「環と加群の基礎」演習問題

大阿久 俊則

1　環

1.1　環の定義と例

問題 1.1 次の集合 R は実数体 $\mathbb{R}$ の部分環であるかどうか判定せよ．理由も述べること．

(1) $R = \dfrac{1}{2}\mathbb{Z} = \left\{ \dfrac{n}{2} \mid n \in \mathbb{Z} \right\}$

(2) 有限小数（整数を含む）で表されるような実数の全体 R

問題 1.2 R を複素数体 $\mathbb{C}$ の部分環とすると $\mathbb{Z} \subset R$ であることを示せ.

問題 1.3 直積集合 $\mathbb{Z}^2 = \{(a, b) \mid a \in \mathbb{Z},\, b \in \mathbb{Z}\}$ を考え，$\mathbb{Z}^2$ の加法と乗法を，$a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ に対して

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b)(c, d) = (ac, bd)$$

で定義する.

(1) この 2 つの演算によって $\mathbb{Z}^2$ は可換環になることを示せ.

(2) $\mathbb{Z}^2$ は整域か?

(3) $\mathbb{Z}^2$ の可逆元をすべて求めよ.

問題 1.4 $\mathbb{C}$ の部分環 $\mathbb{Q}[\sqrt{-1}] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位）は体であることを示せ.

問題 1.5 $\mathbb{C}$ の部分環 $\mathbb{Z}[\sqrt{-1}] = \{a + bi \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$ ($i = \sqrt{-1}$ は虚数単位）の単元をすべて求めよ.（ヒント：絶対値の 2 乗 $|a + bi|^2 = a^2 + b^2$ を考察せよ.）

問題 1.6 $R = \left\{ \dfrac{n}{2^k} \mid n \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ とおく.

(1) R は有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分環であり，$\mathbb{Z} \subsetneqq R \subsetneqq \mathbb{Q}$ が成り立つことを示せ.

(2) R の単元（可逆元）の全体はどのような集合になるか？具体的に述べよ.

問題 1.7 $R = \left\{ \dfrac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z},\, m \text{ は正の奇数} \right\}$ とおく.

(1) R は有理数体 $\mathbb{Q}$ の部分環であり，$\mathbb{Z} \subsetneqq R \subsetneqq \mathbb{Q}$ が成り立つことを示せ.

(2) R の単元（可逆元）の全体はどのような集合になるか？具体的に述べよ.

1.2 環準同型

問題 1.8 整数 $n \in \mathbb{Z}$ に対して，写像 $f_n : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f_n(k) = nk$ $(\forall k \in \mathbb{Z})$ で定義する．f_n が環準同型であるための n に対する必要十分条件を求めよ．

問題 1.9 R と R' を環，$f : R \to R'$ を環準同型とする．f が単射（1 対 1）であるための必要十分条件は $\{a \in R \mid f(a) = 0_{R'}\} = \{0_R\}$ であることを示せ．

問題 1.10 R と R' を環，$f : R \to R'$ を環同型とすると，逆写像 $f^{-1} : R' \to R$ も環同型であることを示せ．

問題 1.11 $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}$ への環準同型は恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{Z}}$ のみであることを示せ．

問題 1.12 $\mathbb{Q}$ から $\mathbb{Q}$ への環準同型は恒等写像 $\mathrm{id}_{\mathbb{Q}}$ のみであることを示せ．

問題 1.13 $\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}^2$ への環準同型をすべて求めよ．ただし $\mathbb{Z}^2$ は問題 1.3 で定義した環とする．

問題 1.14 $f : \mathbb{Z}^2 \to \mathbb{Z}$ を環準同型とする．

(1) ある整数 a, b が存在して，すべての $(m, n) \in \mathbb{Z}^2$ について

$$f((m, n)) = am + bn$$

が成立することを示せ．（ヒント：$f((1, 0))$ と $f((0, 1))$ に着目するとよい．）

(2) f が環準同型になるような整数 a, b を求めよ．（ヒント:$(1, 0)(1, 0) = (1, 0), (0, 1)(0, 1) = (0, 1)$ を用いるとよい．）

問題 1.15 $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ は環準同型であり，任意の $a \in \mathbb{R}$ に対して $f(a) = a$ が成り立つとする．$i = \sqrt{-1}$ とおく．

(1) $f(i) = i$ または $f(i) = -i$ であることを示せ．（ヒント： $i^2 + 1 = 0$ を用いる．）

(2) f を具体的に求めよ．また f は環同型であることを示せ．

1.3 多項式環

問題 1.16 整数係数の多項式環 $\mathbb{Z}[x]$ において $f = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + 4x - 5$ を $g = x^2 - x + 1$ で割り算せよ．

