

微分方程式入門

大阿久俊則

目次

1	微分方程式の意味	1
1.1	微分方程式とは	1
1.2	微分方程式とベクトル場	2
1.3	曲線族と微分方程式	3
2	微分方程式の解法	4
2.1	変数分離形	4
2.2	初期値問題	8
2.3	1階線形微分方程式(定数変化法)	9
3	定数係数2階線形微分方程式	13
3.1	斉次方程式の解法	13
3.2	初期値問題	20
3.3	非斉次方程式の解法—演算子法	22

1 微分方程式の意味

1.1 微分方程式とは

x を独立変数, y を従属変数とする. y が x の関数であることを表すための厳密なやり方は, 関数に名前, 例えば f を付けて $y = f(x)$ と記すことであるが, いちいち関数に名前を付けるのは煩雑なので, y が x の関数であることを強調するときは $y = y(x)$ という記法を使うことにする. または単に y と書いて x の関数を表すこともある. この記号を使うと関数 y の導関数は

$$\frac{dy}{dx} = \frac{d}{dx}y(x) = y'(x) = f'(x)$$

などと表され, どれも同じ意味である.

未知の関数 $y = y(x)$ とその導関数, および x についての方程式を (1 階常) 微分方程式 (differential equation) という. たとえば

$$(1 + y^2) \frac{dy}{dx} + xy = 0$$

など. これを変形すると

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{xy}{1 + y^2}$$

となる. この右辺は次の 2 通りの解釈ができる.

- 2 つの独立変数 x と y についての 2 変数関数 $F(x, y) = -\frac{xy}{1 + y^2}$
- $y = y(x)$ は x の関数とみなす. すると右辺は x のみの関数 $-\frac{xy(x)}{1 + y(x)^2} = F(x, y(x))$ となる.

定義 1 一般に $F(x, y)$ を 2 つの独立変数 x, y の関数とするとき,

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y) \quad (1)$$

を正規形の 1 階微分方程式という.

関数 $y = y(x)$ が微分方程式 (1) の区間 I における解 (solution) であるとは,

$$y'(x) = F(x, y(x))$$

が任意の $x \in I$ について成立することである. (ある区間 I における解を, 定義域 I を明示せずに単に解と呼ぶことが多い.) 解のグラフを解曲線という.

たとえば C を任意定数とするとき, 関数 $y = Ce^x$ は微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y \quad (2)$$

の $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ における解である.

1.2 微分方程式とベクトル場

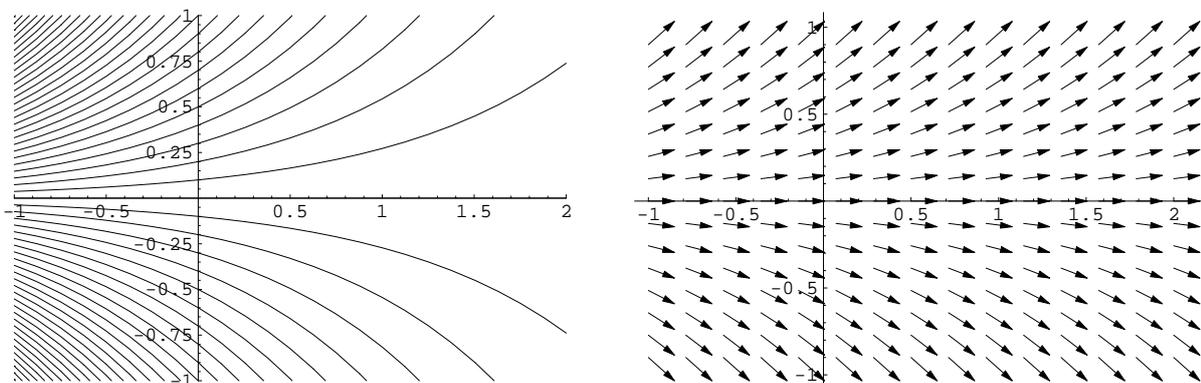
微分方程式 (1) の解 $y = y(x)$ のグラフ (解曲線) の点 (x_0, y_0) における接線の傾きは $y'(x_0)$ である. ($y_0 = y(x_0)$ とおいた.) 一方 $y = y(x)$ は (1) の解であるから,

$$y'(x_0) = F(x_0, y(x_0)) = F(x_0, y_0)$$

が成立する. これは, 点 (x_0, y_0) を通る (1) の解曲線の (x_0, y_0) における接線の傾きが $F(x_0, y_0)$ であることを意味している. 従って, xy 平面の各点 (x, y) にベクトル $(1, F(x, y))$

を対応させる (ベクトル場という) と, 微分方程式 (1) の解曲線は xy 平面の各点でこのベクトル場に接することになる. これが微分方程式の幾何学的意味である.

例として微分方程式 (2) を考える. 解 $y = Ce^x$ は C を一つ固定すると一つの関数を表し, 全体としては関数の集合 (関数族) となる. $y = Ce^x$ の (x_0, y_0) ($y_0 = Ce^{x_0}$) における接線の傾きは $Ce^{x_0} = y_0$ であり, ベクトル $(1, y_0)$ と同じ向きである. 解曲線は左下の図, ベクトル場は右下の図のようになる.



1.3 曲線族と微分方程式

x, y を座標とする平面において, x と y の式 $f(x, y)$ が与えられたとき, C を定数とすると $f(x, y) = C$ という式は一つの曲線を表す. C の一つの値に応じて一つの曲線が定まるから, C を動かすと, 曲線が無数にできる. このように定数 C (パラメータ) を含んだ曲線の式において C を変化させてできる無数の曲線の集まりのことを曲線族という.

たとえば $f(x, y) = e^{-x}y$ とすると, $e^{-x}y = C$ は $y = Ce^x$ という式と同値であり, C を動かすと左上の図のような曲線族ができる.

このように $f(x, y) = C$ という形の式で定義される曲線族は, 次の特別な性質を持つ:

- C の異なる値に対応する 2 つの曲線は交わらない.

実際 $C_1 \neq C_2$ として, $f(x, y) = C_1$ で定義される曲線と $f(x, y) = C_2$ で定義される曲線が交わるとすると $f(x, y) = C_1 = C_2$ を満たす点 (x, y) が少なくとも一つあることになり, $C_1 \neq C_2$ という仮定に反する.

さて, もともと平面上では x と y は独立 (無関係) な変数であるが, ひとつの曲線 $f(x, y) = C$ 上では, y を x の関数とみなすことができる. そうみなしたときの y を $y = y(x)$ と書こう. (この関数 $y(x)$ は定数 C の一つの値に対して定まるものだから, C が異なれば $y(x)$ も異なる.) こうして定まる関数 $y = y(x)$ の導関数を考えよう.

たとえば曲線 $e^{-x}y = C$ 上で $y = y(x)$ として両辺を x で微分すると,

$$-e^{-x}y + e^{-x}\frac{dy}{dx} = -e^{-x}y(x) + e^{-x}y'(x) = 0$$

を得る. (この式の左辺では $y(x)$ を単に y と書いている.) 従って関数 $y = y(x)$ は (C の任意の値について) 微分方程式 (2) の解であることがわかる. これは任意定数 C を含ま

ないから, (2) は異なる C に対応する無数の関数 (関数族) $y = Ce^x$ が共通に満たす関係式である. つまり (2) は $y = Ce^x$ という曲線族を表す式から定数 C を消去した式とみなすことができる.

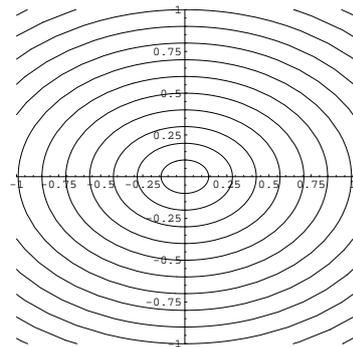
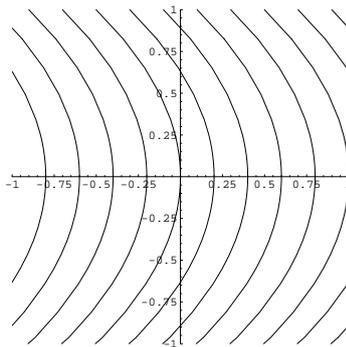
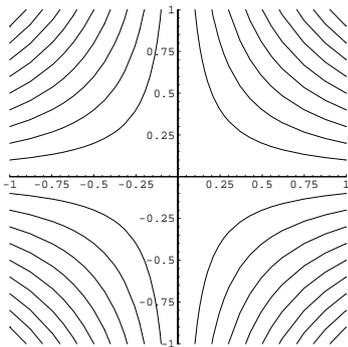
以上のように一般に $f(x, y) = C$ という曲線族の式を x で微分することにより, これらの曲線から決まる関数 $y = y(x)$ が共通に満たす微分方程式を導くことができる.

問題 1 次のそれぞれの曲線族の式から微分方程式を導け.

$$(1) \quad xy = C \quad (C \neq 0)$$

$$(2) \quad x + \frac{y^2}{2} = C$$

$$(3) \quad \frac{x^2}{2} + y^2 = C \quad (C > 0)$$



2 微分方程式の解法

2.1 変数分離形

微分方程式 (1) において $F(x, y)$ が x のみの式と y のみの式との積になっているとき, すなわち $F(x, y) = g(x)h(y)$ という形に書けるときのとき, 変数分離形という. このときは

$$\frac{dy}{dx} = g(x)h(y) \quad (3)$$

から, $h(y) \neq 0$ と仮定すると

$$\frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} = g(x)$$

となるから, 両辺を x で (不定) 積分すれば, 置換積分の公式より

$$\int g(x) dx = \int \frac{1}{h(y)} \frac{dy}{dx} dx = \int \frac{y'(x)}{h(y(x))} dx = \int \frac{dy}{h(y)}$$

を得る. $g(x)$ の原始関数の一つを $G(x)$, $\frac{1}{h(y)}$ の原始関数の一つを $H(y)$ とおけば, C_1, C_2 を積分定数として,

$$H(y) + C_1 = G(x) + C_2$$

となるが, $C = C_2 - C_1$ とおけば

$$H(y) - G(x) = C$$

という形の式が得られる．これは微分方程式 (3) の解 $y = y(x)$ 達のなす曲線族を表す式であるから，これで微分方程式が解けたことになる．このように任意定数 (C) を含む解のことを一般解という．なお， $h(y) = 0$ を満たす y がある場合は，その一つを y_0 とすると定数関数 $y(x) = y_0$ も (3) の解であることがわかる．

