a_n\}$ がどんな実数にも収束しないとき, $\{a_n\}$ は**発散する**という. 特に, a_n が n とともに限りなく大きくなるとき, $\{a_n\}$ は**(正の) 無限大に発散する**といい,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \quad \text{あるいは} \quad a_n \longrightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

と表す. $-a_n$ が無限大に発散するとき, $\{a_n\}$ は**負の無限大に発散する**といい, $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$ と表す.

例 2.1 数列 $\frac{1}{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は 0 に収束する. さらに一般に, 数列 $\{a_n\}$ が無限大に発散すれば, 数列 $\frac{1}{a_n}$ は 0 に収束する.

例 2.2 r と a を 0 ではない実数とすると、公比 r 、初項 a の等比数列 $a_n = ar^n$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) は $|r| < 1$ のとき 0 に収束し、 $|r| > 1$ のときは発散する。また、 $r = 1$ のときは a に収束し、 $r = -1$ のときは発散する。

例 2.3 $x = \pm x_0.x_1x_2x_3\cdots$ を実数 x の 10 進小数表示として、 $a_n = \pm x_0.x_1x_2\cdots x_n$ (複合同順) とおくと、 a_n は有限小数 (よって有理数) であり、 $|a_n - x| < 10^{-n}$ であるから、 a_n は x に収束する。

一般に数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ が無限大に発散するとき、数列 $\{a_n + b_n\}$ と数列 $\{a_nb_n\}$ も無限大に発散する。しかし、数列 $\{a_n - b_n\}$ と数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ についてはいろいろな場合がある。前者を $\infty - \infty$ 型の不定形、後者を ∞/∞ 型の不定形という。 $\infty - \infty = 0$ や $\infty/\infty = 1$ とすることはできないことに注意する。

たとえば $a_n = n^2$, $b_n = n$ のとき、

$$a_n - b_n = n^2 - n = n^2\left(1 - \frac{1}{n}\right) \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty)$$

$$\frac{a_n}{b_n} = n \rightarrow \infty \quad (n \rightarrow \infty), \quad \frac{b_n}{a_n} = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

例 2.4 $a_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を考える。これは $\infty - \infty$ 型の不定形である。 a_n を分母が 1 の分数式とみなして、分母と分子に $\sqrt{n+1} + \sqrt{n}$ を掛ける (分子の有理化という) と、

$$a_n = \frac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{1} = \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$$

となり、この分母は限りなく大きくなるから a_n は 0 に収束する。

命題 2.1 数列 $\{a_n\}$ が α に収束し、数列 $\{b_n\}$ が β に収束するとき、次が成り立つ。

(1) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \pm b_n) = \alpha \pm \beta$ (複合同順)

(2) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_nb_n = \alpha\beta$

(3) $\beta \neq 0$ ならば $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{\alpha}{\beta}$

(4) すべての n について $a_n \leq b_n$ が成立すれば $\alpha \leq \beta$

証明: (1) $0 \leq |(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)| = |(a_n - \alpha) \pm (b_n - \beta)| \leq |a_n - \alpha| + |b_n - \beta|$ であり n を限りなく大きくするとき $|a_n - \alpha|$ と $|b_n - \beta|$ は限りなく小さくなるから、 $|(a_n \pm b_n) - (\alpha \pm \beta)|$ も限りなく小さくなる。よって $a_n \pm b_n$ は $\alpha \pm \beta$ に収束する。

(2) $|a_nb_n - \alpha\beta| = |a_n(b_n - \beta) + \beta(a_n - \alpha)| \leq |a_n||b_n - \beta| + |\beta||a_n - \alpha|$ が成立する。ここで $|a_n|$ は $|\alpha|$ に近づき $|b_n - \beta|$ は限りなく小さくなるから、 $|a_n||b_n - \beta|$ は限りなく小さくなる。 $|\beta||a_n - \alpha|$ も限りなく小さくなるから、 $|a_nb_n - \alpha\beta|$ は限りなく小さくなる。

(3) $\left| \frac{1}{b_n} - \frac{1}{\beta} \right| = \frac{|b_n - \beta|}{|b_n||\beta|}$ であり, この右辺の分母は正の実数 $|\beta|^2$ に収束し, 分子は限りなく小さくなるから, $1/b_n$ は $1/\beta$ に収束する. よって $\frac{a_n}{b_n} = a_n \frac{1}{b_n}$ は (2) によって $\alpha \frac{1}{\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ に収束する.

(4) $b_n - a_n \geq 0$ であり, 数列 $b_n - a_n$ は $\beta - \alpha$ に収束するから, $\beta - \alpha \geq 0$ すなわち $\alpha \leq \beta$ である. $\square$

この命題によって2つの実数の和, 差, 積, 商を有理数の極限として求めることができる. $x = \pm x_0.x_1x_2x_3\cdots$ と $y = \pm y_0.y_1y_2y_3\cdots$ を0と異なる実数 x と y の10進小数表示として, $a_n = \pm x_0.x_1x_2\cdots x_n$, $b_n = \pm y_0.y_1y_2\cdots y_n$ とおくと a_n と b_n は有限小数(よって有理数)であり, $n \rightarrow \infty$ のときそれぞれ x と y に収束するから, 命題2.1によって

$$x + y = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n), \quad x - y = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n), \quad xy = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n, \quad \frac{x}{y} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n}$$

が成立する. これによって x と y の和, 差, 積, 商が有理数の数列 $a_n \pm b_n$, $a_n b_n$, a_n/b_n の極限として表されたことになる. これが実数の四則演算の実際的な計算法である(無限小数どうしの四則演算を実際に実行することはできないので). あるいは, これが実数の四則演算の定義であると考えてもよい.

命題2.1を利用して簡単な数列の極限を求めることができる.

例 2.5 $a_n = \frac{2n^2 - n - 3}{n^2 + n + 1}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) を考える. これは ∞/∞ 型の不定形である. そこで分母と分子を分母の次数最大の単項式 n^2 で割ると,

$$a_n = \frac{2 - \frac{1}{n} - \frac{3}{n^2}}{1 + \frac{1}{n} + \frac{1}{n^2}}$$

ここで $\frac{1}{n}$ と $\frac{1}{n^2}$ は0に収束するから, 命題2.1により a_n は $\frac{2 - 0 - 3 \cdot 0}{1 + 0 + 0} = 2$ に収束する.

例 2.6 $a_n = \frac{3^n - 2^n}{3^n + 2^n}$ ($n = 0, 1, 2, \dots$) を考える. 3^n も 2^n も限りなく大きくなるが, 3^n の方が 2^n よりも大きいので, 分母と分子を 3^n で割ると

$$a_n = \frac{1 - \left(\frac{2}{3}\right)^n}{1 + \left(\frac{2}{3}\right)^n}$$

となり, $\left(\frac{2}{3}\right)^n$ は0に収束するから, a_n は $\frac{1 - 0}{1 + 0} = 1$ に収束する.

次の命題は極限の定義から明らかであろう.

命題 2.2 (はさみうちの論法) 3つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$ があって, すべての n について $a_n \leq c_n \leq b_n$ が成立して $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は同じ極限值 α に収束すると仮定する. このとき $\{c_n\}$ も α に収束する.

この定理の応用として次の命題を示すことができる.

命題 2.3 数列 $\{a_n\}$ が有界, すなわち, ある正の実数 M があって, $|a_n| \leq M$ がすべての n について成立するとする. さらに, 数列 $\{b_n\}$ が無限大に発散するならば, 数列 $\left\{\frac{a_n}{b_n}\right\}$ は 0 に収束する.

証明: 仮定より $b_n > 0$ としてよい. すると $-\frac{M}{b_n} \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{M}{b_n}$ が成立する. b_n は無限大に発散するから $\frac{M}{b_n}$ は 0 に収束する. 従って, はさみうちの論法により $\frac{a_n}{b_n}$ も 0 に収束する. $\square$

たとえば, θ を定数とすると, $|\sin n\theta| \leq 1$ であり, n は無限大に発散するから, $\frac{1}{n} \sin n\theta$ は 0 に収束する.

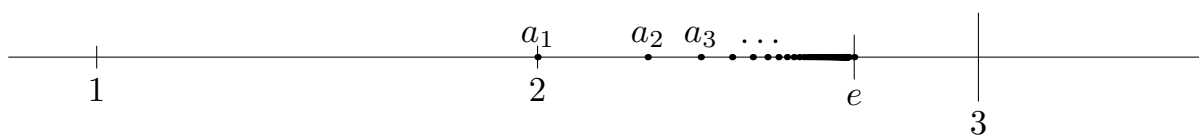
次の定理は実数が数直線をすき間なく埋めつくしていること (実数の連続性という) を表しており, 証明なしで認めることとする. 直感的には明らかであろう.

定理 2.1 数列 $\{a_n\}$ が次の 2 つの条件を満たすとする.

- (1) $\{a_n\}$ は (広義) 単調増加, すなわち $a_n \leq a_{n+1}$ が任意の (すべての) n について成立する.
- (2) $\{a_n\}$ は上に有界, すなわち, ある実数 M があって, $a_n \leq M$ が任意の n について成立する.

このとき数列 $\{a_n\}$ はある実数 α に収束する.

次の例では下図のように $M = 3$ ととれて極限は $\alpha = e = 2.7182818 \dots$ である.



例 2.7 (e の定義) $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ で定義される数列 $\{a_n\}$ が収束することを示そう. この数列の極限 e は自然対数の底と呼ばれる重要な定数である. 2 項定理により,

$$a_n = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \left(\frac{1}{n}\right)^k = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right)$$

$k \geq 2$ のとき, $k! = 2 \cdot 3 \cdots k \geq 2^{k-1}$ であり, $k = 1$ のときは等号が成立するから,

$$a_n \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \leq 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{2^{k-1}} = 1 + \frac{1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n}{1 - \frac{1}{2}} < 1 + 2 = 3$$

従って $\{a_n\}$ は上に有界である。また、

$$\begin{aligned} a_{n+1} &= 1 + \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &> 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right) \left(1 - \frac{2}{n+1}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n+1}\right) \\ &> 1 + \sum_{k=1}^n \frac{1}{k!} \left(1 - \frac{1}{n}\right) \left(1 - \frac{2}{n}\right) \cdots \left(1 - \frac{k-1}{n}\right) = a_n \end{aligned}$$

より、 $\{a_n\}$ は単調増加である。従って定理 2.1 により、数列 $\{a_n\}$ は収束する。その極限を e で表す。 $a_2 > a_1 = 2$, $a_n < 3$ より $2 < e \leq 3$ であることがわかる。実際には $e = 2.71828182845904523 \cdots$ である。 e は無理数である。 e の値の計算と無理数であることの証明には「微分積分学 II」で学ぶテイラー展開を用いる。

2.2 無限級数

数列 $\{a_n\}$ に対して、式

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n + \cdots \quad (1)$$

のことを無限級数という。添字 n が 0 から始まるときは

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots$$

とする。以下では簡単のため a_n の添字 n が 1 から始まる場合について述べるが、0 から始まる場合も同様である。

数列 $\{a_n\}$ に対して

$$S_n = \sum_{k=1}^n a_k = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$$

を（第 n 項までの）部分和という。部分和の数列 $\{S_n\}$ がある実数 S に収束するとき、無限級数 (1) は収束するといい、 $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ を無限級数 (1) の和という。このとき

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

と表す。数列 $\{S_n\}$ が発散するとき、無限級数 (1) は発散するという。

命題 2.4 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ は収束して和が A であるとし、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ は収束して和が B であるとする、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} (a_n \pm b_n)$ は収束して和は $A \pm B$ である（複号同順）。
 また、 c を実数とすると、無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} ca_n$ は収束して和は cA である。

証明: $S_n = \sum_{k=1}^n a_k, T_n = \sum_{k=1}^n b_k$ とおくと、有限個の実数の和と差の法則から、

$$\sum_{k=1}^n (a_k \pm b_k) = \sum_{k=1}^n a_k \pm \sum_{k=1}^n b_k = S_n \pm T_n \rightarrow A \pm B \quad (n \rightarrow \infty)$$

より結論を得る。後半も同様に示せる。□

例 2.8 a と r を 0 でない実数とすると、初項 a 、公比 r の等比級数は

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^n + \cdots \quad (2)$$

と表される。最初の n 項の和を

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} ar^k = a + ar + ar^2 + \cdots + ar^{n-1} \quad (3)$$

とおく。

(i) $r = 1$ のときは $S_n = na$ であるから $\{S_n\}$ は発散する。

(ii) $r \neq 1$ とする。(3) から

$$rS_n = ar + ar^2 + ar^3 + \cdots + ar^{n-1} + ar^n$$

を辺々引いて

$$(1-r)S_n = a - ar^n = a(1-r^n) \quad \therefore S_n = a \frac{1-r^n}{1-r}$$

を得る。これより $|r| < 1$ ならば数列 $\{S_n\}$ は $\frac{a}{1-r}$ に収束し、 $|r| > 1$ または $r = -1$ ならば発散することがわかる。

以上により等比級数 (2) が収束するための必要十分条件は $|r| < 1$ であり、このとき和は $\frac{a}{1-r}$ である。

例 2.9 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$ を考える。 $\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$ より、第 n 項までの部分

和は

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n \frac{1}{k(k+1)} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \right) = \left(1 - \frac{1}{2} \right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right) \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad (n \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

となるから、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = 1$ である。

例 2.10 無限級数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots$ は発散することを示そう。 k を自然数として第 2^k 項までの部分和は

$$\begin{aligned} S_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) \\ &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4} \right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} \right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k} \right) \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \frac{k}{2} \end{aligned}$$

となるから、 S_{2^k} は $k \rightarrow \infty$ のとき無限大に発散する。従って部分和の数列 $\{S_n\}$ は収束しないから、 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ は発散する。

実数の10進小数表示について無限級数を用いて考察しよう。簡単のため、 $x = x_0.x_1x_2x_3\cdots$ を正の実数とする。 x_0 は0以上の整数、 $x_1, x_2, x_3, \dots$ は $0, 1, 2, \dots, 9$ のいずれかである。このとき

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} x_n 10^{-n} = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \frac{x_3}{10^3} + \cdots \quad (4)$$

である。実際、部分和を

$$S_n = x_0 + \sum_{k=1}^n x_k 10^{-k} = x_0 + \frac{x_1}{10} + \frac{x_2}{10^2} + \cdots + \frac{x_n}{10^n} = x_0.x_1x_2\cdots x_n$$

とおくと、 $S_n \leq S_{n+1}$ がすべての自然数 n について成り立ち、

$$S_n < x_0 + \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots = x_0 + \frac{9}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = x_0 + 1$$

であるから、定理 2.1 により数列 $\{S_n\}$ は収束することがわかる。よって (4) の無限級数は収束し、その和が x である。

たとえば $x_0 = 0$, $x_n = 3$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) の場合は等比級数の和の公式より

$$0.333\cdots = \frac{3}{10} + \frac{3}{10^2} + \frac{3}{10^3} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} 3 \cdot 10^{-n} = \frac{3}{10} \frac{1}{1 - \frac{1}{10}} = \frac{1}{3}$$

を得る。同様にして、たとえば $0.999\cdots = 1 = 1.000\cdots$ となることがわかる。

3 関数とその連続性

3.1 関数の定義域と値域

D を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ を写像, すなわち D に属する各々 (おのれの) の実数 a に対して実数 $f(a)$ が一つ定まるとする. このとき f のことを D で定義された**関数** (function) といい, D を f の**定義域** (domain) という. $f(a)$ を a における f の**値** (value), または a の f による**像**という. 特に, $f(a)$ が $a \in D$ によらず一定であるとき, f を**定数関数**という.

x が D に属する「任意の」実数を表すと考えるとき, x を関数 f の**(独立) 変数** (variable) という. また $y = f(x)$ と表すとき, y は関数 f の値を表す変数と考えて**従属変数**という. このとき「 y は x の関数である」ともいう.

関数 f を定義するには, 定義域 D に属する任意の実数 x に対して, $f(x)$ の定義を書けばよい. たとえば $f(x) = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) など. あるいは $y = x^2$ ($x \in \mathbb{R}$) と表すこともできる. ここでは x は特定の数ではなく, 変数と考えている. このように, x を変数とする関数 f のことを「関数 $f(x)$ 」と表すこともある. 従って $f(x)$ という記号は

(1) 特定の数 x における f の値 $f(x)$

(2) x を変数とする関数 $f(x)$

という2通りの意味で用いられる. 一般的に集合と写像 (1 年次演習で学ぶ) の言葉使いからすると (1) の用法が正確である. (2) は微積分における (集合と写像の記号が定まる前からの) 伝統的な用法である. $f(x)$ がどちらの意味で使われているかは前後の文脈から判断する必要がある.

独立変数は必ずしも x でなくてもよい. 特に物理に関連した問題では時間を独立変数と考えて t で表すことが多い. たとえば $f(x) = x^2 - x + 2$ によって定まる関数 f と $g(t) = t^2 - t + 2$ によって定まる関数 g は独立変数の名前が違っただけで関数 (写像) としては同じである.

D を定義域とする関数 f に対して, その値全体の集合

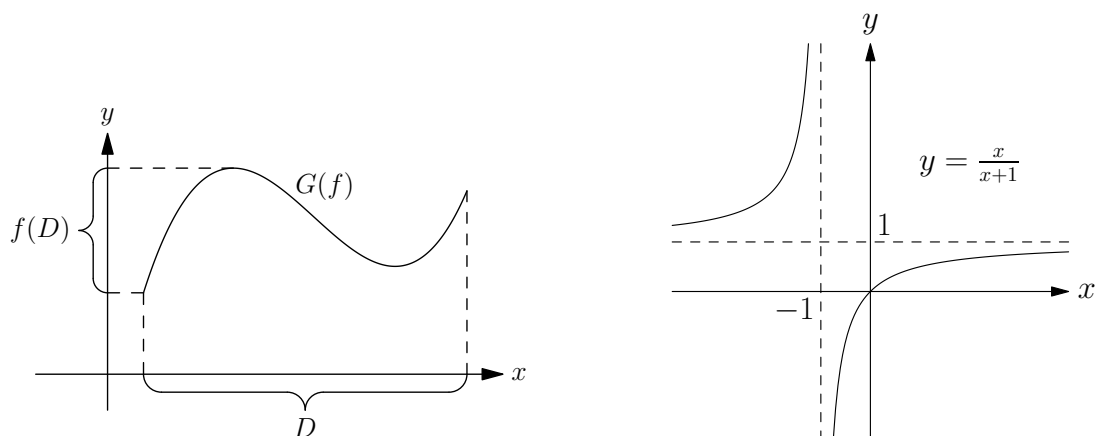
$$f(D) = \{f(x) \mid x \in D\}$$

のことを f の**値域** (range) という. (ここで記号 $f(x)$ は上の (1) の意味で使われている.) f が定数関数であることと, $f(D)$ が1つの数からなることは同値である.

座標平面を $\mathbb{R}^2$ で表す. D を定義域とする関数 f に対して $\mathbb{R}^2$ の部分集合

$$G(f) = \{(x, f(x)) \mid x \in D\}$$

のことを f の**グラフ** (graph) という (左下の図). 通常は $G(f)$ という記号を用いずに単に $y = f(x)$ のグラフという. グラフによって関数を視覚化することができる.



例 3.1 関数 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ を考える (右上の図). $f(x)$ の値は $x \neq -1$ のとき定義されるから, $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$ を定義域とすることができる. $f(x) = 1 - \frac{1}{x+1}$ であり, $\frac{1}{x+1}$ は 0 以外のすべての値をとり得るから, 値域は $f(D) = \mathbb{R} \setminus \{1\} = (-\infty, 1) \cup (1, \infty)$ である.

一方, f の定義域を $I = (-1, \infty)$ とすれば値域は $f(I) = (-\infty, 1)$ である. また f の定義域を $J = (-\infty, -1)$ とすれば値域は $f(J) = (1, \infty)$ である.

3.2 逆関数と合成関数

D を $\mathbb{R}$ の部分集合とする. 関数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ が **1対1** または **単射** であるとは, $a, b \in D$ について, $a \neq b$ であれば $f(a) \neq f(b)$ となることである. このとき, 任意の $c \in f(D)$ に対して $f(a) = c$ を満たす $a \in D$ (「 D に属する a 」のことをこのように簡略に表す) がただ一つ存在する. よって $c \in f(D)$ に対して $f(a) = c$ を満たす $a \in D$ を対応させる関数が定まる. これを f の逆関数といい f^{-1} で表す. すなわち

$$x \in D, y \in f(D) \text{ のとき } y = f(x) \iff x = f^{-1}(y)$$

である.

定義 3.1 f をある区間 I で定義された関数とする.

- (1) f が I で (狭義) **単調増加** とは, $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ が成立すること.
- (2) f が I で (狭義) **単調減少** とは, $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ が成立すること.

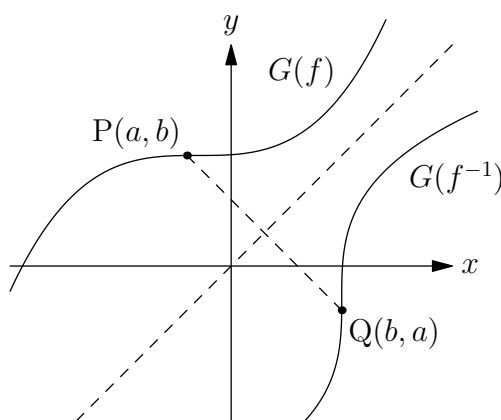
f が I で単調増加または単調減少であるとき, f は I で **単調** (monotone) であるという.

例 3.2 $f(x) = x^2$ は区間 $[0, \infty)$ で単調増加であり, 区間 $(-\infty, 0]$ で単調減少である. $g(x) = \frac{1}{x}$ は区間 $(0, \infty)$ と $(-\infty, 0)$ でそれぞれ単調減少である.

関数 f が区間 I で単調ならば f は単射であるから、 f の逆関数 f^{-1} が定まり、 f^{-1} の定義域は $f(I)$ 、値域は I である。

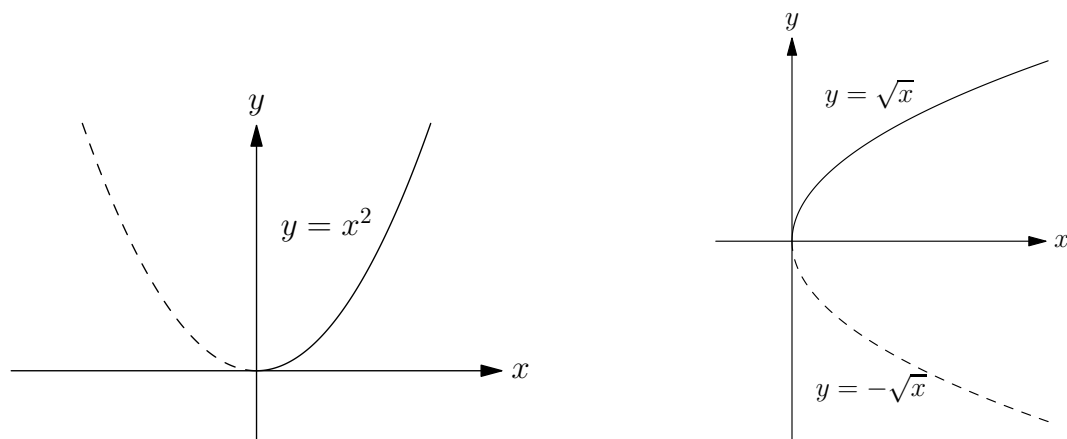
命題 3.1 関数 f の逆関数が存在するとき、 f のグラフ $G(f)$ と f^{-1} のグラフ $G(f^{-1})$ は座標平面 $\mathbb{R}^2$ において直線 $y = x$ に関して対称である。

証明: $a \in D$ として $b = f(a)$ とすると、点 $P(a, b)$ は $G(f)$ に属し、 $a = f^{-1}(b)$ であるから点 $Q(b, a)$ は $G(f^{-1})$ に属する。もし $a = b$ ならば $P = Q$ は直線 $y = x$ 上にあるから、 $y = x$ に関して対称である。 $a \neq b$ とすると、 P と Q を通る直線の傾きは $\frac{b-a}{a-b} = -1$ である。また P と Q の中点 $\left(\frac{a+b}{2}, \frac{a+b}{2}\right)$ は直線 $y = x$ 上にある。以上により P と Q は直線 $y = x$ に関して対称である。□



例 3.3 $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ では単射でない。(たとえば $f(1) = f(-1) = 1$ だから.) $f(x)$ の定義域を $I = [0, \infty)$ とすれば f は I で単調増加であり、任意の $x \in \mathbb{R}$ に対して $y = f(x) \geq 0$ であるから $f(I) \subset [0, \infty)$ である。逆に $y \in [0, \infty)$ とすれば $f(\sqrt{y}) = y$ であるから、 $[0, \infty) \subset f(I)$ も成立する。従って $f(I) = [0, \infty)$ であり、 f の逆関数は $f^{-1}(x) = \sqrt{x}$ である。

一方、 f の定義域を $J = (-\infty, 0]$ とすれば、 f は J で単調減少であるから逆関数 f^{-1} が存在する。 $x \in J$ のとき $x^2 = y \Leftrightarrow x = -\sqrt{y}$ であるから、 f の逆関数は $f^{-1}(x) = -\sqrt{x}$ であり、定義域は $[0, \infty)$ である。このように f の逆関数 f^{-1} (が存在するかどうか) は、 f の定義域の取り方にも依存する。



次は定義域が区間ではないが逆関数が存在する例である.

例 3.4 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid x \neq -1\}$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{x}{x+1}$ を考える (例 3.1). $y = f(x)$ とおくと $x \neq -1$ かつ $y \neq 1$ のとき,

$$y = \frac{x}{x+1} = 1 - \frac{1}{x+1} \Leftrightarrow \frac{1}{x+1} = 1 - y \Leftrightarrow x+1 = \frac{1}{1-y} \Leftrightarrow x = \frac{1}{1-y} - 1 = \frac{y}{1-y}.$$

よって $f^{-1}(x) = \frac{x}{1-x}$ である. f^{-1} の定義域は f の値域 $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ に等しい.

D を定義域とする関数 f と, E を定義域とする関数 g を考える. $f(D) \subset E$ ならば, 各々の $a \in D$ に対して $f(a) \in E$ となるから実数 $g(f(a))$ が定まる. $x \in D$ に対して $g(f(x))$ を対応させる関数を f と g の**合成関数**といい, $g \circ f$ で表す. すなわち $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ である.

たとえば $f(x) = x+1$ ($x \in \mathbb{R}$), $g(x) = \sqrt{x}$ ($x \geq 0$) のとき,

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x+1) = \sqrt{x+1}$$

であり, $g \circ f$ の定義域は $[-1, \infty)$ である.

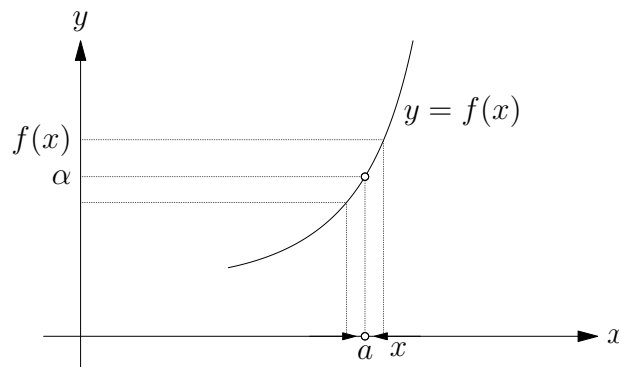
関数 f の逆関数 f^{-1} が存在するとき $(f \circ f^{-1})(x) = x$, $(f^{-1} \circ f)(x) = x$ が成立する.

3.3 関数の極限

以下では, D を区間または有限個の区間の和集合で表されるような集合とする. $a \in D$ として, f を $D \setminus \{a\} = \{x \in D \mid x \neq a\}$ で定義された関数とする. $x \in D$ が a に限りなく近づく (ただし $x \neq a$ とする) とき, $f(x)$ の値が, ある実数 α に限りなく近づくならば, α のことを $x \rightarrow a$ のときの f の**極限值** (極限), または, $x \rightarrow a$ のとき f は α に**収束する**といい,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha \quad \text{あるいは} \quad f(x) \longrightarrow \alpha \quad (x \rightarrow a)$$

と表す. $f(a)$ は定義されていてもされていなくてもよい. $f(a)$ が定義されていても, 極限の定義は $f(a)$ には無関係である.



関数の極限については、数列の極限と同様に次が成り立つ.

命題 3.2 $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \alpha, \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \beta$ とすると次が成り立つ.

$$(1) \lim_{x \rightarrow a} \{f(x) \pm g(x)\} = \alpha \pm \beta \text{ (複合同順)}$$

$$(2) \lim_{x \rightarrow a} f(x)g(x) = \alpha\beta$$

$$(3) \beta \neq 0 \text{ ならば } \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\alpha}{\beta}$$

例 3.5 $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ で定義された関数 $f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 1}$ の $x \rightarrow 1$ のときの極限を求めよう.

$$f(x) = \frac{x^2 + x - 2}{x^3 - 1} = \frac{(x-1)(x+2)}{(x-1)(x^2 + x + 1)} = \frac{x+2}{x^2 + x + 1} \text{ であるから}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+2}{x^2 + x + 1} = \frac{1+2}{1^2 + 1 + 1} = 1$$

例 3.6 $[-1, \infty) \setminus \{0\} = [-1, 0) \cup (0, \infty)$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x}$ の $x \rightarrow 0$ のときの極限を求めよう. $f(x) = \frac{\sqrt{1+x}-1}{x} = \frac{1}{x} \cdot \frac{x}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{\sqrt{1+x}+1}$ より

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{\sqrt{1+x}+1} = \frac{1}{2}$$

$a \in D$ であり $D \cap (a, \infty)$ と $D \cap (-\infty, a)$ は空集合ではないとする. このとき $x \in D$ は a へ右側からも左側からも限りなく近づくことができる. 最初に与えた極限の定義は, x が右側から a に近づいても左側から a に近づいても $f(x)$ が同一の値 α に限りなく近づくことを意味している. ここでは片側のみからの極限を考察しよう. x が $x > a$ を満たしながら a に限りなく近づくことを $x \rightarrow a+0$ と表し, x が $x < a$ を満たしながら a に限りなく近づくことを $x \rightarrow a-0$ と表すことにする. ただし $a = 0$ のときは $a+0 = +0$, $a-0 = -0$ と表す.

$x \rightarrow a+0$ のとき $f(x)$ の値が α に限りなく近づくならば, $x \rightarrow a+0$ のときの f の **右極限** (右側極限) は α であるといい,

$$\lim_{x \rightarrow a+0} f(x) = \alpha \quad \text{あるいは} \quad f(x) \rightarrow \alpha \quad (x \rightarrow a+0)$$

と表す. また, $x \rightarrow a-0$ のとき $f(x)$ の値が α に限りなく近づくならば, $x \rightarrow a-0$ のときの f の **左極限** (左側極限) は α であるといい,

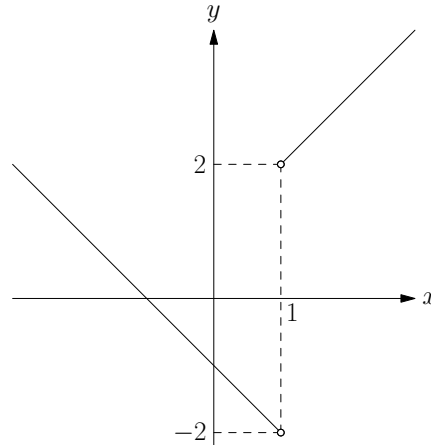
$$\lim_{x \rightarrow a-0} f(x) = \alpha \quad \text{あるいは} \quad f(x) \rightarrow \alpha \quad (x \rightarrow a-0)$$

と表す. 極限 $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ が存在するための必要十分条件は, 右極限 $\lim_{x \rightarrow a+0} f(x)$ と左極限 $\lim_{x \rightarrow a-0} f(x)$ が共に存在して一致することである.

例 3.7 $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ を定義域とする関数 $f(x) = \frac{x^2 - 1}{|x - 1|}$ を考える. $x > 1$ のときは $f(x) = x + 1$, $x < 1$ のときは $f(x) = -(x + 1)$ であるから, 右極限と左極限は

$$\lim_{x \rightarrow 1+0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1+0} (x + 1) = 2, \quad \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} (-x - 1) = -2$$

である. 右極限と左極限が異なるから $x \rightarrow 1$ のときの f の極限值は存在しない.



$x \rightarrow a$ (または $x \rightarrow a + 0$ または $x \rightarrow a - 0$) のとき, $f(x)$ の値が正であって限りなく大きくなるならば, f は (正の) **無限大に発散する** といい,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty \quad \text{あるいは} \quad f(x) \longrightarrow \infty \quad (x \rightarrow a)$$

と表す. $-f(x)$ が無限大に発散するとき $f(x)$ は**負の無限大に発散する** といい,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = -\infty \quad \text{あるいは} \quad f(x) \longrightarrow -\infty \quad (x \rightarrow a)$$

と表す.

例 3.8 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \frac{1}{x} = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -0} \frac{1}{x} = -\infty$

f を区間 (a, ∞) で定義された関数とする. x が限りなく大きくなる ($x \rightarrow \infty$ と表す) とき, $f(x)$ の値がある実数 α に限りなく近づくなれば, α を $x \rightarrow \infty$ のときの $f(x)$ の極限值といい,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \alpha \quad \text{あるいは} \quad f(x) \longrightarrow \alpha \quad (x \rightarrow \infty)$$

と表す. また, $x \rightarrow \infty$ のとき, $f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば, f は無限大に発散する といひ, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ と表す. $-f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば, f は負の無限大に発散する といひ, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty$ と表す.

f を区間 $(-\infty, b)$ で定義された関数とする. $-x$ が限りなく大きくなる ($x \rightarrow -\infty$ と表す) とき, $f(x)$ の値がある実数 α に限りなく近づくなれば, α を $x \rightarrow -\infty$ のときの $f(x)$ の極限值 といひ,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \alpha \quad \text{あるいは} \quad f(x) \longrightarrow \alpha \quad (x \rightarrow -\infty)$$

と表す. また, $x \rightarrow -\infty$ のとき, $f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば, f は無限大に発散するといひ, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty$ と表す. $-f(x)$ の値が限りなく大きくなるならば, f は負の無限大に発散するといひ, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty$ と表す.

例 3.9 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty$.

例 3.10 $[0, \infty)$ で定義された関数 $f(x) = x - \sqrt{x}$ の $x \rightarrow \infty$ のときの極限を求めよう. $x - \sqrt{x} = x \left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right)$ であり, $x \rightarrow \infty$ のとき $1 - \frac{1}{\sqrt{x}}$ は 1 に収束し x は無限大に発散するから, $\lim_{x \rightarrow \infty} (x - \sqrt{x}) = \infty$ である.

3.4 連続関数とその性質

引き続き D を区間または有限個の区間の和集合で表されるような集合とする. 関数 f の定義域を D として $a \in D$ とする. f が $a \in D$ で**連続** (continuous) であるとは,

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$$

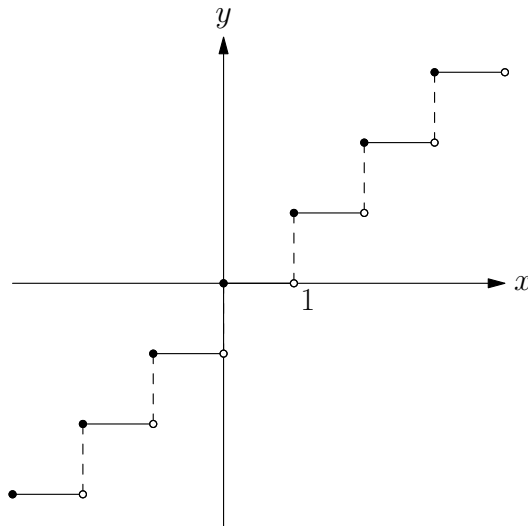
が成立することである. ただし a が D の左端の点であるときは $x \rightarrow a + 0$ のときの極限, a が D の右端の点であるときは $x \rightarrow a - 0$ のときの極限と解釈する. f が D に属するすべての a で連続であるとき, f は D で連続である, あるいは, f は D 上の**連続関数**であるという. f が a で連続でないときは, f は a で**不連続**であるという.