問題 1.17 有理数係数の多項式 $f \in \mathbb{Q}[x]$ を $x - 1$ で割り算した余りが 6, f を $x^2 + x + 1$ で割り算した余りが $x + 2$ であるとき，f を $x^3 - 1$ で割り算した余りを求めよ．

問題 1.18 K を体として，a, b を K の相異なる 2 つの元とする．多項式 $f = f(x) \in K[x]$ が $K[x]$ において $x-a$ でも $x-b$ でも割り切れる（余りが 0）ならば，f は $(x-a)(x-b)$ で割り切れることを剰余定理を用いて証明せよ．

1.4 イデアル

問題 1.19 次の各々の環 R とその部分集合 I について，I が R のイデアルであるかどうか判定せよ．理由も述べること．

(1) $R = \mathbb{Z}, \quad I = \mathbb{N} \cup \{0\} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$

(2) $R = \mathbb{Z}, \quad I = \{n \in \mathbb{Z} \mid n \text{ は奇数}\}$

(3) $R = \mathbb{Z}[x], \quad I = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid f = 0 \text{ または } f \text{ の係数はすべて偶数}\}$

(4) $R = \mathbb{Z}[x], \quad I = \{f(x) \in \mathbb{Z}[x] \mid f(1) \in 2\mathbb{Z}\}$

(5) $R = \mathbb{Q}[x], \quad I = \{f(x) \in \mathbb{Q}[x] \mid f(\sqrt{2}) = 0\}$

問題 1.20 I と J を可換環 R のイデアルとするとき，$I + J$ と $I \cap J$ も R のイデアルであることを示せ．

問題 1.21 R を可換環，R' を R の部分環，I を R のイデアルとする．このとき $I \cap R'$ は R' のイデアルであることを示せ．

問題 1.22 R と R' を可換環，$f : R \to R'$ を環準同型とする．

(1) I' を R' のイデアルとすると，$f^{-1}(I')$ は R のイデアルであることを示せ．

(2) f が全射で I が R のイデアルであるとき $f(I)$ は R' のイデアルであることを示せ．

(3) R のイデアル I に対して $f(I)$ が R' のイデアルにならないような R, I, f, R' の例をあげよ．

問題 1.23 (1) 体 K のイデアルは $\{0\}$ と K の 2 つであることを示せ．

(2) 可換環 R において $0 \neq 1$ であり R のイデアルは $\{0\}$ と R の 2 つのみであるとする．このとき R は体であることを示せ．

問題 1.24 K を体，R を可換環とする．写像 $f : K \to R$ が環準同型ならば f は単射であることを示せ．

問題 1.25 I を環 $\mathbb{Z}^2$ のイデアルとする．

(1) $(a, b) \in I$ ならば $(a, 0) \in I$ かつ $(0, b) \in I$ であることを示せ．

(2) $I_1 = \{a \in \mathbb{Z} \mid (a, 0) \in I\}$ と $I_2 = \{a \in \mathbb{Z} \mid (0, a) \in I\}$ は $\mathbb{Z}$ のイデアルであることを示せ．

(3) $I = I_1 \times I_2 = \{(a, b) \mid a \in I_1, \, b \in I_2\}$ が成立することを示せ．

1.5 剰余環と環準同型定理

問題 1.26 剰余環 $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の加法と乗法の演算表を作れ．また，演算表を用いて $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ の単元をすべて求めよ．

問題 1.27 $R = \mathbb{Z}/8\mathbb{Z}$ とおく．

(1) R の加法と乗法の演算表を作れ．

(2) 演算表を用いて R の単元をすべて求めよ．

(3) 演算表を用いて R の零因子をすべて求めよ．

問題 1.28 $R = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$ とおく．

(1) R の乗法の演算表を作れ．

(2) 演算表を用いて R の単元をすべて求めよ．

(3) 演算表を用いて R の零因子をすべて求めよ．

問題 1.29 $R = \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ として剰余環 $S := R[x]/R[x](x^2+x+1)$ を考察する．ただし，正確には $\overline{1}$ を $1 \in \mathbb{Z}$ の $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ における剰余類とするとき $x^2+x+1 = \overline{1}x^2 + \overline{1}x + \overline{1} \in R[x]$ とみなしている．

(1) S は集合としてどのような元からなるか? 特に S の元の個数を求めよ．

(2) S の加法と乗法の演算表を作れ．

(3) S は体であることを (2) から確認せよ．

問題 1.30 $\mathbb{R}$ を実数体，$\mathbb{C}$ を複素数体，$i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として，環準同型 $\rho : \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ を $f = f(x) \in \mathbb{R}[x]$ に対して $\rho(f) = f(i)$ で定義する．