例 1 曲線族 $x + \frac{y^2}{2} = C$ と直交するような曲線族を求めよう．問 1 の (2) から

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{y}$$

を得るから，これと直交する曲線 $y = y(x)$ の点 (x, y) における接線の傾きは y である．すなわち，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = y$$

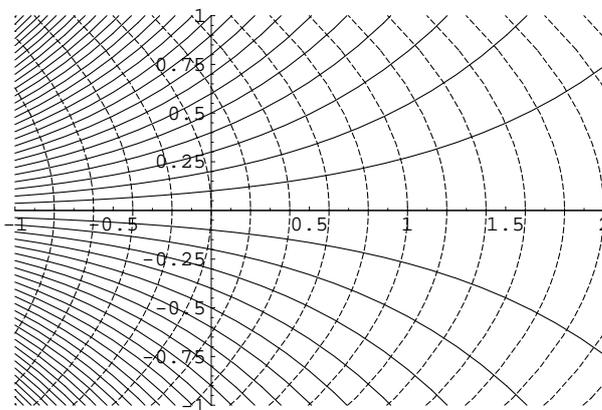
を満たす曲線族を求めればよい．これは変数分離形であり

$$\int \frac{dy}{y} = \int dx$$

より， c を任意定数として $\log |y| = x + c$ すなわち

$$y = \pm e^{x+c} = \pm e^c e^x = C e^x \quad (C = \pm e^c)$$

を得る．ここで $C \neq 0$ であるが，一方 $y = 0$ も解であることがわかるので， $C = 0$ でもよい．



破線は曲線族 $x + \frac{y^2}{2} = C$
実線は曲線族 $y = C e^x$

例 2 時刻 t におけるイースト菌の総量を $x(t)$ とすると，増加率 $x'(t)$ は $x(t)$ に比例する．この比例定数を k とすると

$$x'(t) = kx(t) \quad \text{すなわち} \quad \frac{dx}{dt} = kx$$

という微分方程式が成り立つ．これは変数分離形であり

$$\int \frac{dx}{x} = \int k dt$$

より前の例と同様に $x(t) = C e^{kt}$ を得る．最初のイースト菌の量は $x(0) = C$ である．もし 1 時間後に量が 2 倍になったとすると， t を時間単位とすれば， $x(1) = C e^k = 2C$ より $e^k = 2$ となるから， t 時間後のイースト菌の量は $C e^{tk} = C (e^k)^t = C 2^t$ となる．

例 3 放射性元素の原子 (核) は不安定であり, α 線 (ヘリウム原子核), β 線 (電子), γ 線 (高エネルギー電磁波) などを放出して崩壊し, 別の原子に変わる. 個々の原子がいつ崩壊するかは予測できないが, 崩壊する確率は元素ごとに一定である. 単位時間の中に元素が崩壊する確率を k , 時刻 t における (崩壊していない) 放射性元素の質量を $x(t)$ とすると,

$$\frac{dx}{dt} = -kx$$

という微分方程式が成立する. これは前の例で k を $-k$ とした場合であるから, 解は $x(t) = Ce^{-kt}$ である. $C = x(0)$ は最初の放射線元素の質量である. 質量が半分になる時間, すなわち $e^{-kt} = \frac{1}{2}$ となる t のことを, この放射性元素の半減期という. 半減期を T とおくと, $e^{-kT} = \frac{1}{2}$ より $T = \frac{\log 2}{k}$ である. 従って, k の代わりに T を用いれば

$$x(t) = C(e^{-kT})^{\frac{t}{T}} = C2^{-\frac{t}{T}}$$

と表せる. たとえばヨウ素 131 は, 半減期 8 日で β 線と γ 線を放出してキセノン 131 になる. t 日後のヨウ素 131 の質量は, $x(t) = C2^{-\frac{t}{8}}$ となる.

また, セシウム 137 は半減期 30 年で, β 線と γ 線を放出してバリウム 137 になる. t 年後のセシウム 137 の質量は $x(t) = C2^{-\frac{t}{30}}$ である.

例 4 容器 (ペットボトルや缶など) に入れた水の t 分後の温度を $x(t)$ とする. 外気の温度は a で一定であるとすると, 容器中の水の温度の変化率 $x'(t)$ は外気との温度差 $x(t) - a$ に比例し, 符号は反対である ($x(t) - a > 0$ ならば $x'(t) < 0$). 従って k を比例定数とすると微分方程式

$$\frac{dx}{dt} = -k(x - a) \quad \text{すなわち} \quad x'(t) = -k(x(t) - a)$$

が成り立つ. これから

$$\int \frac{dx}{x - a} = - \int k dt$$

となり, 積分を実行して $\log |x - a| = -kt + c$, すなわち

$$x = x(t) = a \pm e^c e^{-kt} = a + C e^{-kt} \quad (C = \pm e^c).$$

問題 2 上の例で, 外気が摂氏 20° で, 容器中の水の温度が最初 ($t = 0$ のとき) 100° であり, 5 分後に 80° になったとする. 15 分後の容器中の水の温度を求めよ.

問題 3 次の微分方程式を解け. また, 各々の解の定義域を求めよ.

$$(1) \quad \frac{dy}{dx} = y^2 \quad (2) \quad \frac{dy}{dx} = \frac{1}{y} \quad (3) \quad \frac{dy}{dx} = xy \quad (4) \quad \frac{dy}{dx} = e^{-y}$$

例 5 標高 x km における気圧を $y(x)$ ヘクトパスカルとする。気圧は、その場所より上にある空気全体の重さ (密度の積分) であり、またボイルの法則から、気圧は空気の密度に比例する。従って $k > 0$ を比例定数として

$$k \int_x^\infty y(t) dt = y(x)$$

という式が成り立つ (気温は上空でも一定であると仮定する)。両辺を x で微分して

$$-ky(x) = y'(x)$$

という微分方程式が得られる。これを解いて $y(x) = Ce^{-kx}$ を得る。たとえば地上では 1000 ヘクトパスカル、標高 1 km の地点で 900 ヘクトパスカルとすると、 $C = 1000$, $e^{-k} = 0.9$ であるから、 $y(x) = 1000 \times 0.9^x$ となる。

例 6 生物の量 $x(t)$ に上限 a があるときは、生物の増殖率 $\frac{x'(t)}{x(t)}$ は $x(t)$ が a に近づくにつれて小さくなる。これが $a - x(t)$ に比例するとすれば、 $k > 0$ を定数として

$$\frac{dx}{dt} = kx(a - x)$$

という微分方程式が成り立つ。これは生物の増殖に限らず、増加率にブレーキがかかる現象、たとえば化学反応や、ある品物 (たとえば携帯電話) の普及率などにもあてはまる。上の微分方程式から

$$\int \frac{dx}{x(a-x)} = \int k dt = kt + c$$

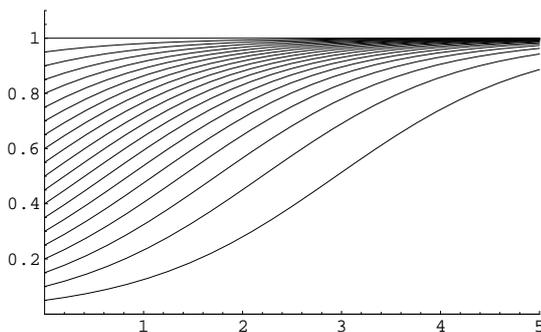
ここで部分分数分解を用いて左辺の積分を計算すると

$$\int \frac{dx}{x(a-x)} = \frac{1}{a} \int \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{a-x} \right) dx = \frac{1}{a} \log \left| \frac{x}{a-x} \right|$$

従って $\pm e^{ac} = C$ とおけば

$$\frac{x}{a-x} = Ce^{akt} \quad \therefore x = \frac{aCe^{akt}}{1 + Ce^{akt}} = \frac{a}{1 + C^{-1}e^{-akt}}$$

を得る。これは $t \rightarrow \infty$ のとき a に近づく。この解曲線はロジスティック曲線と呼ばれる。ここで C は任意定数であるが、 C^{-1} を 0 とおいて得られる式 $x = a$ も解である。左の図は $a = 1$, $k = 1$ の場合のロジスティック曲線を表す。



例 7 質量 m の物体を落としたときの t 秒後の物体の速度を $v(t)$ とする．運動量の変化率 $mv'(t)$ は物体に働く力に比例するが，それは物体に働く重力 mg (g は重力加速度と呼ばれる定数) から，速度 $v(t)$ に比例した空気抵抗 $kv(t)$ を引いたものになる (k は物体の形から決まる定数)．すなわち

$$mv'(t) = mg - kv(t)$$

が成り立つ．これを解くと

$$\int \frac{m}{mg - kv} dv = \int dt = t + c \quad \therefore -\frac{m}{k} \log |mg - kv| = t + c$$

より $C = \pm e^{-ck/m}$ とおいて

$$mg - kv = Ce^{-kt/m} \quad \therefore v = v(t) = \frac{1}{k}(mg - Ce^{-kt/m})$$

$v(0) = 0$ より $C = mg$ であるから， $v(t) = \frac{mg}{k}(1 - e^{-kt/m})$ を得る．速度 $v(t)$ は時間の経過に従って (すなわち $t \rightarrow \infty$ のとき) $\frac{mg}{k}$ に近づく．

問題 4 次の微分方程式を解け．また，各々の解の定義域を求めよ．

$$(1) \frac{dy}{dx} = xy^2 \quad (2) \frac{dy}{dx} = y^2 - y - 2 \quad (3) \frac{dy}{dx} = y^2 + 1 \quad (4) \frac{dy}{dx} = e^{x+y}$$

2.2 初期値問題

今まで見てきたように，微分方程式の解は一般に任意定数を含み，無数に存在する．このように任意定数を含む解のことを微分方程式の一般解という．微分方程式の解を一つ指定するためには，何らかの条件が必要となる．このような条件のうちで最も基本的なのが初期条件である．これは，微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y)$$

の解 $y = y(x)$ に対して， $x = x_0$ における $y(x)$ の値が指定された値 y_0 になるという条件である．つまり

$$\frac{dy}{dx} = F(x, y), \quad y(x_0) = y_0$$

を満たす関数 $y = y(x)$ を求めることになる．これを初期値問題という．独立変数 x が時刻 t であるときは，ある時刻 $t = t_0$ (初期時刻という) における解の値を指定して，それ以降の値がどのように変化するかを求めることになる．