例 3.11 $f(x) = x^2$ は $\mathbb{R}$ で連続である. $f(x) = \sqrt{x}$ は区間 $[0, \infty)$ で連続である.

例 3.12 実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$ で表す (**ガウス記号**という). $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 $f(x) = [x]$ の連続性を考えよう.

(i) $a \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ とすると, $[a] < a < [a] + 1$ であり, $[a] < x < [a] + 1$ のとき $[x] = [a]$ であるから, $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = [a] = f(a)$ が成立する. 従って $f(x)$ は a で連続である.

(ii) n を整数とすると, $\lim_{x \rightarrow n+0} f(x) = n$, $\lim_{x \rightarrow n-0} f(x) = n - 1$ であるから $f(x)$ は n で不連続である.



命題 3.3 関数 f と g は共に D で定義され $a \in D$ で連続とする. このとき $f(x) \pm g(x)$, $f(x)g(x)$ も a で連続である. さらに, $g(a) \neq 0$ であれば $\frac{f(x)}{g(x)}$ も a で連続である.

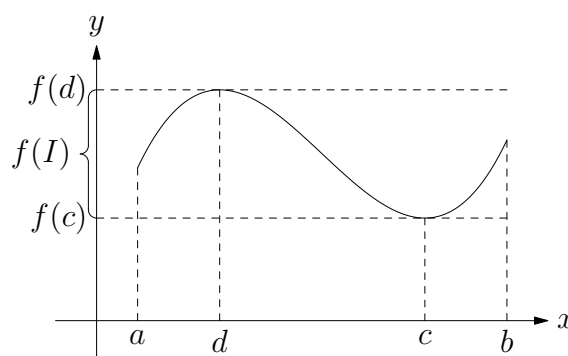
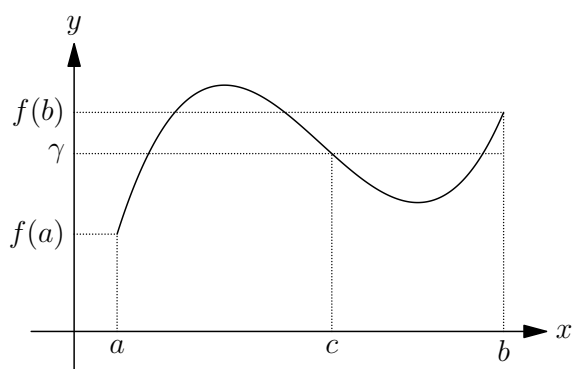
証明: 命題 3.2 と連続の定義から従う. $\square$

命題 3.4 関数 f は定義域 D で連続, 関数 g は定義域 D' で連続であり, $f(D) \subset D'$ と仮定する. このとき $g \circ f$ は D で連続である.

証明: $a \in D$ とする. f は a で連続だから $x \rightarrow a$ のとき $f(x) \rightarrow f(a)$. g は $f(a)$ で連続だから, このとき $g(f(x)) \rightarrow g(f(a))$. よって $g \circ f$ は a で連続である. $\square$

次の定理は連続関数のグラフがすき間なくつながっている (連結であるという) ことを意味しており, 直感的には明らかであろう.

定理 3.1 (中間値の定理) 関数 f は区間 $[a, b]$ で連続であり, $f(a) \neq f(b)$ とする. このとき $f(a)$ と $f(b)$ の間の任意の実数 γ に対して, $a < c < b$ かつ $f(c) = \gamma$ を満たす実数 c が (少なくとも 1 つ) 存在する. (左下の図)



定理 3.2 関数 f は区間 I で連続であるとする.

(1) f の値域 $f(I)$ は区間または 1 点 (1 つの数からなる集合) である.

(2) f が I で単調ならば, 逆関数 f^{-1} は $f(I)$ で連続である.

証明: (1) のみ示す. f が定数関数ならば $f(I)$ は 1 点からなる. よって f は定数関数でない, すなわち $f(I)$ は 2 つ以上の数を含むとしてよい. $\alpha < \beta$ かつ $\alpha, \beta \in f(I)$ とする. このとき $f(a) = \alpha$, $f(b) = \beta$ を満たす $a, b \in I$ が存在する. 中間値の定理により, $\alpha < \gamma < \beta$ を満たす任意の γ に対して $f(c) = \gamma$ を満たす $c \in I$ が存在するから, $\gamma \in f(I)$ である. よって $f(I)$ は区間である. $\square$

定理 3.3 (Weierstrass(ワイヤストラス) の定理) 関数 f が有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続ならば, f は I で最大値と最小値をとる. すなわち, ある $c, d \in I$ が存在して, 任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ が成立する. このとき $M = f(d)$ が最大値, $m = f(c)$ が最小値であり, 値域は $f(I) = [m, M]$ である. (前ページ右の図)

区間 I が有界閉区間でないときは、 f が連続であっても I で最大値や最小値をとるとは限らない。

例 3.13 $f(x) = x^2$ は有界開区間 $I = (0, 1)$ で連続である。値域も $f(I) = (0, 1)$ となり端点 $0, 1$ を含まないから、 f は I で最大値も最小値もとらない。一方、 f の定義域を $\mathbb{R}$ 全体とすると、最小値は $f(0) = 0$ であるが、 $f(x)$ はいくらでも大きい値を取り得るから、最大値は存在しない。

4 初等関数

多項式や有理式（分数式）で表される関数、指数関数、対数関数、三角関数など高校までに学習した関数と、この章で導入する逆三角関数、さらにそれらの四則演算や合成などで表されるような関数を初等関数という。

4.1 多項式関数と有理関数

$3x^2, x^2 + 2x + 3, 2x^3 - \sqrt{3}x + \frac{1}{3}$ などのような式のことを (x の) **多項式** (polynomial) という。一般に (x の) 多項式とは、 n を 0 または自然数、 $a_0, a_1, \dots, a_n$ を実数 (の定数) として、

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

と表される式のことである。 $a_n \neq 0$ のとき、この多項式の**次数** (degree) は n であるという。実数 x に対して実数

$$y = f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

を対応させる関数 f のことを**多項式関数**という。 $a_n \neq 0$ のとき f の**次数** (degree) は n であるといい $\deg f = n$ と表す。 f の定義域は $\mathbb{R}$ 全体である。(もちろん $\mathbb{R}$ のある部分集合 D を定義域としてもよい。) 定数関数と x は $\mathbb{R}$ で連続であるから、命題 3.3 により多項式関数 $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続である。

$f(x)$ と $g(x)$ を多項式とすると、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ という式のことを有理式という。 $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$ とおくと、 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は D を定義域とする関数を定める。これを**有理関数** (rational function) という。命題 3.3 により有理関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は D で連続である。

4.2 指数関数

a を 0 以外の実数とする。整数 n に対して実数 a^n を次のように定めることができる。

$$(1) \ n \text{ が自然数のとき } a^n = \underbrace{a \cdots a}_n$$

(2) $n = 0$ のとき $a^0 = 1$

(3) n が負の整数のとき $a^n = \frac{1}{a^{-n}}$

すると、任意の整数 n, m について

$$a^n a^m = a^{n+m}, \quad (a^n)^m = a^{nm}$$

が成立することがわかる。

自然数 n を1つ固定して、関数 $f(x) = x^n$ ($x \geq 0$) を考えよう。 $f(x)$ は区間 $I = [0, \infty)$ で連続かつ単調増加であり、定理 3.2 と $f(0) = 0$, $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = \infty$ より $f(I) = [0, \infty) = I$ であることがわかる。従って f の逆関数 f^{-1} は $I = [0, \infty)$ で定義され、 I で連続かつ単調増加である。よって、任意の非負 (0 以上の) 実数 $b \geq 0$ に対して $f(a) = a^n = b$ を満たす非負実数 a がただ1つ存在する。このとき

$$a = \sqrt[n]{b}$$

と表し、 b の n 乗根という。

$r = \frac{m}{n}$ を有理数とする。ここで n は自然数、 m は整数である。非負実数 a に対して a の r 乗を

$$a^r = \sqrt[n]{a^m}$$

と定義する。 $a^r = (\sqrt[n]{a})^m$ と表すこともできる。実際、整数乗についての指数法則より

$$\{(\sqrt[n]{a})^m\}^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = \{(\sqrt[n]{a})^n\}^m = a^m$$

であるから、 $(\sqrt[n]{a})^m$ は a^m の n 乗根である。すなわち

$$(\sqrt[n]{a})^m = \sqrt[n]{a^m} = a^r$$

が示された。

また、 r が $r = \frac{m}{n} = \frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N}$) と2通りに表されたとすると、 $a^r = \sqrt[q]{a^p}$ と表すこともできる。実際、整数乗の指数法則より

$$(\sqrt[q]{a^p})^{nq} = \{(\sqrt[q]{a^p})^q\}^n = (a^p)^n = a^{np}, \quad (\sqrt[n]{a^m})^{nq} = \{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^q = (a^m)^q = a^{mq}$$

ここで $np = mq$ より $\sqrt[q]{a^p} = \sqrt[n]{a^m}$ が成立するから、 a^r は r の分数としての表示のしかたによらない。

a, b を正の実数、 r と s を有理数とすると、指数法則

$$(i) a^{r+s} = a^r a^s \quad (ii) a^{r-s} = \frac{a^r}{a^s} \quad (iii) a^{rs} = (a^r)^s \quad (iv) (ab)^r = a^r b^r$$

$$(v) a > 1 \text{ かつ } r < s \text{ ならば } a^r < a^s$$

が成立することを示そう。 $r = \frac{m}{n}, s = \frac{p}{q}$ ($n, q \in \mathbb{N}, m, p \in \mathbb{Z}$) とする。

(i) 両辺を nq 乗して比較する. $r + s = \frac{mq + np}{nq}$ と整数乗の指数法則から,

$$(a^r a^s)^{nq} = (a^r)^{nq} (a^s)^{nq} = (\sqrt[n]{a^m})^{nq} (\sqrt[q]{a^p})^{nq} = (a^m)^q (a^p)^n = a^{mq+np}$$

よって $a^r a^s = \sqrt[nq]{a^{mq+np}} = a^{r+s}$ が成立する.

(ii) まず (i) より $a^s a^{-s} = a^{s-s} = a^0 = 1$ が成立するから, $a^{-s} = 1/a^s$ であることに注意する. これと (i) により

$$a^{r-s} = a^r a^{-s} = a^r \frac{1}{a^s} = \frac{a^r}{a^s}$$

を得る.

(iii) 両辺を nq 乗して比較する.

$$\begin{aligned} \{(a^r)^s\}^{nq} &= \{\sqrt[q]{(a^r)^p}\}^{nq} = \{(\sqrt[q]{(a^r)^p})^q\}^n = \{(a^r)^p\}^n = (a^r)^{pn} \\ &= (\sqrt[n]{a^m})^{pn} = \{(\sqrt[n]{a^m})^n\}^p = (a^m)^p = a^{mp} \end{aligned}$$

となるから, $(a^r)^s = a^{mp/nq} = a^{rs}$ である.

(iv) 両辺を nq 乗して比較する.

$$\begin{aligned} \{(ab)^r\}^{nq} &= (\sqrt[n]{(ab)^m})^{nq} = \{(ab)^m\}^q = (ab)^{mq}, \\ (a^r b^r)^{nq} &= (\sqrt[n]{a^m} \sqrt[n]{b^m})^{nq} = \{(\sqrt[n]{a^m})^n (\sqrt[n]{b^m})^n\}^q = (a^m b^m)^q = a^{mq} b^{mq} = (ab)^{mq} \end{aligned}$$

よって $(ab)^r = a^r b^r$ が示された.

(v) 仮定より $s - r = \frac{np - mq}{nq} > 0$ であるから $np - mq > 0$ であり, (ii) と $a > 1$ より $a^{np-mq} > 1$ であることから,

$$\frac{a^s}{a^r} = a^{s-r} = \sqrt[nq]{a^{np-mq}} > 1$$

定義 4.1 (指数関数) a を 1 以外の正の実数, x を任意の実数とする.

(1) $a > 1$ かつ $x > 0$ のとき. x を小数第 n 位までで切り捨てた有限小数を $[x]_n$ とする. このとき $[x]_n \leq [x]_{n+1}$ かつ $[x]_n < [x] + 1$ より, $a^{[x]_n} \leq a^{[x]_{n+1}}$ かつ $a^{[x]_n} < a^{[x]+1}$ が任意の自然数 n について成立するから, 定理 2.1 より極限 $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{[x]_n}$ が存在する. この極限値を a^x と定義する.

(2) $0 < a < 1$ かつ $x > 0$ のときは, $a^x = \frac{1}{\left(\frac{1}{a}\right)^x}$ と定義する.

(3) $x < 0$ のときは, $a^x = \frac{1}{a^{-x}}$ と定義する.

関数 $f(x) = a^x$ のことを (a を底とする) **指数関数** (exponential function) という. a^x の定義域は $\mathbb{R}$ であり, $a > 1$ ならば単調増加, $0 < a < 1$ ならば単調減少である. 特に a が $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ に等しいとき e^x を $\exp(x)$ と表すこともある.

補題 4.1 a を正の実数とすると、数列 $a^{\frac{1}{n}}$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) は 1 に収束する。

証明: まず $a > 1$ の場合を考える. $b_n = a^{\frac{1}{n}}$ とおく. $b_n > 1$ より $c_n = b_n - 1$ は正であり

$$(1 + c_n)^n = b_n^n = a$$

一方, 2 項定理により $(1 + c_n)^n = 1 + nc_n + \dots + c_n^n > nc_n$ であるから,

$$nc_n < (1 + c_n)^n = a \quad \text{よって} \quad 0 < c_n < \frac{a}{n} \longrightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

従って c_n は 0 に収束するから, $a^{\frac{1}{n}} = b_n = 1 + c_n$ は 1 に収束する. $0 < a < 1$ の場合は $1/a > 1$ だから, 前半により $a^{\frac{1}{n}} = ((1/a)^{\frac{1}{n}})^{-1}$ は 1 に収束する. $a = 1$ のときは明らかである. $\square$

命題 4.1 a を正の実数とすると $\lim_{x \rightarrow 0} a^x = 1$.

証明: 簡単のため $a > 1$ とする. まず $x > 0$ とする. $x \rightarrow 0$ とするので $0 < x < 1$ とし
てよい. このとき $0 < \left[\frac{1}{x}\right] \leq \frac{1}{x}$ より $x \leq \left[\frac{1}{x}\right]^{-1}$ が成立する. 従って

$$1 < a^x \leq a^{[1/x]^{-1}}$$

であり, $x \rightarrow +0$ のとき自然数 $\left[\frac{1}{x}\right]$ は限りなく大きくなるから補題 4.1 とはさみうちの
論法により $a^x \rightarrow 1$ となることがわかる. これから $x \rightarrow -0$ のときは $a^x = (a^{-x})^{-1} \rightarrow 1$
となる. $\square$

命題 4.2 a を正の実数とする. 有理数からなる数列 $\{x_n\}$ が x に収束すれば, $\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = a^x$
が成立する.

証明: $x > 0$ としよ. $[x]_n$ を x の小数第 $n+1$ 位を切り捨てた有限小数とすると, 数列 $\{[x]_n\}$ も x に収束するから, 有理数の数列 $\{x_n - [x]_n\}$ は $x - x = 0$ に収束する. 従って命題 4.1 より $a^{x_n}/a^{[x]_n} = a^{x_n - [x]_n}$ は 1 に収束する. よって

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^{x_n}}{a^{[x]_n}} a^{[x]_n} = 1 \cdot a^x = a^x.$$

$\square$

命題 4.3 (指数法則) 正の実数 a, b と任意の実数 x, y について

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad a^{x+y} &= a^x a^y & \text{(ii)} \quad a^{x-y} &= \frac{a^x}{a^y} & \text{(iii)} \quad a^{xy} &= (a^x)^y & \text{(iv)} \quad (ab)^x &= a^x b^x \\ \text{(v)} \quad a > 1 \text{ かつ } x < y \text{ ならば } a^x &< a^y \end{aligned}$$

が成立する.

証明: x と y が有理数のときは (i)–(v) が成立することは既知であるから, x に収束するような有理数の数列 $\{x_n\}$ と y に収束するような有理数の数列 $\{y_n\}$ をとれば, $x_n + y_n$ は $x + y$ に収束するから上の命題と有理数乗についての指数法則より

$$a^{x+y} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n+y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} a^{y_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{x_n} \lim_{n \rightarrow \infty} a^{y_n} = a^x a^y.$$

(ii)–(iv) も同様に示せる.

(v) $x < y$ より $[x]_n \leq [y]_n$ であるから, $a > 1$ より $a^{[x]_n} \leq a^{[y]_n}$ が成立する. 従って $n \rightarrow \infty$ として,

$$a^x = \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[x]_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} a^{[y]_n} = a^y$$

が成立する. $x < y$ より $x \leq r < s \leq y$ を満たす有限小数 r と s が存在する. r と s は有理数であり $a > 1$ だから $a^r < a^s$ が成り立つ. 従って前半の議論から

$$a^x \leq a^r < a^s \leq a^y$$

を得る. $\square$

命題 4.4 a を正の実数とすると, 指数関数 $f(x) = a^x$ は $\mathbb{R}$ で連続である.

証明: x_0 を任意の実数とする.

$$f(x) - f(x_0) = a^{x-x_0+x_0} - a^{x_0} = a^{x_0}(a^{x-x_0} - 1)$$

であり, 命題 4.1 より $x \rightarrow x_0$ のとき a^{x-x_0} は 1 に収束するから, $f(x) - f(x_0)$ は 0 に収束する. よって $f(x)$ は x_0 で連続である. $\square$

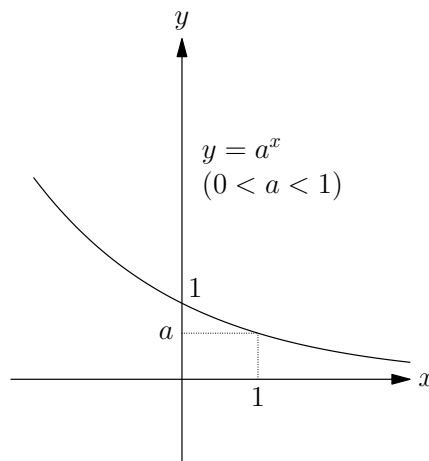
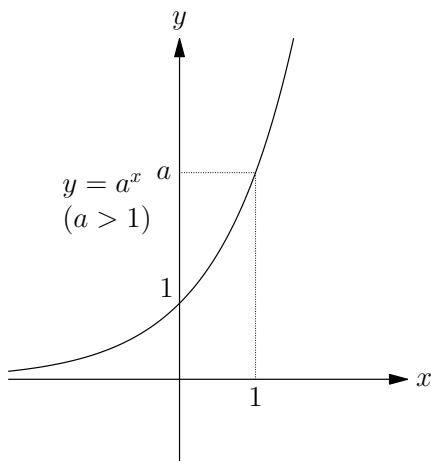
命題 4.5 a を 1 以外の正の実数として $f(x) = a^x$ とおく.

(1) $a > 1$ のとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$.

(2) $0 < a < 1$ のとき, $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = \infty$.

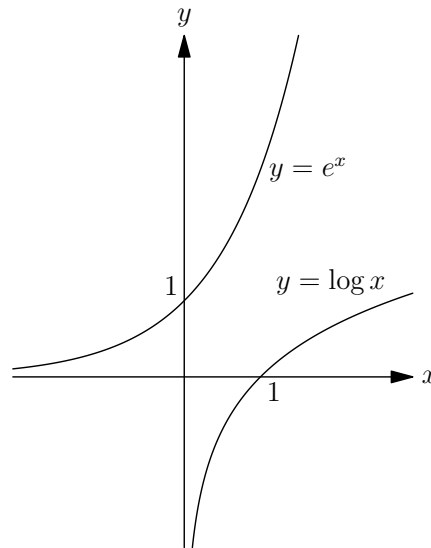
従って $f(x) = a^x$ の値域は $(0, \infty)$ である.

証明: $a > 1$ のときに示せばよい. $\lim_{n \rightarrow \infty} a^n = \infty$ と a^x が単調増加なことから $\lim_{x \rightarrow \infty} a^x = \infty$ がわかる. $x < 0$ のとき $a^x = (a^{-x})^{-1}$ より $\lim_{x \rightarrow -\infty} a^x = 0$. $\square$



4.3 対数関数

a を 1 と異なる正の実数とする. $f(x) = a^x$ は $\mathbb{R}$ において単調であり値域は $(0, \infty)$ だから f の逆関数 f^{-1} が定まり, 定義域は $(0, \infty)$ である. $f^{-1}(x) = \log_a x$ と表し, a を底とする**対数関数**という. 定義より, 正の実数 x と実数 y について $y = \log_a x$ と $x = a^y$ は同値である. よって $a^{\log_a x} = x$, $\log_a(a^x) = x$ が成立する. また $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ である. 特に e を底とする対数 $\log_e x$ を**自然対数**と呼び, 単に $\log x$ と表す.



命題 4.6 a, b を 1 と異なる正の実数とする.

- (1) $x, y > 0$ ならば $\log_a xy = \log_a x + \log_a y$, $\log_a \frac{x}{y} = \log_a x - \log_a y$.
- (2) $x > 0, y \in \mathbb{R}$ のとき $\log_a x^y = y \log_a x$.
- (3) $x > 0$ ならば $\log_b x = \frac{\log_a x}{\log_a b}$.

証明: (1) $X = \log_a x, Y = \log_a y$ とおくと, $x = a^X, y = a^Y$ であるから, 指数法則により $xy = a^X a^Y = a^{X+Y}$, $x/y = a^X / a^Y = a^{X-Y}$. よって $X+Y = \log_a xy$, $X-Y = \log_a(x/y)$ が成立する.

(2) $X = \log_a x$ とおくと $x = a^X$. 従って $x^y = a^{Xy}$ より $\log_a x^y = yX$.

(3) $X = \log_a x, B = \log_a b$ とおくと $x = a^X, b = a^B$ より $x^B = a^{XB} = (a^B)^X = b^X$. これと (2) から $B \log_b x = \log_b x^B = X$. すなわち $\log_b x = X/B = \log_a x / \log_a b$. $\square$

命題 4.7 a を 1 と異なる正の実数とする. $f(x) = \log_a x$ は $(0, \infty)$ で単調かつ連続で値域は $\mathbb{R}$ である. さらに

- (1) $a > 1$ ならば $\log_a x$ は単調増加であり $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = -\infty$.
- (2) $0 < a < 1$ ならば $\log_a x$ は単調減少であり $\lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow +0} \log_a x = \infty$.

4.4 べき乗関数

x を正の実数, a を任意の実数とすると x^a を **べき乗関数** という. $e^{a \log x} = e^{\log x^a} = x^a$ が成立するから $x^a = e^{a \log x}$ と表すことができる.

命題 4.8 a を実数の定数とする.

(1) $a > 0$ ならば x^a は $[0, \infty)$ で連続かつ単調増加であり, $\lim_{x \rightarrow +0} x^a = 0, \lim_{x \rightarrow \infty} x^a = \infty$.

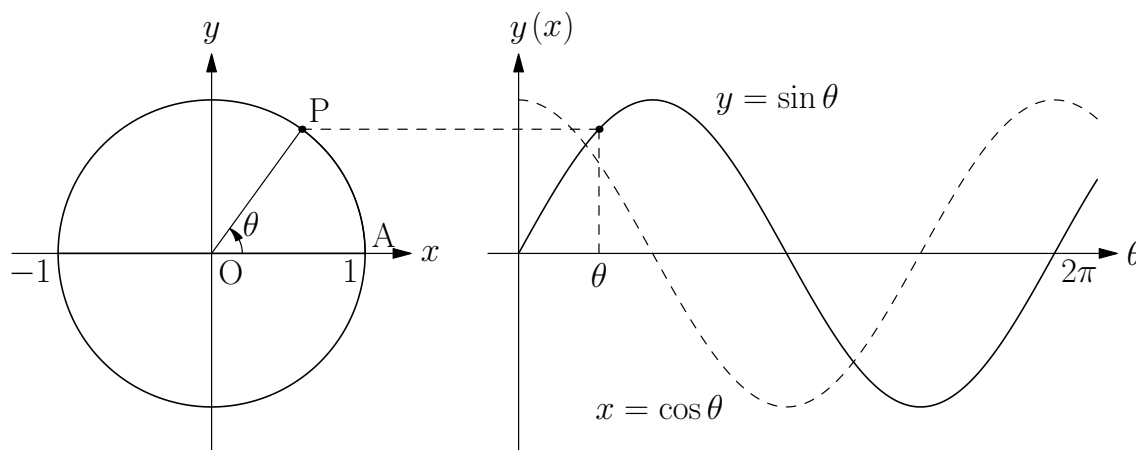
(2) $a < 0$ ならば x^a は $(0, \infty)$ で連続かつ単調減少であり, $\lim_{x \rightarrow +0} x^a = \infty, \lim_{x \rightarrow \infty} x^a = 0$.

証明: $a \log x$ は $(0, \infty)$ で連続, e^x は $\mathbb{R}$ で連続だから, 命題 3.4 より $x^z = e^{a \log x}$ は $(0, \infty)$ で連続である. また $a > 0$ とすると, $x \rightarrow +0$ のとき $a \log x \rightarrow -\infty$ だから $x^a \rightarrow 0$. $x \rightarrow \infty$ のとき $a \log x \rightarrow \infty$ だから $x^a \rightarrow \infty$. $a < 0$ のときは $x^a = (x^{-a})^{-1}$ より. $\square$

これから $a > 0$ のときは $0^a = 0$ と定義すれば x^a は $[0, \infty)$ で定義されて連続となる. なお, n が非負整数ならば x^n は多項式 (単項式) だから, $\mathbb{R}$ で連続である. n が負の整数ならば x^n は有理関数であり $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ で連続である.

4.5 三角関数

xy 平面において原点 $O(0, 0)$ を中心とする半径 1 の円 (単位円) 上の点 $P(x, y)$ を考える. $A(1, 0)$ として $\theta = \angle AOP$ とおくと, P の y 座標が $\sin \theta$, P の x 座標が $\cos \theta$ である. 角度 $\theta = \angle AOP$ は弧 AP の長さで測ることができる. これが弧度法 (ラジアン) である. A から出発して単位円を 1 周して A に戻ってくると $\theta = 2\pi$ となる. また負の向きの回転はマイナスで表す. これによって角 θ は任意の実数値をとることができる. これを一般角という.



以下では独立変数 θ を改めて x として, $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 $\cos x$ と $\sin x$ を考える. 次の性質は定義から明らかであろう.

命題 4.9 (1) $\cos x$ と $\sin x$ は $\mathbb{R}$ で連続で値域は共に $[-1, 1]$ である.

(2) 任意の整数 n について $\cos(x + 2n\pi) = \cos x$, $\sin(x + 2n\pi) = \sin x$. (このことを, $\cos x$ と $\sin x$ は周期 2π の周期関数であるという.)

(3) $\cos^2 x + \sin^2 x = 1$.

(4) $\sin x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi \ (n \in \mathbb{Z}), \quad \cos x = 0 \Leftrightarrow x = n\pi + \frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z}),$

$x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \ (n \in \mathbb{Z})$ のとき $\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}$, $x \neq n\pi \ (n \in \mathbb{Z})$ のとき $\cot x = \frac{\cos x}{\sin x}$ と定義

する. $\tan x$ と $\cot x$ はそれぞれの定義域で連続である. $\cot$ はコタンジェントと読む.

命題 4.10 (加法定理, 倍角の公式, 半角の公式) x, y を任意の実数とするとき

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y, \quad \sin(x+y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1 = 1 - 2\sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x,$$

$$\cos^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 + \cos x), \quad \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{1}{2}(1 - \cos x)$$

特に

$$\cos\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \mp \sin x, \quad \sin\left(x \pm \frac{\pi}{2}\right) = \pm \cos x, \quad \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sin x, \quad \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \cos x.$$

証明: 加法定理を示せばよい. 平面の単位円周上の2点 $P(\cos \theta, \sin \theta)$ と $Q(\cos \varphi, \sin \varphi)$ を考える. このとき $\angle POQ = \theta - \varphi$ (ただし符号や 2π の整数倍の違いは無視する) だから, 余弦定理によって

$$(\cos \theta - \cos \varphi)^2 + (\sin \theta - \sin \varphi)^2 = PQ^2 = 2 - 2\cos(\theta - \varphi).$$

これから $\cos(\theta - \varphi) = \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi$ を得る. φ を $-\varphi$ とすれば $\cos$ の加法定理となる. $\sin$ については, $\cos$ の加法定理から

$$\sin(x+y) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x - y\right) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cos y + \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \sin y = \sin x \cos y + \cos x \sin y.$$

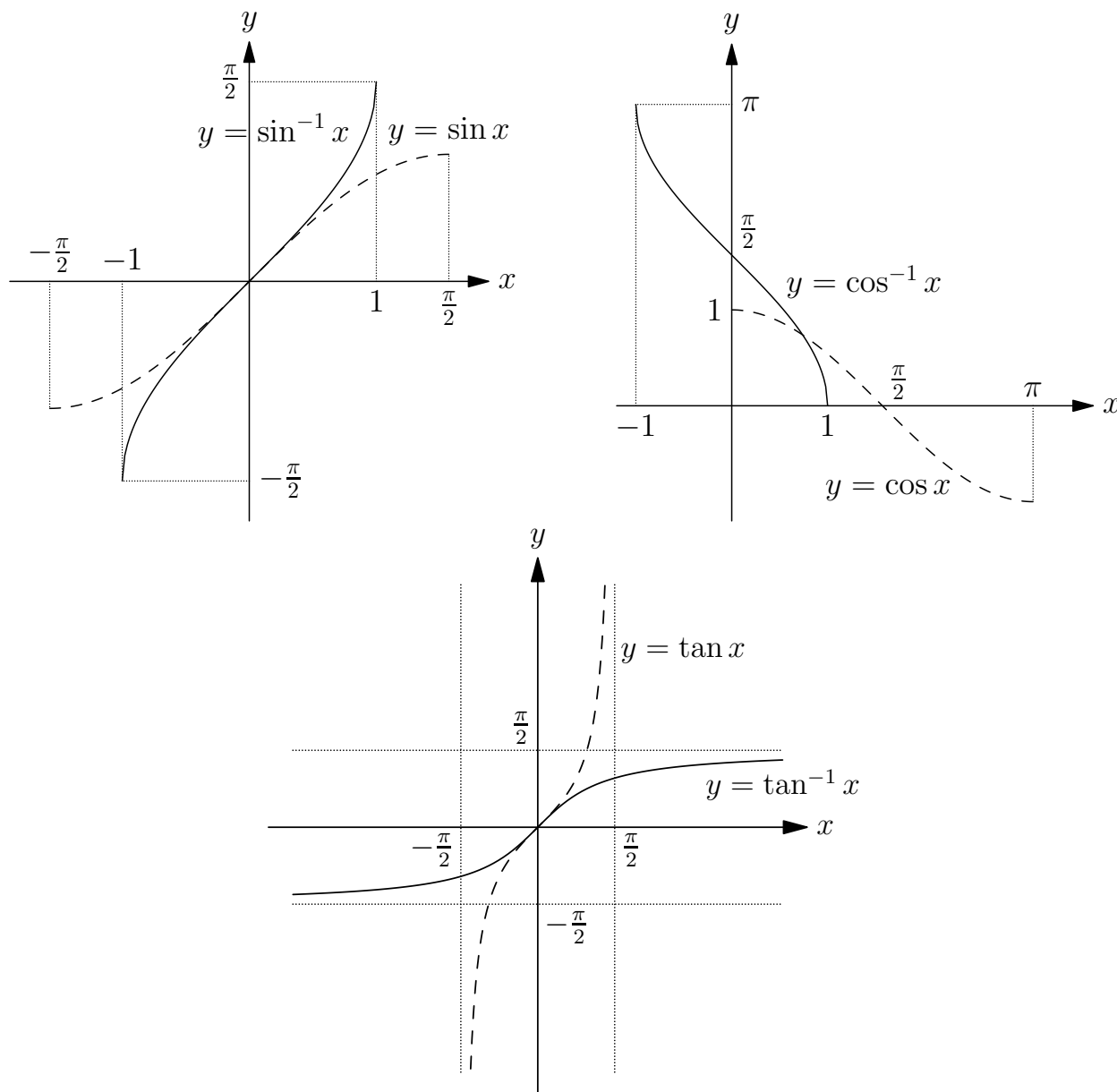
□

4.6 逆三角関数

定義 4.2 (逆三角関数) (1) $f(x) = \sin x$ は区間 $I = \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ で単調増加であり, $f(I) = [-1, 1]$ であるから, $[-1, 1]$ を定義域とする逆関数 f^{-1} が定まる. $f^{-1}(x)$ を $\sin^{-1} x$ または $\arcsin x$ と表してアークサインと呼ぶ. $\sin^{-1} x$ は $\frac{1}{\sin x}$ ではないことに注意する.

(2) $g(x) = \cos x$ は区間 $J = [0, \pi]$ で単調減少であり, $g(J) = [-1, 1]$ であるから, $[-1, 1]$ を定義域とする逆関数 g^{-1} が定まる. $g^{-1}(x)$ を $\cos^{-1} x$ または $\arccos x$ と表してアークコサインと呼ぶ. $\cos^{-1} x$ は $\frac{1}{\cos x}$ ではないことに注意する.

- (3) $h(x) = \tan x$ は区間 $K = \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ で単調増加であり, $f(K) = \mathbb{R}$ であるから, $\mathbb{R}$ を定義域とする逆関数 h^{-1} が定まる. $h^{-1}(x)$ を $\tan^{-1} x$ または $\arctan x$ と表してアークタンジェントと呼ぶ. $\tan^{-1} x$ は $\frac{1}{\tan x}$ ではないことに注意する.



定義より

$$y = \sin^{-1} x \Leftrightarrow \left(\sin y = x \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2} \right)$$

$$y = \cos^{-1} x \Leftrightarrow \left(\cos y = x \text{ かつ } 0 \leq y \leq \pi \right)$$

$$y = \tan^{-1} x \Leftrightarrow \left(\tan y = x \text{ かつ } -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2} \right)$$

たとえば $\sin^{-1} \frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\sin^{-1} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -\frac{\pi}{3}$, $\cos^{-1} 0 = \frac{\pi}{2}$, $\cos^{-1} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\pi}{6}$, $\tan^{-1} 1 = \frac{\pi}{4}$, $\tan^{-1} \sqrt{3} = \frac{\pi}{3}$, $\tan^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{\pi}{6}$.

命題 4.11 (1) $\sin^{-1} x$ は $[-1, 1]$ で連続かつ単調増加, $\cos^{-1} x$ は $[-1, 1]$ で連続かつ単調減少, $\tan^{-1} x$ は $\mathbb{R}$ で連続かつ単調増加である.

$$(2) \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}.$$

$$(3) -1 \leq x \leq 1 \text{ のとき } \sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \frac{\pi}{2}.$$

証明: (1) と (2) は定義より明らか. (3) を示す. $y = \cos^{-1} x$ とおく. $\cos y = x$ かつ $0 \leq y \leq \pi$ である. このとき $0 \leq y \leq \pi$ より

$$\sin\left(\frac{\pi}{2} - y\right) = \cos y = x, \quad -\frac{\pi}{2} \leq \frac{\pi}{2} - y \leq \frac{\pi}{2}$$

が成立するから, 定義により $\frac{\pi}{2} - y = \sin^{-1} x$. よって $\sin^{-1} x + \cos^{-1} x = \sin^{-1} x + y = \frac{\pi}{2}$.
□

4.7 基本的な極限

ここでは, 後で必要になる指数関数, 対数関数, 三角関数についての基本的な極限の公式を導く.