(1) ρ は全射であることを示せ．

(2) $f(x) \in \mathbb{R}[x]$ を x^2+1 で割り算した余りを $ax+b$ $(a, b \in \mathbb{R})$ とするとき $f(i) = ai+b$ を示せ．

(3) $\operatorname{Ker}\rho = \mathbb{R}[x](x^2+1)$ であることを示せ．

(4) 剰余環 $\mathbb{R}[x]/\operatorname{Ker}\rho$ は $\mathbb{C}$ と同型であることを示せ．

問題 1.31 可換環 R において零因子は単元ではないことを証明せよ．

問題 1.32 環 $\mathbb{Z}^2$ の零因子をすべて求めよ．

1.6 ユークリッド整域と単項イデアル整域

問題 1.33 次の $\mathbb{Z}$ のイデアルを単項イデアル（ある元の倍元全体）で表せ．ただし $n \in \mathbb{Z}$ に対して $n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}n$ は n の倍数全体の集合を表す．

(1) $24\mathbb{Z} + 15\mathbb{Z}$ (2) $2014\mathbb{Z} + 2520\mathbb{Z}$ (3) $15\mathbb{Z} + 36\mathbb{Z} + 16\mathbb{Z}$

問題 1.34 多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ において，次のイデアルを単項イデアルで表せ．

(1) $\mathbb{Q}[x](x^2-1) + \mathbb{Q}[x](x^3+1)$ (2) $\mathbb{Q}[x](x^4+x^2+1) + \mathbb{Q}[x](x^4+2x^3+x^2-1)$

問題 1.35 $3978a + 3465b = 9$ が成立するような整数 a, b を一組求めよ．

問題 1.36 多項式環 $\mathbb{Q}[x]$ において，$a(x)(x^3+1) + b(x)(x^2+1) = 1$ が成立するような $a(x), b(x) \in \mathbb{Q}[x]$ を一組求めよ．

問題 1.37 n を 2 以上の自然数とする．整数 k に対して k の $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ における剰余類を $\overline{k}$ で表す．

(1) $\overline{k}$ が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の単元であることと，$kl + qn = 1$ を満たす整数 l, q が存在することは同値であることを示せ．

(2) $\overline{k}$ が $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ の単元であることと，k と n が互いに素であることは同値であることを示せ．

(3) $\mathbb{Z}/16\mathbb{Z}$ の単元の個数を求めよ．

(4) $\mathbb{Z}/30\mathbb{Z}$ の単元の個数を求めよ．

問題 1.38 R を単項イデアル整域として a, b を R の 0 と異なる元とする．d を a と b の最大公約元とすると $a = a'd$, $b = b'd$ を満たす $a', b' \in R$ が存在する．このとき $e = a'b'd$ とおく．

(1) $Ra \cap Rb \supset Re$ を示せ．

(2) $ua' + vb' = 1$ を満たす整数 u, v が存在することを示せ．

(3) $c \in R$ が $Ra \cap Rb$ に属すと仮定する．$c = c(ua' + vb')$ を用いて c は e の倍元であることを示せ．

(4) $Ra \cap Rb = Re$ を示せ．

問題 1.39 前問を用いて $36\mathbb{Z} \cap 54\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$ の単項イデアルで表せ．

問題 1.40 $\mathbb{Z}[x]$ のイデアル $I = 2\mathbb{Z}[x] + x\mathbb{Z}[x] = \{2f + xg \mid f, g \in \mathbb{Z}[x]\}$ は単項イデアルではないことを示せ．

問題 1.41 $\mathbb{Q}$ の部分環 $R = \left\{ \dfrac{n}{2^k} \mid n \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ を考察する．

(1) I を R のイデアルとすると，ある非負整数 m が存在して $I = Rm$ が成立することを示せ.（特に R は単項イデアル整域である.）
(ヒント：I を R の $\{0\}$ と異なるイデアルとするとき，I に含まれる最小の自然数を考察せよ．)

(2) R の相異なるイデアルは $\{0\}$ と Rm (m は正の奇数) であることを示せ.

問題 1.42 $\mathbb{Q}$ の部分環 $R = \left\{ \dfrac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z},\, m \text{ は正の奇数} \right\}$ を考察する．

(1) I を R のイデアルとすると，ある非負整数 m が存在して $I = Rm$ が成立することを示せ.（特に R は単項イデアル整域である.）

(2) R の相異なるイデアルは $\{0\}$ と $R2^k$ ($k = 0, 1, 2, \ldots$) であることを示せ.