例 8 例 2 で時刻 $t = 0$ におけるイースト菌の総量を 1 とすると，時刻 t におけるイースト菌の総量 $x = x(t)$ は初期値問題

$$\frac{dx}{dt} = kx, \quad x(0) = 1$$

の解である．例 2 から一般解は， C を任意定数として $x(t) = Ce^{kt}$ となるので， $x(0) = C = 1$ から $x(t) = e^{kt}$ がこの初期値問題の解である．

この例では解 $x(t)$ はすべての実数 t に対して定義されているが、解がある範囲でしか存在しないこともある。

例 9 初期値問題

$$\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 1$$

を考える。一般解は $y = -\frac{1}{x+C}$ であるから、 $y(0) = 1$ より $C = -1$ 。従って初期値問題の解は

$$y(x) = -\frac{1}{x-1}$$

である。この解は $x = 1$ では定義されず、連続関数として定義されているのは区間 $(-\infty, 1)$ の範囲のみである。 $(x > 1$ でも定義されるが、曲線 $y = y(x)$ の $x < 1$ の部分と $x > 1$ の部分はつながっていないことに注意。)

問題 5 次の初期値問題を解き、解の存在範囲 (初期条件から決まる範囲) を求めよ。

- | | |
|---|---|
| (1) $\frac{dy}{dx} = xy, \quad y(0) = 1$ | (2) $\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = -1$ |
| (3) $\frac{dy}{dx} = y^2, \quad y(0) = 0$ | (4) $\frac{dy}{dx} = xy^2, \quad y(0) = 1$ |
| (5) $\frac{dy}{dx} = y^2 + 1, \quad y(0) = 1$ | (6) $\frac{dy}{dx} = e^{-y}, \quad y(0) = 0$ |
| (7) $\frac{dy}{dx} = y^2 - y - 2, \quad y(0) = 2$ | (8) $\frac{dy}{dx} = e^{x+y}, \quad y(0) = 1$ |

2.3 1 階線形微分方程式 (定数変化法)

$a(x), b(x)$ を与えられた関数、 $y = y(x)$ を未知関数として、微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y + b(x) \quad (4)$$

を考える。この右辺は未知関数 y に関する 1 次式なので、この形の微分方程式を 1 階線形微分方程式と呼ぶ。まず $b(x) = 0$ とした微分方程式 (斉次方程式という)

$$\frac{dy}{dx} = a(x)y$$

を解くと、 $a(x)$ の原始関数の一つを $A(x)$ とすれば c を任意定数として

$$\log |y| = \int a(x) dx = A(x) + c$$

より $C = \pm e^c$ とおいて $y = Ce^{A(x)}$ を得る。この定数 C を関数 $C(x)$ に置き換えて $y = C(x)e^{A(x)}$ を (4) に代入すると

$$(C'(x) + A'(x)C(x))e^{A(x)} = a(x)C(x)e^{A(x)} + b(x) \iff C'(x) = b(x)e^{-A(x)}$$

であるから,

$$y(x) = C(x)e^{A(x)} = \left(\int b(x)e^{-A(x)} dx \right) e^{A(x)} \quad (5)$$

を得る. この解法を定数変化法という. 実際 (5) を微分すると

$$y'(x) = \left(\int b(x)e^{-A(x)} dx \right) A'(x)e^{A(x)} + b(x)e^{-A(x)}e^{A(x)} = a(x)y + b(x)$$

となり, (5) は (4) の解であることがわかる. 次に (4) の解はすべて (5) で表されることを示そう. そのために $y = y(x)$ を (4) の任意の解として, $z(x) = e^{-A(x)}y(x)$ とおくと

$$\begin{aligned} z'(x) &= -A'(x)e^{-A(x)}y(x) + e^{-A(x)}y'(x) = -a(x)e^{-A(x)}y(x) + e^{-A(x)}\{a(x)y(x) + b(x)\} \\ &= b(x)e^{-A(x)} \end{aligned}$$

であるから, $z(x) = \int b(x)e^{-A(x)} dx$ となり,

$$y(x) = z(x)e^{A(x)} = \left(\int b(x)e^{-A(x)} dx \right) e^{A(x)}$$

を得る. よって (4) の解は (5) で表されることがわかった.

例 10 1 階線形微分方程式

$$\frac{dy}{dx} = 2xy + e^{x^2}$$

の一般解を求めよう. まず斉次方程式

$$\frac{dy}{dx} = 2xy$$

を解くと,

$$y = Ce^{x^2}$$

となる. この C を関数 $C(x)$ に変えて $y = C(x)e^{x^2}$ をもとの微分方程式に代入すると,

$$\frac{dy}{dx} - 2xy = C'(x)e^{x^2} = e^{x^2}$$

より $C'(x) = 1$ を得る. よって $C(x) = x + C$ (C は任意定数) と書けるから, 求める一般解は

$$y(x) = (x + C)e^{x^2}$$

である. このうち, たとえば初期条件 $y(0) = 0$ を満たす解は $C = 0$ より, $y = xe^{x^2}$ である.

例 11 抵抗とコイルを直列につないだ回路を考える. この回路に掛ける電圧を時間 t の関数として $E(t)$ と表す. このとき, この回路に流れる電流を $I(t)$ とおくと, R と L を定数として

$$LI'(t) + RI(t) = E(t) \quad \text{すなわち} \quad \frac{dI}{dt} = -\frac{R}{L}I + \frac{1}{L}E(t) \quad (6)$$

という微分方程式が成り立つ．これは1階線形微分方程式であり，解の公式から

$$I(t) = \left(\frac{1}{L} \int E(t) e^{\frac{R}{L}t} dt \right) e^{-\frac{R}{L}t}$$

となる．特に直流電源と交流電源の場合に $I(t)$ を具体的に求めてみよう．

(i) $E(t) = E$ (定数)，すなわち直流電源の場合は，

$$I(t) = \left(\frac{1}{L} \int E e^{\frac{R}{L}t} dt \right) e^{-\frac{R}{L}t} = \left(\frac{E}{R} e^{\frac{R}{L}t} + C \right) e^{-\frac{R}{L}t} = \frac{E}{R} + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

となる (C は任意定数)．

たとえば $I(0) = 0$ (最初は電流 0) とすると， $C = -E/R$ より

$$I(t) = \frac{E}{R} \left(1 - e^{-\frac{R}{L}t} \right)$$

(ii) $E(t) = E \cos \omega t$ (E, ω は定数)，すなわち交流電源の場合は，

$$\begin{aligned} C(t) &= \frac{E}{L} \int e^{\frac{R}{L}t} \cos \omega t dt = \frac{E}{L} \operatorname{Re} \left(\int e^{(\frac{R}{L} + i\omega)t} dt \right) \\ &= \frac{E}{L} \operatorname{Re} \left(\frac{e^{(\frac{R}{L} + i\omega)t}}{\frac{R}{L} + i\omega} \right) + C = \frac{E}{L} \frac{e^{\frac{R}{L}t} \left(\frac{R}{L} \cos \omega t + \omega \sin \omega t \right)}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} + C \end{aligned}$$

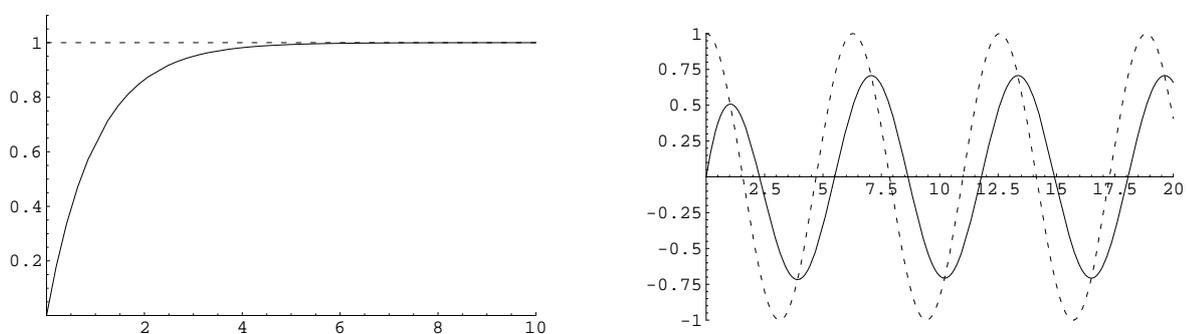
となるから

$$I(t) = \frac{E}{L} \frac{\frac{R}{L} \cos \omega t + \omega \sin \omega t}{\frac{R^2}{L^2} + \omega^2} + C e^{-\frac{R}{L}t} = E \frac{R \cos \omega t + L\omega \sin \omega t}{R^2 + L^2\omega^2} + C e^{-\frac{R}{L}t}$$

である (C は任意定数)． $I(0) = 0$ とすると， $C = -ER/(R^2 + L^2\omega^2)$ より

$$I(t) = E \frac{R(\cos \omega t - e^{-\frac{R}{L}t}) + L\omega \sin \omega t}{R^2 + L^2\omega^2}$$

となる．下の図は $E = L = R = \omega = 1$ の場合の電圧 $E(t)$ (点線) と電流 $I(t)$ (実線) のグラフ (左が (i), 右が (ii))．



• Euler の等式を利用した積分計算 $i = \sqrt{-1}$ を虚数単位として, 実数 x に対して

$$e^{ix} = \exp(ix) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \quad (7)$$

と定義する. これは実数 x を変数とし複素数の値をとる関数 (複素数値関数という) である. (7) の右辺を実部と虚部に分けると $i^{2k} = (-1)^k$ と $\cos x$ と $\sin x$ の Taylor 展開から

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k}}{(2k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(ix)^{2k+1}}{(2k+1)!} = \cos x + i \sin x$$

を得る. すなわち $e^{ix} = \cos x + i \sin x$. これを Euler (オイラー) の等式という. 一般に複素数 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対して, 実部を $a = \operatorname{Re} \alpha$, 虚部を $b = \operatorname{Im} \alpha$ と表す. この記号を使うと

$$\cos x = \operatorname{Re} e^{ix}, \quad \sin x = \operatorname{Im} e^{ix}$$

である. さらに一般に x, y を実数とするとき

$$e^{x+iy} = \exp(x+iy) = e^x e^{iy} = e^x (\cos y + i \sin y)$$

と定義する. このとき指数法則

$$e^{x_1+iy_1} e^{x_2+iy_2} = e^{(x_1+x_2)+i(y_1+y_2)}$$

が成立する (実数の指数法則と三角関数の加法定理より). また α を複素数の定数 ($\alpha \neq 0$) とするとき

$$\frac{d}{dx} e^{\alpha x} = \alpha e^{\alpha x}, \quad \int e^{\alpha x} dx = \frac{e^{\alpha x}}{\alpha} + C \quad (C \text{ は複素数の定数})$$

が成立することがわかる. (複素数を値とする関数の微分と積分は, 実部と虚部をそれぞれ微分, 積分することにより定義する.) $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) とすると, $e^{\alpha x} = e^{ax} (\cos bx + i \sin bx)$ であるから, 上の積分の式の実部と虚部を取れば,

$$\int e^{\alpha x} \cos bx dx = \operatorname{Re} \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \right) + C, \quad \int e^{\alpha x} \sin bx dx = \operatorname{Im} \left(\frac{e^{\alpha x}}{\alpha} \right) + C \quad (C \text{ は実数の定数})$$

を得る. これは, 部分積分を 2 回行うことにより求めることもできるが, 上の式の方が簡明である.