命題 4.12 $\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e.$

証明: x が自然数 n のときの極限が e であることは例 2.7 で示した. ここでは, 実数 x についての極限を求める. まず $x \rightarrow \infty$ のときの極限を求めよう. $x \geq 1$ としてよい. $n = [x]$ とすると $n \leq x < n+1$ が成立する. このとき

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n < \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n \leq \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x \leq \left(1 + \frac{1}{n}\right)^x < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1}.$$

$$\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^n = \frac{\left(1 + \frac{1}{n+1}\right)^{n+1}}{1 + \frac{1}{n+1}} \longrightarrow \frac{e}{1} = e, \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \left(1 + \frac{1}{n}\right) \longrightarrow e \cdot 1 = e$$

となるから, はさみうちの論法により $\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x$ も e に収束する.

次に $x \rightarrow -\infty$ とする. $y = -x$ とおくと $y \rightarrow \infty$ であるから

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = \left(1 - \frac{1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y-1}{y}\right)^{-y} = \left(\frac{y}{y-1}\right)^y = \left(1 + \frac{1}{y-1}\right)^{y-1} \left(1 + \frac{1}{y-1}\right) \longrightarrow e$$

□

命題 4.13 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$

証明: (1) 上の命題と対数関数の連続性から, $x \rightarrow \pm\infty$ のとき $\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = x \log\left(1+\frac{1}{x}\right)$ は $\log e = 1$ に収束する. $t = \frac{1}{x}$ とおくと, $t \rightarrow +0$ のとき $x \rightarrow \infty$ であり,

$$\frac{\log(1+t)}{t} = x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$$

となる. $t \rightarrow -0$ のときは $x \rightarrow -\infty$ であり,

$$\frac{\log(1+t)}{t} = x \log\left(1+\frac{1}{x}\right) \rightarrow 1$$

となる. 右極限と左極限が 1 であるから (1) が示された.

(2) $e^x - 1 = y$ とおくと $x = \log(1+y)$ であり, $x \rightarrow 0$ のとき $y \rightarrow 0$ だから, (1) より

$$\frac{e^x - 1}{x} = \frac{y}{\log(1+y)} \rightarrow 1.$$

□

命題 4.14 (1) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ (2) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

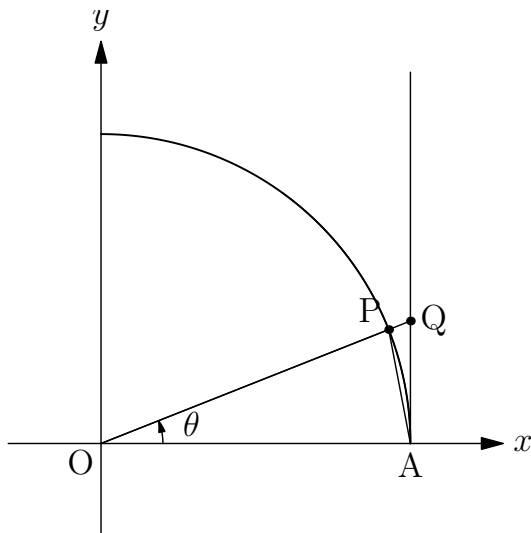
証明: (1) $f(x) = \frac{\sin x}{x}$ とおく. $f(-x) = f(x)$ であるから, $\theta \rightarrow +0$ のとき $f(\theta) \rightarrow 1$ となることを示せばよい. よって $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$ と仮定してよい. xy 平面の単位円において $A(1, 0)$, $P(\cos \theta, \sin \theta)$ として, 直線 OP と直線 $x = 1$ の交点を Q とする. 三角形 OAP の面積は $\frac{1}{2} \sin \theta$, 扇形 OAP の面積は $\frac{1}{2} \theta$, 三角形 OAQ の面積は $\frac{1}{2} \tan \theta$ であり, この順に大きくなるから

$$\sin \theta < \theta < \tan \theta = \frac{\sin \theta}{\cos \theta}$$

が成立する. これから

$$\cos \theta < f(\theta) = \frac{\sin \theta}{\theta} < 1$$

を得る. $\theta \rightarrow +0$ とすると $\cos \theta$ は 1 に収束するから, はさみうちの論法により $f(\theta)$ も 1 に収束する.



$$(2) \text{ 半角の公式により } \frac{1 - \cos x}{x^2} = 2 \frac{\sin^2 \frac{x}{2}}{x^2} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{x}{2}}{\frac{x}{2}} \right)^2 \rightarrow \frac{1}{2} \quad (x \rightarrow 0). \quad \square$$

5 微分

5.1 微分係数と接線

定義 5.1 (微分係数) f をある开区間 I で定義された関数として $a \in I$ とする. 極限

$$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

が存在するとき, f は a で**微分可能** (differentiable) であるといい, この極限 $f'(a)$ を f の a における**微分係数**という.

h は x が a からどれだけ変化したかを表すので, x の増分と呼ばれ一般に記号 Δx で表される. このとき $\Delta y = f(a+h) - f(a)$ は従属変数 $y = f(x)$ の増分を表す. よって

$$f'(a) = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

と簡潔に表すこともできる. 極限を取る前の比 $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ は**差分商**と呼ばれ, 区間 $[a, a+h]$ における $y = f(x)$ の**平均変化率**を表している.

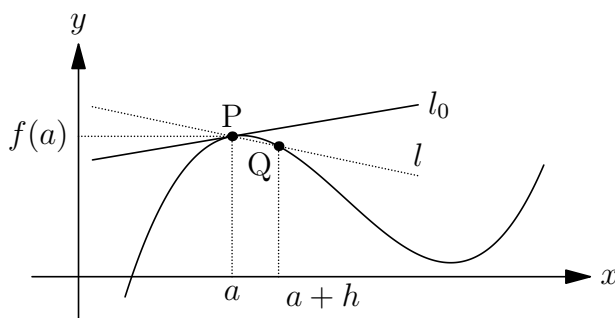
定義 5.2 (接線) 関数 $y = f(x)$ は a で微分可能であるとする. 点 $P(a, f(a))$ と $Q(a+h, f(a+h))$ を通る直線を l とする. l の方程式は

$$l: y = \frac{f(a+h) - f(a)}{h}(x - a) + f(a)$$

である. $f(x)$ が a で微分可能と仮定すると, $h \rightarrow 0$ すなわち点 Q を点 P に限りなく近づけたとき直線 l は直線

$$l_0: y = f'(a)(x - a) + f(a)$$

に限りなく近づく. この直線 l_0 を曲線 $y = f(x)$ の点 $(a, f(a))$ における**接線** (tangent line) という.



例 5.1 $f(x) = x^2$, $a = 1$ とする.

$$\frac{f(1+h) - f(1)}{h} = \frac{(1+h)^2 - 1}{h} = \frac{2h + h^2}{h} = 2 + h \rightarrow 2 \quad (h \rightarrow 0)$$

であるから, $f(x)$ は 1 で微分可能であり微分係数は $f'(1) = 2$ である. 接線の方程式は $y = 2(x - 1) + 1 = 2x - 1$ である.

例 5.2 $f(x) = |x|$, $a = 0$ とする. $\frac{f(h) - f(0)}{h} = \frac{|h|}{h}$ は $h > 0$ のとき 1 だから $h \rightarrow +0$ のとき 1 に収束する. 一方 $h < 0$ のときは -1 だから $h \rightarrow -0$ のとき -1 に収束する. よって差分商の右極限と左極限が異なるから $f(x)$ は 0 で微分不能である.

定義 5.3 (速度) 独立変数 t が時刻 (たとえば秒単位) を表すとする. 直線 (x 軸とする) 上を運動する物体を考え, その時刻 t における位置を $x = f(t)$ とする. ある時刻 t_0 から時刻 $t_0 + \Delta t$ までの物体の平均速度は

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

であるから, 微分係数

$$f'(t_0) = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{f(t_0 + \Delta t) - f(t_0)}{\Delta t}$$

は, 時刻 t_0 における (瞬間的な) **速度** (velocity) を表す.

例 5.3 (自由落下) x 軸を鉛直方向下向きにとる. $x = 0$ から物体を落としたときの t 秒後の物体の位置を $x = f(t)$ とすると, $f'(t) = gt$ となる (Galilei の法則). ここで g は重力加速度と呼ばれる定数であり, ほぼ $g = 9.8 \text{ (m/s}^2\text{)}$ である.

命題 5.1 (微分可能性の言い換え) a を含む开区間 I で定義された関数 $y = f(x)$ を考える. A を実数の定数, h を絶対値が十分小さい ($a + h \in I$ となるような) 実数として関数 $r(h)$ を

$$r(h) = f(a + h) - f(a) - Ah$$

と定義する. このとき次の (1) と (2) は同値である.

(1) f は a で微分可能である.

(2) A の値をうまく選ぶと $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ が成立する.

さらに (1) が成立するとき, (2) が成立するような A の値は $A = f'(a)$ である. 従って f が a で微分可能のとき, $r(h) = f(a + h) - f(a) - f'(a)h$ とおけば,

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + r(h), \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$$

が成立する.

証明: (1) を仮定して $A = f'(a)$ とおくと,

$$\frac{r(h)}{h} = \frac{f(a+h) - f(a) - f'(a)h}{h} = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} - f'(a) \rightarrow 0 \quad (h \rightarrow 0).$$

よって (2) が成立する. 逆に (2) を仮定すると $f(a+h) = f(a) + Ah + r(h)$ より

$$\frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \frac{Ah + r(h)}{h} = A + \frac{r(h)}{h} \rightarrow A \quad (h \rightarrow 0)$$

よって f は a で微分可能で $A = f'(a)$ である. $\square$

系 5.1 $a \in \mathbb{R}$ を含む开区間で定義された関数 f が a で微分可能ならば, f は a で連続である.

証明: 命題 5.1 の $r(h)$ を用いると $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + r(h)$ かつ $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{r(h)}{h} = 0$ が成立する. 特に $h \rightarrow 0$ のとき $r(h) = \frac{r(h)}{h}h \rightarrow 0$ であるから $f(a+h) \rightarrow f(a)$ が成立する. $\square$

5.2 導関数とその性質

f を开区間 (またはいくつかの开区間の和集合) D で定義された関数とする. f が D の各点で微分可能なとき, f は D で微分可能であるという. このとき, D の点 a に対して $f'(a)$ を対応させる関数 $f'(x)$ を $f(x)$ の **導関数** (derivative) という. 関数 $y = f(x)$ の導関数は $f'(x) = y' = \frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}f(x)$ などとも表される. 関数の導関数を求めることを関数を**微分する** (differentiate) という.

定理 5.1 (定数倍・和・差・積・商の微分の公式) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ は开区間 I で微分可能であるとする.

- (1) C を定数とすると関数 $Cf(x)$ も I で微分可能であり, $(Cf(x))' = Cf'(x)$.
- (2) $f(x) \pm g(x)$ も I で微分可能であり, $(f(x) \pm g(x))' = f'(x) \pm g'(x)$.
- (3) $f(x)g(x)$ も I で微分可能であり, $(f(x)g(x))' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.
- (4) 任意の $x \in I$ について $g(x) \neq 0$ ならば, $\frac{f(x)}{g(x)}$ も I で微分可能であり

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)} \right)' = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.$$

証明: (1) $(Cf)'(x) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{Cf(x+h) - Cf(x)}{h} = C \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} = Cf'(x)$.

$$\begin{aligned}
(2) \quad (f(x) \pm g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) \pm g(x+h)) - (f(x) \pm g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(f(x+h) - f(x)) \pm (g(x+h) - g(x))}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \pm \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} = f'(x) \pm g'(x).
\end{aligned}$$

(3) $f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x) = (f(x+h) - f(x))g(x+h) + f(x)(g(x+h) - g(x))$ と変形して、系 5.1 より $g(x)$ が連続であることに注意すると、

$$\begin{aligned}
(f(x)g(x))' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h)g(x+h) - f(x)g(x)}{h} \\
&= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} g(x+h) + \lim_{h \rightarrow 0} f(x) \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \\
&= f'(x)g(x) + f(x)g'(x).
\end{aligned}$$

(4) まず $f(x) = 1$ の場合を示す.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{1}{g(x)}\right)' &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x+h)}\right) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left(\frac{g(x) - g(x+h)}{g(x)g(x+h)}\right) \\
&= -\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x+h) - g(x)}{h} \frac{1}{g(x)g(x+h)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

これと (3) から

$$\begin{aligned}
\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \left(f(x) \frac{1}{g(x)}\right)' = f'(x) \frac{1}{g(x)} + f(x) \left(\frac{1}{g(x)}\right)' \\
&= f'(x) \frac{1}{g(x)} - f(x) \frac{g'(x)}{g(x)^2} = \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g(x)^2}.
\end{aligned}$$

□

定理 5.2 (合成関数の微分の公式) 関数 f は開区間 I で微分可能、関数 g は開区間 J で微分可能であり、 $f(I) \subset J$ が成り立つとすると、合成関数 $g \circ f$ は I で微分可能であり、 $(g \circ f)'(x) = (g(f(x)))' = g'(f(x))f'(x)$ が成立する. この公式は $y = f(x)$, $z = g(y)$ とすれば、 $z = g(f(x))$ であり

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

と表すこともできる.

証明: $a \in I$ を固定して $b = f(a)$ とおく. $g(y)$ は $y = b$ で微分可能だから、命題 5.1 より、 k を絶対値が十分小さい実数として、 $r(k) = g(b+k) - g(b) - g'(b)k$ とおくと、 $k \rightarrow 0$ のとき $\frac{r(k)}{k} \rightarrow 0$ である. 関数 $\varphi(k)$ を $k \neq 0$ のときは $\varphi(k) = \frac{r(k)}{k}$, $k = 0$ のときは $\varphi(k) = 0$ と定義する. すると $r(k) = k\varphi(k)$ かつ $\lim_{k \rightarrow 0} \varphi(k) = 0$ が成立する.

さて, h を絶対値が十分小さい実数として, $k = f(a+h) - f(a)$ とおけば, $f(a+h) = f(a) + k = b + k$ より

$$g(f(a+h)) - g(f(a)) = g(b+k) - g(b) = g'(b)k + r(k) = g'(b)k + k\varphi(k)$$

よって

$$\frac{g(f(a+h)) - g(f(a))}{h} = g'(b)\frac{k}{h} + \frac{k}{h}\varphi(k).$$

$h \rightarrow 0$ のとき $k \rightarrow 0$, $\varphi(k) \rightarrow 0$, $\frac{k}{h} \rightarrow f'(a)$ であるから, この右辺は $g'(b)f'(a)$ に収束する. よって $(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a)$ が示された. $\square$

定理 5.3 (逆関数の微分の公式) 関数 f は開区間 I で単調かつ微分可能で, 任意の $x \in I$ について $f'(x) \neq 0$ とすると, $x \in f(I)$ のとき $(f^{-1}(x))' = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$ が成立する.

$y = f^{-1}(x)$ とすれば $x = f(y)$, $\frac{dx}{dy} = f'(y)$ であるから, $\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$ と表すこともできる.

証明: $a \in I$ を固定して $b = f(a)$ とおく. k を絶対値が十分小さい実数として $h = f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b) = f^{-1}(b+k) - a$ とおくと, $b+k = f(a+h)$, すなわち $k = f(a+h) - b = f(a+h) - f(a)$ が成立する. また, f は I で連続であり f^{-1} は系 5.1 から $f(I)$ で連続であるから, $k \rightarrow 0$ と $h \rightarrow 0$ は同値である. 以上により

$$\frac{f^{-1}(b+k) - f^{-1}(b)}{k} = \frac{h}{k} = \frac{h}{f(a+h) - f(a)} \rightarrow \frac{1}{f'(a)} = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))} \quad (k \rightarrow 0)$$

すなわち $(f^{-1})'(b) = \frac{1}{f'(f^{-1}(b))}$ が示された. $\square$

5.3 初等関数の導関数

定理 5.4 (初等関数の微分の公式) (1) n を非負整数とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $(x^n)' = nx^{n-1}$.

(2) n を自然数とすると, 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ について $(x^{-n})' = -nx^{-n-1}$.

(3) 任意の $x \neq 0$ について $(\log|x|)' = \frac{1}{x}$.

(4) a を 1 と異なる正の実数とすると, 任意の $x \in \mathbb{R}$ について $(a^x)' = a^x \log a$.

(5) a を任意の実数とすると, 任意の $x > 0$ について $(x^a)' = ax^{a-1}$.

(6) 任意の実数 x について $(\sin x)' = \cos x$, $(\cos x)' = -\sin x$.

(7) 任意の $x \in \mathbb{R} \setminus \left\{n\pi + \frac{\pi}{2} \mid n \in \mathbb{Z}\right\}$ について $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$.

$$(8) \text{ 任意の } x \in \mathbb{R} \setminus \{n\pi \mid n \in \mathbb{Z}\} \text{ について } (\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

$$(9) \text{ 任意の } x \in (-1, 1) \text{ について } (\sin^{-1} x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, (\cos^{-1} x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

$$(10) \text{ 任意の } x \in \mathbb{R} \text{ について } (\tan^{-1} x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

証明: (1) 2項定理により

$$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1}h + {}_nC_2x^{n-2}h^2 + \cdots + h^n.$$

よって

$$\frac{(x+h)^n - x^n}{h} = nx^{n-1} + {}_nC_2x^{n-2}h + \cdots + h^{n-1} \longrightarrow nx^{n-1} \quad (h \rightarrow 0).$$

$$(2) \text{ 公式 (1) と定理 5.1 の (4) から } (x^{-n})' = -\frac{(x^n)'}{x^{2n}} = -\frac{nx^{n-1}}{x^{2n}} = -nx^{-n-1}.$$

(3) まず $x > 0$ とする. h を $x+h > 0$ をみたす実数とすると命題 4.13 より

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{1}{h} \log \frac{x+h}{x} = \frac{1}{h} \log \left(1 + \frac{h}{x}\right) = \frac{1}{x} \frac{\log \left(1 + \frac{h}{x}\right)}{\frac{h}{x}} \longrightarrow \frac{1}{x} \quad (h \rightarrow 0).$$

よって $(\log x)' = \frac{1}{x}$ が示された. $x < 0$ のときは $\log |x| = \log(-x)$ は $y = -x$ と $\log y$ の合成関数だから, 合成関数の微分の公式により

$$(\log(-x))' = \frac{1}{-x}(-x)' = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}.$$

(4) まず $a = e$ の場合を示す. 指数法則と命題 4.13 より

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \longrightarrow e^x \quad (h \rightarrow 0).$$

よって $(e^x)' = e^x$ が示された. 一般の a の場合は, $a^x = e^{\log(a^x)} = e^{x \log a}$ と合成関数の微分の公式により

$$(a^x)' = e^{x \log a} (x \log a)' = e^{x \log a} \log a = a^x \log a.$$

(5) $x^a = e^{\log(x^a)} = e^{a \log x}$ と合成関数の微分の公式により

$$(x^a)' = e^{a \log x} (a \log x)' = x^a \frac{a}{x} = ax^{a-1}.$$

(6) $\sin(x+h) = \sin x \cos h + \cos x \sin h$ と命題 4.14 より

$$\begin{aligned} \frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} &= \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \\ &= -\sin x \frac{1 - \cos h}{h^2} h + \cos x \frac{\sin h}{h} \longrightarrow \cos x \quad (h \rightarrow 0). \end{aligned}$$

$\cos(x+h) = \cos x \cos h - \sin x \sin h$ と命題 4.14 より

$$\begin{aligned}\frac{\cos(x+h) - \cos x}{h} &= \cos x \frac{\cos h - 1}{h} - \sin x \frac{\sin h}{h} \\ &= -\cos x \frac{1 - \cos h}{h^2} h - \sin x \frac{\sin h}{h} \longrightarrow -\sin x \quad (h \rightarrow 0).\end{aligned}$$

(7) 商の微分の公式と (6) より

$$(\tan x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x} \right)' = \frac{(\sin x)' \cos x - \sin x (\cos x)'}{\cos^2 x} = \frac{\cos^2 x + \sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(8) 商の微分の公式と (6) より

$$(\cot x)' = \left(\frac{\cos x}{\sin x} \right)' = \frac{(\cos x)' \sin x - \cos x (\sin x)'}{\sin^2 x} = \frac{-\sin^2 x - \cos^2 x}{\sin^2 x} = -\frac{1}{\sin^2 x}.$$

(9) 逆関数の微分の公式と $(\sin x)' = \cos x$ より, $y = \sin^{-1} x$ とおくと

$$(\sin^{-1} x)' = \frac{1}{(\sin y)'} = \frac{1}{\cos y}$$

ここで $-\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}$ に注意すると, $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y = 1 - x^2$ と $\cos y > 0$ から $\cos y = \sqrt{1 - x^2}$ が成立するから (9) が示された.

(10) 逆関数の微分の公式と $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$ より, $y = \tan^{-1} x$ とおくと

$$(\tan^{-1} x)' = \frac{1}{(\tan y)'} = \cos^2 y.$$

ここで $\frac{1}{\cos^2 y} = 1 + \tan^2 y$ より $\cos^2 y = \frac{1}{1 + \tan^2 y} = \frac{1}{1 + x^2}$ であるから (10) が示された.
□

例 5.4 定理 5.1 の (1),(2) から, 多項式関数 $f(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ ($a_0, a_1, \dots, a_n$ は実数の定数) は $\mathbb{R}$ で微分可能であり, 定理 5.4 の (1) より

$$f'(x) = (a_n x^n)' + (a_{n-1} x^{n-1})' + \cdots + (a_1 x)' + (a_0)' = n a_n x^{n-1} + (n-1) a_{n-1} x^{n-2} + \cdots + a_1$$

となる. また, $f(x)$ と $g(x)$ を多項式関数とすると, 有理関数 $\frac{f(x)}{g(x)}$ は $D = \{x \in \mathbb{R} \mid g(x) \neq 0\}$ で微分可能である (定理 5.1 の (4)).

例 5.5 $f(x) = \sqrt{1-x^2} = (1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ ($-1 < x < 1$) の導関数は, 合成関数の微分の公式より

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}(1-x^2)' = -\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

例 5.6 $f(x) = e^{-x^2} \sin x$ ($x \in \mathbb{R}$) とおくと、積の微分の公式により

$$f'(x) = (e^{-x^2})' \sin x + e^{-x^2} (\sin x)' = (e^{-x^2})' \sin x + e^{-x^2} \cos x$$

$g(x) = -x^2$ とおくと $e^{-x^2} = e^{g(x)}$ は e^y と $y = g(x)$ の合成関数であるから、合成関数の微分の公式により

$$(e^{-x^2})' = e^{g(x)} g'(x) = -2xe^{-x^2}$$

よって $f'(x) = e^{-x^2}(-2x \sin x + \cos x)$.

命題 5.2 (対数微分) $f(x)$ は開区間 I で微分可能かつ $f(x) \neq 0$ とすると、 I において $(\log |f(x)|)' = \frac{f'(x)}{f(x)}$ が成立する.

証明: $g(y) = \log |y|$ とおくと $g(y)$ は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ で微分可能で $g'(y) = \frac{1}{y}$ であるから、合成関数の微分の公式により $(\log |f(x)|)' = \frac{1}{f(x)} f'(x)$. $\square$

例 5.7 $f(x) = x^x$ ($x > 0$) の導関数を求めよう. $f(x) > 0$ だから対数をとると $\log f(x) = \log x^x = x \log x$. この両辺を微分して

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = (x \log x)' = \log x + x \frac{1}{x} = \log x + 1.$$

よって $f'(x) = f(x)(\log x + 1) = x^x(\log x + 1)$.

5.4 平均値の定理

まず、これから良く使われる記号を導入する. 変数, たとえば x を含む等式や不等式が, ある集合 D に属するすべての x について成立するとき, $(\forall x \in D)$ と表す. ここで $\forall$ は all (すべての) の最初の文字 A を倒置した記号であり「 $\sim$ がすべての $x \in D$ について成立する」あるいは「 $\sim$ が任意の $x \in D$ について成立する」という文章を略記したものである. たとえば,

$$x^2 - x + 1 > 0 \quad (\forall x \in \mathbb{R})$$

はすべての実数 x について $x^2 - x + 1 > 0$ が成立することを表す.

また, x を含む等式や不等式が, 集合 D に属するある (少なくとも一つの) x について成立するときは $(\exists x \in D)$ と表す. ここで $\exists$ は exists (存在する) の最初の文字 E を倒置した記号であり, 「 $\sim$ がある $x \in D$ について成立する」あるいは「 $\sim$ をみたす $x \in D$ が存在する」という文章を略記したものである. たとえば

$$x^2 - x - 1 = 0 \quad (\exists x \in (0, 2))$$

は, $x^2 - x - 2 = 0$ を満たす実数 x が区間 $(0, 2)$ に (少なくとも一つ) 存在することを表す. $(\exists x \in (0, 2))$ は $(0 < \exists x < 2)$ と表す.

定理 5.5 (ロル (Rolle) の定理) 関数 f は閉区間 $[a, b]$ で連続で开区間 (a, b) で微分可能であり $f(a) = f(b)$ とすると, $f'(c) = 0$ を満たす実数 c が区間 (a, b) に少なくとも一つ存在する. すなわち, $f'(c) = 0 \quad (a < \exists c < b)$.

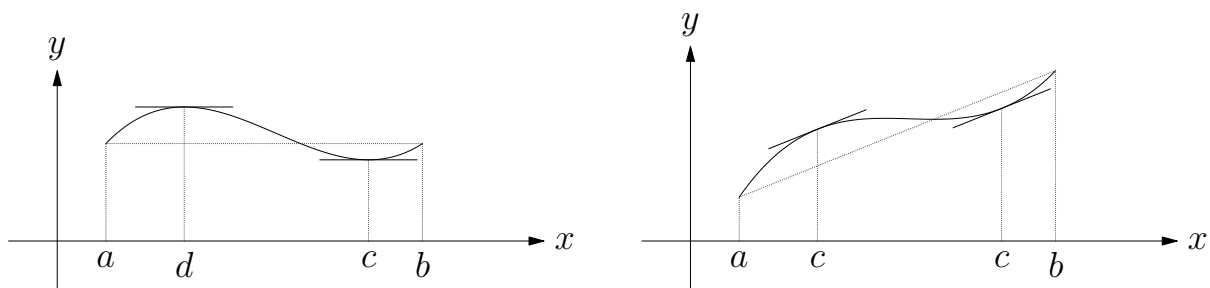
証明: $f(x)$ が定数関数ならば $f'(x) = 0$ であるから c は区間 (a, b) の任意の点でよい. そこで $f(x)$ は定数関数ではないとする. Weierstrass の定理 (定理 3.3) によりある $c, d \in [a, b]$ が存在して, 任意の $x \in [a, b]$ に対して $f(c) \leq f(x) \leq f(d)$ が成立する. f は定数関数ではないから $f(c) \neq f(a)$ または $f(d) \neq f(a)$ である. たとえば $f(c) \neq f(a) = f(b)$ とすると, $c \in (a, b)$ であり, $c + h \in [a, b]$ ならば $f(c + h) - f(c) \geq 0$ である. よって $h > 0$ のときは

$$0 \leq \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \rightarrow f'(c) \quad (h \rightarrow +0),$$

$h < 0$ のときは

$$0 \geq \frac{f(c + h) - f(c)}{h} \rightarrow f'(c) \quad (h \rightarrow -0)$$

となるから $f'(c) \leq 0$ かつ $f'(c) \geq 0$, すなわち $f'(c) = 0$ でなければならない. $\square$



定理 5.6 (平均値の定理) 関数 f は閉区間 $[a, b]$ で連続で开区間 (a, b) で微分可能であるとすると,

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c) \quad \text{すなわち} \quad f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

を満たす実数 c が区間 (a, b) に少なくとも一つ存在する.

証明: 点 $(a, f(a))$ と $(b, f(b))$ を通る直線の式を $y = g(x)$ として,

$$F(x) = f(x) - g(x) = f(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a) - f(a)$$

とおく. $F(a) = F(b) = 0$ であるから Rolle の定理により $F'(c) = 0$ を満たす $c \in (a, b)$ が少なくとも一つ存在する.

$$F'(x) = f'(x) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

であるから, これは結論の式を意味する. $\square$

例 5.8 n を自然数として $f(x) = x^n$, $a = 0$, $b = 1$ とする. $f'(x) = nx^{n-1}$ より, $f'(c) = f(1) - f(0) = 1$ を満たす c は $n \geq 2$ ならば $c = n^{-1/(n-1)}$ である. $n = 1$ ならば c は $0 < c < 1$ を満たす任意の実数でよい.

5.5 高次導関数

定義 5.4 (高次導関数) 関数 f が開区間 I で微分可能であり, $y = f(x)$ の導関数 $f'(x)$ が I で微分可能であるとき, f は I で 2 回 (または 2 階) 微分可能であるといい, $f'(x)$ の導関数 $y'' = f''(x) = (f'(x))'$ を $f(x)$ の 2 次 (または 2 階) 導関数という. $y'' = \frac{d^2y}{dx^2}$ と表す. $\frac{d^2y}{dx^2}$ は $\left(\frac{d}{dx}\right)^2 y = \frac{d^2y}{(dx)^2}$ の括弧を略した記法である.

同様に $y = f(x)$ を n 回微分して得られる関数を $f(x)$ の n 次 (または n 階) 導関数といい, $y^{(n)} = f^{(n)}(x)$ または $\frac{d^ny}{dx^n}$ と表す. f の n 次導関数が存在するとき, f は n 回 (または n 階) 微分可能であるという. f が何回でも微分可能であるときは, f は無限回微分可能であるという.

例 5.9 定理 5.4 の (1)–(10) の関数は, それぞれ指定された範囲で無限回微分可能であり, たとえば

$$(a^x)^{(n)} = a^x (\log a)^n, \quad (x^a)^{(n)} = a(a-1) \cdots (a-n+1)x^{a-n}$$

が成立する. (それぞれ公式 (4) と (5) を繰り返し適用すればよい.)

例 5.10 $\mathbb{R}$ を定義域とする関数 $f(x)$ を, $x \leq 0$ のとき $f(x) = 0$, $x > 0$ のとき $f(x) = x^2$ で定義する. $f(x)$ は $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ では無限回微分可能である.

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} h = 0, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f(h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} 0 = 0$$

だから $f(x)$ は 0 でも微分可能で $f'(0) = 0$ である. $x > 0$ のときは微分の公式から $f'(x) = 2x$ であり, $x < 0$ のときは $f'(x) = 0$ である. 従って

$$\lim_{h \rightarrow +0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow +0} 2 = 2, \quad \lim_{h \rightarrow -0} \frac{f'(h) - f'(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow -0} 0 = 0$$

であるから $f''(0)$ は存在しない.

定義 5.5 (加速度) 独立変数 t が時刻 (たとえば秒単位) を表すとする. 直線 (x 軸とする) 上を運動する物体を考え, その時刻 t における位置を $x = f(t)$ とする. このとき $f''(t)$ は速度 $f'(t)$ の変化率を表しており, 時刻 t における**加速度** (acceleration) と呼ばれる. たとえば自由落下では $f''(t)$ は定数 g (重力加速度) である.

定理 5.7 (Leibniz(ライプニッツ)の公式) 関数 $f(x)$ と $g(x)$ が開区間 I で n 回微分可能であるとき, $f(x)g(x)$ も I で n 回微分可能であり,

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))^{(n)} &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x) \\ &= f(x)g^{(n)}(x) + n f'(x)g^{(n-1)}(x) + {}_nC_2 f''(x)g^{(n-2)}(x) + \cdots + f^{(n)}(x)g(x). \end{aligned}$$

証明: n についての帰納法で示す. $n = 1$ のときは積の微分の公式 $(f(x)g(x))' = f(x)g'(x) + f'(x)g(x)$ より成立する. n 次導関数について

$$(f(x)g(x))^{(n)} = \sum_{k=0}^n {}_nC_k f^{(k)}(x) g^{(n-k)}(x)$$

を仮定すると, 積の微分の公式と ${}_nC_k + {}_nC_{k-1} = {}_{n+1}C_k$ (1 から $n+1$ までの数字の中から k 個取った組み合わせは, 1 から n までの数字の中から k 個取った組み合わせと, 1 から n までの数字の中から $k-1$ 個取った組み合わせに $n+1$ を加えたものの 2 種類からなるので) を用いると,

$$\begin{aligned} (f(x)g(x))^{(n+1)} &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k (f^{(k)}(x)g^{(n-k)}(x))' \\ &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=0}^n {}_nC_k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) \\ &= f(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^n {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) \\ &\quad + \sum_{k=0}^{n-1} {}_nC_k f^{(k+1)}(x)g^{(n-k)}(x) + f^{(n+1)}(x)g(x) \\ &= f(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^n {}_nC_k f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + \sum_{k=1}^n {}_nC_{k-1} f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + f^{(n+1)}(x)g(x) \\ &= f(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^n ({}_nC_k + {}_nC_{k-1}) f^{(k)}(x)g^{(n-k+1)}(x) + f^{(n+1)}(x)g(x) \\ &= f(x)g^{(n+1)}(x) + \sum_{k=1}^n {}_{n+1}C_k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x) + f^{(n+1)}(x)g(x) \\ &= \sum_{k=0}^{n+1} {}_{n+1}C_k f^{(k)}(x)g^{(n+1-k)}(x). \end{aligned}$$

よって $n+1$ 次導関数についても成立することが示された. $\square$

例 5.11 $f(x) = xe^x$ とおく. n を自然数とすると, x の 2 次導関数は定数関数 0 だから

$$\begin{aligned} f^{(n)}(x) &= \sum_{k=0}^n {}_nC_k (x)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} = \sum_{k=0}^1 {}_nC_k (x)^{(k)} (e^x)^{(n-k)} \\ &= x(e^x)^{(n)} + n(x)'(e^x)^{(n-1)} = (x+n)e^x. \end{aligned}$$

6 導関数の応用

6.1 関数の増減と極大極小

区間 I に対して, I° を I の端点 (もしあれば) を除いてできる开区間とする. たとえば $I = [a, b]$ ならば $I^\circ = (a, b)$, $I = [a, b)$ ならば $I^\circ = (a, b)$, $I = (a, b)$ ならば $I^\circ = (a, b)$, $I = [a, \infty)$ ならば $I^\circ = (a, \infty)$ である.

定理 6.1 関数 f は区間 I で連続で区間 I° で微分可能であるとする.

- (1) 任意の $x \in I^\circ$ について $f'(x) > 0$ が成立すれば, $f(x)$ は区間 I で (狭義) 単調増加, すなわち $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) < f(x_2)$ である.
- (2) 任意の $x \in I^\circ$ について $f'(x) < 0$ が成立すれば, $f(x)$ は区間 I で (狭義) 単調減少, すなわち $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) > f(x_2)$ である.
- (3) 任意の $x \in I^\circ$ について $f'(x) \geq 0$ が成立すれば, $f(x)$ は区間 I で広義単調増加, すなわち $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \leq f(x_2)$ である.
- (4) 任意の $x \in I^\circ$ について $f'(x) \leq 0$ が成立すれば, $f(x)$ は区間 I で広義単調減少, すなわち $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ ならば $f(x_1) \geq f(x_2)$ である.
- (5) 任意の $x \in I^\circ$ について $f'(x) = 0$ が成立すれば, $f(x)$ は区間 I で定数 (一定値) である. すなわち, ある実数 k があって, $f(x) = k$ がすべての $x \in I$ について成立する.