1.7 素イデアルと極大イデアル

問題 1.43 R を可換環とする．$\{0\}$ が R の素イデアルであることと R が整域であることとは同値であることを示せ.

問題 1.44 R を可換環，R' を R の部分環とする．

(1) I が R の真のイデアルならば $I \cap R'$ は R' の真のイデアルであることを示せ.

(2) I が R の素イデアルならば $I \cap R'$ は R' の素イデアルであることを示せ.

問題 1.45 p を素数とする．

(1) $p\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(np, m) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ は環 $\mathbb{Z}^2$ の極大イデアルであることを示せ.

(2) $p\mathbb{Z} \times p\mathbb{Z} = \{(np, mp) \mid n, m \in \mathbb{Z}\}$ は環 $\mathbb{Z}^2$ の素イデアルではないことを示せ.

(3) $\{0\} \times \mathbb{Z} = \{(0, m) \mid m \in \mathbb{Z}\}$ は環 $\mathbb{Z}^2$ の素イデアルであるが極大イデアルではないことを示せ.

(4) $\{(0, 0)\}$ は環 $\mathbb{Z}^2$ の素イデアルか？

問題 1.46 環 $\mathbb{Z}^2$ の極大イデアルをすべて求めよ.

問題 1.47 $c \in \mathbb{Z}$ に対して，環準同型 $\rho_c : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ を $\rho_c(f) = f(c)$ ($f = f(x) \in \mathbb{Z}[x]$) で定義する.

(1) $\mathrm{Ker}\, \rho_c = \mathbb{Z}[x](x - c)$ が成立することを示せ.

(2) $\mathbb{Z}[x](x - c)$ は素イデアルであるが極大イデアルではないことを示せ.

問題 1.48 任意の $c \in \mathbb{Z}$ と任意の素数 p に対して $J = \mathbb{Z}[x](x-c) + \mathbb{Z}[x]p$ とおく．環準同型 $\rho_c : \mathbb{Z}[x] \to \mathbb{Z}$ は前問と同じとする．

(1) $f \in \mathbb{Z}[x]$ に対して，整数 $f(c)$ を p で割った余りを r とする．このとき $f \in J$ と $r = 0$ は同値であることを示せ．

(2) $\pi : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ を自然な全射環準同型 $(\pi(k) = \overline{k})$ とするとき，$\mathrm{Ker}\,(\pi \circ \rho_c) = J$ であることを示せ．

(3) J は $\mathbb{Z}[x]$ の極大イデアルであることを示せ．

問題 1.49 $\mathbb{Q}$ の部分環 $R = \left\{ \dfrac{n}{2^k} \mid n \in \mathbb{Z},\, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ の素イデアルをすべて求めよ．また，それらのうち極大イデアルとなるのはどれか？ (ヒント：I を R の素イデアルとするとき，$I \cap \mathbb{Z}$ を考察せよ．)

問題 1.50 $\mathbb{Q}$ の部分環 $R = \left\{ \dfrac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z},\, m \text{ は正の奇数} \right\}$ の素イデアルをすべて求めよ．また，それらのうち極大イデアルとなるのはどれか？

問題 1.51 R を可換環，I_0 を R のイデアルとする．$\pi : R \to R/I_0$ を自然な全射準同型（$a \in R$ に対して $\pi(a) = \overline{a}$ は a の R/I_0 における同値類）とする．

(1) J を R/I_0 のイデアルとするとき $I := \pi^{-1}(J)$ は R のイデアルであり，$I \supset I_0$ が成立することを示せ．

(2) I が R のイデアルであり $I \supset I_0$ ならば $J := \pi(I)$ は R/I_0 のイデアルであることを示せ．

(3)

$$\mathcal{I} := \{I \mid I \text{ は } R \text{ のイデアルかつ } I \supset I_0\}, \qquad \mathcal{J} := \{J \mid J \text{ は } R/I_0 \text{ のイデアル}\}$$

とおき，写像 $\Phi : \mathcal{I} \to \mathcal{J}$ を $\Phi(I) = \pi(I)$ $(I \in \mathcal{I})$ で定義し，写像 $\Psi : \mathcal{J} \to \mathcal{I}$ を $\Psi(J) = \pi^{-1}(J)$ $(J \in \mathcal{J})$ で定義する．このとき Φ と Ψ は全単射であって互いに逆写像になっていることを示せ．

(4) $I \in \mathcal{I}$ に対して，I が R の極大イデアルであることと $\pi(I)$ が R/I_0 の極大イデアルであることとは同値であることを示せ．（ヒント：(3) の対応を用いる.）