問題 6 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$(1) \frac{dy}{dx} = y - x \quad (2) \frac{dy}{dx} = -y + x^2 \quad (3) \frac{dy}{dx} = -xy + e^{-x^2/2}$$

問題 7 次の初期値問題の解を求めて, そのグラフの概形を描け.

$$(1) \frac{dy}{dx} = y - x, \quad y(0) = 0 \quad (2) \frac{dy}{dx} = -y + x^2, \quad y(0) = 1$$

$$(3) \frac{dy}{dx} = -xy + e^{-x^2/2}, \quad y(0) = 0$$

問題 8 例 11 において, 電圧が $E(t) = Ee^{-at}$ (E, a は正の定数) で与えられるとき, $I(0) = 0$ を満たす解 $I(t)$ を求めよ. また, $E = L = R = 1, a = 2$ のとき, $t \geq 0$ における $I(t)$ の増減と最大値を調べて $I(t)$ のグラフの概形を描け.

3 定数係数 2 階線形微分方程式

一般に, $a(x), b(x), f(x)$ を既知関数, $y = y(x)$ を未知関数として,

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a(x)\frac{dy}{dx} + b(x)y = f(x)$$

という形で表される微分方程式を 2 階線形微分方程式という. しかしこの形の微分方程式を解くことは一般には非常に困難である. そこで特別な場合として, $a(x), b(x)$ が定数 a, b の場合

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad (8)$$

を考えよう. この形の方程式は定数係数 2 階線形微分方程式と呼ばれる.

3.1 斉次方程式の解法

1 階線形微分方程式の場合と同様に, まず $f(x) = 0$ の場合, すなわち斉次微分方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (9)$$

の一般解を求めることを考える. まず次の事実に注意しよう.

補題 1 $y = y(x)$ が $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$ において x について 2 回微分可能であって (9) の解であるとすれば, $y(x)$ は \mathbb{R} において無限回微分可能である.

証明: (9) を

$$y''(x) = -ay'(x) - by(x) \quad (10)$$

と書き換える. 仮定により $y(x)$ は 2 回微分可能だから, (10) の右辺は 1 回微分可能である. よって $y''(x)$ は 1 回微分可能となるから, $y(x)$ は 3 回微分可能であることになる. すると, (10) の右辺は 2 回微分可能となるから, $y(x)$ は 4 回微分可能. 以下同様にして, $y(x)$ は任意回数微分できることがわかる. \square

この補題により (9) の解としては無限回微分可能な関数のみを考えればよい. \mathbb{R} で無限回微分可能であるような関数全体を $C^\infty(\mathbb{R})$ と表そう. たとえば, $x, x^2 + 1$ や, 任意の実数の定数 a に対して関数 $e^{ax}, \sin ax, \cos ax$ は $C^\infty(\mathbb{R})$ に属する. 一般に, 関数 $y(x)$ と $z(x)$ が $C^\infty(\mathbb{R})$ に属せば, 任意の実数 a と b に対して, 1 次結合 $ay(x) + bz(x)$ も $C^\infty(\mathbb{R})$ に属する. このことを, $C^\infty(\mathbb{R})$ は \mathbb{R} 上のベクトル空間であるという.

$C^\infty(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ への写像 $D = \frac{d}{dx}$ を

$$Dy(x) = \frac{d}{dx}y(x) = y'(x) \quad (y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}))$$

で定義しよう. $y(x), z(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ と $a, b \in \mathbb{R}$ に対して

$$D(ay(x) + bz(x)) = aDy(x) + bDz(x)$$

が成立する．このことを， D は $C^\infty(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ への \mathbb{R} 線形写像であるという．

さらに，合成写像として D^2, D^3, \dots が定義される． D^2 は $y(x)$ に対して 2 次導関数 $y''(x)$ を対応させる写像である． $D^0 = I$ (恒等写像)， D, D^2 は $C^\infty(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ への線形写像であるから，これらの 1 次結合

$$P(D) = D^2 + aD + bI \quad (a, b \in \mathbb{R})$$

も $C^\infty(\mathbb{R})$ から $C^\infty(\mathbb{R})$ への線形写像である．これを (2 階の) 微分作用素 (differential operator) という．

$$P(D)y(x) = y''(x) + ay'(x) + by(x)$$

であるから，補題 1 に注意すれば，微分方程式 (9) の解の全体は，線形写像 $P(D) : C^\infty(\mathbb{R}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ の核 (kernel)

$$\text{Ker } P(D) = \{y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}) \mid P(D)y(x) = 0\}$$

と一致し，従って $C^\infty(\mathbb{R})$ の部分ベクトル空間であることがわかる． $\text{Ker } P(D)$ を具体的に求めることが以下の目標である．

その際，考察の範囲を広げて複素数値の関数を扱うことが必要となる． \mathbb{R} で無限回微分可能であるような複素数値の関数全体を $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ で表そう (\mathbb{C} は複素数全体のなす集合を表す)．たとえば複素数 $\alpha = a + bi$ ($a, b \in \mathbb{R}$) に対して関数 $e^{\alpha x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ は $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に属する． $y(x)$ と $z(x)$ が $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に属するとき，任意の複素数 α, β に対して $\alpha y(x) + \beta z(x)$ も $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に属する．このことを $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ は \mathbb{C} 上のベクトル空間であるという．

$C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ から $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ への写像 $D = \frac{d}{dx}$ を

$$Dy(x) = \frac{d}{dx}y(x) = y'(x) \quad (y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}))$$

で定義しよう． $y(x), z(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ と $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ に対して

$$D(\alpha y(x) + \beta z(x)) = \alpha Dy(x) + \beta Dz(x)$$

が成立する．このことを D は \mathbb{C} 線形写像であるという．さらに， $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C}$ とすると，

$$Q(D) = D^m + a_1 D^{m-1} + \dots + a_{m-1} D + a_m I \quad (a_1, \dots, a_m \in \mathbb{C})$$

も $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ から $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ への \mathbb{C} 線形写像である．これを (m 階の) 微分作用素 (differential operator) という．この線形写像の核を，実数値関数の場合と区別するため

$$\text{Ker}_{\mathbb{C}} Q(D) = \{y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid Q(D)y(x) = 0\}$$

と表わそう． $\text{Ker}_{\mathbb{C}} Q(D)$ は \mathbb{C} 上のベクトル空間である．

2 階の微分作用素 $P(D) = D^2 + aD + b$ に対して， D を文字 λ で置き換えてできる多項式

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b$$

のことを，微分作用素 $P(D)$ の，あるいは微分方程式 (9) の特性多項式 (characteristic polynomial) といい，(2次) 方程式 $P(\lambda) = 0$ のことを特性方程式，その根 (解) α, β のことを特性根という．このとき λ の (複素数を係数とする) 多項式として $P(\lambda)$ は

$$P(\lambda) = \lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

と因数分解される．一方，微分作用素 $D - \alpha I$ と $D - \beta I$ の積は写像の合成として定義されるが， $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ について

$$\begin{aligned} (D - \alpha I)(D - \beta I)y(x) &= (D - \alpha I)(y'(x) - \beta y(x)) \\ &= D(y'(x) - \beta y(x)) - \alpha(y'(x) - \beta y(x)) \\ &= y''(x) - (\alpha + \beta)y'(x) + \alpha\beta y(x) \\ &= y''(x) + ay'(x) + by(x) = P(D)y(x) \end{aligned}$$

が成立する．すなわち，多項式 $P(\lambda)$ の因数分解に対応して，2階の微分作用素 $P(D)$ が2つの1階の微分作用素 $D - \alpha I$ と $D - \beta I$ との積に分解される．ここで α と β を入れ替えてもよいことに注意する．

命題 1 $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ かつ $\alpha \neq \beta$ とすると，ベクトル空間として

$$\text{Ker}_{\mathbb{C}} P(D) = \text{Ker}_{\mathbb{C}} (D - \alpha I) \oplus \text{Ker}_{\mathbb{C}} (D - \beta I) \quad (\text{直和})$$

が成立する．すなわち， $P(D)y(x) = 0$ を満たす任意の $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に対して

$$y(x) = y_1(x) + y_2(x), \quad (D - \alpha I)y_1(x) = 0, \quad (D - \beta I)y_2(x) = 0$$

を満たす $y_1(x), y_2(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ がただ一組存在する．逆に， $y_1(x), y_2(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ がそれぞれ $(D - \alpha I)y_1(x) = 0$ と $(D - \beta I)y_2(x) = 0$ を満たせば， $y(x) = y_1(x) + y_2(x)$ は $P(D)y(x) = 0$ を満たす．

証明: 多項式として

$$1 = \frac{1}{\beta - \alpha}(\lambda - \alpha) - \frac{1}{\beta - \alpha}(\lambda - \beta)$$

が成立するので，微分作用素として

$$I = \frac{1}{\beta - \alpha}(D - \alpha I) - \frac{1}{\beta - \alpha}(D - \beta I) \quad (11)$$

が成立する． $y(x) \in \text{Ker}_{\mathbb{C}} P(D)$ に対して，

$$\begin{aligned} y_1(x) &= -\frac{1}{\beta - \alpha}(D - \beta I)y(x) = -\frac{1}{\beta - \alpha}(y'(x) - \beta y(x)), \\ y_2(x) &= \frac{1}{\beta - \alpha}(D - \alpha I)y(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}(y'(x) - \alpha y(x)) \end{aligned}$$

とおくと,

$$\begin{aligned}(D - \alpha I)y_1(x) &= (D - \alpha I)(D - \beta I)y(x) = P(D)y(x) = 0, \\ (D - \beta I)y_2(x) &= (D - \beta I)(D - \alpha I)y(x) = P(D)y(x) = 0\end{aligned}$$

が成立するから $y_1(x) \in \text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \alpha I)$, $y_2(x) \in \text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \beta I)$ である. また (11) より

$$y(x) = Iy(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}(D - \alpha I)y(x) - \frac{1}{\beta - \alpha}(D - \beta I)y(x) = y_1(x) + y_2(x)$$

であるから, $y_1(x), y_2(x)$ は定理の条件を満たしている.