証明: $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ とする. 仮定により f は区間 $[x_1, x_2]$ で連続で区間 (x_1, x_2) で微分可能だから, 平均値の定理により

$$f(x_2) - f(x_1) = (x_2 - x_1)f'(c) \quad (x_1 < \exists c < x_2).$$

が成立する. (1) $f'(x) > 0$ ($\forall x \in I^\circ$) と仮定すると $c \in I^\circ$ だから $f'(c) > 0$. よって $f(x_2) - f(x_1) > 0$ が成立する. (2) も同様.

(3) $f'(x) \geq 0$ ($\forall x \in I^\circ$) と仮定すると $c \in I^\circ$ だから $f'(c) \geq 0$. よって $f(x_2) - f(x_1) \geq 0$ が成立する. (4) も同様.

(5) I° の点 x_0 を一つ固定して $k = f(x_0)$ とおく. x を I の任意の点とすると, 平均値の定理により

$$f(x) - f(x_0) = (x - x_0)f'(c)$$

を満たす x_0 と x の間の実数 c が存在する. 仮定より $f'(c) = 0$ であるから, $f(x) = f(x_0) = k$ が成立する. $\square$

例 6.1 関数 $f(x) = x^3$ を考える.

(1) $I = [0, \infty)$ とする. $I^\circ = (0, \infty)$ において $f'(x) = 3x^2 > 0$ であるから, 定理 6.1 の (1) により, $f(x)$ は区間 I で狭義単調増加である.

(2) $I = (-\infty, 0]$ とする. $I^\circ = (-\infty, 0)$ において $f'(x) = 3x^2 > 0$ であるから, 定理 6.1 の (1) により, $f(x)$ は区間 I で狭義単調増加である.

(3) (1) と (2) より ($f'(0) = 0$ であるが), $f(x)$ は $\mathbb{R}$ 全体で狭義単調増加である. 実際, $0 \leq x_1 < x_2$ または $x_1 < x_2 \leq 0$ ならば (1) または (2) より $f(x_1) < f(x_2)$ である. もし $x_1 < 0 < x_2$ ならば, (1) と (2) より $f(x_1) < f(0) = 0 < f(x_2)$ が成立する.

定義 6.1 开区間 I で定義された関数 f と点 $x_0 \in I$ に対して, $x_0 \pm \varepsilon \in I$ であるような (十分小さい) 正の実数 ε (イプシロン, 小さな量を表すのによく用いる) が存在して,

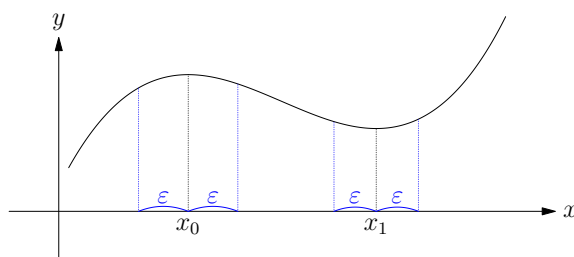
$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \text{ かつ } x \neq x_0 \Rightarrow f(x) < f(x_0)$$

が成立するとき, f は x_0 で**極大** (maximal) である, あるいは x_0 で**極大値** $f(x_0)$ をとるという. また,

$$x_0 - \varepsilon < x < x_0 + \varepsilon \text{ かつ } x \neq x_0 \Rightarrow f(x) > f(x_0)$$

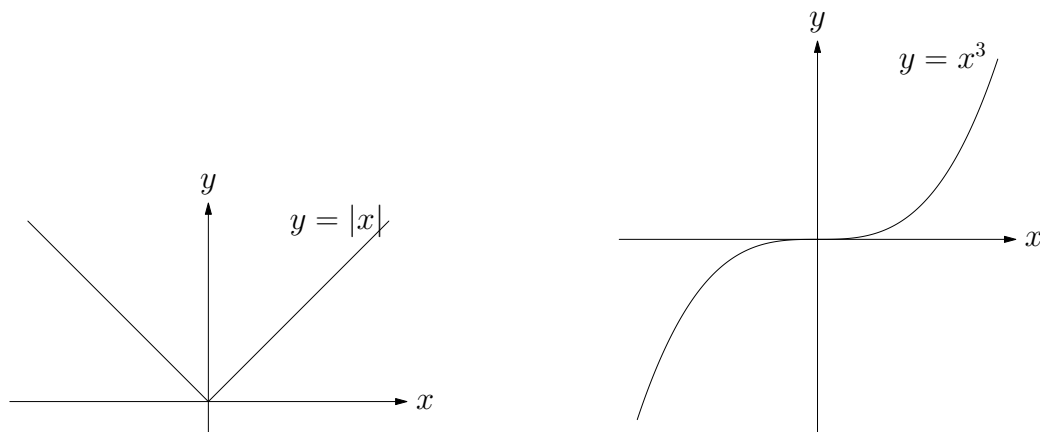
が成立するとき, f は x_0 で**極小** (minimal) である, あるいは x_0 で**極小値** $f(x_0)$ をとるという. 極大値と極小値を合わせて**極値**という.

たとえば下のグラフの関数 $y = f(x)$ は x_0 で極大, x_1 で極小である.



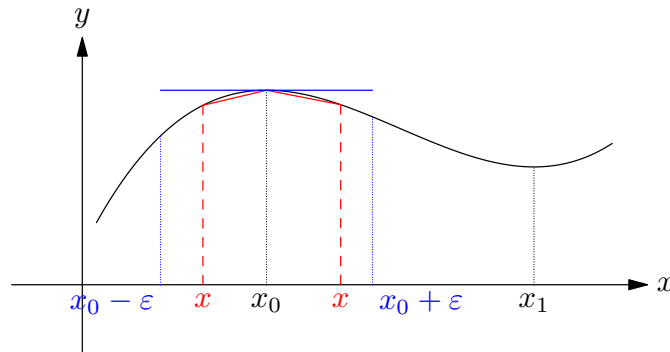
定義 6.2 f がある开区間 I で微分可能で $x_0 \in I$ で $f'(x_0) = 0$ となるとき, x_0 を f の**停留点**という.

例 6.2 $\mathbb{R}$ で定義された関数 x^2 と $|x|$ はともに $x = 0$ で極小値 0 をとる. 一方, $f(x) = x^3$ とすると, $f'(x) = 3x^2$ より $f'(0) = 0$ であるから, 0 は f の停留点であるが, f は 0 で極値を取らない. ($x < 0$ のとき $f(x) < f(0) = 0$, $x > 0$ のとき $f(x) > f(0) = 0$ だから.)



命題 6.1 f が开区間 I で微分可能であり $x_0 \in I$ で極値をとれば $f'(x_0) = 0$, すなわち x_0 は f の停留点である.

証明:



簡単のため f が x_0 で極大であるとする. 上の定義のように ε をとれば, $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ のとき $f(x) - f(x_0) < 0$ だから,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0.$$

また, $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ のときも $f(x) - f(x_0) < 0$ だから,

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0.$$

よって $f'(x_0) = 0$ でなければならない. $\square$

定理 6.2 関数 f は开区間 I で微分可能であり, $x_0 \in I$ において $f'(x_0) = 0$ を満たすとする.

- (1) $x_0 \pm \varepsilon \in I$ となるようなある正の実数 ε が存在して $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ のとき $f'(x) > 0$ であり, $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ のとき $f'(x) < 0$ ならば, f は x_0 で極大である.
- (2) $x_0 \pm \varepsilon \in I$ となるようなある正の実数 ε が存在して $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ のとき $f'(x) < 0$ であり, $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ のとき $f'(x) > 0$ ならば, f は x_0 で極小である.
- (3) $f''(x_0)$ が存在して $f''(x_0) < 0$ ならば, f は x_0 で極大である.
- (4) $f''(x_0)$ が存在して $f''(x_0) > 0$ ならば, f は x_0 で極小である.

証明: (1) 仮定と定理 6.1 の (1) により f は区間 $(x_0 - \varepsilon, x_0]$ で単調増加であるから, $x_0 - \varepsilon < x < x_0$ ならば $f(x) < f(x_0)$ が成立する. 一方, 仮定と定理 6.1 の (2) により f は区間 $[x_0, x_0 + \varepsilon)$ で単調減少であるから, $x_0 < x < x_0 + \varepsilon$ ならば $f(x) < f(x_0)$ が成立する. 以上により f は x_0 において極大である. (2) は (1) と同様.

(3) $0 < f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0+0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$ より $x > x_0$ かつ x が x_0 に十分近いとき $f'(x) > 0$ でなければならない. また,

$$0 < f''(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f'(x) - f'(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0-0} \frac{f'(x)}{x - x_0}$$

より $x < x_0$ かつ x が x_0 に十分近いとき $f'(x) < 0$ でなければならない. 従って (1) により f は x_0 で極大である. (4) も同様に示される. $\square$

$f'(x_0) = f''(x_0) = 0$ のときは f は x_0 で極値をとることもとらないこともある. たとえば $f(x) = x^3$ は $f'(0) = f''(0) = 0$ であり, 0 で極値をとらない. 一方, $f(x) = x^4$ は $f'(0) = f''(0) = 0$ であるが 0 で極小である.

例 6.3 $f(x) = e^{-x} \sin x$ の増減と極値を調べよう.

$$f'(x) = e^{-x}(\cos x - \sin x) = -\sqrt{2}e^{-x} \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$$

(ここで最後の等式は加法定理を逆に用いている. このような変形を三角関数の合成という) より $f'(x) = 0$ をみたす x は $x = x_n = \frac{\pi}{4} + n\pi$ ($n \in \mathbb{Z}$) である.

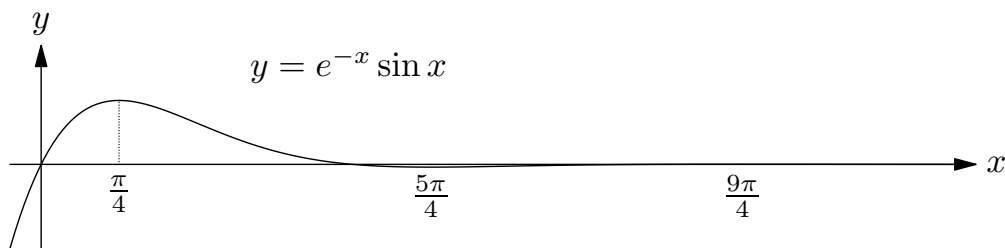
$$f''(x) = -e^{-x}(\cos x - \sin x) + e^{-x}(-\sin x - \cos x) = -2e^{-x} \cos x$$

より

$$f''(x_n) = -2e^{-x_n} \cos\left(\frac{\pi}{4} + n\pi\right)$$

は n が偶数のとき負, 奇数のとき正である. よって定理 6.2 により, 偶数 n について f は x_n で極大値 $\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x_n}$ をとり, 奇数 n については x_n で極小値 $-\frac{1}{\sqrt{2}}e^{-x_n}$ をとる.

また, $f'(x)$ の符号から, 任意の整数 k について, f は区間 $\left[2k\pi + \frac{\pi}{4}, 2k\pi + \frac{5\pi}{4}\right]$ で単調減少, 区間 $\left[2k\pi - \frac{3\pi}{4}, 2k\pi + \frac{\pi}{4}\right]$ で単調増加であることがわかる.



増減の応用として次の不等式を示そう.

命題 6.2 任意の自然数 n と任意の正の実数 x について

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

が成立する.

証明: $f_n(x) = e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \frac{x^3}{3!} - \cdots - \frac{x^n}{n!}$ が $f_n(x) > 0$ ($\forall x > 0$) を満たすことを n についての帰納法で示す. $f_0(x) = e^x - 1 > e^0 - 1 = 0$ が任意の $x > 0$ について成り立つ. $n \geq 1$ として $f_{n-1}(x) > 0$ ($\forall x > 0$) を仮定する.

$$\begin{aligned} f'_n(x) &= e^x - 1 - \frac{2x}{2!} - \frac{3x^2}{3!} - \cdots - \frac{nx^{n-1}}{n!} \\ &= e^x - 1 - x - \frac{x^2}{2!} - \cdots - \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = f_{n-1}(x) > 0 \quad (\forall x > 0) \end{aligned}$$

と定理 6.1 より $f_n(x)$ は区間 $[0, \infty)$ で単調増加だから, $f_n(x) > f_n(0) = 0$ が任意の $x > 0$ について成立する. $\square$

これから次の基本的な極限を得る.

命題 6.3 (1) 任意の正の実数 a と b について $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-bx} = 0$.

(2) 任意の正の実数 a と任意の自然数 n について $\lim_{x \rightarrow +0} x^a (\log x)^n = 0$.

(3) 任意の正の実数 a と任意の自然数 n について $\lim_{x \rightarrow \infty} x^{-a} (\log x)^n = 0$.

証明: (1) まず $b = 1$ のときに示す. n を a 以上の自然数とする. $x \rightarrow \infty$ とするのので $x > 1$ としてよい. このとき $0 < x^a e^{-x} \leq x^n e^{-x}$ であるから, $\lim_{x \rightarrow \infty} x^n e^{-x} = 0$ を示せばよい. 上の命題を $n+1$ について用いると

$$e^x > 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} > \frac{x^{n+1}}{(n+1)!}$$

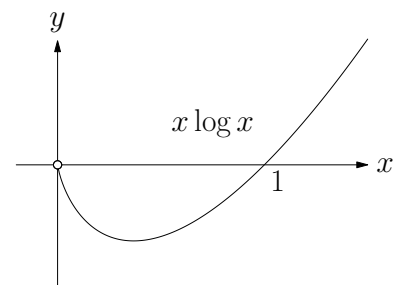
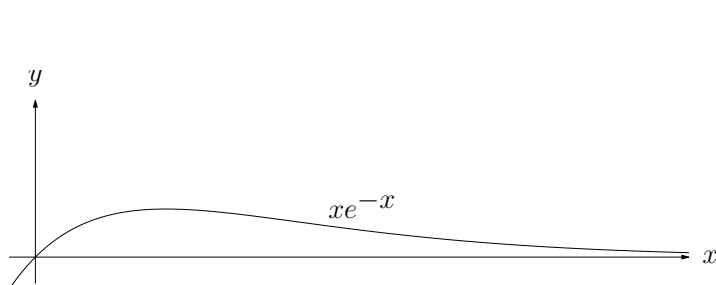
が成立するから

$$0 < x^n e^{-x} = \frac{x^n}{e^x} < \frac{x^n}{\frac{x^{n+1}}{(n+1)!}} = \frac{(n+1)!}{x} \rightarrow 0 \quad (x \rightarrow \infty)$$

よってさみうちの論法により結論を得る.

一般の $b > 0$ については $y = bx$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow \infty$ であり, 前半より

$$x^a e^{-bx} = b^{-a} y^a e^{-y} \rightarrow 0.$$

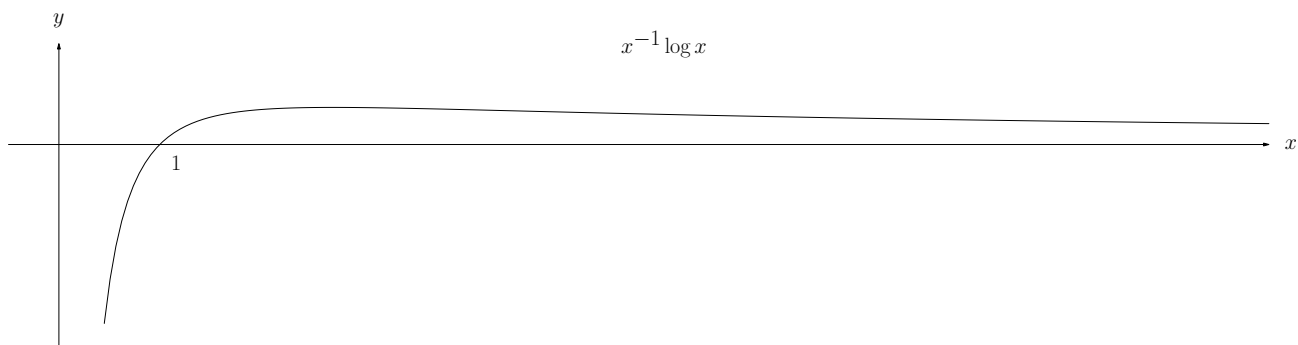


(2) $t = -\log x$ とおくと $x = e^{-t}$ であり, $x \rightarrow +0$ と $t \rightarrow \infty$ が同値である. このとき (1) より

$$x^a(\log x)^n = (e^{-t})^a(-t)^n = (-t)^n e^{-at} = (-1)^n t^n e^{-at} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow \infty).$$

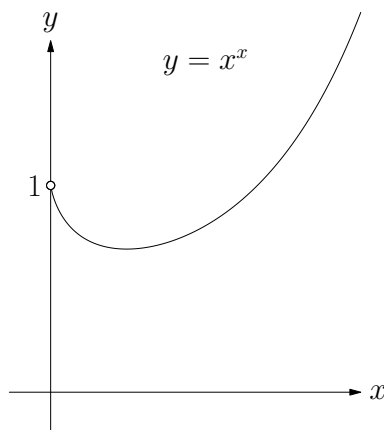
(3) $y = \frac{1}{x}$ とおくと $x \rightarrow \infty$ のとき $y \rightarrow +0$ であり (2) から

$$x^{-a}(\log x)^n = y^a(-\log y)^n = (-1)^n y^a(\log y)^n \rightarrow 0.$$



□

例 6.4 極限 $\lim_{x \rightarrow +0} x^x$ を求めよう. 命題 6.3 の (2) より $x \rightarrow +0$ のとき $\log x^x = x \log x$ は 0 に収束する. これと指数関数が連続であることから, $x \rightarrow +0$ のとき $x^x = \exp(x \log x)$ は $e^0 = 1$ に収束する.



6.2 最大最小問題

与えられた関数のある区間における最大値 (maximum) と最小値 (minimum) を求めることは, 理論上も応用上も重要である. 関数 f が有界閉区間 I で連続ならば Weierstrass の定理により f は I で最大値と最小値を持つ. さらに f が I° で微分可能であれば, f の増減を調べることで最大値と最小値を求めることができる.

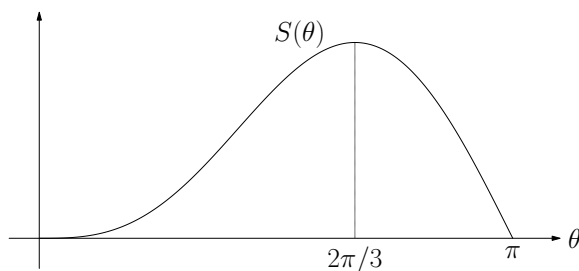
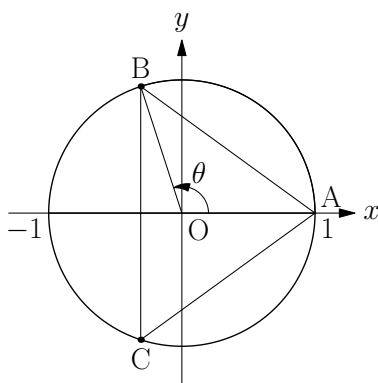
定理 6.3 関数 f が有界閉区間 $I = [a, b]$ で連続で $I^\circ = (a, b)$ で微分可能とする. f が $x_0 \in I$ で最大値または最小値をとったとすると, $x_0 = a$ であるかまたは $x_0 = b$ であるか, または $a < x_0 < b$ かつ $f'(x_0) = 0$ である.

証明: $a < x_0 < b$ と仮定して $f'(x_0) = 0$ であることを示せばよい. f は x_0 で最大値をとると仮定する (最小値のときも同様). $f(x) - f(x_0) \leq 0$ より

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 - 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \geq 0, \quad f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0 + 0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \leq 0$$

よって $f'(x_0) = 0$ でなければならない. $\square$

例 6.5 3 頂点が単位円周上にあるような 2 等辺三角形で面積が最大のものを求めよう. 頂点 A, B, C の座標を $A(1, 0)$, $B(\cos \theta, \sin \theta)$, $C(\cos \theta, -\sin \theta)$ として一般性を失わない. ただし $0 < \theta < \pi$ である.



このとき三角形 ABC の面積 $S(\theta)$ は

$$S(\theta) = (1 - \cos \theta) \sin \theta = \sin \theta - \sin \theta \cos \theta$$

である. ここで θ の動く範囲を有界閉区間 $I = [0, \pi]$ とすると, $S(\theta)$ は I で連続であるから, Weierstrass の定理によって f は I において最大値をとる. $S(0) = S(\pi) = 0$ であり, $0 < \theta < \pi$ のときは $S(\theta) > 0$ であるから, $S(\theta)$ が最大となるような $\theta = \theta_0$ は開区間 $I^\circ = (0, \pi)$ に属して, 定理 6.3 により $S'(\theta_0) = 0$ を満たさなければならない.

$$S'(\theta) = \cos \theta + \sin^2 \theta - \cos^2 \theta = -2 \cos^2 \theta + \cos \theta + 1 = -(2 \cos \theta + 1)(\cos \theta - 1)$$

より, $S'(\theta_0) = 0$ を満たす $\theta_0 \in (0, \pi)$ は $\theta_0 = \frac{2\pi}{3}$ のみである. 以上により $S(\theta)$ は $\theta = \frac{2\pi}{3}$, すなわち, 三角形 ABC が正三角形のときに最大となることがわかった. (もちろん $S(\theta)$ の増減を調べても良いが, I° における停留点が一つしかないことから, そこで最大であることが結論できた.)

6.3 関数の凹凸

定義 6.3 f を区間 I で定義された関数とする.

- (1) f (のグラフ) が I で下に凸とは, $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ のとき, $(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分が, 両端点以外では, $y = f(x)$ のグラフの上側にある, すなわち, $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ ならば

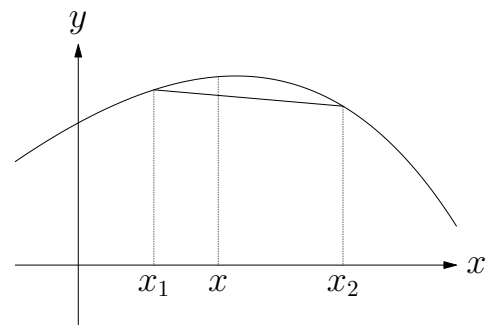
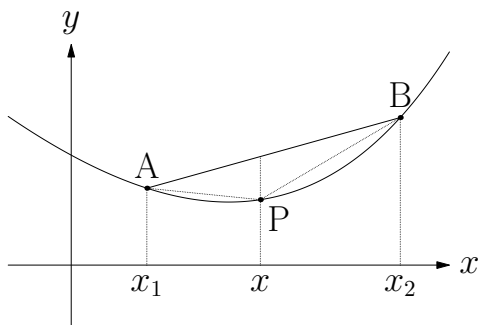
$$f(x) < \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \quad (x_1 < \forall x < x_2)$$

が成立することである.

- (2) f (のグラフ) が I で上に凸とは, $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ のとき, $(x_1, f(x_1))$ と $(x_2, f(x_2))$ を結ぶ線分が, 両端点以外では, $y = f(x)$ のグラフの下側にある, すなわち, $x_1, x_2 \in I$ かつ $x_1 < x_2$ ならば

$$f(x) > \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1}(x - x_1) + f(x_1) \quad (x_1 < \forall x < x_2)$$

が成立することである.



- (3) $x_0 \in I$ とする. ある正の実数 ε があって, f は区間 $[x_0 - \varepsilon, x_0]$ で下に (または上に) 凸であり, 区間 $[x_0, x_0 + \varepsilon]$ では上に (または下に) 凸であるとき, $(x_0, f(x_0))$ を f の変曲点という.

定理 6.4 関数 f は区間 I で連続で, 区間 I° で 2 回微分可能とする.

- (1) $f''(x) > 0$ がすべての $x \in I^\circ$ について成り立てば, f は I で下に凸である.
- (2) $f''(x) < 0$ がすべての $x \in I^\circ$ について成り立てば, f は I で上に凸である.

証明: $f''(x) > 0$ ($x_1 < \forall x < x_2$) を仮定する. $x_1 < x < x_2$ として $A(x_1, f(x_1))$, $B(x_2, f(x_2))$, $P(x, f(x))$ とおく. 平均値の定理により

$$\begin{aligned} f(x) - f(x_1) &= (x - x_1)f'(c_1) & (x_1 < \exists c_1 < x), \\ f(x_2) - f(x) &= (x_2 - x)f'(c_2) & (x < \exists c_2 < x_2) \end{aligned}$$

が成立する．定理 6.1 を $f'(x)$ に適用すれば $f'(x)$ は I° で単調増加であることがわかるから， $c_1, c_2 \in I^\circ$ かつ $c_1 < c_2$ より $f'(c_1) < f'(c_2)$ となる．よって

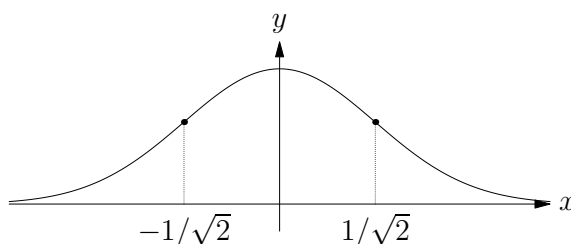
$$\begin{aligned} f(x_2) - f(x_1) &= (f(x_2) - f(x)) + (f(x) - f(x_1)) = (x_2 - x)f'(c_2) + (x - x_1)f'(c_1) \\ &> (x_2 - x)f'(c_1) + (x - x_1)f'(c_1) = (x_2 - x_1)f'(c_1) \end{aligned}$$

以上により

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} > f'(c_1) = \frac{f(x) - f(x_1)}{x - x_1}$$

従って線分 AB の傾きの方が線分 AP の傾きよりも大きいから，点 P は線分 AB の下側にある．よって f は I で下に凸である．(2) も同様に示される．□

例 6.6 関数 $f(x) = e^{-x^2}$ を $\mathbb{R}$ で考える． $f'(x) = -2xe^{-x^2}$ ， $f''(x) = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}$ ．よって f は区間 $(-\infty, -\frac{1}{\sqrt{2}}]$ と区間 $[\frac{1}{\sqrt{2}}, \infty)$ で下に凸，区間 $[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}]$ で上に凸である．従って変曲点は $(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ と $(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{e}})$ である．



関数の増減と凹凸（さらに次節で説明する漸近線も）を調べることにより関数のグラフの概形を描くことができる．その際，次のような特別な性質を利用できる場合もある．

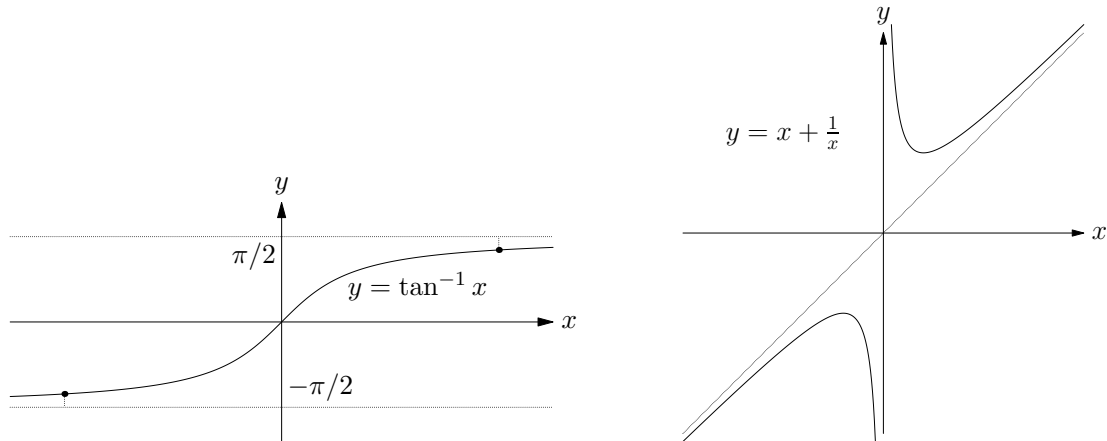
定義 6.4 関数 $f(x)$ の定義域 D は原点について対称，すなわち $x \in D$ ならば $-x \in D$ であるとする．

- (1) $f(x)$ が**偶関数**とは， $f(-x) = f(x)$ がすべての $x \in D$ について成立することである．このとき $y = f(x)$ のグラフは y 軸に関して対称である．
- (2) $f(x)$ が**奇関数**とは， $f(-x) = -f(x)$ がすべての $x \in D$ について成立することである．このとき $y = f(x)$ のグラフは原点 $(0, 0)$ に関して対称である．

6.4 漸近線

$y = f(x)$ のグラフ上の点 (x, y) が， $|x| \rightarrow \infty$ または $|y| \rightarrow \infty$ とすると，ある直線に限りなく近づくとき，この直線を $y = f(x)$ の**漸近線** (asymptote) という．

例 6.7 $y = f(x) = \tan^{-1} x$ のグラフを考えよう. $x \rightarrow \infty$ のとき, このグラフ上の点 $(x, y) = (x, \tan^{-1} x)$ は点 $(x, \frac{\pi}{2})$ に限りなく近づくから, 直線 $y = \frac{\pi}{2}$ は ($x \rightarrow \infty$ のときの) 漸近線である. また, $x \rightarrow -\infty$ のとき, 点 $(x, y) = (x, \tan^{-1} x)$ は点 $(x, -\frac{\pi}{2})$ に限りなく近づくから, 直線 $y = -\frac{\pi}{2}$ は ($x \rightarrow -\infty$ のときの) 漸近線である.



例 6.8 $y = x + \frac{1}{x}$ のグラフ上の点 (x, y) は, $x \rightarrow 0$ のとき $(0, y)$ に限りなく近づき, $x \rightarrow +0$ ならば $y \rightarrow \infty$, $x \rightarrow -0$ ならば $y \rightarrow -\infty$ となるから, y 軸 $x = 0$ は漸近線である. また $x \rightarrow \infty$ および $x \rightarrow -\infty$ のとき $y = x + \frac{1}{x}$ のグラフ上の点 (x, y) は (x, x) に限りなく近づくから, 直線 $y = x$ は漸近線である.

漸近線の求め方

(1) $x \rightarrow a + 0$ または $x \rightarrow a - 0$ のとき $f(x) \rightarrow \infty$ または $f(x) \rightarrow -\infty$ ならば, 直線 $x = a$ は $y = f(x)$ の漸近線である.

(2) $x \rightarrow \infty$ または $x \rightarrow -\infty$ のとき $\frac{f(x)}{x}$ の極限 a と $f(x) - ax$ の極限 b が存在すれば,

$\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ または $\lim_{x \rightarrow -\infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ が成立するから,

直線 $y = ax + b$ は $y = f(x)$ の漸近線である.

実際, もし $y = ax + b$ が $y = f(x)$ の漸近線だとすると, $\lim_{x \rightarrow \infty} \{f(x) - (ax + b)\} = 0$ より $\lim_{x \rightarrow \infty} \left\{ \frac{f(x)}{x} - \frac{ax + b}{x} \right\} = 0$ となるから, $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax + b}{x} = a$ でなければならない.

例 6.9 $f(x) = x \tan^{-1} x$ の漸近線を求めよう. $f(x)$ は $\mathbb{R}$ で連続だから $x = a$ の形の漸近線はない.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow \infty} \tan^{-1} x = \frac{\pi}{2}, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \tan^{-1} x = -\frac{\pi}{2}$$

より, $y = f(x)$ の漸近線は, もしあれば, 傾きが $\pm \frac{\pi}{2}$ である.

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(f(x) - \frac{\pi}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow \infty} x \left(\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2} \right)$$

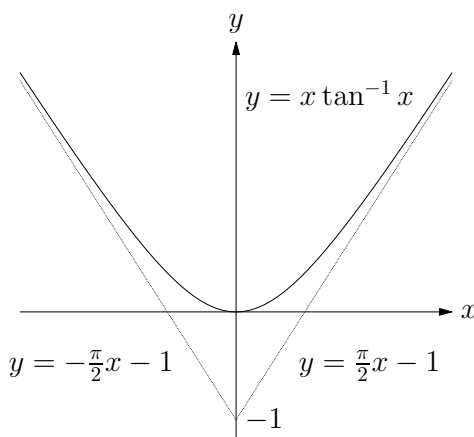
この極限を求めるため $t = \frac{\pi}{2} - \tan^{-1} x$ とおくと, $x \rightarrow \infty$ のとき $t \rightarrow +0$ であり,

$$x \left(\tan^{-1} x - \frac{\pi}{2} \right) = -t \tan \left(\frac{\pi}{2} - t \right) = -t \frac{\cos t}{\sin t} \rightarrow -1$$

となる. 従って $y = \frac{\pi}{2}x - 1$ が $x \rightarrow \infty$ のときの漸近線である. また $f(-x) = f(x)$ に注意すれば,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(x) + \frac{\pi}{2}x \right) = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(f(-x) - \frac{\pi}{2}(-x) \right) = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(f(t) - \frac{\pi}{2}t \right) = -1$$

となる. 従って $y = -\frac{\pi}{2}x - 1$ が $x \rightarrow -\infty$ のときの漸近線である.



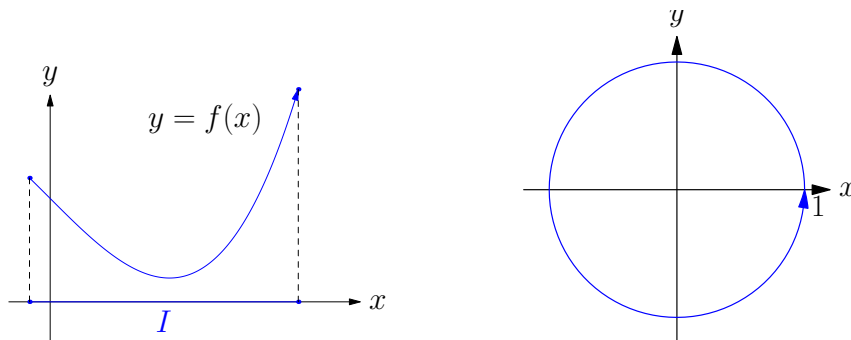
6.5 曲線の媒介変数表示と陰関数表示

t を独立変数として, $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ を区間 I で連続で, 区間 I° で微分可能な関数とする. 実数 t が区間 I を動くとき, xy 平面における動点 $P(\varphi(t), \psi(t))$ の軌跡のことを,

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t) \quad (t \in I) \tag{5}$$

で定義される**曲線** (curve) といい, この式をこの曲線の**媒介変数 (パラメータ) 表示**という. t は**媒介変数 (パラメータ)** と呼ばれる. I が有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ のとき, 点 $(\varphi(\alpha), \psi(\alpha))$ を始点, 点 $(\varphi(\beta), \psi(\beta))$ を終点という. 始点と終点が同一の点であるような曲線のことを**閉曲線**という.

今まで考察してきた関数 $y = f(x)$ ($x \in I$) のグラフは, 媒介変数表示 $x = t, y = f(t)$ ($t \in I$) により定義される曲線とみなすことができる.