(5) $I \in \mathcal{I}$ に対して，剰余環 $(R/I_0)/\pi(I)$ は環として R/I と同型であることを示せ．（ヒント：環準同型写像 $R \to R/I_0 \to (R/I_0)/\pi(I)$ に環準同型定理を用いる.）

(6) $I \in \mathcal{I}$ に対して，I が R の素イデアルであることと $\pi(I)$ が R/I_0 の素イデアルであることとは同値であることを示せ．

問題 1.52 (1) $\mathbb{Z}/32\mathbb{Z}$ のイデアルをすべて求めよ．そのうち，極大イデアルとなるのはどれか? また，素イデアルをすべて求めよ．

(2) $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$ のイデアルをすべて求めよ．そのうち，極大イデアルとなるのはどれか? また，素イデアルをすべて求めよ．

1.8 素元分解整域

問題 1.53 $\mathbb{Z}$ において 96577 を素元分解せよ.

問題 1.54 $\mathbb{Q}[x]$ において x^4+x^2+1 を素元分解せよ.（結果が素元分解であることを証明せよ.）また $\mathbb{C}[x]$ において x^4+x^2+1 を素元分解せよ.

問題 1.55 $R := \mathbb{Z}[\sqrt{-5}]$ とする.

(1) $1+\sqrt{-5}$ と $1-\sqrt{-5}$ は R において 2 の倍元ではないことを示せ.

(2) $3, 1+\sqrt{-5}, 1-\sqrt{-5}$ はどれも R の素元ではないことを示せ.
（ヒント： $2\cdot 3 = (1+\sqrt{-5})(1-\sqrt{5}) = 6$ を用いる.）

(3) R の単元をすべて求めよ.（ヒント：R の元の絶対値の 2 乗を考えるとよい.）

(4) 2 と 3 は R の既約元であることを示せ.（ヒント：既約元でないと仮定して絶対値の 2 乗を考察せよ.）

(5) $1+\sqrt{-5}$ と $1-\sqrt{-5}$ は R の既約元であることを示せ.

問題 1.56 (1) n を平方数でない整数として $f = x^2 - n \in \mathbb{Q}[x]$ とおく. f は $\mathbb{Q}[x]$ の既約元であることを示せ.（$\sqrt{n}$ が有理数でないことは用いてよい.）

(2) $I := \mathbb{Q}[x]f$ は $\mathbb{Q}[x]$ の極大イデアルであることを示せ.

(3) $\mathbb{Q}[\sqrt{n}] = \{a + b\sqrt{n} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ とおき，写像 $\rho : \mathbb{Q}[x] \to \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ を $g \in \mathbb{Q}[x]$ に対して $\rho(g) = g(\sqrt{n})$ で定義する. ρ は全射環準同型であることを示せ.

(4) $\mathbb{Q}[x]/I \simeq \mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ を示せ.（よって $\mathbb{Q}[\sqrt{n}]$ は体である.）

問題 1.57 $f = x^3 + x + 1 \in \mathbb{F}_2[x]$ とおく. ($\overline{1} \in \mathbb{F}_2$ を簡単のため 1 と表している.）

(1) f は $\mathbb{F}_2[x]$ の既約元であることを示せ.

(2) $I := \mathbb{F}_2[x]f$ は $\mathbb{F}_2[x]$ の極大イデアルであることを示せ.

(3) $L := \mathbb{F}_2[x]/I$ は体であることを示し，その元を具体的に表せ.

問題 1.58 $R = \left\{ \dfrac{n}{2^k} \mid n \in \mathbb{Z}, k \in \mathbb{N} \cup \{0\} \right\}$ とおくとき次を示せ.

(1) m を自然数とするとき，m が R の既約元であるための必要十分条件を求めよ.
（ヒント： m の $\mathbb{Z}$ における（通常の）素因数分解を考察せよ.）

(2) R の既約元をすべて求めよ. (ただし単元倍して等しくなるような 2 つの既約元は同一視する.)

問題 1.59 $R = \left\{ \dfrac{n}{m} \mid n \in \mathbb{Z}, m \text{ は正の奇数} \right\}$ とおくとき次を示せ.

(1) m を自然数とするとき，m が R の既約元であるための必要十分条件を求めよ.

(2) R の既約元をすべて求めよ. (ただし単元倍して等しくなるような 2 つの既約元は同一視する.)