次にこのような $y_1(x)$ と $y_2(x)$ が一通りしかないことを示す. ある $z_1(x) \in \text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \alpha I)$ と $z_2(x) \in \text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \beta I)$ によって $y(x) = z_1(x) + z_2(x)$ と表されたとすると,

$$u(x) := y_1(x) - z_1(x) = z_2(x) - y_2(x) \in \text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \alpha I) \cap \text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \beta I)$$

であるから ($:=$ は左辺を右辺で定義することを意味する), (11) より

$$u(x) = Iu(x) = \frac{1}{\beta - \alpha}(D - \alpha I)u(x) - \frac{1}{\beta - \alpha}(D - \beta I)u(x) = 0$$

となる. よって $z_1(x) = y_1(x)$, $z_2(x) = y_2(x)$ となり, $y_1(x)$ と $y_2(x)$ の一意性が示された.

□

命題 2 $\alpha = a + bi$ を複素数とすると ($a, b \in \mathbb{R}$), \mathbb{C} 線形写像 $D - \alpha I : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ の核 $\text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \alpha I)$ は $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ の (\mathbb{C} 上の) 1次元の部分ベクトル空間であり, 関数 $e^{\alpha x} = e^{ax}(\cos bx + i \sin bx)$ の (複素数の) 定数倍の全体からなる.

証明: $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に対して $z(x) = e^{-\alpha x}y(x)$ とおくと, $y(x) = e^{\alpha x}z(x)$ であるから

$$(D - \alpha I)y(x) = y'(x) - \alpha y(x) = \alpha e^{\alpha x}z(x) + e^{\alpha x}z'(x) - \alpha e^{\alpha x}z(x) = e^{\alpha x}z'(x)$$

となる. よって $(D - \alpha I)y(x) = 0$ と $z'(x) = 0$ は同値である. さらに $z'(x) = 0$ と $z(x)$ が (複素数の) 定数であることは同値である (実部と虚部に平均値の定理を適用すればよい) から, $y(x)$ が $\text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \alpha I)$ に属するための必用十分条件は, ある (複素数の) 定数 C があって $y(x) = Ce^{\alpha x}$ と表されることである. □

命題 1 と命題 2 を合わせて次の定理が証明された.

定理 1 $P(\lambda) = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$ かつ $\alpha \neq \beta$ とすると, \mathbb{C} 線形写像 $P(D) : C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \rightarrow C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ の核 $\text{Ker}_{\mathbb{C}} P(D)$ は \mathbb{C} 上の 2次元のベクトル空間であり, 関数 $e^{\alpha x}$ と $e^{\beta x}$ はその基底となる. すなわち, $P(D)y(x) = 0$ を満たす任意の $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に対して

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

を満たす複素数 C_1, C_2 がただ一組存在する. 逆にこの式で与えられる関数 $y(x)$ は $P(D)y(x) = 0$ を満たす.

次に $\alpha = \beta$ のときを考察しよう。

命題 3 複素数 α に対して $\text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \alpha I)^2 = \{y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C}) \mid (D - \alpha I)^2 y(x) = 0\}$ は \mathbb{C} 上の 2 次元ベクトル空間であり, $e^{\alpha x}$ と $x e^{\alpha x}$ がその基底となる。

証明: $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に対して $z(x) = e^{-\alpha x} y(x)$ とおくと, 命題 2 の証明より $(D - \alpha I)(e^{\alpha x} z(x)) = e^{\alpha x} z'(x)$ が成り立つから,

$$(D - \alpha I)^2 y(x) = (D - \alpha I)(D - \alpha I)(e^{\alpha x} z(x)) = (D - \alpha I)(e^{\alpha x} z'(x)) = e^{\alpha x} z''(x)$$

となる。よって $(D - \alpha I)^2 y(x) = 0$ と $z''(x) = 0$ は同値である。 $z''(x) = 0$ ならば $z'(x) = C_1$ (複素数の定数) であり, $z(x) = C_1 x + C_2$ と書ける (C_2 は複素数の定数)。逆に $z(x) = C_1 x + C_2$ ならば $z''(x) = 0$ が成立する。以上により

$$\text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \alpha I)^2 = \{(C_1 x + C_2)e^{\alpha x} \mid C_1, C_2 \in \mathbb{C}\}$$

がわかった。 $y(x) = (C_1 x + C_2)e^{\alpha x}$ とすると, $y(0) = C_2$, $y(1) = (C_1 + C_2)e^\alpha$ から C_1 と C_2 が一通りに定まることがわかる。以上により $e^{\alpha x}$ と $x e^{\alpha x}$ は $\text{Ker}_{\mathbb{C}}(D - \alpha I)^2$ の基底であることが示された。□

以上で微分方程式 (9) を満たす複素数値関数が求まった。次に実数値の解について考察しよう。

以下では a, b は実数として, 微分作用素 $P(D) = D^2 + aD + bI$ の特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の判別式の符号に応じて 3 通りに場合分けして考える。

• $a^2 - 4b > 0$ の場合: このとき特性方程式は 2 つの相異なる実数根 α, β を持つ。 $P(D)y(x) = 0$ を満たす複素数値の関数 $y(x)$ は, 定理 1 より, ある複素数の定数 C_1, C_2 により

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

と一意的に表される。ここで $y(x)$ が実数値であるための必要十分条件は C_1, C_2 が実数となることである。実際, C_1, C_2 が実数値であれば $e^{\alpha x}$ と $e^{\beta x}$ は実数値だから $y(x)$ も実数値である。逆に $y(x)$ が実数値ならば, $y(0) = C_1 + C_2$ と $y(1) = C_1 e^\alpha + C_2 e^\beta$ は実数である。これを C_1, C_2 について解けば C_1 と C_2 は実数であることがわかる。

以上により次の定理が示された。

定理 2 特性方程式 $P(\lambda) = 0$ の判別式が正と仮定して, 2 つの異なる特性根を α, β とすると, $P(D)y(x) = 0$ を満たす実数値関数 $y(x)$ の全体 $\text{Ker } P(D)$ は \mathbb{R} 上の 2 次元ベクトル空間であり, $e^{\alpha x}$ と $e^{\beta x}$ がその基底となる。すなわち, $P(D)y(x) = 0$ を満たす $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対してただ一組の実数 C_1, C_2 が存在して $y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$ が成立する。

例 12

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

の特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$ であるから (実数値の) 解は C_1, C_2 を (実数の) 任意定数として

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

と表される.

• $a^2 - 4b = 0$ の場合: このとき特性方程式は重根 α を持ち, $\alpha = -\frac{a}{2}$ は実数である. 命題 3 より $P(D)y(x) = 0$ を満たす複素数値関数 $y(x)$ は, ある複素数の定数 C_1, C_2 により

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$$

と一意的に表される. ここで, $y(x)$ が実数値であるための必要十分条件は C_1, C_2 が実数となることである. 実際, C_1, C_2 が実数値であれば $e^{\alpha x}$ と $x e^{\alpha x}$ は実数値だから $y(x)$ も実数値である. 逆に $y(x)$ が実数値ならば, $y(0) = C_1$ と $y(1) = (C_1 + C_2)e^\alpha$ は実数である. これを C_1, C_2 について解けば C_1 と C_2 は実数であることがわかる. 以上により次の定理が示された.

定理 3 特性方程式 $P(\lambda) = 0$ の判別式が 0 と仮定すると, 特性方程式は実数の重根 α を持ち, $P(D)y(x) = 0$ を満たす実数値関数 $y(x)$ の全体は \mathbb{R} 上 2 次元のベクトル空間であり, $e^{\alpha x}$ と $x e^{\alpha x}$ がその基底となる. すなわち, $P(D)y(x) = 0$ を満たす $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対してただ一組の実数 C_1, C_2 が存在して $y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 x e^{\alpha x}$ が成立する.

例 13

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 2 \frac{dy}{dx} + y = 0$$

の特性方程式は $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ であるから, 解は C_1, C_2 を (実数の) 任意定数として

$$y(x) = (C_1 x + C_2) e^{-x}$$

と表される.

• $a^2 - 4b < 0$ の場合: このとき特性方程式は 2 つの虚数根 α, β を持ち,

$$\lambda^2 + a\lambda + b = (\lambda - \alpha)(\lambda - \beta)$$

が成り立つ. さらに 2 次方程式の根の公式から, α と β は互いに共役な複素数, すなわち $\beta = \bar{\alpha}$ であることがわかる. 一般に p, q を実数として, $\alpha = p + qi$ とするとき, オイラーの公式から

$$e^{\alpha x} = e^{px+iqx} = e^{px} e^{iqx} = e^{px} (\cos qx + i \sin qx)$$

である. 定理 1 より, $P(D)y(x) = 0$ を満たす複素数値関数 $y(x)$ は, C_1, C_2 を複素数の任意定数として

$$y(x) = C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x}$$

と表される. a_1, a_2, b_1, b_2 を実数として

$$C_1 = a_1 + ib_1, \quad C_2 = a_2 + ib_2$$

とおく．また α と β は互いに共役な複素数であるから，実数 p, q を用いて

$$\alpha = p + iq, \quad \beta = p - iq \quad (q > 0)$$

と書ける．すると，

$$\begin{aligned} y(x) &= C_1 e^{\alpha x} + C_2 e^{\beta x} \\ &= (a_1 + ib_1)e^{px}(\cos qx + i \sin qx) + (a_2 + ib_2)e^{px}(\cos qx - i \sin qx) \\ &= e^{px} \{(a_1 + a_2) \cos qx + (-b_1 + b_2) \sin qx\} + ie^{px} \{(b_1 + b_2) \cos qx + (a_1 - a_2) \sin qx\} \end{aligned}$$