たとえば、媒介変数表示

$$x = \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

は単位円 $x^2 + y^2 = 1$ を表す。始点と終点は共に $(1, 0)$ である。 $x^2 + y^2 - 1 = 0$ のように x と y の関係式で曲線を表すことを**陰関数表示**という。これを y について解けば、単位円は

$$y = \sqrt{1 - x^2}, \quad y = -\sqrt{1 - x^2} \quad (-1 \leq x \leq 1)$$

という2つの関数（それぞれ円の上半分と下半分を表す）のグラフの和集合となる。このように y を x の関数として表すことを曲線の**陽関数表示**という。媒介変数表示や陰関数表示から陽関数表示を具体的に求めることは一般には困難である。そこで、陽関数表示を用いずに媒介変数表示や陰関数表示から曲線の接線を求めることを考えよう。

媒介変数表示 (5) において $t_0 \in I$ を固定して点 $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ を P とする。 $t \rightarrow t_0$ とすると点 $Q(\varphi(t), \psi(t))$ は点 P に限りなく近づく。 $Q \neq P$ ならば、 P と Q を通る直線は

$$(\psi(t) - \psi(t_0))(x - \varphi(t_0)) = (\varphi(t) - \varphi(t_0))(y - \psi(t_0))$$

である。（実際 P と Q の座標を代入すれば、この直線が P と Q を通ることがわかる。）この両辺を $t - t_0$ で割って $t \rightarrow t_0$ とすれば、

$$\psi'(t_0)(x - \varphi(t_0)) = \varphi'(t_0)(y - \psi(t_0)) \quad (6)$$

となる。 $(\varphi(t_0), \psi(t_0)) \neq (0, 0)$ ならば、これは曲線 (5) の点 P における接線を表している。

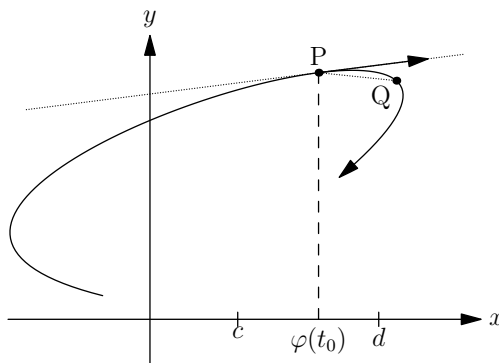
特に $\varphi'(t_0) \neq 0$ と仮定すると、 $\varepsilon > 0$ を十分小さくとれば、 $\varphi(t)$ は区間 $(t_0 - \varepsilon, t_0 + \varepsilon)$ で単調である。たとえば $\varphi'(t_0) > 0$ ならばここで単調増加であり、 $c = \varphi(t_0 - \varepsilon)$, $d = \varphi(t_0 + \varepsilon)$ とすれば、区間 (c, d) において $x = \varphi(t)$ の逆関数 $t = \varphi^{-1}(x)$ が定まる。従って

$$y = \psi(t) = \psi(\varphi^{-1}(x)) \quad (c < x < d)$$

という陽関数表示が得られる。合成関数と逆関数の微分の公式を用いると

$$\frac{dy}{dx} = \psi'(\varphi^{-1}(x)) \frac{d}{dx} \{\varphi^{-1}(x)\} = \frac{\psi'(\varphi^{-1}(x))}{\varphi'(\varphi^{-1}(x))} = \frac{\psi'(t)}{\varphi'(t)}$$

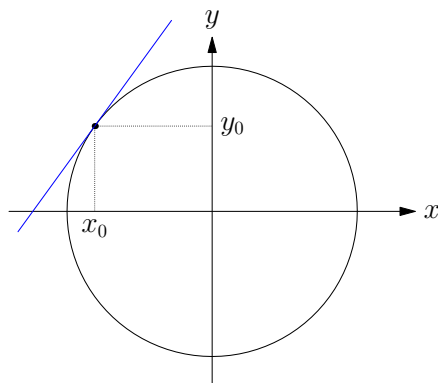
を得る。これからも接線の式 (6) が導かれる。なお、 $\varphi'(t_0) = \psi'(t_0) = 0$ のときは、一般には点 P における接線を考えることはできない。このような点を（与えられた媒介変数表示に関する）**特異点**という。



たとえば，単位円上の点 $(x_0, y_0) = (\cos t_0, \sin t_0)$ における接線の方程式は

$$\cos t_0 \cdot (x - \cos t_0) = -\sin t_0 \cdot (y - \sin t_0)$$

すなわち $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$ である． $x_0^2 + y_0^2 = 1$ に注意すれば， $x_0x + y_0y = 1$ と表すこともできる．



接線は媒介変数表示を用いずに陰関数表示から直接導くこともできる．実際， y を x の関数とみなして $x^2 + y^2 = 1$ の両辺を x で微分すると，

$$2x + 2y \frac{dy}{dx} = 0$$

よって $y_0 \neq 0$ すなわち $(x_0, y_0) \neq (\pm 1, 0)$ ならば， (x_0, y_0) における接線の傾きは $-x_0/y_0$ であることがわかるから，接線の方程式は $x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) = 0$ ，すなわち $x_0x + y_0y = 1$ である． $(\pm 1, 0)$ における接線をこの方法で求めるには x を y の関数とみなして x を y で微分すればよい．媒介変数を用いれば場合分けは不要である．

更に2次導関数を求めてみよう． $x + y \frac{dy}{dx} = 0$ を x で微分すると， $y \neq 0$ のとき

$$1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 + y \frac{d^2y}{dx^2} = 0 \quad \text{よって} \quad \frac{d^2y}{dx^2} = -\frac{1}{y} \left\{ 1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2 \right\} = -\frac{1}{y} \left(1 + \frac{x^2}{y^2} \right) = -\frac{1}{y^3}$$

となる（最後に $x^2 + y^2 = 1$ を用いた）．これから円は $y \geq 0$ の部分は上に凸， $y \leq 0$ の部分は下に凸であることが確認できる．

さて、媒介変数表示された曲線の接線の方程式(6)から、接線はベクトル $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ の方向であることがわかる。すなわち、 $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ は点 $(\varphi(t_0), \psi(t_0))$ における曲線の接ベクトル（接線方向のベクトル）である。

特に t が時刻を表しているときは、 $(\varphi'(t_0), \psi'(t_0))$ を $t = t_0$ における**速度ベクトル**といい、 $(\varphi''(t_0), \psi''(t_0))$ を $t = t_0$ における**加速度ベクトル**という。たとえば、 a と ω を正の定数とすると、媒介変数表示

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t \quad (t \in \mathbb{R})$$

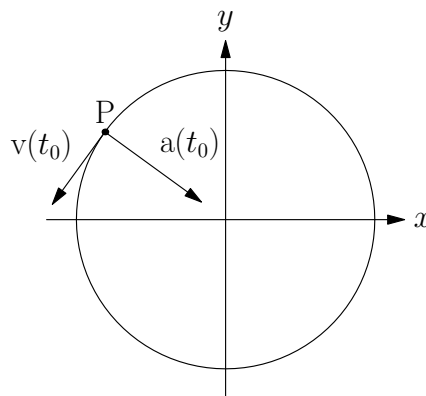
は円 $x^2 + y^2 = a^2$ の上を単位時間あたり角度 ω の速さで運動している点を表している。 ω のことを**角速度**と呼ぶ。速度ベクトルは

$$\mathbf{v}(t_0) = (-a\omega \sin \omega t_0, a\omega \cos \omega t_0) = a\omega(-\sin \omega t_0, \cos \omega t_0)$$

であり、これは点 $(a \cos t_0, a \sin t_0)$ での接線方向の大きさ $a\omega$ のベクトルである。加速度ベクトルは

$$\mathbf{a}(t_0) = (-a\omega^2 \cos \omega t_0, -a\omega^2 \sin \omega t_0) = -a\omega^2(\cos \omega t_0, \sin \omega t_0)$$

であり、これは点 $(a \cos t_0, a \sin t_0)$ から中心 $(0, 0)$ へ向かう大きさ $a\omega^2$ のベクトルである。Newton の運動方程式（力 = 質量 $\times$ 加速度）によれば、このとき点（質点という）には中心に向かって大きさ $ma\omega^2$ の力が働いている（ m は質点の質量である）。



例 6.10 (楕円) a と b を正の実数とする。媒介変数表示

$$x = \varphi(t) = a \cos t, \quad y = \psi(t) = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi) \quad (7)$$

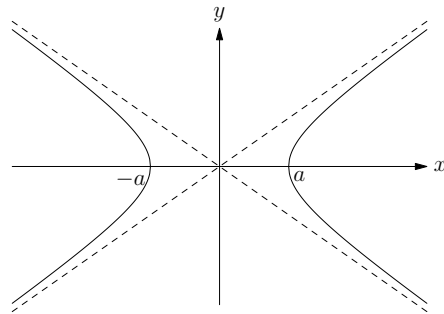
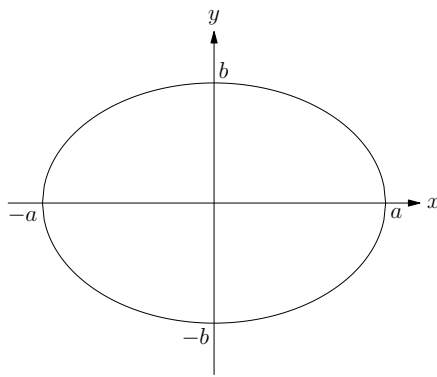
で定義される閉曲線は**楕円**(ellipse)とよばれる。 t が 0 から 2π まで動くとき、点 $(a \cos t, b \sin t)$ は点 $(a, 0)$ から出発して、楕円上を正の向き（反時計まわり）に1周して点 $(a, 0)$ に戻る。楕円上の点 $(x, y) = (a \cos t, b \sin t)$ は

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

をみtas. これが楕円の陰関数表示である. 点 $(x_0, y_0) = (a \cos t_0, b \sin t_0)$ における接線の方程式は

$$b \cos t_0 \cdot (x - x_0) = -a \sin t_0 \cdot (y - y_0) \quad \text{すなわち} \quad \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} + \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0$$

である. これはさらに $\frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1$ と表すこともできる.



例 6.11 (双曲線) a, b を正の実数として, 陰関数表示

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \tag{8}$$

で定義される曲線を**双曲線** (hyperbola) という. y について解けば

$$y = \pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \quad (|x| \geq a)$$

となるから, 双曲線は $x \leq -a$ の部分と $x \geq a$ の部分の2つの曲線 (枝という) からなる. y を x の関数とみなして (8) の両辺を x で微分すると, $y \neq 0$ のとき

$$\frac{2x}{a^2} - \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{すなわち} \quad \frac{dy}{dx} = \frac{b^2 x}{a^2 y}$$

よって双曲線上の点 (x_0, y_0) における接線の方程式は

$$y - y_0 = \frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0) \quad \text{すなわち} \quad \frac{x_0(x - x_0)}{a^2} - \frac{y_0(y - y_0)}{b^2} = 0 \quad \text{または} \quad \frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1$$

である. $y_0 = 0$ のときは x を y の関数として微分すれば, 接線は $x = x_0$ となることからわかるので, 上の式は $y_0 = 0$ のときも成立する. また, $x \rightarrow \infty$ のとき

$$\pm \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2} \mp \frac{b}{a} x = \pm \frac{b}{a} (\sqrt{x^2 - a^2} - x) = \pm \frac{b}{a} \frac{-a^2}{\sqrt{x^2 - a^2} + x} \rightarrow 0$$

となることと, 双曲線が y 軸について対称なことから, $y = \pm \frac{b}{a} x$ は $x \rightarrow \pm\infty$ のときの漸近線であることがわかる.

例 6.12 極座標で $r = \sin 2\theta$ ($0 \leq \theta \leq 2\pi$) と表される曲線を考えよう. 極座標が (r, θ) の点は直交座標では $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ を表すので, $r < 0$ の場合も意味を持つことに注意する. この曲線を媒介変数表示すると

$$x = r \cos \theta = \sin 2\theta \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = \sin 2\theta \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi)$$

となる. $x^2 + y^2 = r^2 = \sin^2 2\theta = 4 \cos^2 \theta \sin^2 \theta$ より陰関数表示

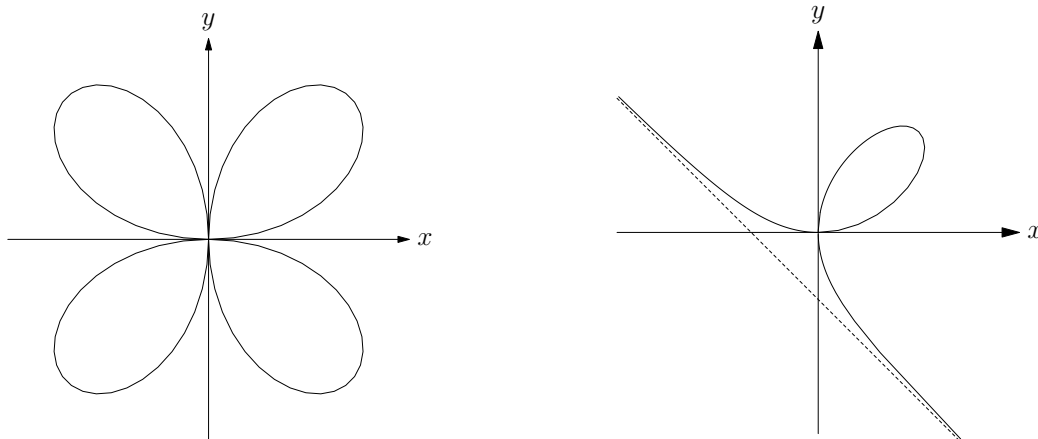
$$(x^2 + y^2)^3 = r^4(x^2 + y^2) = 4(r \cos \theta)^2(r \sin \theta)^2 = 4x^2y^2$$

を得る.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{d\theta} &= 2 \cos 2\theta \cos \theta - \sin 2\theta \sin \theta = 2 \cos 2\theta \cos \theta - 2 \cos \theta \sin^2 \theta = (3 \cos 2\theta - 1) \cos \theta, \\ \frac{dy}{d\theta} &= 2 \cos 2\theta \sin \theta + \sin 2\theta \cos \theta = 2 \cos 2\theta \sin \theta + 2 \cos^2 \theta \sin \theta = (3 \cos 2\theta + 1) \sin \theta \end{aligned}$$

より点 $(x_0, y_0) = (\sin 2\theta_0 \cos \theta_0, \sin 2\theta_0 \sin \theta_0)$ における接線の方程式は

$$(x - x_0)(3 \cos 2\theta_0 + 1) \sin \theta_0 = (y - y_0)(3 \cos 2\theta_0 - 1) \cos \theta_0$$



例 6.13 媒介変数表示

$$x = \varphi(t) = \frac{3t}{1+t^3}, \quad y = \psi(t) = \frac{3t^2}{1+t^3} \quad (t \in \mathbb{R}, t \neq -1)$$

で定義される曲線を考える. 正確には, 媒介変数 t が区間 $(-\infty, -1)$ を動くときの曲線と区間 $(-1, \infty)$ を動くときの曲線の和集合である. 点 (x, y) は, $t > 0$ のときは第 I 象限, $-1 < t < 0$ のときは第 II 象限, $t < -1$ のときは第 IV 象限にあることがわかる.

$y/x = t$ に注意すると,

$$x = \frac{3y}{x} \left(1 + \frac{y^3}{x^3}\right)^{-1} = \frac{3x^2y}{x^3 + y^3}$$

より $x \neq 0$ ならば $x^3 + y^3 = 3xy$ が成立する. $x = 0$ のときは $t = 0$ となるから $y = 0$ であり, このときも $x^3 + y^3 = 3xy$ は成立する. 従って陰関数表示は $x^3 + y^3 - 3xy = 0$ である. (これからこの曲線は直線 $y = x$ に関して対称であることがわかる.)

漸近線を求めよう．曲線上の点 (x, y) が原点から限りなく離れる ($|x| \rightarrow \infty$ または $|y| \rightarrow \infty$ となる) のは, $t \rightarrow -1$ のときのみである．実際, $t \rightarrow -1+0$ のときは $x \rightarrow -\infty$, $t \rightarrow -1-0$ のときは $x \rightarrow \infty$ となる．なお, $t \rightarrow \pm\infty$ のときは (x, y) は原点に限りなく近づく．

$t \rightarrow -1$ のとき $\frac{y}{x} = t \rightarrow -1$ かつ

$$y + x = \frac{3t(1+t)}{1+t^3} = \frac{3t}{1-t+t^2} \rightarrow -1$$

となるから, $y = -x - 1$ すなわち $x + y = -1$ が漸近線である．また,

$$\varphi'(t) = \frac{3(1-2t^3)}{(1+t^3)^2}, \quad \psi'(t) = \frac{3t(2-t^3)}{(1+t^3)^2}$$

より $(x_0, y_0) = (\varphi(t_0), \psi(t_0))$ における接線の方程式は

$$t_0(2-t_0^3)(x-\varphi(t_0)) = (1-2t_0^3)(y-\psi(t_0))$$

である．

例 6.14 (ベジエ (Bézier) 曲線) $x_1, x_2, x_3, x_4, y_1, y_2, y_3, y_4$ を実数の定数として媒介変数表示

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = (1-t)^3 \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \quad (0 \leq t \leq 1)$$

で定義される曲線を (3 次) **ベジエ (Bézier) 曲線** という．始点は $(\varphi(0), \psi(0)) = (x_1, y_1)$, 終点は $(\varphi(1), \psi(1)) = (x_4, y_4)$ である．この媒介変数表示はすべての $t \in \mathbb{R}$ で定義されるが, そのうち $0 \leq t \leq 1$ の部分に着目する．

始点 (x_1, y_1) における接ベクトルは

$$(\varphi'(0), \psi'(0)) = -3(x_1, y_1) + 3(x_2, y_2) = 3(x_2 - x_1, y_2 - y_1)$$

であり, 終点 (x_4, y_4) における接ベクトルは

$$(\varphi'(1), \psi'(1)) = -3(x_3, y_3) + 3(x_4, y_4) = 3(x_4 - x_3, y_4 - y_3)$$

である．また,

$$(1-t)^3 + 3t(1-t)^2 + 3t^2(1-t) + t^3 = (1-t+t)^3 = 1$$

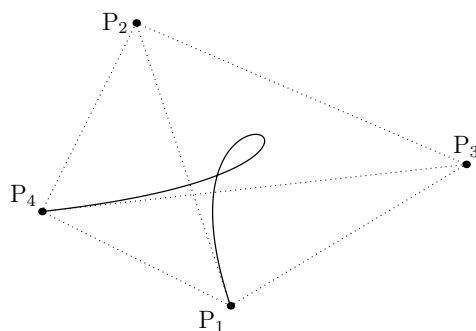
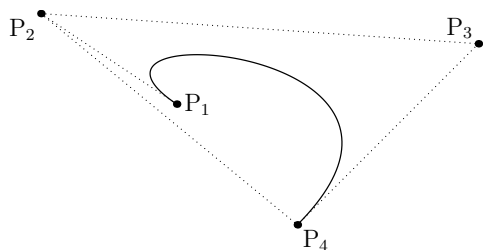
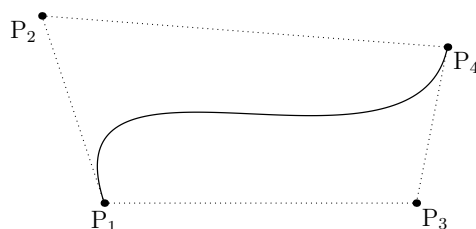
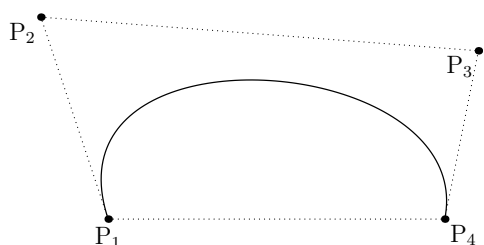
に注意すると, Bézier 曲線は 4 点 $P_k(x_k, y_k)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) の凸包 (この 4 点を含むような最小の四角形または三角形または線分または 1 点のこと) に含まれることがわかる．実際, 上の式から

$$\begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + 3t(1-t)^2 \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ y_2 - y_1 \end{pmatrix} + 3t^2(1-t) \begin{pmatrix} x_3 - x_1 \\ y_3 - y_1 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} x_4 - x_1 \\ y_4 - y_1 \end{pmatrix}$$

となることがわかるから、平行移動により最初から P_1 が原点である ($x_1 = y_1 = 0$) としてよい. このとき $t_1 = (1-t)^3$, $t_2 = 3t(1-t)^2$, $t_3 = 3t^2(1-t)$, $t_4 = t^3$ とおくと, $0 \leq t \leq 1$ のとき $t_1, t_2, t_3, t_4 \geq 0$ かつ $t_2 + t_3 + t_4 = 1 - t_1 \leq 1$ より

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \psi(t) \end{pmatrix} &= t_2 \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} + t_4 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \\ &= (t_2 + t_3) \left\{ \frac{t_2}{t_2 + t_3} \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} + \frac{t_3}{t_2 + t_3} \begin{pmatrix} x_3 \\ y_3 \end{pmatrix} \right\} + t_4 \begin{pmatrix} x_4 \\ y_4 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

は点 $P_1 = O, P_2, P_3, P_4$ の凸包に含まれる. Bézier 曲線はコンピュータグラフィックスで広く使われている (Bézier は自動車の車体のデザインのためにこの曲線を考案した).



7 不定積分

7.1 原始関数と不定積分

開区間 I で定義された関数 $f(x)$ に対して, I で定義されたもう一つの関数 $F(x)$ が $F'(x) = f(x)$ を満たすとき (すなわち $F(x)$ の導関数が $f(x)$ であるとき), $F(x)$ を $f(x)$ の**原始関数** (primitive function, antiderivative) という. もし $G(x)$ も $f(x)$ の原始関数ならば,

$$(G(x) - F(x))' = G'(x) - F'(x) = f(x) - f(x) = 0$$

であるから, $G(x) - F(x)$ は定数関数, すなわち, ある実数 C が存在して, すべての $x \in I$ について $G(x) - F(x) = C$ が成立する. (定理 6.1 の (5) より. これは平均値の定理を用いて示された.) 従って $G(x) = F(x) + C$ となる. 逆に $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数であれば, $F(x) + C$ も $f(x)$ の原始関数となることは微分してみれば明らかである.

以上により, $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が一つ求まれば, $f(x)$ の任意の原始関数は, ある定数 C によって $F(x) + C$ と表されることがわかった. そこで $F(x) + C$ のことを $f(x)$ の**不定積分** (indefinite integral) と呼び

$$\int f(x) dx = F(x) + C$$

と表す. 定数 C を**積分定数** (constant of integration), 関数 $f(x)$ を**被積分関数** (integrand), 変数 x を**積分変数** (integration variable) という. 正確には, $f(x)$ の不定積分とは $f(x)$ の**原始関数の全体**であると考え. たとえば $(\frac{1}{2}x^2)' = x$, $(e^x)' = e^x$, $(\sin x)' = \cos x$ であるから,

$$\int x dx = \frac{1}{2}x^2 + C, \quad \int e^x dx = e^x + C, \quad \int \cos x dx = \sin x + C$$

となる. 不定積分を求めることを, 関数を積分するという. これは微分 (導関数を求めること) の逆の演算であるから, 微分の公式を逆に見れば積分の公式となる.

注意 7.1 $f(x)$ が連続関数ならば $f(x)$ の原始関数 $F(x)$ が必ず存在することが証明できる. しかし $F(x)$ が「存在」しても, $F(x)$ を具体的な (積分を用いない) 式で表すことができるとは限らない. たとえば e^{x^2} や $\frac{e^x}{x}$ の原始関数は存在するが, 既知の関数の組み合わせ (初等関数) では表されないことが証明できる. 以下では, 原始関数が具体的に求まる場合のみを扱う.

被積分関数が分数式の場合には簡略した記法として dx を分子に書くこともある.

不定積分の公式 (C は積分定数)

$$(1) \quad \int x^a dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} + C \quad (a \in \mathbb{R}, a \neq -1)$$

$$(2) \quad \int \frac{dx}{x} = \int \frac{1}{x} dx = \log |x| + C \quad (x \neq 0)$$

$$(3) \quad \int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} + C \quad (a > 0, a \neq 1)$$

$$(4) \quad \int \cos x dx = \sin x + C \quad (5) \quad \int \sin x dx = -\cos x + C$$

$$(6) \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C \quad (x \neq n\pi + \frac{\pi}{2} \quad (\forall n \in \mathbb{Z}))$$

$$(7) \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C = -\frac{\cos x}{\sin x} + C \quad (x \neq n\pi \quad (\forall n \in \mathbb{Z}))$$

$$(8) \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \sin^{-1} x + C \quad (-1 < x < 1)$$

$$(9) \quad \int \frac{dx}{x^2+1} = \tan^{-1} x + C$$

注意 7.2 上の公式で、定義域が1つの区間でなく、いくつかの互いに共通部分を持たない区間の和集合となっている場合には、積分定数 C はそれぞれの区間ごとに異なってもよい。たとえば $\frac{1}{x}$ と $\log|x|$ の定義域は $\mathbb{R} \setminus \{0\} = (-\infty, 0) \cup (0, \infty)$ であるから、 C_1 と C_2 を任意の定数として

$$\int \frac{dx}{x} = \log(-x) + C_1 \quad (x < 0 \text{ のとき}), \quad \int \frac{dx}{x} = \log x + C_2 \quad (x > 0 \text{ のとき})$$

とするのが正確である。(6) と (7) の場合は無限個の开区間の和集合となるので、それぞれの开区間ごとに定数 C_n が定まることになる。ただし、このように書くことは煩雑になるので、上の公式のように積分定数1つで簡潔に表すことにする。

命題 7.1 $f(x)$ と $g(x)$ を开区間 I で連続な関数、 k を実数の定数とすると、

$$\int \{f(x) \pm g(x)\} dx = \int f(x) dx \pm \int g(x) dx \quad (\text{複号同順}), \quad \int kf(x) dx = k \int f(x) dx$$

が成立する。(正確には、両辺が定数の差を除いて一致する、すなわち積分定数をうまくとれば両辺が一致する、という意味である。)

証明: $f(x)$ と $g(x)$ の原始関数 (の1つ) をそれぞれ $F(x)$, $G(x)$ とすると、微分の性質から

$$\{F(x) \pm G(x)\}' = F'(x) \pm G'(x) = f(x) \pm g(x), \quad \{kF(x)\}' = kF'(x) = kf(x)$$

が成立する。従って $F(x) \pm G(x)$ は $f(x) \pm g(x)$ の原始関数である。従って、上の左の式から C , C_1 , C_2 を積分定数として

$$\int \{(f(x) \pm g(x))\} dx = F(x) \pm G(x) + C, \quad \int f(x) dx = F(x) + C_1, \quad \int g(x) dx = G(x) + C_2$$

が成立する. この3式から

$$\begin{aligned}\int \{(f(x) \pm g(x))\} dx &= F(x) \pm G(x) + C \\ &= \int f(x) dx \pm \int g(x) dx + C - C_1 \mp C_2\end{aligned}$$

ここで右辺の定数 $C - C_1 \mp C_2$ は左辺の積分定数と一致するとしてよいので省略できる. (不定積分では原始関数に定数を足してできる関数全体を考えているので, 定数の差は, 不定積分の表す関数全体には影響しないから.) 同様に $kF(x)$ は $kf(x)$ の原始関数であるから,

$$\int kf(x) dx = kF(x) + C = k \int f(x) dx$$

としてよい. $\square$

例 7.1 公式と上の命題から

$$\int (e^x + 2 \sin x) dx = \int e^x dx + 2 \int \sin x dx = e^x - 2 \cos x + C$$

命題 7.2 $f(x)$ を开区間 I で定義された関数とする. $F(x)$ が $f(x)$ の原始関数ならば, a, b を定数, $a \neq 0$ とするとき, 区間 I において

$$\int f(ax + b) dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + C$$

が成立する.

証明: 合成関数の微分の公式により

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{1}{a} F(ax + b) \right) = \frac{1}{a} a F'(ax + b) = f(ax + b)$$

であるから. $\square$

例 7.2 e^x は e^x の原始関数, $\sin x$ は $\cos x$ の原始関数であるから, $a \neq 0$ であるような定数 a, b に対して

$$\int e^{ax+b} dx = \frac{1}{a} e^{ax+b}, \quad \int \cos(ax + b) dx = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$$

例 7.3 $a > 0$ とする. 公式 (8) と上の命題から, $-a < x < a$ のとき

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}} = \frac{1}{a} \int \frac{dx}{\sqrt{1 - \left(\frac{x}{a}\right)^2}} = \frac{1}{a} a \sin^{-1} \frac{x}{a} + C = \sin^{-1} \frac{x}{a} + C$$

また, 公式 (9) と上の命題から,

$$\int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a^2} \int \frac{dx}{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{1}{a^2} a \tan^{-1} \frac{x}{a} + C = \frac{1}{a} \tan^{-1} \frac{x}{a} + C$$

例 7.4 (自由落下) 物体を地面に垂直な方向に落としたり投げ上げたりしたときの運動を考察しよう. 鉛直下向きに x 軸をとり, 時刻 t における物体の x 座標を $f(t)$ で表す. このとき加速度 $f''(t)$ は一定の値 g である. g は重力加速度と呼ばれ, 長さの単位を m (メートル), 時間の単位を s (秒) とすると, ほぼ $g = 9.8m/s^2$ である. $f''(t) = g$ から $f'(t) = gt + C_1$ (C_1 は任意定数) となる. もう一度積分すると, C_2 を任意定数として

$$f(t) = \int f'(t) dt = \int (gt + C_1) dt = \frac{1}{2}gt^2 + C_1t + C_2$$

を得る. $C_2 = f(0)$ は物体の最初の位置, $C_1 = f'(0)$ は初期速度 (最初速度) を表している.

7.2 置換積分と部分積分

定理 7.1 (置換積分) $f(x)$ を开区間 I で定義された連続関数, $\varphi(t)$ を开区間 J で微分可能な関数で φ の値域は I に含まれるものとする, $x = \varphi(t)$, $t \in J$, $x \in I$ のとき,

$$\int f(x) dx = \int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int f(\varphi(t))\frac{dx}{dt} dt$$

が成立する.

すなわち x を $\varphi(t)$ で, dx を $\varphi'(t) dt = \frac{dx}{dt} dt$ で置き換えればよい. これを積分変数の変換という.

証明: $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする. 合成関数の微分の公式により

$$\frac{d}{dt}F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t))\varphi'(t) = f(\varphi(t))\varphi'(t)$$

が成立するから, $F(\varphi(t))$ は $f(\varphi(t))\varphi'(t)$ の原始関数である. 従って $x = \varphi(t)$ とすれば,

$$\int f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = F(\varphi(t)) + C = F(x) + C = \int f(x) dx$$

が成立する (積分変数に注意). $\square$

例 7.5 $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}+1}$ ($x > 0$) の不定積分を求めよう. $x = \varphi(t) = t^2$ とおくと, $t > 0$ のとき $\varphi(t) > 0$ だから $\varphi(t)$ は $f(x)$ の定義域に属して, $\sqrt{\varphi(t)} = \sqrt{t^2} = t$ となる. また, $\varphi'(t) = 2t$ であるから, 置換積分の公式により

$$\begin{aligned} \int f(x) dx &= \int \frac{dx}{\sqrt{x}+1} = \int \frac{2t}{t+1} dt = \int \left(2 - \frac{2}{t+1}\right) dt = 2 \int dt - 2 \int \frac{dt}{t+1} \\ &= 2t - 2 \log(t+1) + C = 2\sqrt{x} - 2 \log(\sqrt{x}+1) + C \end{aligned}$$

となる. 変数 t は途中の計算で使われ, 最終的な結果は変数 x の関数として表されている.

例 7.6 $f(x) = xe^{-x^2}$ の不定積分を求めよう. $t = x^2 = \varphi(x)$ において置換積分の公式を変数 x と t を入れ替えて適用すると, $\varphi'(x) = 2x$ より

$$\begin{aligned}\int f(x) dx &= \int \frac{1}{2}(2x)e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int e^{-\varphi(x)} \varphi'(x) dx = \frac{1}{2} \int e^{-t} dt \\ &= -\frac{1}{2}e^{-t} + C = -\frac{1}{2}e^{-x^2} + C\end{aligned}$$

あるいは, 変数の置き換えを省略して

$$\int f(x) dx = -\frac{1}{2} \int (-x^2)' e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} e^{-x^2} + C$$

としてもよい.

例 7.7 $f(x) = \tan x$ の不定積分を求めよう. $(\cos x)' = -\sin x$ より

$$\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = -\log |\cos x| + C$$

例 7.8 $f(x) = \sqrt{1-x^2}$ ($-1 < x < 1$) の不定積分を求めよう. $x = \sin t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$) とおくと, t の範囲から $\cos t > 0$ であることに注意して

$$\begin{aligned}\int \sqrt{1-x^2} dx &= \int \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2}t + \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2}t + \frac{1}{2} \sin t \cos t + C\end{aligned}$$

ここで $-1 < x < 1$ と $x = \sin t$ より $t = \sin^{-1} x$ となる. また, $\cos t > 0$ より $\cos t = \sqrt{1-\sin^2 t} = \sqrt{1-x^2}$ となる, 以上により

$$\int \sqrt{1-x^2} dx = \frac{1}{2} \sin^{-1} x + \frac{1}{2} x \sqrt{1-x^2} + C$$

定理 7.2 (部分積分) $f(x)$ と $g(x)$ は开区間 I で微分可能で $f'(x)$ と $g'(x)$ は連続であるとする. このとき,

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx$$

が区間 I において成立する.

証明: 積の微分の公式から $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ であるから, $f(x)g(x)$ は $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ の原始関数である. よって命題 7.1 を用いれば

$$\int f'(x)g(x) dx + \int f(x)g'(x) dx = \int \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx = f(x)g(x) + C$$

となる. 移項すると

$$\int f'(x)g(x) dx = f(x)g(x) - \int f(x)g'(x) dx + C$$

となるが, 両辺に積分定数が付くので, 右辺の定数 C は省略できる. $\square$

例 7.9 $f(x) = e^x$, $g(x) = x$ として部分積分の公式を用いると

$$\begin{aligned}\int x e^x dx &= \int x(e^x)' dx = x e^x - \int (x)' e^x dx \\ &= x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + C = (x-1)e^x + C\end{aligned}$$

例 7.10 $f(x) = -\cos x$, $g(x) = x$ として部分積分の公式を用いると

$$\begin{aligned}\int x \sin x dx &= \int x(-\cos x)' dx = -x \cos x - \int (x)'(-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C\end{aligned}$$

例 7.11 $\log |x|$ ($x \neq 0$) の不定積分を求めよう. $f(x) = x$, $g(x) = \log |x|$ として部分積分の公式を用いると

$$\begin{aligned}\int \log |x| dx &= \int 1 \cdot \log |x| dx = \int (x)' \log |x| dx \\ &= x \log |x| - \int x(\log |x|)' dx = x \log |x| - \int 1 dx = x \log |x| - x + C\end{aligned}$$

例 7.12 $e^x \cos x$ と $e^x \sin x$ の不定積分を求めよう. $I = \int e^x \cos x dx$, $J = \int e^x \sin x dx$ とおくと, 部分積分により

$$\begin{aligned}I &= \int e^x (\sin x)' dx = e^x \sin x - \int e^x \sin x dx = e^x \sin x - J, \\ J &= - \int e^x (\cos x)' dx = -e^x \cos x + \int e^x \cos x dx = -e^x \cos x + I\end{aligned}$$

この2式から $I = e^x \sin x - J = e^x \sin x + e^x \cos x - I$, 従って積分定数を加えて

$$I = \frac{1}{2} e^x (\sin x + \cos x) + C, \quad J = -e^x \cos x + I = \frac{1}{2} e^x (\sin x - \cos x) + C$$

を得る.