1.9 整域の商体

問題 1.60 商体の和と積の定義が well-defined である (同値類の選び方によらない）ことを示し，商体が可換環となることを証明せよ．

問題 1.61 K を体とすると，K の商体は K と同型であることを示せ．

問題 1.62 $\mathbb{Z}[x]$ の商体は $\mathbb{Q}(x)$（と同型）であることを示せ．

問題 1.63 K を体とする．$K[x]$ に属する多項式のうち x の 1 次の項を含まないようなもの（たとえば x^3+3x^2+4 など）の全体を R とする．

(1) R は $K[x]$ の部分環であることを示せ．

(2) R の商体は $K(x)$ （と同型）であることを示せ．

2 加群

2.1 加群の定義と例

問題 2.1 M を可換環 R の上の加群，N_1 と N_2 を M の部分 R 加群とする．

(1) $N_1+N_2 := \{u_1+u_2 \mid u_1 \in N_1,\, u_2 \in N_2\}$ は M の部分 R 加群であることを示せ．

(2) $N_1 \cap N_2$ は M の部分 R 加群であることを示せ．

(3) $u_1, \ldots u_m \in M$ に対して $Ru_1+\cdots+Ru_m = \{a_1u_1+\cdots a_mu_m \mid a_1,\ldots,a_m \in R\}$ は M の部分 R 加群であることを示せ．

問題 2.2 M と N を可換環 R 上の加群，$f: M \to N$ を R 準同型とする．$\operatorname{Ker} f$ は M の部分 R 加群であり，$\operatorname{Im} f$ は N の部分 R 加群であることを示せ．

問題 2.3 M と N を可換環 R の上の加群，$f: M \to N$ を R 準同型とする．

(1) f が単射であるための必要十分条件は $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ であることを示せ．

(2) f が R 同型，すなわち全単射ならば逆写像 $f^{-1}: N \to M$ も R 準同型であることを示せ．

問題 2.4 L, M, N を可換環 R の上の加群，$f: L \to M$ と $g: M \to N$ を R 準同型とすると，合成写像 $g \circ f: L \to N$ も R 準同型であることを示せ．

問題 2.5 有理整数環 $\mathbb{Z}$ を $\mathbb{Z}$ 上の加群（すなわちアーベル群）とみなす．整数 n に対して写像 $f_n: \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ を $f_n(a) = na$ $(\forall a \in \mathbb{Z})$ で定義する．

(1) f_n は $\mathbb{Z}$ 加群としての準同型であることを示せ．

(2) $\mathrm{Im}\, f_n$ と $\mathrm{Ker}\, f_n$ を求めよ．

(3) f_n が $\mathbb{Z}$ 同型であるための n に対する条件を求めよ．

(4) $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ が $\mathbb{Z}$ 加群としての準同型ならば，ある整数 n が存在して $f = f_n$ となることを示せ．

(5) f_n が環準同型となるような n を求めよ．

問題 2.6 M, N を可換環 R 上の加群とするとき，M から N への R 準同型の全体を $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ で表す．$f, g \in \mathrm{Hom}_R(M, N)$ と $a \in R$ に対して M から N への写像 $f + g$ と af を

$$(f+g)(u) = f(g) + g(u), \qquad (af)(u) = af(u) \qquad (\forall u \in M)$$

で定義する．

(1) $f + g$ と af は R 準同型であることを示せ．

(2) この和と R の作用により $\mathrm{Hom}_R(M, N)$ は R 加群になることを示せ．

(3) R を R 加群とみなすとき $\mathrm{Hom}_R(R, N)$ と N は R 加群として同型であることを示せ．

問題 2.7 n を 2 以上の自然数として $M := \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ を加法に関するアーベル群，すなわち $\mathbb{Z}$ 加群とみなす．整数 m に対して写像 $f_m : M \to M$ を $f_m(\overline{x}) = \overline{mx}$ $(x \in \mathbb{Z})$ で定義する．

(1) f_m は $\mathbb{Z}$ 準同型であることを示せ．

(2) 整数 m, l について，$f_m = f_l$ となるための必要十分条件は $m - l$ が n の倍数であることを示せ．

(3) $f : M \to M$ を $\mathbb{Z}$ 準同型とすると，$0 \le m \le n-1$ かつ $f = f_m$ を満たす m が存在することを示せ．

問題 2.8 n と m が互いに素な自然数ならば，$\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ から $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ への $\mathbb{Z}$ 準同型は 0 写像のみであることを示せ．

2.2 自由加群と有限生成加群

問題 2.9 (1) $M_3 := \{(u_1, u_2, u_3) \in \mathbb{Z}^3 \mid u_1 + u_2 + u_3 = 0\}$ は $\mathbb{Z}^3$ の部分加群であることを示し，その基底を一組求めよ．

(2) $f : M_3 \to M_3$ を $f((u_1, u_2, u_3)) = (u_2, u_3, u_1)$ で定める．f は $\mathbb{Z}$ 同型であることを示し，(1) で求めた基底に関する行列表示を求めよ．