であるから， $y(x)$ の値が実数であるためには，

$$a_1 = a_2, \quad b_1 + b_2 = 0$$

が成り立つことが必要十分である．このとき，

$$y(x) = e^{px}(2a_1 \cos qx - 2b_1 \sin qx)$$

であるから，実数の定数をあらためて $C_1 = 2a_1, C_2 = -2b_1$ とおけば，

$$y(x) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx) \quad (12)$$

を得る．以上をまとめると

定理 4 特性方程式 $P(\lambda) = 0$ の判別式が負と仮定すると，特性根は実数 p, q ($q > 0$) を用いて $\alpha = p + iq, \beta = p - iq$ と表される．このとき， $P(D)y(x) = 0$ を満たす実数値関数 $y(x)$ の全体は \mathbb{R} 上 2 次元のベクトル空間であり， $e^{px} \cos qx$ と $e^{px} \sin qx$ がその基底となる．すなわち， $P(D)y(x) = 0$ を満たす $y(x) \in C^\infty(\mathbb{R})$ に対してただ一組の実数 C_1, C_2 が存在して $y(x) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$ が成立する．

例 14 微分方程式

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + 4 \frac{dy}{dx} + 5y = 0$$

の特性方程式は $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = (\lambda + 2 - i)(\lambda + 2 + i) = 0$ であるから，特性根 (特性方程式の解) は $-2 \pm i$ である．よって解は C_1, C_2 を (実数の) 任意定数として

$$y(x) = e^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$$

と表される．

例 15 ばねに質量 m のおもりをつなぎ，ばねに沿ってつりあいの位置が 0 になるように x 軸をとる．時刻 t におけるおもりの位置を $x = x(t)$ として $q = \sqrt{\frac{k}{m}}$ (k はばね定数) とおくと，微分方程式

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + q^2 x = 0$$

が成立する．特性方程式は $\lambda^2 + q^2 = (\lambda - iq)(\lambda + iq) = 0$ であるから，一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$x(t) = C_1 \cos qt + C_2 \sin qt$$

と表される．これは角周波数 q 従って周期 $\frac{2\pi}{q}$ の単振動を表す．

問題 9 次の微分方程式の一般解を求めよ．

$$(1) \frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0 \quad (2) 4\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 3y = 0 \quad (3) \frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0$$

$$(4) \frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0 \quad (5) \frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0 \quad (6) 2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0$$

3.2 初期値問題

微分方程式 (9) の一般解は 2 つの任意定数を含むので，ある x の値における $y(x)$ の値を指定しただけでは，解を一つに定めることができない．そこで，ある x の値における $y(x)$ と $y'(x)$ の値を指定すると，解を一つに定めることができる．

例 16

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = 0$$

の解 $y = y(x)$ のうち，初期条件

$$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$$

を満たすものを求めよう．一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x}$$

と表されるから，

$$y(0) = C_1 + C_2 = 1, \quad y'(0) = 2C_1 - C_2 = 0$$

より， $C_1 = \frac{1}{3}$ ， $C_2 = \frac{2}{3}$ となるから，求める解は

$$y(x) = \frac{1}{3}e^{2x} + \frac{2}{3}e^{-x}$$

である．

例 17 例 15 において，初期条件 $x(0)$ は時刻 0 でのおもりの位置， $x'(0)$ は時刻 0 でのおもりの速度を表す．たとえば，最初におもりをつり合いの位置から 1 だけ伸ばしたところに置いて，そっと手を離れたとすると，

$$\frac{d^2x}{dt^2} + q^2x = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

を満たす関数 $x = x(t)$ が時刻 t におけるおもりの位置を表すことになる．これを解くと $x(t) = \cos qt$ となる．

一般に x_0, y_0, y_1 を任意の実数とすると、初期値問題

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0, \quad y(x_0) = y_0, \quad y'(x_0) = y_1 \quad (13)$$

の解 $y = y(x)$ がただ 1 つだけ存在すること (存在と一意性) を示そう。 $w(x) = y(x + x_0)$ とおくと、 $w(x)$ も同じ微分方程式を満たし、 $w(0) = y(x_0) = y_0$ 、 $w'(0) = y'(x_0) = y_1$ であるから、 $x_0 = 0$ としても一般性を失わない。

まず $a^2 - 4b > 0$ の場合、特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の 2 つの根を α, β とおけば一般解は $y(x) = C_1e^{\alpha x} + C_2e^{\beta x}$ と表される。初期条件から

$$y(0) = C_1 + C_2 = y_0, \quad y'(0) = \alpha C_1 + \beta C_2 = y_1$$

すなわち

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \end{pmatrix}$$

となる。この左辺の行列の行列式は $\beta - \alpha \neq 0$ であるから、これを満たすような C_1 と C_2 がただ一組存在する。

$a^2 - 4b < 0$ の場合、特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の 2 つの根を $p \pm iq$ とすれば一般解は $y(x) = e^{px}(C_1 \cos qx + C_2 \sin qx)$ と表される。初期条件から

$$y(0) = C_1 = y_0, \quad y'(0) = pC_1 + qC_2 = y_1$$

であるが、最初の式から C_1 が定まり、それを後の式に代入すれば、 $q \neq 0$ であるから、 C_2 が一通りに定まる。

$a^2 - 4b = 0$ の場合は、特性根を α とすれば、一般解は $y(x) = (C_1x + C_2)e^{\alpha x}$ である。 $y(0) = C_2$ から C_2 が定まり、 $y'(x) = \alpha(C_1x + C_2)e^{\alpha x} + C_1e^{\alpha x}$ 従って $y'(0) = C_1 + \alpha C_2$ から C_1 が定まる。

例 18 ばねにつないだおもりを水平な台の上で振動させる。時刻 t におけるおもりの位置を $x = x(t)$ とする。最初におもりをつり合いの位置から 1 だけ伸ばしたところに置いて、そっと手を離れたとすると、 $x(t)$ は初期値問題

$$\frac{d^2x}{dt^2} + a\frac{dx}{dt} + bx = 0, \quad x(0) = 1, \quad x'(0) = 0$$

を満たす。ここで a はおもりと台の間の動摩擦係数から決まる正の定数、 b はばねの強さから決まる正の定数である。この初期値問題を特性方程式の判別式の符号によって場合分けして解くと次のようになる。(それぞれの $x(t)$ が微分方程式と初期条件を満たすことは簡単に確かめられるので、初期値問題の一意性から、 $x(t)$ がただ 1 つの解であることがわかる。)

(1) $a^2 - 4b < 0$ すなわち、摩擦が比較的小さいときは、 $q = \frac{1}{2}\sqrt{4b - a^2}$ とおくと、

$$x(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \left(\cos qt + \frac{a}{2q} \sin qt \right).$$

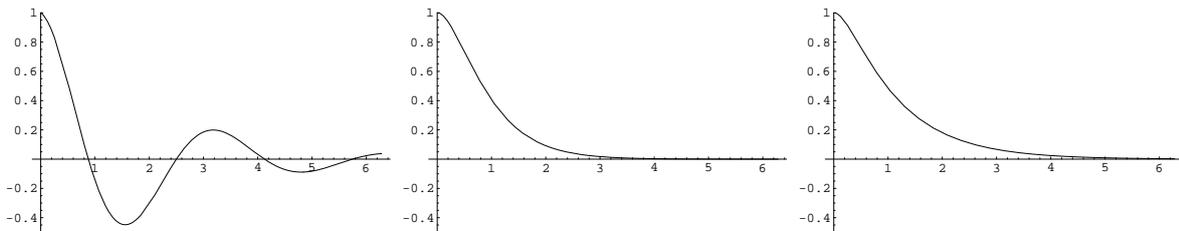
このときは振幅が減少しながら振動するので、減衰振動と呼ばれる。

(2) $a^2 - 4b = 0$ のとき, $x(t) = e^{-\frac{a}{2}t} \left(1 + \frac{a}{2}t\right)$.

(3) $a^2 - 4b > 0$ のとき, 特性方程式 $\lambda^2 + a\lambda + b = 0$ の2つの実数根を α, β とおくと,

$$x(t) = \frac{1}{\beta - \alpha}(\beta e^{\alpha t} - \alpha e^{\beta t}).$$

たとえば $b = 4, a = 1, 4, 5$ のときの初期値問題の解 $y(x)$ のグラフは下のようになる.



問題 10 次の初期値問題の解を求めよ.

- (1) $\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 6y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (2) $4\frac{d^2y}{dx^2} - 4\frac{dy}{dx} - 3y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 2$
- (3) $\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = 1$
- (4) $\frac{d^2y}{dx^2} + 6\frac{dy}{dx} + 9y = 0, \quad y(0) = -1, \quad y'(0) = 2$
- (5) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$
- (6) $2\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + y = 0, \quad y(0) = 1, \quad y'(0) = -1$

3.3 非斉次方程式の解法—演算子法

$f(x)$ を与えられた関数として

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = f(x) \quad (14)$$

を満たす関数 $y = y(x)$ を求めることを考える. 何らかの方法で (14) を満たす関数 $y = y_0(x)$ が一つ見つかったとしよう. $y(x)$ を (14) の一般解として,

$$y_1(x) = y(x) - y_0(x)$$

とおくと, $y = y_1(x)$ は斉次方程式

$$\frac{d^2y}{dx^2} + a\frac{dy}{dx} + by = 0 \quad (15)$$

を満たすことがわかる．逆に $y = y_1(x)$ を (15) の解とすれば， $y(x) = y_0(x) + y_1(x)$ は (14) の解であることも容易にわかる．すなわち

$$\boxed{\text{非斉次方程式の一般解}} = \boxed{\text{非斉次方程式の一つの解}} + \boxed{\text{斉次方程式の一般解}}$$

が成り立つ．(15) の一般解は既に求められているので，(14) の解を一つ求めればよい．そのためにはいくつかの方法があるが，ここではヘビサイド (Heaviside) により導入された演算子法を採用しよう．

微分作用素とは D の多項式のことであるが，演算子法では，それを拡張して D の有理式 (分数式) を扱う．ここでは，簡単のため扱う関数はすべて $C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に属するとする．また，微分作用素の表示において恒等写像を表す I は以下では省略することにする．