7.3 有理関数の不定積分

有理関数の不定積分について考察しよう. 有理関数とは分母と分子が多項式であるような分数式, すなわち有理式で表される関数のことである. 一般に多項式 $P(x)$ に対して, その次数を $\deg P(x)$ で表す. 数の分数 (有理数) のときの類推で, 分子の次数が分母の次数より小さな有理式のことを仮に真分数式と呼ぶことにする. 任意の有理式は多項式と真分数式の和で表すことができる. たとえば,

$$f(x) = \frac{x^3 - 2x^2 - 3x + 1}{x^2 + x + 1}$$

のとき、分母を分子で割り算すると、

$$x^3 - 2x^2 - 3x + 1 = (x - 3)(x^2 + x + 1) + (-x + 4)$$

となるので、

$$f(x) = x - 3 + \frac{-x + 4}{x^2 + x + 1}$$

と表せる．そこで以下では真分数式のみを扱う．まず、真分数式の分母が互いに素な多項式の積であるときに、それぞれの多項式を分母とするような真分数式の和で表されることを示そう．これを部分分数への分解という．

定義 7.1 (1) 多項式 $a(x)$ が多項式 $b(x)$ を割り切る、または $b(x)$ が $a(x)$ で割り切れるとは、ある多項式 $q(x)$ があって $b(x) = a(x)q(x)$ となることである．

(2) 2つの0でない多項式 $f(x)$ と $g(x)$ が**互いに素**であるとは、 $f(x)$ と $g(x)$ の両方を割り切るような1次以上の多項式が存在しないことである．

たとえば $x^2 - 1 = (x - 1)(x + 1)$ と $x^2 + 1$ は互いに素であるが、 $x^2 - 1$ と $(x - 1)^2$ は $x - 1$ が両方を割り切るので 互いに素ではない．

定理 7.3 (部分分数分解) $f(x)$ と $g(x)$ を互いに素な多項式として、 $f(x)$ の次数を m 、 $g(x)$ の次数を n とする．このとき、 $c(x)$ を次数が $m + n$ よりも小さな多項式とすると、

$$\frac{c(x)}{f(x)g(x)} = \frac{a(x)}{f(x)} + \frac{b(x)}{g(x)} \quad (9)$$

が成立するような多項式 $a(x)$ と $b(x)$ であって $\deg a(x) < m$ 、 $\deg b(x) < n$ を満たすものがただ一組存在する．

証明: 未定係数法を用いて証明する．各々の多項式を f_i, g_i, a_i, b_i, c_i を実数として、

$$\begin{aligned} f(x) &= f_0 + f_1x + \cdots + f_mx^m, & g(x) &= g_0 + g_1x + \cdots + g_nx^n, \\ a(x) &= a_0 + a_1x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1}, & b(x) &= b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}, \\ c(x) &= c_0 + c_1x + \cdots + c_{m+n-1}x^{m+n-1} \end{aligned}$$

とする．式 (9) は分母を払った式

$$c(x) = g(x)a(x) + f(x)b(x)$$

と同値である．この式の右辺を展開すると

$$\begin{aligned} g(x)a(x) + f(x)b(x) &= (g_0 + g_1x + \cdots + g_nx^n)(a_0 + a_1x + \cdots + a_{m-1}x^{m-1}) \\ &\quad + (f_0 + f_1x + \cdots + f_mx^m)(b_0 + b_1x + \cdots + b_{n-1}x^{n-1}) \\ &= (g_0a_0 + f_0b_0) + (g_1a_0 + g_0a_1 + f_1b_0 + f_0b_1)x + \cdots + (g_na_{m-1} + f_mb_{n-1})x^{m+n-1} \end{aligned}$$

これが $c(x)$ と等しくなればよいから、同類項を比較して

$$g_0a_0 + f_0b_0 = c_0, \quad g_1a_0 + g_0a_1 + f_1b_0 + f_0b_1 = c_1, \quad \cdots, \quad g_na_{m-1} + f_mb_{n-1} = c_{m+n-1}$$

となる．ここで f_i, g_i, c_i は既知で， a_i, b_i が未知数である．この連立1次方程式を行列とベクトルで表すと f_i, g_i から定まる $m+n$ 次正方行列 A があって，方程式 (9) は

$$A \begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ c_m \\ \vdots \\ c_{m+n-1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

と同値になる．行列 A の具体的な形は（以下の議論では必要はないが）

$$A = \begin{pmatrix} g_0 & & & f_0 & & \\ g_1 & g_0 & & f_1 & \ddots & \\ \vdots & g_1 & \ddots & \vdots & \ddots & f_0 \\ g_n & \vdots & \ddots & g_0 & \vdots & f_1 \\ & g_n & & g_1 & f_m & \vdots \\ & & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & & g_n & & f_m \end{pmatrix}$$

である．ここで第1列から第 m 列までは $g_0, g_1, \dots, g_n$ を一つずつ下にずらして縦に並べたものであり，第 $m+1$ 列から第 $m+n$ 列までは $f_0, f_1, \dots, f_m$ を一つずつ下にずらして縦に並べたものである．（空白の箇所の要素は0）．

たとえば $f(x) = f_0 + f_1x + f_2x^2$, $g(x) = g_0 + g_1x$ のときは， $m=2, n=1$ であり，

$$\begin{aligned} g(x)a(x) + f(x)b(x) &= (g_0 + g_1x)(a_0 + a_1x) + (f_0 + f_1x + f_2x^2)b_0 \\ &= (g_0a_0 + f_0b_0) + (g_1a_0 + g_0a_1 + f_1b_0)x + (g_1a_1 + f_2b_0)x^2 \end{aligned}$$

であるから，式 (10) は

$$\begin{pmatrix} g_0 & 0 & f_0 \\ g_1 & g_0 & f_1 \\ 0 & g_1 & f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_0 \\ c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$$

となる．

さて一般の場合に戻って，もし (10) 式の右辺がゼロベクトルであるとするとき， $c(x)$ の係数がすべて0であるから，多項式として $c(x) = 0$ となる．従って

$$a(x)g(x) + b(x)f(x) = 0 \quad \text{すなわち} \quad a(x)g(x) = -b(x)f(x)$$

となって $a(x)g(x)$ が (多項式として) $f(x)$ で割り切れることになるが, $f(x)$ と $g(x)$ は互いに素なので, $a(x)$ が $f(x)$ で割り切れなければならない. ところが $a(x)$ の次数は $f(x)$ の次数 m より小であるから, これは $a(x) = 0$ であることを意味する. すると $b(x)f(x) = 0$ より $b(x) = 0$ となる. 従って $a_0 = \cdots = a_{m-1} = b_0 = \cdots = b_{n-1} = 0$, すなわち (10) の左辺の縦ベクトルはゼロベクトルとなる. 以上により, 行列 A は正則行列 (階数が $m+n$) であることがわかった. 従って逆行列 A^{-1} が存在するから,

$$\begin{pmatrix} a_0 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ b_0 \\ \vdots \\ b_{n-1} \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} c_0 \\ \vdots \\ c_{m-1} \\ c_m \\ \vdots \\ c_{m+n-1} \end{pmatrix}$$

により, $a_0, \dots, a_{m-1}, b_0, \dots, b_{n-1}$, すなわち定理の条件を満たす $a(x)$ と $b(x)$ が一通りに定まる. $\square$

以上の証明により, $f(x)$ と $g(x)$ が互いに素であることと, 行列 A が正則行列であること, すなわち $\det A \neq 0$ であることが同値であることがわかる. 行列式 $\det A$ は $f(x)$ と $g(x)$ の終結式 (resultant) と呼ばれる.

例 7.13

$$\frac{1}{x^2-1} = \frac{1}{(x-1)(x+1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} - \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}, \quad \frac{x}{x^2-1} = \frac{1}{2} \frac{1}{x-1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x+1}.$$

例 7.14 $\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x-1)^2}$ を部分分数に分解しよう. $f(x) = x^2+1$ と $g(x) = (x-1)^2$ の次数は共に 2 だから上の定理により, a_0, a_1, b_0, b_1 を未知の定数として

$$\frac{x^3+1}{(x^2+1)(x-1)^2} = \frac{a_0+a_1x}{x^2+1} + \frac{b_0+b_1x}{(x-1)^2}$$

という形に分解できることがわかる. 両辺の分母を払うと

$$\begin{aligned} x^3+1 &= (a_0+a_1x)(x-1)^2 + (b_0+b_1x)(x^2+1) \\ &= (a_0+b_0) + (-2a_0+a_1+b_1)x + (a_0-2a_1+b_0)x^2 + (a_1+b_1)x^3. \end{aligned}$$

両辺の係数を比較して

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ b_0 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

拡大係数行列に行基本変形を施すと

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -2 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 4 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

よって $a_0 = a_1 = b_0 = b_1 = \frac{1}{2}$, すなわち

$$\frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{x + 1}{(x - 1)^2} = \frac{1}{2} \frac{x + 1}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \frac{1}{x - 1} + \frac{1}{(x - 1)^2}$$

を得る. この最後の式は分子 $x + 1$ を $x - 1$ で割り算した等式 $x + 1 = 1 \cdot (x - 1) + 2$ を用いて変形して導かれる. (不定積分の計算のためにはこの形が便利なので.)

有理関数の不定積分を求める計算手順 (アルゴリズム) は次のようになる.

- (1) 有理関数 $f(x)$ を互いに素な多項式 $a(x), b(x)$ を用いて $f(x) = \frac{b(x)}{a(x)}$ と表す.
- (2) $\deg b(x) \geq \deg a(x)$ のときは, $b(x)$ を $a(x)$ で割り, 商を $q(x)$, 余りを $r(x)$ とすれば, $b(x) = q(x)a(x) + r(x)$ より

$$\frac{b(x)}{a(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{a(x)} \quad (\deg r(x) < \deg a(x))$$

- (3) 多項式は実数の範囲で 1 次式と 2 次式の積に分解できることが知られている (代数学の基本定理). 従って c, α_i, p_i, q_i を実数として

$$a(x) = c(x - \alpha_1)^{m_1} \cdots (x - \alpha_k)^{m_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{n_1} \cdots (x^2 + p_rx + q_r)^{n_r}$$

という形に因数分解できる (実際の計算は不可能なことも多いが). ここで, $p_j^2 - 4q_j < 0$ ($1 \leq j \leq r$) としてよい. ($p_j^2 - 4q_j \geq 0$ ならば実数を係数とする 1 次式の積に分解できるから.) 部分分数分解を何回か行って

$$\begin{aligned} \frac{r(x)}{a(x)} &= \frac{a_{1,1}}{x - \alpha_1} + \cdots + \frac{a_{1,m_1}}{(x - \alpha_1)^{m_1}} + \cdots + \frac{a_{k,1}}{x - \alpha_k} + \cdots + \frac{a_{k,m_k}}{(x - \alpha_k)^{m_k}} \\ &+ \frac{b_{1,1}x + c_{1,1}}{x^2 + p_1x + q_1} + \cdots + \frac{b_{1,n_1}x + c_{1,n_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{n_1}} + \cdots \\ &+ \frac{b_{r,1}x + c_{r,1}}{x^2 + p_rx + q_r} + \cdots + \frac{b_{r,n_r}x + c_{r,n_r}}{(x^2 + p_rx + q_r)^{n_r}} \end{aligned}$$

という形で表せる. ただし a_{ij}, b_{ij}, c_{ij} は実数の定数.

$$(4) \int \frac{bx+c}{x^2+px+q} dx \quad (p^2-4q < 0) \text{ の計算法: 平方完成 } x^2+px+q \\ = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + q - \frac{p^2}{4} \text{ により, } \int \frac{b'x+c'}{x^2+q'} dx \quad (q' > 0) \text{ の積分に帰着する.}$$

$$(5) I_n = \int \frac{1}{(x^2+q)^n} dx \quad (q \text{ は正の実数, } n \text{ は } 2 \text{ 以上の自然数}) \text{ の計算法:}$$

$$I_n = \int \frac{x^2+q}{(x^2+q)^{n+1}} dx = \int \frac{x^2}{(x^2+q)^{n+1}} dx + qI_{n+1}$$

ここで, 部分積分を用いると

$$\int \frac{x^2}{(x^2+q)^{n+1}} dx = \int \left\{ -\frac{1}{2n} \frac{1}{(x^2+q)^n} \right\}' x dx = -\frac{1}{2n} \frac{x}{(x^2+q)^n} + \frac{1}{2n} I_n$$

より次の漸化式を得る:

$$I_{n+1} = \frac{1}{2nq} \left\{ (2n-1)I_n + \frac{x}{(x^2+q)^n} \right\} \quad (n \geq 1)$$

例 7.15

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2-1} &= \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{2} \int \frac{dx}{x+1} \\ &= \frac{1}{2} \log|x-1| - \frac{1}{2} \log|x+1| + C = \frac{1}{2} \log \left| \frac{x-1}{x+1} \right| + C \end{aligned}$$

例 7.16 この節の最初の割り算の計算例より

$$\begin{aligned} I &= \int \frac{x^3-2x^2-3x+1}{x^2+x+1} dx = \int (x-3) dx + \int \frac{-x+4}{x^2+x+1} dx \\ &= \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} \int \frac{(2x+1)-9}{x^2+x+1} dx = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + \frac{9}{2} \int \frac{dx}{x^2+x+1} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{x^2+x+1} &= \int \frac{dx}{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}} = \frac{4}{3} \int \frac{dx}{\left\{ \frac{2}{\sqrt{3}} \left(x+\frac{1}{2}\right) \right\}^2 + 1} \\ &= \frac{4}{3} \frac{\sqrt{3}}{2} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C \end{aligned}$$

より

$$I = \frac{1}{2}x^2 - 3x - \frac{1}{2} \log(x^2+x+1) + 3\sqrt{3} \tan^{-1} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C.$$

例 7.17 例 7.14 より

$$\begin{aligned}
 \int \frac{x^3 + 1}{(x^2 + 1)(x - 1)^2} dx &= \frac{1}{2} \int \frac{x + 1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{x + 1}{(x - 1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{(x - 1) + 2}{(x - 1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{2} \int \frac{x}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x - 1} dx + \int \frac{1}{(x - 1)^2} dx \\
 &= \frac{1}{4} \log(x^2 + 1) + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \log |x - 1| - \frac{1}{x - 1} + C.
 \end{aligned}$$

例 7.18 計算手順の (5) に従って $\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^2}$ を求めよう.

$$\int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \int \frac{x^2 + 1}{(x^2 + 1)^2} dx = \int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx + \int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx$$

ここで、部分積分により

$$\int \frac{x^2}{(x^2 + 1)^2} dx = -\frac{1}{2} \int \left(\frac{1}{x^2 + 1} \right)' x dx = -\frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx$$

これを上の式に代入して移項すると

$$\int \frac{1}{(x^2 + 1)^2} dx = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \int \frac{1}{x^2 + 1} dx = \frac{1}{2} \frac{x}{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \tan^{-1} x + C$$

無理関数や三角関数を含んだ式の不定積分を置換積分によって有理関数の不定積分に帰着できる場合がある.

例 7.19 $t = \sin x$ とおいて置換積分すると

$$\begin{aligned}
 \int \frac{1}{\cos x} dx &= \int \frac{\cos x}{\cos^2 x} dx = \int \frac{\cos x}{1 - \sin^2 x} dx = \int \frac{dt}{1 - t^2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t + 1} - \frac{1}{2} \int \frac{dt}{t - 1} \\
 &= \frac{1}{2} \log \left| \frac{t + 1}{t - 1} \right| + C = \frac{1}{2} \log \frac{1 + \sin x}{1 - \sin x} + C.
 \end{aligned}$$

例 7.20 $t = \tan x$ とおくと, $\frac{dt}{dx} = \frac{1}{\cos^2 x} = \tan^2 x + 1 = t^2 + 1$ より $dx = \frac{dt}{t^2 + 1}$, $\cos^2 x = \frac{1}{t^2 + 1}$ となるから,

$$\begin{aligned}
 \int \frac{dx}{\cos^2 x + 1} &= \int \frac{1}{\frac{1}{t^2 + 1} + 1} \frac{1}{t^2 + 1} dt = \int \frac{dt}{t^2 + 2} = \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right)^2 + 1} \\
 &= \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{t}{\sqrt{2}} \right) + C = \frac{1}{\sqrt{2}} \tan^{-1} \left(\frac{\tan x}{\sqrt{2}} \right) + C.
 \end{aligned}$$

例 7.21 $\int \sqrt{x^2 + 1} dx$ を求めよう. $x = \tan t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$) とおくと, $x^2 + 1 = \frac{1}{\cos^2 t}$ と $\cos t > 0$ より

$$I = \int \sqrt{x^2 + 1} dx = \int \frac{1}{\cos^3 t} dt = \int \frac{\cos t}{\cos^4 t} dt = \int \frac{\cos t}{(1 - \sin^2 t)^2} dt$$

$s = \sin t$ とおくと,

$$I = \int \frac{ds}{(1 - s^2)^2} = \int \frac{ds}{(s - 1)^2(s + 1)^2}$$

ここで被積分関数を部分分数分解するために

$$\frac{1}{(s - 1)^2(s + 1)^2} = \frac{a_0 + a_1 s}{(s - 1)^2} + \frac{b_0 + b_1 s}{(s + 1)^2}$$

とおくと, 分母を払って

$$\begin{aligned} (a_0 + a_1 s)(s + 1)^2 + (b_0 + b_1 s)(s - 1)^2 \\ = (a_0 + b_0) + (2a_0 + a_1 - 2b_0 + b_1)s + (a_0 + 2a_1 + b_0 - 2b_1)s^2 + (a_1 + b_1)s^3 = 1 \end{aligned}$$

として係数を比較すればよい. これを行列で書いて行基本変形をしてもよいが, 定数項どうしと s^3 の係数どうしを比較して, $b_0 = 1 - a_0$, $b_1 = -a_1$ を得るのでこれを s と s^2 の係数の式に代入すると, $a_0 = \frac{1}{2}$, $a_1 = -\frac{1}{4}$, $b_0 = \frac{1}{2}$, $b_1 = \frac{1}{4}$ を得る. よって

$$\begin{aligned} \frac{1}{(s - 1)^2(s + 1)^2} &= -\frac{1}{4} \frac{s - 2}{(s - 1)^2} + \frac{1}{4} \frac{s + 2}{(s + 1)^2} = -\frac{1}{4} \frac{(s - 1) - 1}{(s - 1)^2} + \frac{1}{4} \frac{(s + 1) + 1}{(s + 1)^2} \\ &= -\frac{1}{4} \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(s - 1)^2} + \frac{1}{4} \frac{1}{s + 1} + \frac{1}{4} \frac{1}{(s + 1)^2} \end{aligned}$$

従って

$$I = -\frac{1}{4} \log |s - 1| - \frac{1}{4} \frac{1}{s - 1} + \frac{1}{4} \log |s + 1| - \frac{1}{4} \frac{1}{s + 1} + C = \frac{1}{4} \log \left| \frac{s + 1}{s - 1} \right| - \frac{1}{2} \frac{s}{s^2 - 1} + C$$

となり, I が s で表された. ここで $x = \tan t$ ($-\frac{\pi}{2} < t < \frac{\pi}{2}$) より $\cos^2 t = \frac{1}{x^2 + 1}$. よって $\sin^2 t = \frac{x^2}{x^2 + 1}$. $\sin t$ と $x = \tan t$ が同符号であることに注意して $\sin t = \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}$. これから $s = \sin t < 1$ に注意して

$$\left| \frac{s + 1}{s - 1} \right| = \frac{1 + s}{1 - s} = \frac{1 + \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{1 - \frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}} = \frac{\sqrt{x^2 + 1} + x}{\sqrt{x^2 + 1} - x} = (\sqrt{x^2 + 1} + x)^2.$$

また

$$\frac{s}{s^2 - 1} = \frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{x^2}{x^2 + 1} - 1} = -\frac{\frac{x}{\sqrt{x^2 + 1}}}{\frac{1}{x^2 + 1}} = -x\sqrt{x^2 + 1}.$$

以上により

$$I = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + 1} + \frac{1}{2} \log(x + \sqrt{x^2 + 1}) + C.$$

8 定積分

高校では、定積分を不定積分を用いて定義したが、それは議論を簡単にするための便宜的な定義であった。

本来の定積分は、関数のグラフで囲まれた図形の面積を長方形の面積の和で近似しようという Archimedes (アルキメデス) に始まる発想 (区分求積法という) を用いて定義される。従って、定積分は不定積分や微分とは無関係に定義される量である (実際、アルキメデスの時代には微分概念はなかった)。ところが実は定積分は不定積分や微分と密接な関係があることが、17 世紀に Newton (ニュートン) や Leibniz (ライプニッツ) によって発見された。この事実が微分積分学の根幹であり、微分積分学の基本定理 (または基本公式) と呼ばれる。これによって多くの関数の定積分を計算することが可能となった。

8.1 定積分の定義と性質

$f(x)$ を有界閉区間 $[a, b]$ ($a < b$) で定義された関数とする。

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

を満たすような実数 $x_0, x_1, x_2, \dots, x_n$ のことを区間 $[a, b]$ の**分点**と呼ぶ。これらの分点によって区間 $[a, b]$ は

$$[a, b] = [x_0, x_1] \cup [x_1, x_2] \cup \cdots \cup [x_{n-1}, x_n]$$

と、 n 個の区間 $[x_{k-1}, x_k]$ ($k = 1, \dots, n$) の和集合で表すことができる。これを区間 $[a, b]$ の**分割**といい、各々の区間 $[x_{k-1}, x_k]$ をこの分割で決まる**小区間**という。区間 $[a, b]$ の分割は無数にあるので、ここで決めた分割に名前をつけて Δ (デルタ) と表わそう。分割は分点の集合 $\{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ で決まるから、分点の集合と分割を同一視して、

$$\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_{n-1}, x_n\} \quad \text{または} \quad \Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

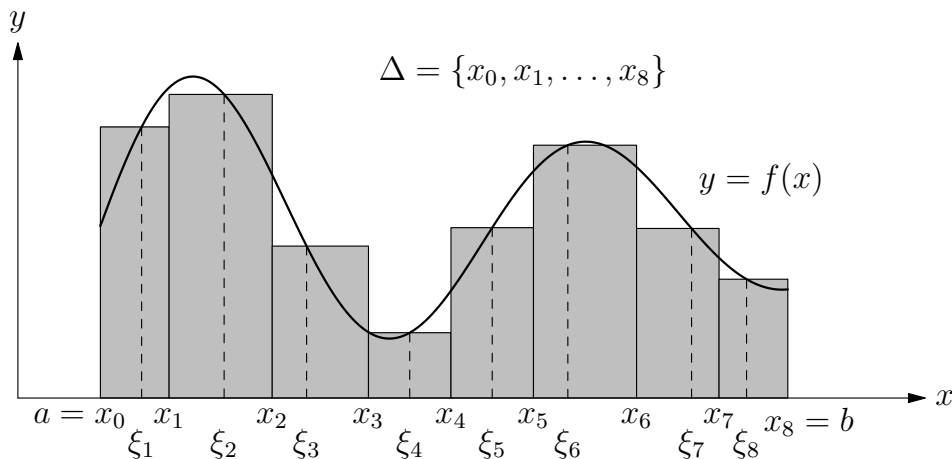
と表わすことにする..

以上のような分割 $\Delta = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ が一つ与えられたとき、 $k = 1, \dots, n$ に対して、 $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ を満たす実数 ξ_k を一つずつ選んで、

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$$

とおく。これを区間 $[a, b]$ の分割 Δ に対する関数 $f(x)$ の**リーマン (Riemann) 和**という。

もし、すべての $x \in [a, b]$ について $f(x) \geq 0$ ならば、リーマン和の各項 $f(\xi_k)(x_k - x_{k-1})$ は底辺の長さが $x_k - x_{k-1}$ で高さが $f(\xi_k)$ の長方形の面積を表しているから、リーマン和 $S_{\Delta}(f)$ は下の図 ($n = 8$ の場合) のようにこれらの n 個の長方形の面積の和を表している。



小区間の幅の最大 $\max\{x_k - x_{k-1} \mid k = 1, \dots, n\}$ を分割 Δ の大きさといい $|\Delta|$ という記号で表わす。(絶対値と同じ記号だが、 Δ は数ではなく、分割、すなわち分点の集合なので、絶対値は定義できない。)

ある実数 S が存在して、 $|\Delta|$ が限りなく小さくなるように分割 Δ を細かくしていくときリーマン和 $S_\Delta(f)$ が $(\xi_1, \dots, \xi_n$ の選び方によらず) S に限りなく近づくなれば、 $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で積分可能あるいは略して可積分 (integrable) であるという。このとき極限值 S のことを、関数 $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での定積分 (definite integral) といい

$$S = \lim_{|\Delta| \rightarrow 0} S_\Delta(f) = \int_a^b f(x) dx$$

と表わす。 $f(x) \geq 0$ ($a \leq \forall x \leq b$) の場合は、リーマン和は図のように n 個の長方形の面積の和となる。従って分割を限りなく細かくすると、リーマン和 $S_\Delta(f)$ は、 $y = f(x)$ のグラフと x 軸、および2直線 $x = a$, $y = b$ で囲まれた図形の面積に収束すると考えることができる。これが定積分の幾何学的な意味である。 $f(x) \geq 0$ とは限らない場合には、 $y < 0$ の部分は面積の -1 倍であると考えればよい。

すなわち、定積分とは、このようにして関数のグラフから定まる図形の面積の定義であると考えることができる。実際、一般に曲線で囲まれた図形の「面積」とは何かという問題は、高校までの数学ではあいまいであったが、このように長方形で「近似」して極限をとることによって正確に定義することができる。(小学校で学ぶ長方形の面積の公式は、長方形の面積の定義であると考えよう。)

次の定理が成立することが知られている。証明は、2年次の「連続と極限」で学ぶ事項が必要になるので、ここでは省略する。

定理 8.1 関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続ならば、 $f(x)$ は $[a, b]$ で積分可能である。

関数 $f(x)$ が区間 $[a, b]$ で可積分ならば、分割 Δ をどのように選んでも $|\Delta| \rightarrow 0$ とすれば、リーマン和 $S_\Delta(f)$ は同一の極限值 S に収束するので、計算しやすいように Δ を選ぶことができる。たとえば Δ_n を区間 $[a, b]$ を n 等分する分割、すなわち

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_k = a + (b - a) \frac{k}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

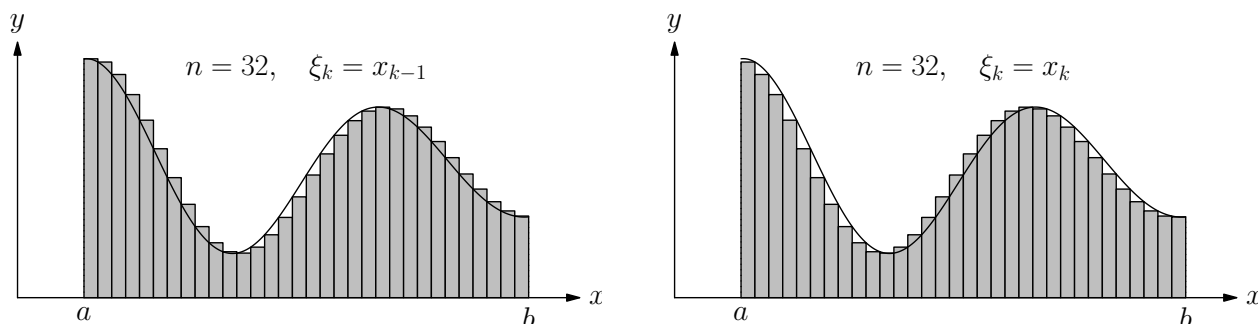
とすると, $|\Delta_n| = \frac{b-a}{n}$ であるから $n \rightarrow \infty$ のとき $|\Delta_n| \rightarrow 0$ であり,

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}(f) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \quad (x_k \leq \xi_k \leq x_{k+1})$$

が成立する. 特に $\xi_k = x_{k-1}$ ($1 \leq k \leq n$), または $\xi_k = x_k$ ($1 \leq k \leq n$) とすれば

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_{k-1}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k)$$

となるので, どちらで計算してもよい.



以上の定義では $a < b$ と仮定したが, $a = b$ のときは $\int_a^a f(x) dx = 0$, $a > b$ のときは $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$ と定義する.

例 8.1 $a < b$ かつ c を任意の実数として, 定数関数 $f(x) = c$ を考える.

$$\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

を区間 $[a, b]$ の分割として, $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ を満たす ξ_k を一つずつ選ぶと,

$$S_{\Delta}(f) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n c(x_k - x_{k-1}) = c \sum_{k=1}^n (x_k - x_{k-1}) = c(b-a)$$

であるから, $|\Delta| \rightarrow 0$ として $\int_a^b c dx = c(b-a)$ を得る.

例 8.2 $a < b$ として, $f(x) = x$ の区間 $[a, b]$ 上の定積分を求めよう. $f(x)$ は $[a, b]$ で連続だから可積分である. 従って $[a, b]$ の分割をどのようにとっても, 大きさを限りなく小さくすればリーマン和は定積分に収束する. そこで, Δ_n を区間 $[a, b]$ を n 等分する分割

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_k = a + (b-a)\frac{k}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

として, $\xi_k = x_k = a + (b-a)\frac{k}{n}$ とすると,

$$\begin{aligned} S_{\Delta_n}(f) &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(\xi_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n x_k \\ &= \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n \left\{ a + (b-a)\frac{k}{n} \right\} = \frac{b-a}{n} \left\{ a \sum_{k=1}^n 1 + \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n k \right\} \\ &= \frac{b-a}{n} \left\{ an + \frac{b-a}{n} \frac{1}{2} n(n+1) \right\} = (b-a) \left\{ a + \frac{b-a}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\} \end{aligned}$$

従って

$$\int_a^b x \, dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (b-a) \left\{ a + \frac{b-a}{2} \left(1 + \frac{1}{n} \right) \right\} = (b-a) \frac{b+a}{2} = \frac{1}{2}(b^2 - a^2).$$

逆に, 和の極限を定積分で表すことができる場合もある.

例 8.3 $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^n (n+k)$ を定積分で表わそう. $\frac{n+k}{n} = 1 + \frac{k}{n}$ に注意して, $f(x) = 1+x$ とおき, 区間 $[0, 1]$ を n 等分した分割

$$\Delta_n : 0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_n = 1, \quad x_k = \frac{k}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

をとって $\xi_k = x_k$ とすれば, f の $[0, 1]$ におけるリーマン和は

$$S_{\Delta_n}(f) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n f(x_k) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right)$$

となるから,

$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \left(1 + \frac{k}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} S_{\Delta_n}(f) = \int_0^1 f(x) \, dx = \int_0^1 (1+x) \, dx.$$

定理 8.2 $f(x)$ と $g(x)$ を区間 $[a, b]$ で連続な関数とすると, 次が成立する.

$$(1) \int_a^b \{f(x) + g(x)\} \, dx = \int_a^b f(x) \, dx + \int_a^b g(x) \, dx.$$

$$(2) \text{ 任意の実数 } c \text{ に対して } \int_a^b cf(x) \, dx = c \int_a^b f(x) \, dx.$$

$$(3) \text{ 任意の } x \in [a, b] \text{ について } f(x) \leq g(x) \text{ ならば, } \int_a^b f(x) \, dx \leq \int_a^b g(x) \, dx.$$

$$(4) \ a < c < b \text{ のとき, } \int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$$

$$(5) \ \left| \int_a^b f(x) dx \right| \leq \int_a^b |f(x)| dx$$

証明: (1) $\Delta: a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$ を区間 $[a, b]$ の分割として $x_{k-1} \leq \xi_k \leq x_k$ を満たす ξ_k をとると,

$$\begin{aligned} S_{\Delta}(f+g) &= \sum_{k=1}^n \{f(\xi_k) + g(\xi_k)\}(x_k - x_{k-1}) = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) + \sum_{k=1}^n g(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \\ &= S_{\Delta}(f) + S_{\Delta}(g) \end{aligned}$$

が成立する. 分割 Δ を限りなく細かくしたときの極限をとれば (1) の等式を得る.

(2) も同様に示される. (3) と (4) は定義から明らかである.

(5) 分割 Δ と ξ_k を (1) の証明と同じにとると, 三角不等式より

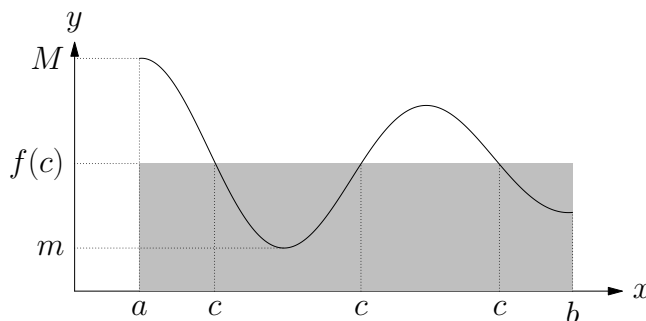
$$|S_{\Delta}(f)| = \left| \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| \leq \sum_{k=1}^n |f(\xi_k)|(x_k - x_{k-1}) = S_{\Delta}(|f|)$$

が成立するから, $|\Delta| \rightarrow 0$ として (5) の不等式を得る. $\square$

定理 8.3 (積分の平均値の定理) $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で連続な関数とすると, $a < c < b$ を満たすある実数 c が存在して

$$\int_a^b f(x) dx = (b-a)f(c)$$

が成立する. $f(c) = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$ のことを $f(x)$ の区間 $[a, b]$ での**平均値** (mean value) という.



証明: 区間 $[a, b]$ における $f(x)$ の最大値を M , 最小値を m とすると, $m \leq f(x) \leq M$ ($a \leq x \leq b$) が成立するから, 上の定理の (3) より

$$(b-a)m = \int_a^b m dx \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b M dx = (b-a)M,$$

従って

$$m \leq \alpha = \frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx \leq M$$

が成立する．最大値と最小値の定義により，ある $x_1, x_2 \in [a, b]$ が存在して $f(x_1) = m$, $f(x_2) = M$ が成立するから， $f(c) = \alpha$ を満たすような実数 c が x_1 と x_2 の間に少なくとも一つ存在する．このとき $c \in (a, b)$ であるから，定理が証明された．□

$f(x) \geq 0$ とすると，積分の平均値の定理は $y = f(x)$ と x 軸と 2 直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形の面積が，区間 $[a, b]$ を底辺として $f(c)$ を高さとする長方形の面積と一致することを意味している．

8.2 微分積分学の基本定理

前節で定積分を不定積分とは無関係に定義したが，定積分の上端を変数とみなして微分すると被積分関数となることがわかる．

定理 8.4 (微分積分学の基本定理) $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で連続な関数とする． $a \leq x \leq b$ のとき，

$$G(x) = \int_a^x f(t) dt$$

と定義すると， $f(x)$ は区間 $[a, b]$ で微分可能で $G'(x) = f(x)$ が成立する．ただし $G'(x)$ は $x = a$ のときは右微分係数（平均変化率の右極限）， $x = b$ のときは左微分係数（平均変化率の左極限）とする．

証明: $a \leq x_0 \leq b$ として $G'(x_0) = f(x_0)$ を示せばよい．0 でない実数 h を $x_0 + h \in [a, b]$ をみたすようにとる．簡単のため $h > 0$ と仮定すると，積分の平均値の定理により，

$$\begin{aligned} \frac{1}{h}(G(x_0 + h) - G(x_0)) &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{h} \left\{ \int_a^{x_0} f(t) dt + \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt - \int_a^{x_0} f(t) dt \right\} \\ &= \frac{1}{h} \int_{x_0}^{x_0+h} f(t) dt = f(c) \end{aligned}$$

かつ $x_0 < c < x_0 + h$ をみたす c が存在する． $h \rightarrow 0$ のとき $c \rightarrow x_0$ であり， $f(x)$ は x_0 で連続だから，

$$G'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h}(G(x_0 + h) - G(x_0)) = f(x_0)$$

が示された．□

高校では次の公式を定積分の定義としたが，ここでは定積分の定義からこの公式を導く．

定理 8.5 (微分積分学の基本公式) $f(x)$ を区間 $[a, b]$ で連続な関数, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

が成立する. $F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$ と表す.