問題 2.10 V を $\mathbb{C}$ 上の n 次元ベクトル空間，$T : V \to V$ を $\mathbb{C}$ 線形写像とする．もし V の元 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ と複素数 α が存在して

$$T\mathbf{v}_1 = \alpha\mathbf{v}_1, \quad T\mathbf{v}_j = \alpha\mathbf{v}_j + \mathbf{v}_{j-1} \quad (2 \leq j \leq n)$$

が成立すれば，$\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ は V の基底であることを示し，この基底に関する T の行列表示を求めよ．

2.3 可換環の元を成分とする行列と行列式

問題 2.11 a, b, c を整数とするとき，行列 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix}$ が $M_2(\mathbb{Z})$ の可逆元（ユニモジュラー行列）になるための a, b, c に対する必要十分条件を求めよ．また，そのとき A の逆行列 A^{-1} を求め $M_2(\mathbb{Z})$ に属することを確かめよ．

問題 2.12 n を平方数でない整数として $M := \mathbb{Z}[\sqrt{n}]$ をアーベル群，すなわち $\mathbb{Z}$ 加群とみなす．

(1) M は 1 と $\sqrt{n}$ を基底とする自由加群であることを示せ．

(2) $a, b \in \mathbb{Z}$ を固定して写像 $f : M \to M$ を $\alpha \in M$ に対して $f(\alpha) = (a + b\sqrt{n})\alpha$ で定義する．f は $\mathbb{Z}$ 準同型であることを示せ．

(3) f の基底 $1, \sqrt{n}$ に関する行列表示を求めよ．

(4) f が $\mathbb{Z}$ 同型となるための a, b に対する条件を求めよ．

(5) $n = -1$ のとき，f が $\mathbb{Z}$ 同型となるような a, b の組をすべて求めよ．

問題 2.13 $M = \{f \in \mathbb{Z}[x] \mid \deg f \leq 2\}$ とおく．M は $1, x, x^2$ を基底とする自由 $\mathbb{Z}$ 加群である．

(1) 整数 n を固定して，$P : M \to M$ を $f(x) \in M$ に対して

$$P(f(x)) = (x+1)f'(x) - nf(x)$$

で定義する（$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数）．P は $\mathbb{Z}$ 準同型であることを示せ．

(2) P の基底 $1, x, x^2$ に関する行列表示を求めよ．

(3) P は全単射ではないことを示せ．

(4) P が単射にならないような n をすべて求め，そのときの $\operatorname{Ker} P$ の基底を求めよ．

2.5 単因子

問題 2.14 整数を成分とする次の行列の単因子を求めよ．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 9 & 6 & 20 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 6 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad (4)\quad \begin{pmatrix} 36 & -24 \\ -18 & 9 \end{pmatrix}$$

問題 2.15 整数を成分とする次の行列の単因子を求めよ．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 6 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & -4 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -2 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} 2 & -6 & 4 \\ -2 & 9 & 0 \\ 0 & 4 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 2.16 $\mathbb{Q}[x]$ の元を成分とする次の行列の単因子を求めよ．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} x-1 & -1 \\ 0 & x-1 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 0 & x-2 \end{pmatrix}$$

問題 2.17 $\mathbb{Q}[x]$ の元を成分とする次の行列の単因子を求めよ．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & 0 \\ 0 & 0 & x-2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} x-1 & -1 & 0 \\ 0 & x-1 & -1 \\ 0 & 0 & x-1 \end{pmatrix}$$

$$(3)\quad \begin{pmatrix} x-1 & 0 & 0 \\ 0 & x-2 & 0 \\ 0 & 0 & x-3 \end{pmatrix}$$

2.6 剰余加群と準同型定理

問題 2.18 定理 2.4（加群の準同型定理）において $\overline{f}$ が R 準同型であることを示せ．

問題 2.19 $V=\mathbb{R}^3$ を実数を成分とする 3 次元縦ベクトルからなる数ベクトル空間とする．ベクトル ${}^t(1,-1,2)$ の張る部分空間を W とするとき，商ベクトル空間 V/W の基底を一組求めよ．

問題 2.20 問題 2.15 の (1)–(4) の各々の行列の定める $\mathbb{Z}$ 準同型の核と余核はどのような加群になるか?（余核は可能な限り直和に分解すること．）

問題 2.21 問題 2.16 の (1)–(3) の各々の行列の定める $\mathbb{Z}$ 準同型の核と余核はどのような加群になるか?（余核は可能な限り直和に分解すること．）

問題 2.22 問題 2.17 の (1)–(3) の各々の行列の定める $\mathbb{Q}[x]$ 準同型の核と余核はどのような加群になるか?（余核は可能な限り直和に分解すること．）