定義 2 一般の微分作用素 $P(D) = a_0 D^m + a_1 D^{m-1} + \cdots + a_{m-1} D + a_m$ と $f, u \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ に対して

$$u(x) = \frac{1}{P(D)} f(x)$$

とは， $P(D)u(x) = f(x)$ が成立することと定義する．

ただし，このような $u(x)$ は一通りではないので，厳密な意味では $\frac{1}{P(D)}$ は「写像」ではない．実際， $v(x) = \frac{1}{P(D)} f(x)$ も成立するための必要十分条件は $u(x) - v(x)$ が $\text{Ker } P(D)$ に属することである．従って，厳密には

$$u(x) \equiv \frac{1}{P(D)} f(x) \pmod{\text{Ker } P(D)}$$

と表すべきであるが ($\text{Ker } P(D)$ を法として合同という． $\text{Ker } P(D)$ に属する差を除いて一致するという意味) 演算子法の慣用に従って， $=$ を用いることにする．演算子法を用いる目的は，非斉次微分方程式 (14) の解を何でもよいから「1つ」求めることなので，このように等式の意味を拡大解釈して用いても以下の議論には支障がない．不定積分の計算の際に，途中では積分定数を無視して計算し，最後に積分定数を加えれば良いのと同じである．

例 19 $u(x) = \frac{1}{D} f(x) \Leftrightarrow u'(x) = f(x) \Leftrightarrow u(x) = \int f(x) dx$ である．ここで不定積分の積分定数は任意なので， $u(x)$ は一通りには定まらない．

例 20 α を実数とすると，1階線形微分方程式の解の公式より，

$$u(x) = \frac{1}{D - \alpha} f(x) \Leftrightarrow u'(x) - \alpha u(x) = f(x) \Leftrightarrow u(x) = e^{\alpha x} \int e^{-\alpha x} f(x) dx$$

命題 4 任意の $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{C}$ と任意の $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{C})$ について次が成立する．ただし以下の $=$ は厳密には $\text{Ker } (D - \alpha)(D - \beta)$ を法として合同という意味である．

$$(1) \frac{1}{(D - \alpha)(D - \beta)} f(x) = \frac{1}{D - \alpha} \left(\frac{1}{D - \beta} f(x) \right)$$

$$(2) \frac{1}{D-\alpha}(e^{\gamma x} f(x)) = e^{\gamma x} \frac{1}{D+(\gamma-\alpha)} f(x)$$

$$(3) \frac{1}{(D-\alpha)(D-\beta)} f(x) = \frac{1}{\alpha-\beta} \left(\frac{1}{D-\alpha} f(x) - \frac{1}{D-\beta} f(x) \right) \quad (\alpha \neq \beta \text{ のとき})$$

証明: (1) の右辺を $u(x)$ とおくと,

$$(D-\alpha)u(x) = \frac{1}{D-\beta} f(x) \quad \text{よって} \quad (D-\beta)((D-\alpha)u(x)) = f(x).$$

微分作用素の積 (合成) の定義より

$$((D-\alpha)(D-\beta))u(x) = ((D-\beta)(D-\alpha))u(x) = (D-\beta)((D-\alpha)u(x)) = f(x).$$

$$(2) v(x) = \frac{1}{D+(\gamma-\alpha)} f(x) \text{ とおくと,}$$

$$\begin{aligned} (D-\alpha)(e^{\gamma x} v(x)) &= (e^{\gamma x} v(x))' - \alpha e^{\gamma x} v(x) = e^{\gamma x} (v'(x) + (\gamma-\alpha)v(x)) \\ &= e^{\gamma x} (D+(\gamma-\alpha))v(x) = e^{\gamma x} f(x). \end{aligned}$$

よって

$$\frac{1}{D-\alpha}(e^{\gamma x} f(x)) = e^{\gamma x} v(x) = e^{\gamma x} \frac{1}{D+(\gamma-\alpha)} f(x).$$

(3) の右辺を $u(x)$ とおくと,

$$\begin{aligned} ((D-\alpha)(D-\beta))u(x) &= \frac{1}{\alpha-\beta} \left\{ (D-\beta) \left((D-\alpha) \frac{1}{D-\alpha} f(x) \right) \right. \\ &\quad \left. - (D-\alpha) \left((D-\beta) \frac{1}{D-\beta} f(x) \right) \right\} \\ &= \frac{1}{\alpha-\beta} \{ (D-\beta)f(x) - (D-\alpha)f(x) \} = f(x) \end{aligned}$$

よって (3) が成立する. \square

命題 5 α を 0 と異なる複素数とするととき, 任意の 多項式 $f(x)$ に対して,

$$\begin{aligned} \frac{1}{D-\alpha} f(x) &= - \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2} D + \frac{1}{\alpha^3} D^2 + \cdots \right) f(x) \\ &= -\frac{1}{\alpha} f(x) - \frac{1}{\alpha^2} f'(x) - \frac{1}{\alpha^3} f''(x) - \cdots \end{aligned}$$

が成立する. ここで $f(x)$ が k 次以下の多項式とすると, $D^{k+1} f(x) = f^{(k+1)}(x) = 0$ であるから, 右辺の無限級数は実は有限個の項の和となる.

証明: t を変数, k を自然数とするととき,

$$(1-t)(1+t+\cdots+t^k) = 1-t^{k+1}$$

が成立する. t に $\frac{1}{\alpha}D$ を代入すると微分作用素として,

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}D\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha}D + \cdots + \frac{1}{\alpha^k}D^k\right) = 1 - \frac{1}{\alpha^{k+1}}D^{k+1}$$

が成立する. 多項式 $f(x)$ の次数が k 以下であるとすると, $D^{k+1}f(x) = 0$ であるから,

$$\left(1 - \frac{1}{\alpha}D\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha}D + \cdots + \frac{1}{\alpha^k}D^k\right) f(x) = \left(1 - \frac{1}{\alpha^{k+1}}D^{k+1}\right) f(x) = f(x)$$

よって

$$\begin{aligned} (D - \alpha) \left(-\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}D - \cdots - \frac{1}{\alpha^{k+1}}D^k\right) f(x) \\ = \left(1 - \frac{1}{\alpha}D\right) \left(1 + \frac{1}{\alpha}D + \cdots + \frac{1}{\alpha^k}D^k\right) f(x) = f(x) \end{aligned}$$

これは $\frac{1}{D - \alpha}f(x) = -\left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}D + \cdots + \frac{1}{\alpha^{k+1}}D^k\right) f(x)$ を意味する.

$D^{k+1}f(x) = D^{k+2}f(x) = \cdots = 0$ に注意すれば, 結論を得る. \square

命題 4 の (1) と例 20 により, 非斉次方程式 (14) の一つの解は

$$\begin{aligned} \frac{1}{D - \alpha} \left(\frac{1}{D - \beta}f(x)\right) &= \frac{1}{D - \alpha} \left(e^{\beta x} \int e^{-\beta x} f(x) dx\right) \\ &= e^{\alpha x} \int e^{(\beta - \alpha)x} \left(\int e^{-\beta x} f(x) dx\right) dx \end{aligned}$$

と不定積分を 2 回実行することにより求められる. この計算は煩雑であるが, 非斉次方程式 (14) の右辺 $f(x)$ が $f(x) = p(x)e^{cx}$ ($p(x)$ は多項式, c は定数) という形の場合には, (14) の一つの解を命題 4 の (2), (3) と命題 5 を用いて効率的に求めることができる. 以下, 例で説明しよう.

例 21

$$\frac{d^2y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = x$$

の一般解を求めよう. 特性方程式は $\lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda - 2)(\lambda + 1) = 0$ であるから, 対応する微分作用素は $P(D) = D^2 - D - 2 = (D - 2)(D + 1)$ である. 命題 4 の (3) と命題 5 より, 一つの解として,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(D)}x &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D - 2}x - \frac{1}{D + 1}x\right) \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4}D + \frac{1}{8}D^2 + \cdots\right) x - \frac{1}{3}(1 - D + D^2 - \cdots)x \\ &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\right) - \frac{1}{3}(x - 1) = -\frac{1}{2}x + \frac{1}{4} \end{aligned}$$

を得る．従って一般解は， C_1, C_2 を任意定数として

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}$$

と表される．

例 22

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{dy}{dx} - 2y = x^2 e^x$$

の一般解を求めよう．前の例と同じく $P(D) = D^2 - D - 2 = (D - 2)(D + 1)$ とおく．命題 4 の (3) と (2) および命題 5 を用いると，一つの解として，

$$\begin{aligned} \frac{1}{P(D)}(x^2 e^x) &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{D-2}(x^2 e^x) - \frac{1}{D+1}(x^2 e^x) \right) \\ &= \frac{1}{3} e^x \left(\frac{1}{D-1} x^2 - \frac{1}{D+2} x^2 \right) \\ &= -\frac{1}{3} e^x (1 + D + D^2 + \dots) x^2 + \frac{1}{3} e^x \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{4} D - \frac{1}{8} D^2 + \dots \right) x^2 \\ &= -\frac{1}{3} e^x (x^2 + 2x + 2) + \frac{1}{3} e^x \left(-\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \right) \\ &= \left(-\frac{1}{2} x^2 - \frac{1}{2} x - \frac{3}{4} \right) e^x \end{aligned}$$

を得る．従って一般解は

$$y(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-x} - \left(\frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{2} x + \frac{3}{4} \right) e^x$$

である (C_1, C_2 は任意定数)．

例 23

$$\frac{d^2 y}{dx^2} - 2 \frac{dy}{dx} + y = (x + 1) e^x$$

の一つの解は，

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D-1)^2}((x+1)e^x) &= \frac{1}{D-1} \left(\frac{1}{D-1}((x+1)e^x) \right) = \frac{1}{D-1} \left(e^x \frac{1}{D}(x+1) \right) \\ &= \frac{1}{D-1} \left(e^x \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) \right) = e^x \frac{1}{D} \left(\frac{1}{2} x^2 + x \right) = e^x \left(\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 \right) \end{aligned}$$

よって一般解は

$$y(x) = \left(\frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{2} x^2 + C_1 x + C_2 \right) e^x$$

である (C_1, C_2 は任意定数)．

例 24

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = xe^{-x}$$

の一つの解は, 命題 4 の (1),(2) と命題 5 を用いて

$$\begin{aligned} \frac{1}{(D-1)^2}(e^{-x}) &= \frac{1}{D-1} \left(\frac{1}{D-1}(e^{-x}x) \right) = \frac{1}{D-1} \left(e^{-x} \frac{1}{D-2}x \right) \\ &= \frac{1}{D-1} \left(e^{-x} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}D - \dots \right) x \right) = \frac{1}{D-1} \left(e^{-x} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \right) \\ &= e^{-x} \frac{1}{D-2} \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) = e^{-x} \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}D - \dots \right) \left(-\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} \right) \\ &= \frac{1}{4}(x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

よって一般解は

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^x + \frac{1}{4}(x+1)e^{-x}$$

である (C_1, C_2 は任意定数) .