証明: $G(x) = \int_a^x f(t) dt$ とおくと定理 8.4 により $G(x)$ も $f(x)$ の原始関数だから, ある定数 C があって, $F(x) = G(x) + C$ が成立する. $G(a) = 0$ より, $C = F(a)$ である. 従って

$$\int_a^b f(x) dx = G(b) = F(b) - C = F(b) - F(a)$$

を得る. $\square$

この定理によって, $f(x)$ の原始関数が求まれば定積分が計算できる.

例 8.4 $\tan^{-1} x$ は $f(x) = \frac{1}{x^2 + 1}$ の原始関数だから, $a < b$ を満たす任意の実数 a, b について

$$\int_a^b \frac{dx}{x^2 + 1} = \tan^{-1} b - \tan^{-1} a.$$

例 8.5 $\int_0^{2\pi} |\sin x| dx$ の値を求めよう. $0 \leq x \leq \pi$ のとき $\sin x \geq 0$, $\pi \leq x \leq 2\pi$ のとき $\sin x \leq 0$ であるから, 積分区間 $[0, 2\pi]$ を $[0, \pi]$ と $[\pi, 2\pi]$ に分けて,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} |\sin x| dx &= \int_0^{\pi} |\sin x| dx + \int_{\pi}^{2\pi} |\sin x| dx = \int_0^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{2\pi} (-\sin x) dx \\ &= [-\cos x]_0^{\pi} + [\cos x]_{\pi}^{2\pi} = 2 + 2 = 4. \end{aligned}$$

例 8.6 $f(x)$ を $\mathbb{R}$ で連続な関数, $a \in \mathbb{R}$ として $G(x) = \int_{a-x}^{a+x} f(t) dt$ とおくと,

$$G'(x) = f(a+x) + f(a-x)$$

が成立する. 実際, $F(x)$ を $f(x)$ の原始関数とすると,

$$G(x) = F(a+x) - F(a-x)$$

であるから, 両辺を微分して

$$G'(x) = F'(a+x) + F'(a-x) = f(a+x) + f(a-x)$$

8.3 置換積分と部分積分

定理 8.6 (置換積分) $f(x)$ を有界閉区間 $[a, b]$ で定義された連続関数, $\varphi(t)$ を有界閉区間 $[\alpha, \beta]$ で微分可能な関数で φ の値域は $[a, b]$ に含まれ $\varphi'(t)$ は $[\alpha, \beta]$ で連続で, $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$ をみたすものとする, と,

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt$$

が成立する.

証明: $f(x)$ の原始関数を $F(x)$ とする. 合成関数の微分の公式により

$$\frac{d}{dt} F(\varphi(t)) = F'(\varphi(t)) \varphi'(t) = f(\varphi(t)) \varphi'(t)$$

が成立するから, $F(\varphi(t))$ は連続関数 $f(\varphi(t)) \varphi'(t)$ の原始関数である. 従って微分積分学の基本公式より,

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(\varphi(t)) \varphi'(t) dt = F(\varphi(\beta)) - F(\varphi(\alpha)) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x) dx$$

が成立する □

例 8.7 $x = \varphi(t) = t^2$ とおくと, $\varphi'(t) = 2t$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$ だから,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}+1} &= \int_0^1 \frac{2t}{t+1} dt = \int_0^1 \left(2 - \frac{2}{t+1} \right) dt = 2 \int_0^1 dt - 2 \int_0^1 \frac{dt}{t+1} \\ &= 2 - 2[\log(t+1)]_0^1 = 2 - 2\log 2. \end{aligned}$$

例 8.8 $t = x^2 = \varphi(x)$ において置換積分の公式を変数 x と t を入れ替えて適用すると, $\varphi'(x) = 2x$, $\varphi(0) = 0$, $\varphi(\sqrt{2}) = 2$ より

$$\begin{aligned} \int_0^{\sqrt{2}} x e^{-x^2} dx &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{1}{2} (2x) e^{-x^2} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} e^{-\varphi(x)} \varphi'(x) dx = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-t} dt \\ &= \left[-\frac{1}{2} e^{-t} \right]_0^2 = \frac{1}{2} (1 - e^{-2}). \end{aligned}$$

あるいは, 変数の置き換えを省略して

$$\int_0^{\sqrt{2}} x e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} \int_0^{\sqrt{2}} (-x^2)' e^{-x^2} dx = -\frac{1}{2} [e^{-x^2}]_0^{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} (e^{-2} - 1)$$

としてもよい.

例 8.9 $\tan x$ は区間 $[0, \frac{\pi}{4}]$ で連続だから,

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan x dx = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\sin x}{\cos x} dx = - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{(\cos x)'}{\cos x} dx = - [\log |\cos x|]_0^{\frac{\pi}{4}} = -\log \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} \log 2.$$

例 8.10 $x = \sin t$ は区間 $[0, \frac{\pi}{2}]$ で連続で $\sin 0 = 0$, $\sin \frac{\pi}{2} = 1$ だから,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \sqrt{1-x^2} dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1-\sin^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2 t} \cos t dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt = \frac{1}{2} \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi}{4}.\end{aligned}$$

定理 8.7 (部分積分) $f(x)$ と $g(x)$ は有界閉区間 $[a, b]$ で微分可能で $f'(x)$ と $g'(x)$ は $[a, b]$ で連続であるとする,

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx = [f(x)g(x)]_a^b - \int_a^b f(x)g'(x) dx$$

証明: 積の微分の公式から $\{f(x)g(x)\}' = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ であるから, $f(x)g(x)$ は連続関数 $f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$ の原始関数である. 従って微分積分学の基本公式により

$$\int_a^b f'(x)g(x) dx + \int_a^b f(x)g'(x) dx = \int_a^b \{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)\} dx = [f(x)g(x)]_a^b$$

となる. 移項して定理の公式を得る. $\square$

例 8.11

$$\begin{aligned}\int_0^1 x e^x dx &= \int_0^1 x (e^x)' dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 (x)' e^x dx = [x e^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= [x e^x]_0^1 - [e^x]_0^1 = e - (e - 1) = 1.\end{aligned}$$

例 8.12

$$\begin{aligned}\int_0^\pi x \sin x dx &= \int_0^\pi x (-\cos x)' dx = [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x dx \\ &= [-x \cos x]_0^\pi + [\sin x]_0^\pi = \pi.\end{aligned}$$

例 8.13

$$\begin{aligned}\int_1^e \log x dx &= \int_1^e (x)' \log x dx = [x \log x]_1^e - \int_1^e x (\log x)' dx \\ &= [x \log x]_1^e - \int_1^e 1 dx = e - (e - 1) = 1.\end{aligned}$$

8.4 広義積分

ここまでは、被積分関数 $f(x)$ が有界閉区間 $[a, b]$ で連続な場合を扱った。以下では、 $f(x)$ が端点 a または b で値が定義されていないか、または値が定義されていても連続にならない場合や、さらに積分区間が有界でない場合を扱う。以下のように、有界閉区間での定積分の極限で表されるような積分のことを**広義積分**という。極限が存在するとき、広義積分は存在する、または収束するという。極限が存在しないときは、広義積分は存在しない、または発散するという。

- $f(x)$ が区間 $(a, b]$ で連続なとき、 $f(x)$ の $(a, b]$ における広義積分を

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{a+\varepsilon}^b f(x) dx \quad \text{と定義する。たとえば,}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 \frac{1}{\sqrt{x}} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [2\sqrt{x}]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} 2(1 - \sqrt{\varepsilon}) = 2.$$

- $f(x)$ が区間 $[a, b)$ で連続なとき、 $f(x)$ の $[a, b)$ における広義積分を

$$\int_a^b f(x) dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_a^{b-\varepsilon} f(x) dx \quad \text{と定義する。たとえば,}$$

$$\int_0^1 \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\varepsilon} \frac{1}{1-x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [-\log(1-x)]_0^{1-\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-\log \varepsilon) = \infty$$

よってこの広義積分は発散する。

- $f(x)$ が区間 $[a, \infty)$ で連続なとき、 $f(x)$ の $[a, \infty)$ における広義積分を

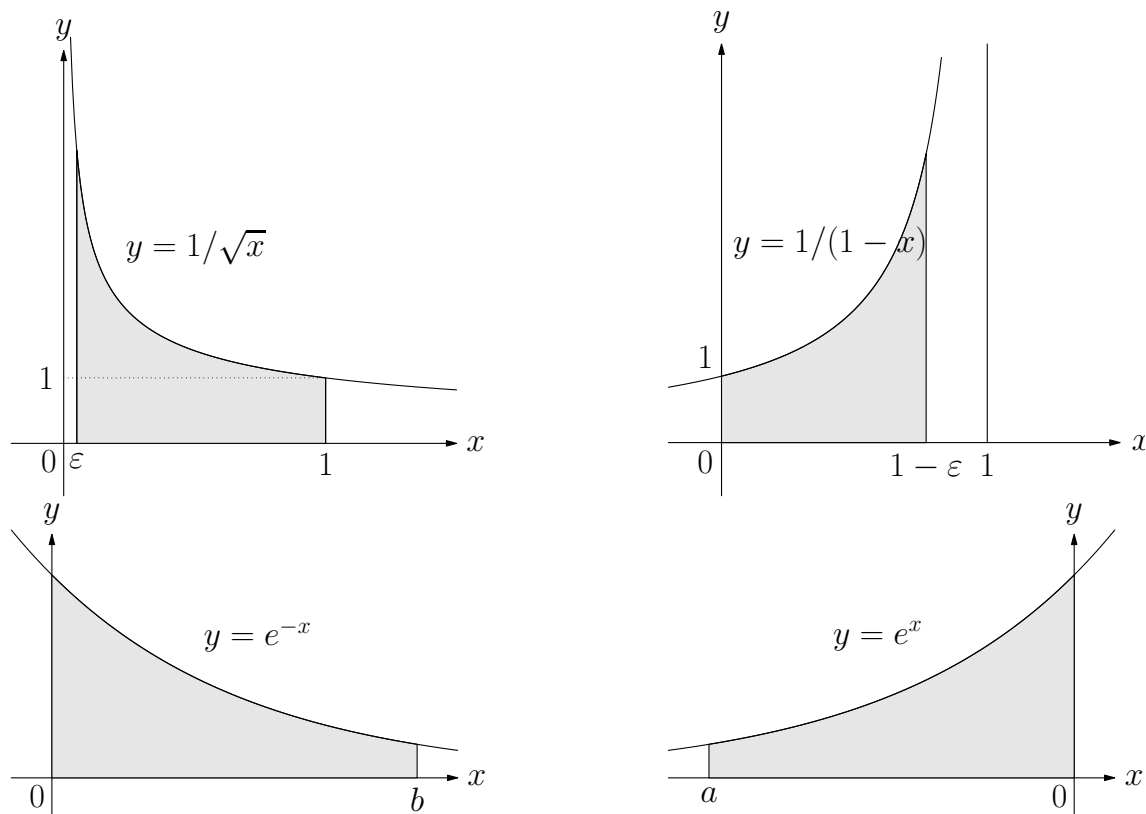
$$\int_a^{\infty} f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{と定義する。たとえば,}$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b e^{-x} dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [-e^{-x}]_0^b = \lim_{b \rightarrow \infty} (1 - e^{-b}) = 1.$$

- $f(x)$ が区間 $(-\infty, b]$ で連続なとき、 $f(x)$ の $(-\infty, b]$ における広義積分を

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x) dx \quad \text{と定義する。たとえば,}$$

$$\int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 e^x dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} [e^x]_a^0 = \lim_{a \rightarrow -\infty} (1 - e^a) = 1.$$



以上は積分区間の一方の端点では連続になっている場合だが、両方の端点で連続でない場合には、これらの組み合わせと考えると次のように定義する。

- $f(x)$ が开区間 (a, b) で連続なときは、 $a < c < b$ を満たす c を任意にとって

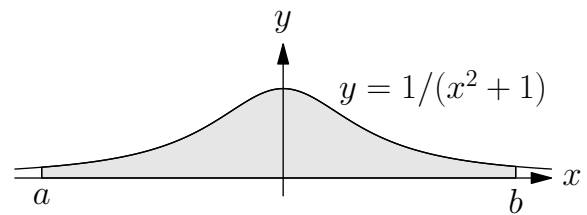
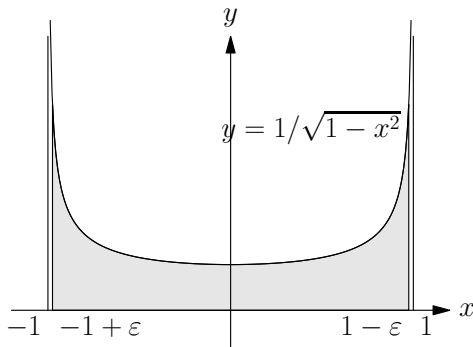
$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx \quad \text{と定義する. たとえば}$$

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} &= \int_{-1}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_{-1+\epsilon}^0 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \int_0^{1-\epsilon} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \{-\sin^{-1}(-1+\epsilon)\} + \lim_{\epsilon \rightarrow +0} \sin^{-1}(1-\epsilon) = \pi. \end{aligned}$$

- $f(x)$ が $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ で連続なときは、実数 c を任意にとって

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^c f(x) dx + \int_c^{\infty} f(x) dx \quad \text{と定義する. たとえば}$$

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} &= \int_{-\infty}^0 \frac{dx}{x^2+1} + \int_0^{\infty} \frac{dx}{x^2+1} = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^0 \frac{dx}{x^2+1} + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_0^b \frac{dx}{x^2+1} \\ &= \lim_{a \rightarrow -\infty} (-\tan^{-1} a) + \lim_{b \rightarrow \infty} \tan^{-1} b = \pi. \end{aligned}$$



例 8.14 a を負の実数とすると x^a は $(0, 1]$ で定義され $x \rightarrow +0$ のとき $x^a \rightarrow \infty$ となるから $\int_0^1 x^a dx$ は広義積分である. $a \neq -1$ のとき,

$$\int_0^1 x^a dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_{\varepsilon}^1 x^a dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \frac{1}{a+1} (1 - \varepsilon^{a+1})$$

は, $a > -1$ ならば $\frac{1}{a+1}$ であり, $a < -1$ ならば発散する. $a = -1$ のときは

$$\int_0^1 x^a dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} [\log x]_{\varepsilon}^1 = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} (-\log \varepsilon) = \infty$$

だから発散する. 以上によりこの広義積分が収束するための必要十分条件は $a > -1$ である. ($a \geq 0$ のときは広義積分でなく通常の積分である.)

例 8.15 a を負の実数とする. $a \neq -1$ のとき,

$$\int_1^{\infty} x^a dx = \lim_{b \rightarrow +\infty} \int_1^b x^a dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{a+1} x^{a+1} \right]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \frac{1}{a+1} (b^{a+1} - 1)$$

は, $a < -1$ ならば $-\frac{1}{a+1}$ であり, $a > -1$ ならば発散する. $a = -1$ のときは

$$\int_1^{\infty} x^a dx = \lim_{b \rightarrow \infty} [\log x]_1^b = \lim_{b \rightarrow \infty} \log b = \infty$$

だから発散する. 以上によりこの広義積分が収束するための必要十分条件は $a < -1$ である.

次の定理は広義積分の値を求めることが難しい場合に有用である.

定理 8.8 (広義積分の収束の比較判定法) I を有界閉区間ではない区間とする. $f(x)$ と $g(x)$ は区間 I で連続な関数で, 任意の $x \in I$ について $0 \leq f(x) \leq g(x)$ が成立するとする. 区間 I における $f(x)$ の広義積分を $\int_I f(x) dx$ で表そう. たとえば $I = [a, \infty)$ ならば $\int_I f(x) dx = \int_a^{\infty} f(x) dx$ である.

(1) 広義積分 $\int_I g(x) dx$ が収束すれば $\int_I f(x) dx$ も収束する.

(2) 広義積分 $\int_I f(x) dx$ が発散すれば $\int_I g(x) dx$ も発散する.

証明: たとえば $I = [a, \infty)$ とすると, $b > a$ のとき

$$0 \leq \int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$$

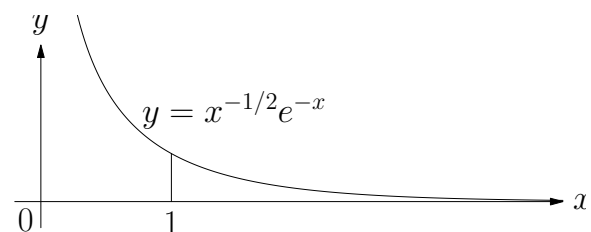
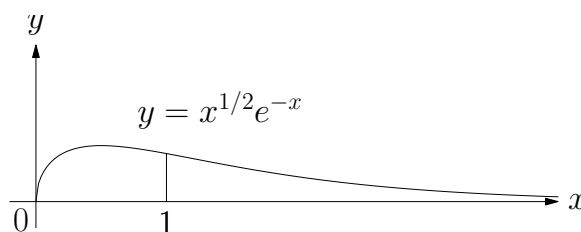
であり, $b \rightarrow \infty$ のとき右辺はある実数に収束する. このことと, $\int_a^b f(x) dx$ が b について単調増加であることから, $\int_a^b f(x) dx$ も収束することがわかる. (2) は (1) の対偶である. $\square$

例 8.16 広義積分 $\int_0^\infty e^{-x^2} dx$ は収束することを示そう. $x \geq 1$ のとき $x^2 \geq x$ より $e^{-x^2} \leq e^{-x}$ が成立する. $\int_1^\infty e^{-x} dx$ は収束することが容易にわかるので, 比較判定法により $\int_1^\infty e^{-x^2} dx$ も収束する. 従って $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \int_0^1 e^{-x^2} dx + \int_1^\infty e^{-x^2} dx$ も収束する. 実は $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ となることが知られている (2 年次の「解析学概論 II」で示す).

例 8.17 (ガンマ関数) a を正の実数とすると, 広義積分 $\Gamma(a) = \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx$ を (オイラーの) ガンマ関数という. $0 < a < 1$ のときは被積分関数 $f(x) = x^{a-1} e^{-x}$ は 0 で定義されないから, $\Gamma(a)$ は 2 つの広義積分の和

$$\Gamma(a) = \int_0^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \int_1^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 x^{a-1} e^{-x} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^{a-1} e^{-x} dx$$

で表される. この各々の広義積分が収束することを示そう. まず, $0 < x \leq 1$ のときは $0 < f(x) \leq x^{a-1}$ であり, 例 8.14 より $a > 0$ のとき $\int_0^1 x^{a-1} dx$ は収束するから, 比較判定法により $\int_0^1 f(x) dx$ も収束する.



次に命題 6.3 の (1) により, 任意の正の実数 a, b について $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-bx} = 0$ が成立するから, $x^a e^{-bx}$ は区間 $[1, \infty)$ で連続かつ有界である. よって, ある定数 C が存在して $x \geq 1$ のとき $x^a e^{-bx} \leq C$ が成立する. 特に $b = \frac{1}{2}$ とすれば, $x \geq 1$ のとき

$$0 < f(x) = x^{a-1} e^{-x} = x^a e^{-x} \frac{1}{x} \leq x^a e^{-x} = x^a e^{-x/2} e^{-x/2} \leq C e^{-x/2}$$

が成立する. 広義積分 $\int_1^\infty e^{-x/2} dx$ が収束することは容易にわかるので, 比較判定法により, $\int_1^\infty f(x) dx$ も収束する. 以上により $\Gamma(a)$ の定義の広義積分が収束することが示された.

$a > 0$ のとき $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$ が成立することを示そう. 部分積分により

$$\begin{aligned} \Gamma(a+1) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 x^a e^{-x} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b x^a e^{-x} dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left([-x^a e^{-x}]_\varepsilon^1 + \int_\varepsilon^1 a x^{a-1} e^{-x} dx \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left([-x^a e^{-x}]_1^b + \int_1^b a x^{a-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \left(-e^{-1} + \varepsilon^a e^{-\varepsilon} + \int_\varepsilon^1 a x^{a-1} e^{-x} dx \right) + \lim_{b \rightarrow \infty} \left(-b^a e^{-b} + e^{-1} + \int_1^b a x^{a-1} e^{-x} dx \right) \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow +0} \int_\varepsilon^1 a x^{a-1} e^{-x} dx + \lim_{b \rightarrow \infty} \int_1^b a x^{a-1} e^{-x} dx = a \int_0^\infty x^{a-1} e^{-x} dx = a\Gamma(a) \end{aligned}$$

となる. ここで $\lim_{x \rightarrow \infty} x^a e^{-x} = 0$ を用いた. これと $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-x} dx = 1$ から, 一般に自然数 n に対して

$$\Gamma(n) = (n-1)\Gamma(n-1) = (n-1)(n-2)\Gamma(n-2) = \cdots = (n-1)(n-2)\cdots 2 \cdot 1\Gamma(1) = (n-1)!$$

を得る. よって $\Gamma(a+1)$ は階乗を正の実数に拡張していると考えることができる.

8.5 定積分の応用 (面積・体積・曲線の長さ)

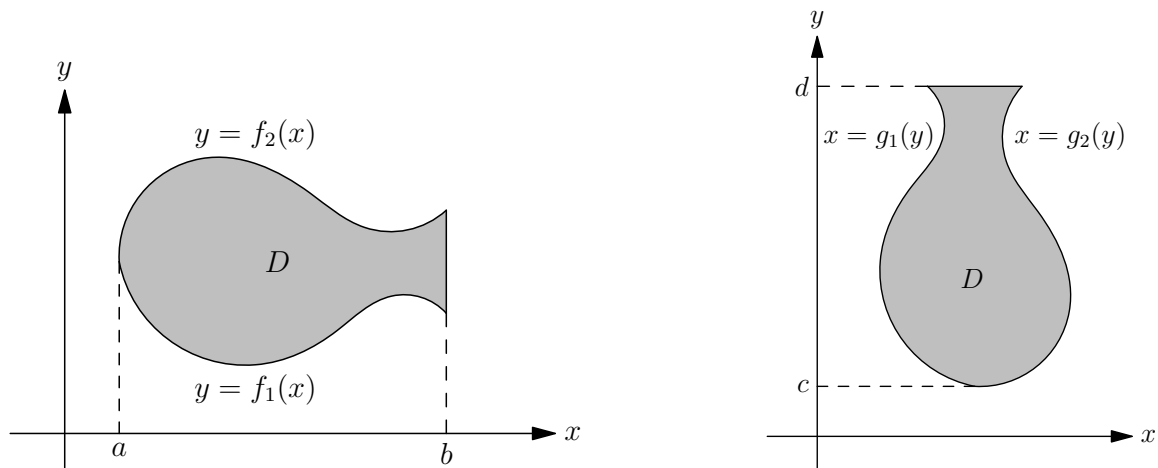
2つの関数のグラフで囲まれた図形の面積は定積分で表される. たとえば $f_1(x)$ と $f_2(x)$ を区間 $[a, b]$ で連続であって $f_1(x) \leq f_2(x)$ であるような2つの関数とすると, $y = f_1(x)$ と $y = f_2(x)$ のグラフと直線 $x = a$ と $x = b$ で囲まれた図形

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid a \leq x \leq b, f_1(x) \leq y \leq f_2(x)\}$$

の面積 $|D|$ は

$$|D| = \int_a^b \{f_2(x) - f_1(x)\} dx$$

で与えられる. ($\mathbb{R}^2$ は xy 平面全体を表す記号である. 2次元ユークリッド空間とも言う.) これは $f_1(x) = 0$ かつ $f_2(x) = f(x)$ の場合には, 定積分の定義で説明したように, 定積分 (Riemann 和の極限) を用いた D の「面積」の定義そのものである. $f_1(x) = 0$ でない場合は, $f_2(x) - f_1(x)$ の Riemann 和の極限をとればよい.



また, $g_1(y)$ と $g_2(y)$ を区間 $[c, d]$ で連続であって $g_1(y) \leq g_2(y)$ であるような2つの関数とすると, $x = g_1(y)$ と $x = g_2(y)$ のグラフと直線 $y = c$ と $y = d$ で囲まれた図形

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid c \leq y \leq d, g_1(y) \leq x \leq g_2(y)\}$$

の面積 $|D|$ は

$$|D| = \int_c^d \{g_2(y) - g_1(y)\} dy$$

で与えられる.

例 8.18 $a > 0$ として, 半径 a の円の面積を定積分を用いて求めよう. 原点を中心とする半径 a の円 (とその内部) は,

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq a^2\} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid -a \leq x \leq a, -\sqrt{a^2 - x^2} \leq y \leq \sqrt{a^2 - x^2}\}$$

と表されるから, 面積は

$$|D| = \int_{-a}^a \{\sqrt{a^2 - x^2} - (-\sqrt{a^2 - x^2})\} dx = 2 \int_{-a}^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

と表される. 最後の等式では $\sqrt{a^2 - x^2}$ が偶関数であることを用いた. $x = a \sin t$ ($0 \leq t \leq \frac{\pi}{2}$) とおいて置換積分すると.

$$\begin{aligned} |D| &= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} a \sqrt{1 - \sin^2 t} a \cos t dt = 4a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 t dt = 2a^2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 + \cos 2t) dt \\ &= 2a^2 \left[t + \frac{1}{2} \sin 2t \right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi a^2 \end{aligned}$$

● 極座標で表された曲線で囲まれた図形の面積

極座標で $r = f(\theta)$ ($\alpha \leq \theta \leq \beta$) によって表される曲線と半直線 $\theta = \alpha$, $\theta = \beta$ で囲まれた図形 D の面積 $|D|$ は

$$|D| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

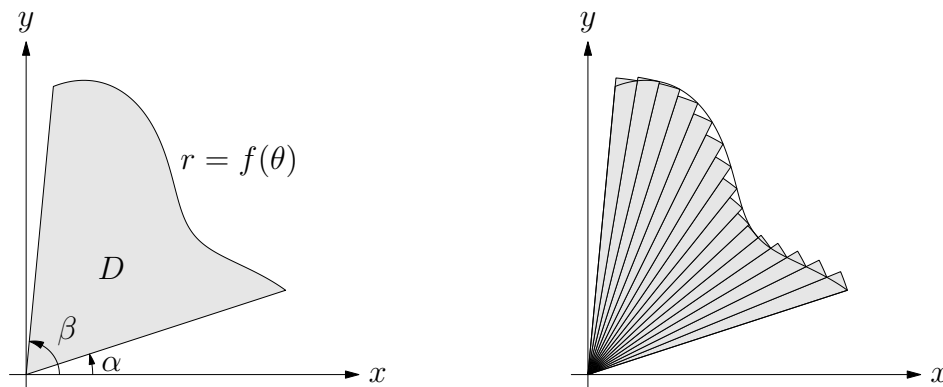
と表される．これを Riemann 和による定積分の定義から導こう． θ の動く区間 $[\alpha, \beta]$ を n 等分する分割

$$\Delta_n : \alpha = \theta_0 < \theta_1 < \cdots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta, \quad \theta_k = \alpha + (\beta - \alpha) \frac{k}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

をとって，極座標を用いて

$$\theta_{k-1} \leq \theta \leq \theta_k, \quad 0 \leq r \leq f(\theta_{k-1})$$

で定義される扇形を D_k ($k = 1, \dots, n$) とする．



D_k の面積は，半径 $f(\theta_{k-1})$ の円の面積の $\frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2\pi}$ 倍だから，

$$|D_k| = \pi f(\theta_{k-1})^2 \frac{\theta_k - \theta_{k-1}}{2\pi} = \frac{1}{2} f(\theta_{k-1})^2 (\theta_k - \theta_{k-1}) = \frac{1}{2} f(\theta_{k-1})^2 \frac{\beta - \alpha}{n}$$

である．よってこれらの扇形の面積の和 S_n は，

$$S_n = \sum_{k=1}^n |D_k| = \frac{1}{2} \frac{\beta - \alpha}{n} \sum_{k=1}^n f(\theta_{k-1})^2$$

となる．この右辺は関数 $r = f(\theta)^2$ の区間 $[\alpha, \beta]$ の分割 Δ_n に関する Riemann 和だから，

$$|D| = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} f(\theta)^2 d\theta$$

● 立体の体積

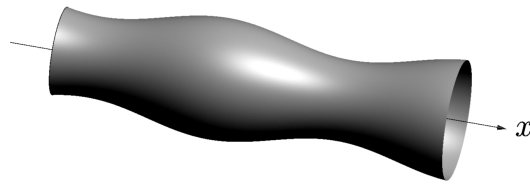
xyz 座標を持つ空間内の立体 Ω の体積 $|\Omega|$ について考察しよう． Ω の x 座標は $a \leq x \leq b$ の範囲にあるとする． $a \leq c \leq b$ のとき平面 $x = c$ によるこの立体の断面を $\Omega(c)$ で表す． $\Omega(c)$ の面積を $S(c)$ とすると， Ω の体積は

$$|\Omega| = \int_a^b S(x) dx$$

で与えられる．特に xy 平面において $y = f(x) \geq 0$ のグラフと直線 $x = a$, $x = b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに回転させてできる立体の体積は

$$\pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b f(x)^2 dx$$

である．



厳密に言うと，立体の体積とは何かを定義する必要があるが，ここでは底面積が S で高さ h の柱状の図形の体積が hS であることを認めて上の体積の公式を導こう． x 座標の区間 $[a, b]$ を n 等分する分割

$$\Delta_n : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b, \quad x_k = a + (b-a)\frac{k}{n} \quad (0 \leq k \leq n)$$

をとる． $\Omega(x_{k-1})$ を底面とする高さ $\frac{b-a}{n}$ の柱状の図形

$$\Omega_k = \{(x, y, z) \mid x_{k-1} \leq x \leq x_k, (y, z) \in \Omega(x_{k-1})\} \quad (1 \leq k \leq n)$$

の体積の和 V_n は

$$V_n = \sum_{k=1}^n |\Omega_k| = \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n S(x_{k-1})$$

である． $n \rightarrow \infty$ としたときの V_n の極限が $|\Omega|$ であると考えられる（定義される）から，

$$|\Omega| = \lim_{n \rightarrow \infty} V_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{b-a}{n} \sum_{k=1}^n S(x_{k-1}) = \int_a^b S(x) dx$$

を得る．

例 8.19 原点を中心とする半径 $a > 0$ の球（とその内部） Ω の体積を求めよう． Ω は不等式 $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ で表されるから， x の範囲は $-a \leq x \leq a$ である． $-a \leq c \leq a$ とすると， Ω の平面 $x = c$ による断面は yz 平面で $y^2 + z^2 \leq a^2 - c^2$ で表される図形である．これは半径 $\sqrt{a^2 - c^2}$ の円で，面積は $S(c) = \pi(a^2 - c^2)$ である．よって Ω の体積は

$$|\Omega| = \int_{-a}^a S(x) dx = \int_{-a}^a \pi(a^2 - x^2) dx = \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a^3$$

である．

● 曲線の長さ

xy 平面において媒介変数表示

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad (\alpha \leq t \leq \beta)$$

で定義される曲線を C とする．ただし $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ は C^1 級，すなわち導関数 $\varphi'(t)$ と $\psi'(t)$ が存在して $[\alpha, \beta]$ で連続であると仮定する．

$$\Delta : \alpha = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = \beta$$

を区間 $[\alpha, \beta]$ の分割として,

$$x_k = \varphi(t_k), \quad y_k = \psi(t_k) \quad (0 \leq k \leq n)$$

とおき, 点 $P_k(x_k, y_k)$ を考える. $\varphi(t)$ と $\psi(t)$ について区間 $[t_{k-1}, t_k]$ で平均値の定理を用いると

$$\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})\varphi'(\sigma_k), \quad \psi(t_k) - \psi(t_{k-1}) = (t_k - t_{k-1})\psi'(\tau_k)$$

を満たす $\sigma_k, \tau_k \in (t_{k-1}, t_k)$ が存在する. このとき点 $P_0, P_1, \dots, P_n$ を結ぶ折れ線の長さは

$$\sum_{k=1}^n P_{k-1}P_k = \sum_{k=1}^n \sqrt{(x_k - x_{k-1})^2 + (y_k - y_{k-1})^2} = \sum_{k=1}^n \sqrt{\varphi'(\sigma_k)^2 + \psi'(\tau_k)^2} (t_k - t_{k-1})$$

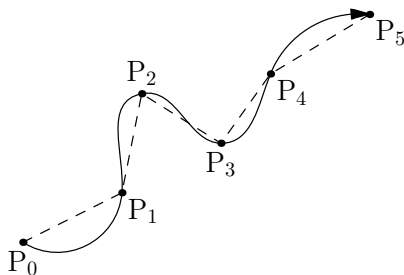
である. 分割 Δ を細かくしていくと τ_k と σ_k は限りなく近づくので τ_k を σ_k で置き換えれば, この最後の式は

$$\sum_{k=1}^n \sqrt{\varphi'(\sigma_k)^2 + \psi'(\sigma_k)^2} (t_k - t_{k-1})$$

となり, これは関数 $F(t) = \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2}$ の分割 Δ に関する Riemann 和であるから, 分割 Δ を限りなく細かくすれば $\int_{\alpha}^{\beta} F(t) dt$ に収束する. これを曲線 C の長さとして定義して $l(C)$ で表す. 以上により C の長さは

$$l(C) = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

で与えられることがわかった.



特に $y = f(x)$ ($a \leq x \leq b$) で表される曲線 (グラフ) の長さは, $x = t, y = f(t)$ ($a \leq t \leq b$) という媒介変数表示を用いて

$$l(C) = \int_a^b \sqrt{1 + f'(t)^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2} dx$$

で与えられる.