問題 2.23 問題 2.18 の (1)–(3) の各々の行列の定める $\mathbb{Q}[x]$ 準同型の核と余核はどのような加群になるか?（余核は可能な限り直和に分解すること．）

2.7 ユークリッド整域上の有限生成加群

問題 2.24 R を可換環，M を R 加群とするとき，$\mathrm{Ann}_R M = \{a \in R \mid au = 0\ (\forall u \in M)\}$ とおく．

(1) $\mathrm{Ann}_R M$ は R のイデアルであることを示せ．

(2) $R = \mathbb{Z}$，$M = (\mathbb{Z}/8\mathbb{Z}) \oplus (\mathbb{Z}/36\mathbb{Z})$ のとき $\mathrm{Ann}_{\mathbb{Z}} M$ を求めよ．

問題 2.25 R を可換環，M_1 と M_2 を R 加群として，$M = M_1 \oplus M_2$ とおく．$k = 1, 2$ に対して写像 $p_k : M \to M_k$ を $p_k((u_1, u_2)) = u_k$ $(u_1 \in M_1,\ u_2 \in M_2)$ で定義する．

(1) p_k は全射 R 準同型であることを示せ．($k = 1$ のときのみ示せば十分.）

(2) $\mathrm{Ker}\, p_k$ を求めよ．

(3) M_1 と $M_1 \oplus \{0\} = \{(u_1, 0) \mid u_1 \in M\}$ を同一視して，M_1 を $M_1 \oplus M_2$ の部分 R 加群とみなしたとき，M/M_1 と M_2 は R 加群として同型であることを示せ.（ヒント：(1)，(2) と加群に対する準同型定理を用いよ.）

問題 2.26 位数 240 のアーベル群の同型類（お互いに同型でないようなすべての群）を求めよ．

問題 2.27 M をユークリッド整域 R 上の有限生成加群とするとき，構造定理（定理 2.7）を用いて次を示せ．

(1) M が自由加群であるための必要十分条件は $TM = \{0\}$ である．

(2) M が自由加群ならば M の任意の部分 R 加群も自由加群である．

問題 2.28 M をユークリッド整域 R 上の有限生成加群とする．$M \neq \{0\}$ と仮定する．M が 1 つの元で生成されるための必要十分条件は，M に対応する単因子のうち単元でないものがただ 1 つであることである．これを次の方針で証明せよ．

(1) M に対応する単因子のうち単元でないものがただ 1 つであれば M は 1 つの元で生成されることを示す．

(2) M が 1 つの元 $u \in M$ で生成される，すなわち $M = Ru$ と仮定する．このとき，$\mathrm{Ann}_R u := \{a \in R \mid au = 0\}$ は R のイデアルであり，R 加群として $R/\mathrm{Ann}_R u \simeq M$ となることを示す．

2.8 行列の Jordan 標準形

問題 2.29 V を体 K 上の有限次元ベクトル空間として，$T : V \to V$ を K 線形写像とする．W を V の部分ベクトル空間とする．このとき W が $K[x]$ 加群 V_T の部分 $K[x]$ 加群であるための必要十分条件は $T(W) \subset W$ であることを示せ．

問題 2.30 単因子の計算を用いて次の行列の最小多項式と Jordan 標準形を求めよ．

$$(1)\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \qquad (2)\quad \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (3)\quad \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 6 & 0 & -4 \\ -3 & 1 & 4 \end{pmatrix} \qquad (4)\quad \begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 8 & -2 & 2 \\ -6 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

問題 2.31 単因子の計算を用いずに前問の各々の行列 A の Jordan 標準形を求め，$P^{-1}AP$ が Jordan 標準形となるような正則行列 P を一つ与えよ．

問題 2.32 $A \in M(n, \mathbb{C})$ に対して $I_A = \{f(x) \in \mathbb{C}[x] \mid f(A) = O\}$ とおく．また A の最小多項式を $\varphi_A(x)$ とする．このとき I_A は $\mathbb{C}[x]$ のイデアルであり，$I_A = \mathbb{C}[x]\varphi(x)$ となることを示せ．

問題 2.33 $A \in M(n, \mathbb{C})$ とするとき次を示せ．

(1) A が対角化可能（Jordan ブロックがすべて 1 次）であるための必要十分条件は，A の最小多項式が重根（重解）を持たない，すなわち相異なるモニックな 1 次式の積で表せることである．

(2) ある自然数 m があって $A^m = I_n$ であれば，A は対角化可能である．(ヒント: $x^m - 1$ は A の最小多項式で割り切れることを示せ．)