特に $f(x) = ce^{\gamma x}$ (c は定数) かつ $P(\lambda) \neq 0$ ならば次の命題を用いると更に簡単に計算できる .

命題 6 $P(D) = D^2 + aD + b$ のとき, 任意の複素数 γ に対して

$$P(D)e^{\gamma x} = P(\gamma)e^{\gamma x}$$

が成立する . 特に $P(\gamma) \neq 0$ ならば $\frac{1}{P(D)}e^{\gamma x} = \frac{1}{P(\gamma)}e^{\gamma x}$.

証明: $De^{\gamma x} = \gamma e^{\gamma x}$ であるから ,

$$P(D)e^{\gamma x} = \gamma^2 e^{\gamma x} + a\gamma e^{\gamma x} + be^{\gamma x} = P(\gamma)e^{\gamma x}$$

従って $P(\gamma) \neq 0$ ならば $P(D)\left(\frac{1}{P(\gamma)}e^{\gamma x}\right) = e^{\gamma x}$ が成立するから , $\frac{1}{P(D)}e^{\gamma x} = \frac{1}{P(\gamma)}e^{\gamma x}$. \square

例 25

$$\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y = e^{-x}$$

の一般解を求めよう . $P(D) = D^2 - 2D + 1$, $P(-1) = 4 \neq 0$ であるから , 命題 6 より

$$y(x) = \frac{1}{P(D)}e^{-x} = \frac{1}{P(-1)}e^{-x} = \frac{1}{4}e^{-x}$$

が一つの解であり , $P(\lambda) = (\lambda - 1)^2$ であるから , 一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$y(x) = (C_1x + C_2)e^x + \frac{1}{4}e^{-x}$$

と表される .

一般に, $f(x) = p_1(x)e^{a_1x} + \cdots + p_m(x)e^{a_mx}$ ($p_1(x), \dots, p_m(x)$ は多項式) という形の場合は, $P(D)y_j(x) = p_j(x)e^{a_jx}$ を満たす関数 $y_j(x)$ をそれぞれの j について求めれば $P(D)$ が線形写像であることから

$$P(D)(y_1(x) + \cdots + y_m(x)) = f(x)$$

となる.

例 26

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} = e^{-x} + 2e^{-2x}$$

の一般解を求めよう. $P(D) = D^2 + D = D(D+1)$ とおいて, まず $P(D)y_1(x) = e^{-x}$ をみたす $y_1(x)$ を一つ求める ($P(-1) = 0$ なので命題 6 は適用できない.)

$$\begin{aligned} y_1(x) &= \frac{1}{P(D)}e^{-x} = \frac{1}{D}e^{-x} - \frac{1}{D+1}e^{-x} = e^{-x} \frac{1}{D-1}1 - e^{-x} \frac{1}{D}1 \\ &= -e^{-x}(1 + D + D^2 + \cdots)1 - e^{-x}x = -(x+1)e^{-x} \end{aligned}$$

また $P(D)y_2(x) = 2e^{-2x}$ をみたす一つの $y_2(x)$ は, $P(-2) = 2$ と命題 6 より

$$y_2(x) = \frac{1}{P(-2)}2e^{-2x} = e^{-2x}$$

である. よって $y(x) = y_1(x) + y_2(x) = -(x+1)e^{-x} + e^{-2x}$ は与えられた微分方程式の一つの解である. 従って一般解は

$$y(x) = C_1e^{-x} + C_2 - (x+1)e^{-x} + e^{-2x} = (-x + C'_1)e^{-x} + e^{-2x} + C_2$$

である (C_1, C_2 は任意定数, $C'_1 = C_1 - 1$ とおいた.)

問題 11 次の微分方程式の一般解を求めよ.

$$\begin{aligned} (1) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y &= x & (2) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} &= xe^{2x} \\ (3) \quad \frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} + y &= x + 1 & (4) \quad \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y &= e^{-2x} + x \end{aligned}$$

次に (14) の右辺 $f(x)$ が $f(x) = p(x)e^{ax} \cos bx$ または $f(x) = p(x)e^{ax} \sin bx$ ($p(x)$ は多項式, a, b は実数の定数) という形のときを考察しよう. この場合は $f(x) = p(x)e^{(a+ib)x}$ として (14) の一つの解 $z(x)$ を求めて, その実部または虚部をとればよい. 実際,

$$\begin{aligned} P(D)(\operatorname{Re} z(x)) &= \operatorname{Re}(P(D)z(x)) = \operatorname{Re}(p(x)e^{(a+ib)x}) = p(x)e^{ax} \cos bx, \\ P(D)(\operatorname{Im} z(x)) &= \operatorname{Im}(P(D)z(x)) = \operatorname{Im}(p(x)e^{(a+ib)x}) = p(x)e^{ax} \sin bx \end{aligned}$$

が成立する.

例 27 次の初期値問題を考えよう.

$$\frac{dx^2}{dt^2} + 2\frac{dx}{dt} + 2x = \cos \omega t, \quad x(0) = x'(0) = 0.$$

これは, 例 18 において, $a = 2, b = 2$ として角周波数 $\omega > 0$ の周期的な外力 $\cos \omega t$ を加えたときのおもりの運動を表している. $\cos \omega t = \operatorname{Re}(e^{i\omega t})$ であるから,

$$\frac{d^2z}{dt^2} + 2\frac{dz}{dt} + 2z = e^{i\omega t}$$

となるような複素数値関数 $z = z(t)$ を求めて, $x(t) = \operatorname{Re} z(t)$ とすればよい. $D = \frac{d}{dt}$ として, $P(D) = D^2 + 2D + 2$ とおくと, $P(i\omega) = 2 - \omega^2 + 2i\omega \neq 0$ であるから, 命題 6 を用いて

$$z(t) = \frac{1}{P(i\omega)} e^{i\omega t} = \frac{1}{2 - \omega^2 + 2i\omega} e^{i\omega t} = \frac{2 - \omega^2 - 2i\omega}{4 + \omega^4} e^{i\omega t}$$

とすればよい. よって

$$x(t) = \operatorname{Re} z(t) = \frac{2 - \omega^2}{4 + \omega^4} \cos \omega t + \frac{2\omega}{4 + \omega^4} \sin \omega t$$

が最初の微分方程式の一つの解となる. 特性根は $-1 \pm i$ だから一般解は C_1, C_2 を任意定数として

$$x(t) = e^{-t}(C_1 \cos t + C_2 \sin t) + \frac{2 - \omega^2}{4 + \omega^4} \cos \omega t + \frac{2\omega}{4 + \omega^4} \sin \omega t$$

と表される. 初期条件 $x(0) = x'(0) = 0$ を満たす解は

$$x'(t) = e^{-t}(-C_1 \cos t - C_2 \sin t - C_1 \sin t + C_2 \cos t) - \frac{\omega(2 - \omega^2)}{4 + \omega^4} \sin \omega t + \frac{2\omega^2}{4 + \omega^4} \cos \omega t$$

より, $C_1 = \frac{\omega^2 - 2}{4 + \omega^4}, C_2 = -\frac{2 + \omega^2}{4 + \omega^4}$ となるので,

$$x(t) = \frac{1}{4 + \omega^4} e^{-t} \{(\omega^2 - 2) \cos t - (2 + \omega^2) \sin t\} + \frac{2 - \omega^2}{4 + \omega^4} \cos \omega t + \frac{2\omega}{4 + \omega^4} \sin \omega t$$

である. 最初の e^{-t} の掛かった項は $t \rightarrow \infty$ とすると 0 に収束するから, おもりの運動は, 時間がたつと外力と同じ周波数の単振動に近づくことがわかる. この単振動の振幅 $a(\omega)$ は, 三角関数の合成の公式から

$$a(\omega) = \sqrt{\left(\frac{2 - \omega^2}{4 + \omega^4}\right)^2 + \left(\frac{2\omega}{4 + \omega^4}\right)^2} = \frac{1}{\sqrt{4 + \omega^4}}.$$

よって $a(\omega)$ は ω について単調減少で $\lim_{\omega \rightarrow \infty} a(\omega) = 0$ となる. これは周波数の高い振動はばねに吸収されて影響が少なくなることを意味している (左下は $\omega = \pi$, 右下は $\omega = 2\pi$ のときの $x(t)$)

例 28

$$\frac{d^2y}{dx^2} + 2\frac{dy}{dx} + 2y = x \sin x$$

の一般解を求めよう．まず

$$\frac{d^2z}{dx^2} + 2\frac{dz}{dx} + 2z = xe^{ix}$$

を満たす複素数値の解 $z = z(x)$ を求めればよい． $P(D) = D^2 + 2D + 2$ とおくと， $P(\lambda) = (\lambda + 1 - i)(\lambda + 1 + i)$ であるから，

$$\begin{aligned} z(x) &= \frac{1}{P(D)}(xe^{ix}) = \frac{1}{2i} \left(\frac{1}{D+1-i} - \frac{1}{D+1+i} \right) (xe^{ix}) \\ &= \frac{e^{ix}}{2i} \left(\frac{1}{D+1} - \frac{1}{D+1+2i} \right) x \\ &= \frac{e^{ix}}{2i} (1 - D + \dots)x - \frac{e^{ix}}{2i} \left(\frac{1}{1+2i} - \frac{1}{(1+2i)^2} D + \dots \right) x \\ &= \frac{e^{ix}}{2i} (x-1) - \frac{e^{ix}}{2i} \left(\frac{1}{1+2i} x - \frac{1}{(1+2i)^2} \right) = \left(\frac{1-2i}{5} x + \frac{-2+14i}{25} \right) e^{ix} \end{aligned}$$

より

$$y(x) = \operatorname{Im} z(x) = \left(-\frac{2}{5}x + \frac{14}{25} \right) \cos x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25} \right) \sin x$$

が一つの解である．よって一般解は

$$y(x) = e^{-x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x) + \left(-\frac{2}{5}x + \frac{14}{25} \right) \cos x + \left(\frac{1}{5}x - \frac{2}{25} \right) \sin x$$

問題 12 次の微分方程式の一般解を求めよ．

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + 4\frac{dy}{dx} + 5y = \cos x$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = x \cos x$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{-x} \cos x$

問題 13 次の初期値問題の解を求めよ．

(1) $\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} - 6y = x,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(2) $\frac{d^2y}{dx^2} - 2\frac{dy}{dx} = xe^{2x},$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 1$

(3) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = \sin x,$

$y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$

(4) $\frac{d^2y}{dx^2} + y = e^{-x} \cos x,$

$y(0) = 1, \quad y'(0) = 0$