例 8.20 C を原点を中心とする半径 $a > 0$ の円周とする. C の媒介変数表示として

$$x = \varphi(t) = a \cos t, \quad y = \psi(t) = a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

をとると, C の長さは

$$l(C) = \int_0^{2\pi} \sqrt{\varphi'(t)^2 + \psi'(t)^2} dt = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = \int_0^{2\pi} a dt = 2\pi a$$

9 テイラー (Taylor) の定理

9.1 関数の近似値とテイラー (Taylor) の公式

多項式の値は四則演算のみで計算できるので正確な値を求めることができるが、関数 $f(x)$ が多項式でないとき、たとえば $f(x) = e^x$ のとき、たとえば $f(0.01) = e^{0.01}$ の値を具体的に求めるにはどうすれば良いだろうか？

一般に関数 $f(x)$ が a で微分可能として、

$$\varphi(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a} - f'(a)$$

とおくと、

$$f(x) = f(a) + (x - a)f'(a) + (x - a)\varphi(x)$$

であり、微分係数 $f'(a)$ の定義から、 $x \rightarrow a$ のとき $\varphi(x) \rightarrow 0$ となる。従って x が十分 a に近い、すなわち $|x - a|$ が十分小さいとき、 $|(x - a)\varphi(x)|$ は $|x - a|$ よりもさらに小さい。よって、このとき $f(x)$ の値は $f(a) + (x - a)f'(a)$ に近いと考えられる。これは $x = a$ における $f(x)$ の接線を表す式である。たとえば $f(x) = e^x$, $a = 0$ とすると、 e^x の値は、 x が 0 に近いとき、 $1 + x$ に近い、すなわち $e^x \doteq 1 + x$ と考えられる。たとえば $x = 0.01$ とすると

$$e^{0.01} \doteq 1 + 0.01 = 1.01$$

となる。ここまでは接線の式、すなわち 1 次式で $f(x)$ を近似したが、2 次式、3 次式、更に一般に n 次式で近似しようというのがテイラーの定理 (公式) である。

定理 9.1 (コーシー (Cauchy) の平均値定理) $f(x)$ と $g(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続で区間 (a, b) で微分可能であり、 $a < x < b$ のとき $g'(x) \neq 0$ とすると、

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad \text{かつ} \quad a < c < b$$

を満たす実数 c が存在する。

証明: 関数

$$F(x) = \{g(b) - g(a)\}f(x) - \{f(b) - f(a)\}g(x)$$

は区間 $[a, b]$ で連続であり区間 (a, b) で微分可能である。

$$\begin{aligned} F'(x) &= \{g(b) - g(a)\}f'(x) - \{f(b) - f(a)\}g'(x), \\ F(b) - F(a) &= \{g(b) - g(a)\}f(b) - \{f(b) - f(a)\}g(b) \\ &\quad - \{g(b) - g(a)\}f(a) + \{f(b) - f(a)\}g(a) \\ &= \{g(b) - g(a)\}\{f(b) - f(a)\} - \{f(b) - f(a)\}\{g(b) - g(a)\} = 0 \end{aligned}$$

であるからロルの定理 (定理 5.5) より

$$\{g(b) - g(a)\}f'(c) - \{f(b) - f(a)\}g'(c) = F'(c) = 0$$

かつ $a < c < b$ を満たす実数 c が存在する．一方，平均値の定理により $g(b) - g(a) = (b - a)g'(d)$ かつ $a < d < b$ を満たす実数 d が存在するが，仮定により $g'(d) \neq 0$ であるから， $g(b) - g(a) \neq 0$ である．よって上の式より定理の式が成立することがわかる．□

定理 9.2 (テイラー (Taylor) の定理) n を非負整数 (自然数または 0) として，関数 $f(x)$ は開区間 I で $n + 1$ 回微分可能であると仮定する．このとき任意の $a, x \in I$ に対して

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n + R_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_{n+1}(x), \end{aligned} \quad (11)$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - a)^{n+1} \quad (c \text{ は } a \text{ と } x \text{ の間のある実数}) \quad (12)$$

が成立する．これを a における n 次の**テイラー (Taylor) の公式**，または n 次の**テイラー (Taylor) 展開**という． $R_{n+1}(x)$ は $n + 1$ 次の**剰余項**と呼ばれる． $\theta = \frac{c - a}{x - a}$ とおけば $0 < \theta < 1$ であり， $c = a + \theta(x - a)$ と表せる．ただし θ は定数ではなく， x によって変化する．

証明:

$$f_n(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x - a)^n$$

とおく． $k = 0, 1, \dots, n$ に対して

$$f_n^{(k)}(a) = f^{(k)}(a) \quad (13)$$

が成立することを示そう．まず $f_n(x)$ の定義から $f_n(a) = f(a)$ であるから， $k = 0$ のときは成立する． $f_n(x)$ を微分すると

$$f'_n(x) = f'(a) + f''(a)(x - a) + \frac{f^{(3)}(a)}{2!}(x - a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!}(x - a)^{n-1}$$

となるから， $f'_n(a) = f'(a)$ であり， $k = 1$ のときも成立する． $n \geq 2$ のときは $f_n(x)$ を更に微分して

$$f''_n(x) = f''(a) + f^{(3)}(a)(x - a) + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!}(x - a)^{n-2}$$

となるから， $f''_n(a) = f''(a)$ が成立する．以下同様にして $f_n(x)$ の n 次までの導関数を求めれば (13) が成立することがわかる．

さて $g(x) = f(x) - f_n(x)$ とおくと，(13) より

$$g^{(k)}(a) = 0 \quad (k = 0, 1, \dots, n)$$

が成立する. $h(x) = (x-a)^{n+1}$ とおき, $g(x)$ と $h(x)$ に対して Cauchy の平均値定理を用いると, a と x の間のある c_1 という実数がある

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(x) - g(a)}{h(x) - h(a)} = \frac{g'(c_1)}{h'(c_1)}$$

が成り立つ. もし $n \geq 1$ ならば $g'(a) = h'(a) = 0$ だから, 今度は $g'(x)$ と $h'(x)$ に Cauchy の平均値定理を使うと, a と c_1 の間のある実数 c_2 がある

$$\frac{g'(c_1)}{h'(c_1)} = \frac{g'(c_1) - g'(a)}{h'(c_1) - h'(a)} = \frac{g''(c_2)}{h''(c_2)}$$

が成り立つ. この操作を続けると結局, a と x の間のある実数 $c = c_{n+1}$ がある

$$\frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{h^{(n+1)}(c)} = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}$$

が成り立つことがわかる. $f_n(x)$ は n 次以下の多項式だから $n+1$ 次導関数は 0 であり, $g^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x) - f_n^{(n+1)}(x) = f^{(n+1)}(x)$ となるから

$$g(x) = \frac{g^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} h(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

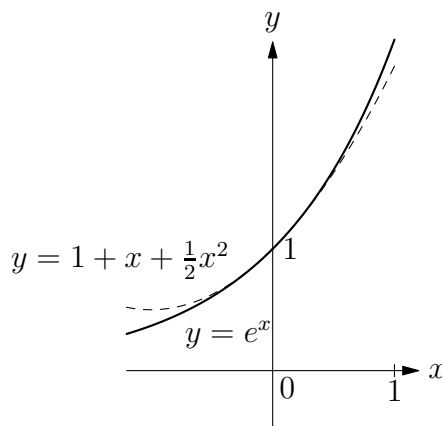
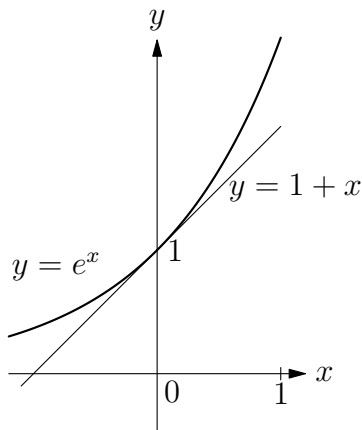
である. 以上により

$$f(x) = f_n(x) + g(x), \quad g(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

が示された. 従って $R_{n+1}(x) = g(x)$ とすれば (11) と (12) が成立する. $\square$

テイラーの定理の意味: x が a に近い数のときに $f(x)$ の近似値を $f_n(x)$ という n 次多項式 (四則演算だけで計算できる!) で表そうというのが基本的な考え方. $f_n(x)$ を $f(x)$ の a における n 次近似式という. このときの誤差 $f(x) - f_n(x)$ を表すのが剰余項 $R_{n+1}(x)$ である. ただし c (または θ) の値が不明なので $R_{n+1}(x)$ の正確な値は一般にはわからない. そこで $|R_{n+1}(x)|$ がどれくらい以下かを考察する必要がある (誤差評価という).

たとえば, $f(x) = e^x$, $a = 0$ のとき, $n = 1$ とすると, e^x を $f_1(x) = 1 + x$ (左下の図の直線) で近似したことになる. $n = 2$ とすると e^x を $f_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2$ (右下の図の点線) で近似したことになる.



例 9.1 $f(x) = e^x$ は $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ において何回でも微分できるので, 任意の a と n について Taylor の定理を適用できる. $a = 0$ とすると, $f^{(k)}(0) = 1$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) なので

$$\begin{aligned} e^x &= 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x) \\ &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1) \end{aligned} \quad (14)$$

これを用いて $e^{0.01}$ の近似値を計算してみよう. まず $n = 1$ とすると,

$$e^{0.01} = 1 + 0.01 + R_2(0.01), \quad R_2(0.01) = \frac{1}{2} e^{\theta \times 0.01} \times 0.01^2 \quad (0 < \theta < 1)$$

が成立する. ここで $e < 3$ より $e^{0.01} < e^{0.5} = \sqrt{e} < 2$ であることに注意すると

$$0 < R_2(0.01) < \frac{1}{2} e^{0.01} \times 0.0001 < 0.0001$$

となり, $e^{0.01}$ の値は 1.01 と 1.0101 の間にあることがわかる. すなわち近似値を 1.01 とすれば誤差は $0.0001 = 10^{-4}$ より小さい.

次に $n = 2$ とすると

$$e^{0.01} = 1 + 0.01 + \frac{0.01^2}{2} + R_3(0.01) = 1.01005 + R_3(0.01), \quad R_3(0.01) = \frac{1}{6} e^{\theta \times 0.01} \times 0.01^3$$

よって $0 < R_3(0.01) < \frac{1}{3} \times 10^{-6}$ であるから, $e^{0.01}$ の値は 1.01005 と $1.01005 + \frac{1}{3} \times 10^{-6}$ の間にある. 従って 1.01005 を $e^{0.01}$ の近似値とすれば, 誤差は $\frac{1}{3} \times 10^{-6} \div 0.33 \times 10^{-6}$ より小さい. 特に $e^{0.01} \div 1.01005$ は小数第 5 位まで正確な近似値であることがわかる.

• e の計算

例 9.1 の応用として自然対数の底 e の近似値を計算してみよう. (14) で $x = 1$ とすると,

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_{n+1}(1), \quad R_{n+1}(1) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} \quad (0 < \theta < 1)$$

$x = 1$ は小さくないので, 誤差の少ない近似値を求めるには n をある程度大きくとる必要がある. たとえば $n = 5$ とすると,

$$0 < R_6(1) = \frac{1}{6!} e^{\theta} < \frac{e}{720} < \frac{3}{720} = \frac{1}{240} = 0.004166\dots$$

なので e は

$$1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} = \frac{163}{60} = 2.7166\dots$$

と $2.7167 + 0.0042 = 2.7209$ の間にあることがわかる. たとえば e の近似値を誤差 10^{-7} 以内で求めるためには

$$R_{n+1}(1) = \frac{e^{\theta}}{(n+1)!} < \frac{3}{(n+1)!} < 10^{-7}$$

すなわち $(n+1)! > 3 \times 10^7$ となるように n をとればよい. この不等式を満たす n のうち最小のものは $n = 10$ である ($11! = 39916800$). このときの e の近似値を電卓やコンピュータを利用して計算してみよ.

例 9.2 $f(x) = \log(1+x)$ を考える. $f(x)$ は区間 $(-1, \infty)$ で何回でも微分できるので, $a = 0$ で n は任意の自然数として Taylor の公式を適用できる.

$$f'(x) = \frac{1}{1+x}, \quad f''(x) = -\frac{1}{(1+x)^2}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}, \quad f^{(4)}(x) = -\frac{2 \cdot 3}{(1+x)^4}, \dots$$

一般に k を 1 以上の自然数とすると

$$f^{(k)}(x) = (-1)^{k-1} \frac{(k-1)!}{(1+x)^k}, \quad \frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$$

また, $f(0) = 0$ であるから, Taylor の定理より任意の自然数 n について

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{n+1} \frac{x^{n+1}}{(1+\theta x)^{n+1}} \quad (0 < \exists \theta < 1)$$

これを用いて $\log 1.01$ の近似値を求めてみよう. $n = 1$ とすると

$$\log 1.01 = 0.01 + R_2(0.01), \quad R_2(0.01) = -\frac{0.01^2}{2(1+\theta \times 0.01)^2}$$

ここで $1 + \theta \times 0.01 > 1$ であるから,

$$-\frac{1}{2} \times 10^{-4} < R_2(0.01) < 0$$

であることがわかる. よって $\log 1.01$ の値は

$$0.01 - 0.00005 = 0.00995 < \log 1.01 < 0.01$$

の範囲にあることがわかる. 次に $n = 2$ とすると,

$$\log 1.01 = 0.01 - \frac{0.01^2}{2} + R_3(0.01), \quad R_3(0.01) = \frac{0.01^3}{3(1+\theta \times 0.01)^3}$$

$0 < R_3(0.01) < \frac{1}{3} \times 0.01^3$ であるから,

$$0.00995 < \log 1.01 < 0.00995 + \frac{1}{3} \times 10^{-6}$$

例 9.3 $f(x) = \sqrt{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{2}}$ を考える. $f(x)$ は区間 $(-1, \infty)$ で何回でも微分できるので, $a = 0$, n は任意の自然数として Taylor の公式を適用できる.

$$f'(x) = \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \quad f''(x) = -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \quad f^{(3)}(x) = \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}, \dots$$

一般に k を 2 以上の自然数とすると

$$\begin{aligned} f^{(k)}(x) &= \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right) \left(-\frac{3}{2}\right) \cdots \left(-\frac{2k-3}{2}\right) (1+x)^{-\frac{2k-1}{2}} \\ &= (-1)^{k-1} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2k-3)}{2^k} (1+x)^{-\frac{2k-1}{2}} \end{aligned}$$

従って Taylor の定理より任意の自然数 n について

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 - \cdots + \frac{(-1)^{n-1} 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{n! 2^n} x^n + R_{n+1}(x),$$

$$R_{n+1}(x) = \frac{(-1)^n}{(n+1)!} \frac{1 \cdot 3 \cdots (2n-3) \cdot (2n-1)}{2^{n+1}} (1+\theta x)^{-\frac{2n+1}{2}} x^{n+1} \quad (0 < \exists \theta < 1)$$

これを用いて $\sqrt{1.01}$ の近似値を求めてみよう. $n = 1$ とすると

$$\sqrt{1.01} = 1 + \frac{1}{2} \times 0.01 + R_2(0.01) = 1.005 + R_2(0.01), \quad R_2(0.01) = -\frac{1}{8} (1+\theta \times 0.01)^{-\frac{3}{2}} \times 0.01^2$$

ここで $(1+\theta \times 0.01)^{-\frac{3}{2}} < 1$ に注意すると,

$$-\frac{1}{8} \times 10^{-4} < R_2(0.01) < 0$$

であることがわかる. よって $\sqrt{1.01}$ の値は

$$1.005 - 1.25 \times 10^{-5} = 1.0049875 < \sqrt{1.01} < 1.005$$

の範囲にあることがわかる.

例 9.4 $f(x) = \sin x$, $a = 0$ とする. $k = 0, 1, 2, \dots$ のとき $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \sin x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^k \cos x$ だから, $n = 2k$ として Taylor の公式を適用すると, $f^{(2k)}(0) = 0$, $f^{(2k+1)}(0) = (-1)^k$ より

$$\begin{aligned} \sin x &= x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x), \\ R_{2k+1}(x) &= \frac{(-1)^k \cos(\theta x)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (0 < \exists \theta < 1). \end{aligned}$$

を得る. ここで x の $2k$ 次の項は 0 なので $n = 2k-1$ として Taylor の公式を適用しても同じである. ただしその場合は剰余項が $R_{2k}(x)$ となり, 上の $R_{2k+1}(x)$ とは表現が異な

る (値は同じである). x の次数が大きい方が誤差評価を小さくできるので, 上記のように $n = 2k$ ととる方が良い. すると

$$|R_{2k+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

という誤差評価が得られる. たとえば $n = 2$ ($k = 1$) とすると,

$$\sin x = x + R_3(x), \quad R_3(x) = -\frac{\cos(\theta x)}{6}x^3 \quad (0 < \theta < 1)$$

たとえば $x = 0.01$ とすると, $\sin 0.01 = 0.01 + R_3(0.01)$ であり, $-\frac{1}{6} \times 10^{-6} < R_3(0.01) < 0$ より

$$0.01 - \frac{1}{6} \times 10^{-6} < \sin 0.01 < 0.01$$

がわかる.

例 9.5 $f(x) = \cos x$, $a = 0$ とする. $k = 1, 2, 3, \dots$ のとき $f^{(2k)}(x) = (-1)^k \cos x$, $f^{(2k+1)}(x) = (-1)^{k+1} \sin x$ だから, $n = 2k + 1$ として Taylor の公式を適用すると, $f^{(2k)}(0) = (-1)^k$, $f^{(2k+1)}(0) = 0$ より

$$\begin{aligned} \cos x &= 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+2}(x), \\ R_{2k+2}(x) &= \frac{(-1)^{k+1} \cos(\theta x)}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad (0 < \theta < 1). \end{aligned}$$

を得る. これから $|R_{2k+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}$ という誤差評価が導かれる.

9.2 テイラー (Taylor) 展開

$f(x)$ を開区間 I で無限回微分可能な関数とする. $a, x \in I$ として $R_{n+1}(x)$ を $x = a$ における $f(x)$ の n 次 Taylor 展開の剰余項とするとき, $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ が成り立つとすると, Taylor の定理から

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

が成立することがわかる. これを $f(x)$ の a における (無限次の) テイラー (Taylor) 展開または テイラー (Taylor) 級数と言う. ($a = 0$ のときはマクローリン (Maclaurin) 展開とも呼ばれる.)

例 9.6 $f(x) = e^x$, $a = 0$ のとき. 任意の自然数 n に対して

$$e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + R_{n+1}(x), \quad R_{n+1}(x) = \frac{e^{\theta x}}{(n+1)!} x^{n+1} \quad (0 < \theta < 1).$$

これから $x > 0$ のときは $0 < R_{n+1}(x) < \frac{e^x x^{n+1}}{(n+1)!}$, $x < 0$ のときは $|R_{n+1}(x)| < \frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}$ という不等式が成り立つことがわかる. ここで正の実数 a に対して、 $k \geq 2a$ を満たす自然数 k をとれば $n \rightarrow \infty$ のとき

$$0 < \frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} \frac{a}{k+1} \cdots \frac{a}{n} < \frac{a^k}{k!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

より $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a^n}{n!} = 0$ が成り立つ. これと上の $R_{n+1}(x)$ に対する評価 (不等式) から, 任意の実数 x に対して $\lim_{n \rightarrow \infty} R_{n+1}(x) = 0$ が成立することがわかる. 従って

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \cdots$$

が任意の実数 x について成立する.

例 9.7 $f(x) = \sin x$, $a = 0$ のとき, 例 9.4 より

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2k+1}(x),$$

$$R_{2k+1}(x) = \frac{(-1)^k \cos(\theta x)}{(2k+1)!} x^{2k+1} \quad (0 < \exists \theta < 1).$$

これから $|R_{2k+1}(x)| \leq \frac{|x|^{2k+1}}{(2k+1)!}$. 特に $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k+1}(x) = 0$ が任意の x について成り立つから

$$\sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!}$$

が任意の実数について成立する.

例 9.8 $f(x) = \cos x$, $a = 0$ のとき, 例 9.5 より

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots + (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + R_{2k+2}(x),$$

$$R_{2k+2}(x) = \frac{(-1)^{k+1} \cos(\theta x)}{(2k+2)!} x^{2k+2} \quad (0 < \exists \theta < 1).$$

これから $|R_{2k+2}(x)| \leq \frac{|x|^{2k+2}}{(2k+2)!}$. 特に $\lim_{k \rightarrow \infty} R_{2k+2}(x) = 0$ が任意の x について成り立つから

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!}$$

が任意の実数について成立する.

オイラー (Euler) の等式 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として, 実数 x に対して

$$e^{ix} = \exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \quad (15)$$

と定義する. (15) の右辺を実部と虚部に分けると $i^{2k} = (-1)^k$ と $\cos x$ と $\sin x$ の Taylor 展開から

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \sin x$$

を得る. すなわち $\boxed{e^{ix} = \cos x + i \sin x}$ である. これを**オイラー (Euler) の等式**という. e^{ix} のように値が複素数になるような関数のことを複素数値関数と呼ぶ. さらに一般に x, y を実数とすると, 複素数の指数関数を

$$e^{x+iy} = \exp(x+iy) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

によって定義する. このとき指数法則

$$e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$$

が成立する. 実際, 実数の変数に対する指数法則と三角関数の加法定理により

$$\begin{aligned} e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} &= e^{x_1} (\cos y_1 + i \sin y_1) e^{x_2} (\cos y_2 + i \sin y_2) \\ &= e^{x_1+x_2} \{ (\cos y_1 \cos y_2 - \sin y_1 \sin y_2) + i (\cos y_1 \sin y_2 + \sin y_1 \cos y_2) \} \\ &= e^{x_1+x_2} \{ \cos(y_1 + y_2) + i \sin(y_1 + y_2) \} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)} \end{aligned}$$

を得る. また α を複素数の定数 ($\alpha \neq 0$) とするとき

$$\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}, \quad \int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C \quad (C \text{ は複素数の定数})$$

が成立する. (複素数を値とする関数の微分と積分は, 実部と虚部をそれぞれ微分, 積分することにより定義する.) 実際, $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とおくと,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} e^{\alpha x} &= \frac{d}{dx} \{ e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) \} = \frac{d}{dx} (e^{ax} \cos bx) + i \frac{d}{dx} (e^{ax} \sin bx) \\ &= e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx) + i e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx) \end{aligned}$$

一方

$$\alpha e^{\alpha x} = (a + bi) e^{ax} (\cos bx + i \sin bx) = e^{ax} (a \cos bx - b \sin bx) + i e^{ax} (a \sin bx + b \cos bx)$$

となるので, $\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}$ が示された. よって $e^{\alpha x}$ の原始関数 (の1つ) は $\frac{1}{\alpha} e^{\alpha x}$ である.

ランダウ (Landau) の記号 (オーダー) $f(x)$ と $g(x)$ を a を含む開区間で定義された関数とする. $x \rightarrow a$ のとき $\frac{f(x)}{g(x)}$ が有界, すなわち, ある定数 $M > 0$ があって, x が a に限りなく近づくとき $\left| \frac{f(x)}{g(x)} \right| \leq M$ すなわち $|f(x)| \leq M|g(x)|$ が成り立つとする. このとき

$$f(x) = O(g(x)) \quad (x \rightarrow a)$$

と書き, 「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は $g(x)$ (の定数倍) でおさえられる」という. 特に $g(x) = (x-a)^n$ のときは, 「 $x \rightarrow a$ のとき $f(x)$ は位数 (オーダー, order) n 以上である」という. (位数が n 以上でありかつ $n+1$ 以上ではないとき, 位数 n であるという.)

この記号を用いると Taylor の定理は次のように簡潔に表すことができる.

定理 9.3 $f(x)$ が開区間 I で C^{n+1} 級, すなわち $n+1$ 回微分可能で $f^{(n+1)}(x)$ が連続とすると, $a \in I$ に対して

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}) \quad (x \rightarrow a)$$

が成り立つ.

証明: $R_{n+1}(x) = O((x-a)^{n+1}) \quad (x \rightarrow a)$ を示せばよい. Taylor の定理より

$$\left| \frac{R_{n+1}(x)}{(x-a)^{n+1}} \right| = \frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(a + \theta(x-a))| \quad (0 < \theta < 1)$$

が成り立つ. 仮定により $f^{(n+1)}(x)$ は連続だから, この右辺の値は $x \rightarrow a$ のとき $\frac{1}{(n+1)!} |f^{(n+1)}(a)|$ に収束するので有界である. $\square$

定理 9.4 $f(x)$ は開区間 I で C^{n+1} 級で $a \in I$ とする. ある定数 $c_0, c_1, \dots, c_n$ があって,

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}) \quad (x \rightarrow a) \quad (16)$$

が成り立つとすると,

$$c_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!} \quad (17)$$

が $0 \leq k \leq n$ を満たす任意の整数 k について成立する. すなわち式 (16) は定理 9.3 の式 (n 次の Taylor 展開) と一致する.

証明: $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ として,

$$\begin{aligned} f_n(x) &= a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \cdots + a_n(x-a)^n, \\ g_n(x) &= c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \cdots + c_n(x-a)^n, \\ R_{n+1}(x) &= f(x) - f_n(x), \quad S_{n+1}(x) = f(x) - g_n(x) \end{aligned}$$

とおく. (17) が成立しないような k があったと仮定する. そのような k のうち最小のものを k_0 とすると, $0 \leq k_0 \leq n$ であり, $f_n(x) + R_{n+1}(x) = f(x) = g_n(x) + S_{n+1}(x)$ より

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) - S_{n+1}(x) &= g_n(x) - f_n(x) \\ &= (c_{k_0} - a_{k_0})(x - a)^{k_0} + \cdots + (c_n - a_n)(x - a)^n \end{aligned}$$

が成立する. 両辺を $(x - a)^{n+1}$ で割ると,

$$\begin{aligned} \frac{R_{n+1}(x)}{(x - a)^{n+1}} - \frac{S_{n+1}(x)}{(x - a)^{n+1}} \\ = \frac{1}{(x - a)^{n+1-k_0}} \{ (c_{k_0} - a_{k_0}) + (c_{k_0+1} - a_{k_0+1})(x - a) + \cdots + (c_n - a_n)(x - a)^{n-k_0} \} \end{aligned}$$

この左辺 (の絶対値) は定理 9.3 と本定理の仮定により, $x \rightarrow a$ のとき有界である. 一方, $c_{k_0} - a_{k_0} \neq 0$ より $x \rightarrow a$ のとき右辺の絶対値は限りなく大きくなる. これは矛盾であるから, すべての $k = 0, 1, \dots, n$ について $c_k = a_k$ が成立する. $\square$

例 9.9 等比級数の和の公式から

$$f(x) = \frac{1}{1-x} = 1 + x + \cdots + x^n + \frac{x^{n+1}}{1-x}.$$

ここで $\frac{x^{n+1}}{1-x} = O(x^{n+1})$ ($x \rightarrow 0$) だから, 上式は $f(x)$ に対する $a = 0$ における n 次の Taylor の公式と一致する. 特に $n+1$ 次の剰余項 $R_{n+1}(x)$ は, $\frac{x^{n+1}}{1-x}$ と一致する.

上式の x に x^2 を代入すると

$$g(x) = \frac{1}{1-x^2} = 1 + x^2 + \cdots + x^{2n} + \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}$$

で $\frac{x^{2n+2}}{1-x^2} = O(x^{2n+2})$ ($x \rightarrow 0$) だから, これは $g(x)$ に対する $2n+1$ 次の ($2n+1$ 次の項はないので $2n$ 次と思ってもよいが) Taylor の公式と一致する. この式を Taylor の公式から直接導くのは困難である. ($g(x)$ の高次導関数の計算が難しいので.)

対数関数のテイラー展開 例 9.9 で n を $n-1$ として x に $-t$ を代入すると

$$\frac{1}{1+t} = 1 - t + \cdots + (-1)^{n-1} t^{n-1} + (-1)^n \frac{t^n}{1+t}.$$

両辺を t について 0 から x まで積分すると

$$\log(1+x) = \int_0^x \frac{dt}{1+t} = x - \frac{x^2}{2} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt. \quad (18)$$

ここで $R_{n+1}(x) = (-1)^n \int_0^x \frac{t^n}{1+t} dt$ とおくと $0 \leq x \leq 1$ のとき

$$0 \leq |R_{n+1}(x)| \leq \int_0^x t^n dt = \frac{x^{n+1}}{n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty),$$

$-1 < x < 0$ のときは

$$0 \leq |R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{1+x} \left| \int_0^x t^n dt \right| = \frac{|x|^{n+1}}{(1+x)(n+1)} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

であるから、 $\underline{-1 < x \leq 1}$ のとき

$$\log(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \cdots = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} \quad (19)$$

が成り立つ. また, 上の $|R_{n+1}(x)|$ に対する不等式から $x \rightarrow 0$ のとき $R_{n+1}(x) = O(x^{n+1})$ であることもわかるから, (18) は $\log(1+x)$ に ($a=0$ として) Taylor の公式を適用した式であり, $R_{n+1}(x)$ はその剰余項, また (19) は $\log(1+x)$ の Taylor 展開であることがわかる. 特に (19) で $x=1$ とすれば

$$\log 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n}$$

を得る. この等式は理論的には重要であるが, 右辺の級数の収束が遅いので, $\log 2$ の近似計算には適していない.

• $\tan^{-1} x$ のテイラー展開 $|x| \leq 1$ とする.

$$\frac{1}{1+t^2} = 1 - t^2 + \cdots + (-1)^{n-1} t^{2n-2} + (-1)^n \frac{t^{2n}}{1+t^2}$$

を t について 0 から x まで積分して

$$\tan^{-1} x = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} + (-1)^n \int_0^x \frac{t^{2n}}{1+t^2} dt. \quad (20)$$

この最後の項を $R_{2n+1}(x)$ とおくと

$$|R_{2n+1}(x)| \leq \left| \int_0^x t^{2n} dt \right| = \frac{|x|^{2n+1}}{2n+1} \leq \frac{1}{2n+1} \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty)$$

となる. この不等式から $x \rightarrow 0$ のとき $R_{2n+1}(x) = O(x^{2n+1})$ であることがわかるから, (20) は $\tan^{-1} x$ の $2n$ 次の Taylor 展開, $R_{2n+1}(x)$ は $2n+1$ 次の剰余項であり,

$$\tan^{-1} x = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1} \quad (|x| \leq 1)$$

が成立することがわかる. (この式を Taylor 展開の公式から直接導くのは困難である). 特に

$$\frac{\pi}{4} = \tan^{-1} 1 = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{2k+1}$$

を得るが, この級数は収束が遅い.

オーダー (Landau) の記号によるテイラー展開の計算

積や代入で定義される関数の Taylor 展開は, 直接 Taylor の公式を適用すると計算が膨大になるが, 次の性質を用いると見通し良く計算することができる.

命題 9.1 $x \rightarrow a$ のとき次が成り立つ:

- (1) $f(x) = O(g(x)), g(x) = O(h(x))$ ならば $f(x) = O(h(x))$.
- (2) $f_1(x) = O(g(x)), f_2(x) = O(g(x))$ ならば $f_1(x) \pm f_2(x) = O(g(x))$.
- (3) $f_1(x) = O(g_1(x)), f_2(x) = O(g_2(x))$ ならば $f_1(x)f_2(x) = O(g_1(x)g_2(x))$.

証明:

- (1) 仮定により $x \rightarrow a$ のとき $\frac{f(x)}{g(x)}$ と $\frac{g(x)}{h(x)}$ は有界であるから, $\frac{f(x)}{h(x)} = \frac{f(x)}{g(x)} \frac{g(x)}{h(x)}$ も有界である.
- (2) $x \rightarrow a$ のとき $\frac{f_1(x)}{g(x)}$ と $\frac{f_2(x)}{g(x)}$ は有界だから, $\frac{f_1(x) \pm f_2(x)}{g(x)} = \frac{f_1(x)}{g(x)} \pm \frac{f_2(x)}{g(x)}$ も有界である.
- (3) $x \rightarrow a$ のとき $\frac{f_1(x)}{g_1(x)}$ と $\frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ は有界だから, $\frac{f_1(x)f_2(x)}{g_1(x)g_2(x)} = \frac{f_1(x)}{g_1(x)} \frac{f_2(x)}{g_2(x)}$ も有界である.

(2) と (3) は簡潔に $O(g(x)) \pm O(g(x)) = O(g(x))$,
 $O(g_1(x))O(g_2(x)) = O(g_1(x)g_2(x))$ ($x \rightarrow a$) と表せる. $\square$

例 9.10 e^{x-x^2} の $x = 0$ における 2 次の Taylor 展開を求めよう. e^x の 2 次の Taylor 展開において x に $x - x^2$ を代入すると,

$$e^{x-x^2} = 1 + (x - x^2) + \frac{1}{2}(x - x^2)^2 + O((x - x^2)^3) \quad (x \rightarrow 0)$$

ここで $(x - x^2)^3 = x^3(1 - x)^3 = O(x^3)$ と命題 9.1(1) より

$$e^{x-x^2} = 1 + (x - x^2) + \frac{1}{2}(x - x^2)^2 + O(x^3) \quad (x \rightarrow 0)$$

さらに $(x - x^2)^2 = x^2(1 - x)^2 = x^2 + O(x^3)$ に注意すると

$$e^{x-x^2} = 1 + (x - x^2) + \frac{1}{2}x^2 + O(x^3) = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3).$$

一般に $f(x) = a_0 + a_1x + \cdots + a_nx^n + O(x^{n+1})$, $g(x) = b_0 + b_1x + \cdots + b_nx^n + O(x^{n+1})$ ($x \rightarrow 0$) のとき, $f(x)g(x)$ を展開して x について n 乗以下の項のみ計算すれば, 残りは $n+1$ 乗以上の項なのでまとめて $O(x^{n+1})$ と表せて,

$$f(x)g(x) = a_0b_0 + (a_1b_0 + a_0b_1)x + \cdots + (a_nb_0 + a_{n-1}b_1 + \cdots + a_0b_n)x^n + O(x^{n+1}) \quad (x \rightarrow 0)$$

例 9.11 $e^x \cos x$ の Taylor 展開を x^5 の項まで計算すると

$$\begin{aligned} e^x \cos x &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120} + O(x^6)\right) \left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + O(x^6)\right) \\ &= \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^5}{120}\right) - \frac{x^2}{2} \left(1 + x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) + \frac{x^4}{24} (1 + x) + O(x^6) \\ &= 1 + x - \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{6} - \frac{x^5}{30} + O(x^6) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

例 9.12 $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3)$, $1 - \cos x = \frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24} + O(x^6)$ ($x \rightarrow 0$) より

$1 - \cos x = O(x^2)$ に注意すると,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos x} &= \frac{1}{1 - (1 - \cos x)} = 1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + O((1 - \cos x)^3) \\ &= 1 + (1 - \cos x) + (1 - \cos x)^2 + O(x^6) \\ &= 1 + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right) + \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^4}{24}\right)^2 + O(x^6) = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{5}{24}x^4 + O(x^6) \quad (x \rightarrow 0) \end{aligned}$$

これは5次の Taylor 展開である. さらに積の計算により $\tan x = \sin x \cdot \frac{1}{\cos x}$ の Taylor 展開を求めることもできる.

テイラー展開による極限の計算 $f(x)$ と $g(x)$ が a を含む開区間で定義されているとき,

$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ を Taylor 展開とオーダーの記号を用いて求めることができる. a_n と b_m を 0 でない定数として

$$f(x) = a_n(x-a)^n + O((x-a)^{n+1}), \quad g(x) = b_m(x-a)^m + O((x-a)^{m+1}) \quad (x \rightarrow a)$$

が成立しているとする. $n > m$ ならば分母と分子を $(x-a)^m$ で割ると

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n(x-a)^{n-m} + O((x-a)^{n-m+1})}{b_m + O(x-a)} \quad (x \rightarrow a)$$

と表せて, $x \rightarrow 0$ のとき分子は 0 に収束し, 分母は b_m に収束するので, 極限は 0 である. 同様にして, $n < m$ ならば ∞ または $-\infty$ に発散することがわかる. 最後に $n = m$ のときは,

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_n + O(x-a)}{b_n + O(x-a)} \quad (x \rightarrow a)$$

と表されるから, 極限は $\frac{a_n}{b_n}$ である.

例 9.13 $\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$ と $e^{x-x^2} = 1 + x - \frac{1}{2}x^2 + O(x^3)$ ($x \rightarrow 0$) より

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{e^{x-x^2} - 1 - x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)}{-\frac{1}{2}x^2 + O(x^3)} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2} + O(x)}{-\frac{1}{2} + O(x)} = -1$$

目次

1	実数	1
1.1	実数と数直線	1
1.2	実数の部分集合と区間	3
2	数列と無限級数	4
2.1	数列の極限	4
2.2	無限級数	8
3	関数とその連続性	11
3.1	関数の定義域と値域	11
3.2	逆関数と合成関数	12
3.3	関数の極限	14
3.4	連続関数とその性質	17
4	初等関数	19
4.1	多項式関数と有理関数	19
4.2	指数関数	19
4.3	対数関数	24
4.4	べき乗関数	25
4.5	三角関数	25
4.6	逆三角関数	26
4.7	基本的な極限	28
5	微分	30
5.1	微分係数と接線	30
5.2	導関数とその性質	32
5.3	初等関数の導関数	34
5.4	平均値の定理	37
5.5	高次導関数	39
6	導関数の応用	41
6.1	関数の増減と極大極小	41
6.2	最大最小問題	46
6.3	関数の凹凸	48
6.4	漸近線	49
6.5	曲線の媒介変数表示と陰関数表示	51
7	不定積分	59
7.1	原始関数と不定積分	59
7.2	置換積分と部分積分	62

7.3	有理関数の不定積分	64
8	定積分	72
8.1	定積分の定義と性質	72
8.2	微分積分学の基本定理	77
8.3	置換積分と部分積分	79
8.4	広義積分	81
8.5	定積分の応用（面積・体積・曲線の長さ）	85
9	テイラー (Taylor) の定理	90
9.1	関数の近似値とテイラー (Taylor) の公式	90
9.2	テイラー (Taylor) 展開	96